

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

**GRAFICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC TŘETÍHO A
VYŠŠÍCH STUPŇŮ - HISTORICKÝ POHLED**
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Orosová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D. - KMT

Plzeň 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 29. června 2018

.....
vlastnoruční podpis

Ráda bych poděkovala vedoucí mé bakalářské práce paní Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za poskytnutí užitečných rad, věcných připomínek a za pomoc při zpracování této práce.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

Úvod.....	2
1 TEORETICKÝ ZÁKLAD	4
1.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE A VĚTY O POLYNOMECH	4
1.1.1 Definice polynomu (mnohočlenu)	4
1.1.2 Definice rovnosti polynomů	4
1.1.3 Definice stupně polynomu	4
1.1.4 Definice nulového polynomu	4
1.1.5 Definice kořenu polynomu.....	4
1.1.6 Základní věta algebry	4
1.2 PARABOLA.....	5
1.2.1 Definice.....	5
1.2.2 Konstrukce paraboly	6
1.3 HYPERBOLA	8
1.3.1 Definice.....	8
1.3.2 Konstrukce hyperboly	9
2 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH A KVADRATICKÝCH ROVNIC.....	13
2.1 LINEÁRNÍ ROVNICE	13
2.2 KVADRATICKÉ ROVNICE	17
2.3 ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE POMOCÍ KRUŽNICE A PŘÍMKY	21
3 ŘEŠENÍ ROVNIC 3. STUPNĚ.....	25
3.1 RYZE KUBICKÁ ROVNICE $x^3 = 2a^3$ (PROBLÉM ZDVOJENÍ KRYCHLE)	25
3.1.1 Archytas z Tarentu (430 l př. n. l.)	26
3.1.2 Menaechmus (+320 l. př. n. l.)	29
3.1.3 Descartes (1596-1650).....	33
3.1.4 Grégoire (1668).....	35
3.1.5 Platon (429-347 l. př. n. l.)	37
3.1.6 Eratosthenés z Kyrény.....	40
3.1.7 Přibližné konstrukce.....	42
3.2 OBECNÁ KUBICKÁ ROVNICE POMOCÍ TRISEKCE ÚHLU	50
3.2.1 Hippiás z Élidy (5. stol. př. n. l.)	52
3.2.2 Metoda vkládání	55
3.2.3 Pappus z Alexandrie (4. století n. l.)	57
3.3 ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ROVNIC POMOCÍ KŘIVEK VYŠŠÍCH STUPŇŮ	59
3.3.1 Kubická parabola	59
3.3.2 Dioklova kisoida	61
4 ŘEŠENÍ ROVNIC ČTVRTÉHO STUPNĚ	63
ZÁVĚR	65
RESUMÉ.....	66
SEZNAM LITERATURY	66
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ	68

Úvod

V této práci se pokusím prozkoumat, popsat a replikovat metody našich předků matematiků a jejich vynalézavé způsoby řešení algebraických rovnic třetího a vyšších stupňů pomocí grafických metod. Detailně se budu věnovat především řešení kubických problémů, tedy algebraickým rovnicím třetího stupně. Algebraickým rovnicím vyšších řádů se také nevyhnu, i když v jejich případě nebudu zabíhat do přílišných detailů.

Grafických řešení algebraických rovnic třetího stupně jsem v literatuře našla hned několik a nabyla jsem dojmu, že nalezení elegantního řešení těchto rovnic naše předky opravdu trápilo, protože s různými metodami, pomůckami a dokonce pomocnými stroji, přicházejí matematici v průřezu celých našich známých dějin matematiky již od starověku. Téměř každý, kdo v matematice a geometrii něco znamenal, přišel s vlastním návrhem řešení kubických rovnic.

Existují tři základní starověké problémy, kterými se matematika zabývala od starověku až po novověk. Dva z nich podrobně provedeme později, protože se jedná o kubické rovnice, a těmi jsou Delický problém, jinak zvaný problém zdvojené krychle a trisekce úhlu. Posledním speciálním problémem, který trápil matematiky stovky let, je kvadratura kruhu, tedy nalezení čtverce o stejném obsahu jako má zadaná kružnice. Tím se v této práci zabývat detailně nebudu, už proto, že tato úloha se nepodařila starověkým geometrům a matematikům uspokojivě vyřešit.

Z dnešního úhlu pohledu se vám můžou zdát tyto metody úsměvné. Obrovský pokrok ve výpočetní technice, numerických metodách, ale i v algebře jako takové, učinil tyto metody starobylým reliktem. Nikdo dnes nebude konstruovat na papíře kuželosečky nebo složitější křivky či tělesa, aby vypočetl $\sqrt[3]{2}$. Vezme kalkulačku a výsledek vidíme do několika vteřin. Při čtení této práce se tedy pokuste vžít do mysli starověkého matematika, jehož jedinými nástroji jsou papír a tužka, hliněná deska a křída nebo pískoviště, hůl a provázek. Po čase zjistíte, že i naprosto triviální kubický problém, jako je třeba *Delický problém*, už není zase tak jednoduché dopočítat a to i přes veškeré znalosti moderní matematiky (logaritmické pravítko a tabulky jsou rovněž nepřípustné pomůcky).

Naši předci se v těchto případech spoléhali primárně na geometrii a deskriptivu. Jejich představivost a vynalézavost mě opravdu velmi příjemně překvapila a doufám, že po přečtení této práce nabydete stejného dojmu.

V tuto chvíli je nutné podotknout, že se v této práci nebudu zabývat konkrétními typy grafických nebo deskriptivních konstrukcí, které jsou sice velice zajímavé, ale nejsou předmětem této práce a dávní matematici je evidentně uměli používat stejně dobře, jako my dnes počítače a kalkulačky. V teoretickém úvodu sice pro pořádek uvedu několik používaných grafických konstrukcí kuželoseček, speciálně hyperboly a paraboly, to však rozhodně nepokryje všechny křivky a plochy použité v této práci. U každé metody se budu věnovat postupu, který vede k řešení zadaného problému, nikoliv tomu, jak správně graficky zkonstruovat parabolu, hyperbolu či anuloid. Současně s tímto popisem konstrukce se budu snažit pomocí algebraických rovnic ukázat, že tento postup opravdu vede k požadovanému řešení.

Částečně se dotknu i přibližných metod řešení, tedy metod, které nejsou schopny vyprodukovat přesné řešení, které lze algebraicky ověřit, ale řešení natolik přesné, že grafickou konstrukcí na papíře o moc lepší přesnosti dosáhnout nelze. Pokud se zamyslíme nad tím, že každá část grafické konstrukce rýsované na papír generuje určitou chybu, pak přibližná konstrukce o několika málo krocích může být ve výsledku mnohem přesnější než přesná konstrukce o padesáti krocích. Vzhledem k tomu, že jsem všechny grafické konstrukce prováděla v počítači, tak na problém kumulace chyb a nepřesností nenarazíme.

U každé metody nejprve provedu obecný popis konstrukce a poté si toto řešení vyzkoušíme na jednoduchém názorném příkladu. U jednodušších konstrukcí provedu i algebraické ověření správnosti provedené grafické konstrukce.

Všechna řešení a postupy jsou doprovázena obrázky zobrazující jednotlivé grafické konstrukce. Většina grafických konstrukcí je provedených v programu GeoGebra, který je velice vhodný pro geometrické konstrukce. Pro modelování prostorových útvarů a v případě některých úloh na posouvání byl použit software z rodiny CAD – Bentley Microstation.

1 TEORETICKÝ ZÁKLAD

1.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE A VĚTY O POLYNOMECH

1.1.1 DEFINICE POLYNOMU (MNOHOČLENU)

Nechť n je přirozené číslo a necht' a_0, a_1, \dots, a_n jsou reálná resp. komplexní čísla. Funkce $P(x)$, kterou lze definovat pro všechna (reálná, resp. komplexní) čísla x předpisem

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i},$$

se nazývá mnohočlen (v jedné proměnné x s reálnými, resp. komplexními koeficienty). Místo mnohočlen se také říká polynom nebo celá racionální funkce. Čísla a_0, a_1, \dots, a_n se nazývají koeficienty mnohočlenu $P(x)$.

1.1.2 DEFINICE ROVNOSTI POLYNOMŮ

Dva mnohočleny $P(x), Q(x)$ se sobě rovnají [označení $P(x) = Q(x)$ nebo určitěji $P(x) \equiv Q(x)$], platí-li pro každé číslo a rovnost $P(a) = Q(a)$.

1.1.3 DEFINICE STUPNĚ POLYNOMU

Stupněm mnohočlenu $P(x)$ nazýváme nejvyšší mocninu proměnné x ve výrazu

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i},$$

u níž je nenulový koeficient. Je-li v tomto výrazu a_0 různé od nuly (zapisujeme $a_0 \neq 0$), pak $P(x)$ je n -tého stupně.

1.1.4 DEFINICE NULOVÉHO POLYNOMU

Mnohočlen, jehož všechny koeficienty jsou rovny nule, se nazývá nulový. Nulový mnohočlen nemá stupeň. Je-li mnohočlen $P(x)$ nulový, píšeme $P(x) = 0$ nebo určitěji $P(x) \equiv 0$. Není-li $P(x)$ nulový, píšeme $P(x) \neq 0$ nebo $P(x) \not\equiv 0$.

1.1.5 DEFINICE KOŘENU POLYNOMU

Kořenem (*nulovým bodem*) mnohočlenu $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ nazýváme takové (obecně komplexní) číslo α , pro něž $P(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^{n-i} = 0$.

1.1.6 ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

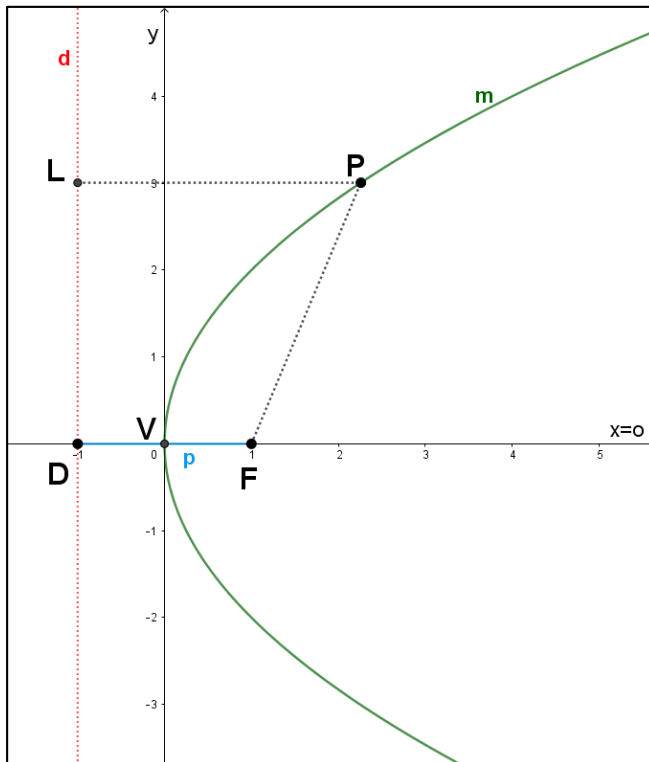
Každý mnohočlen stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen.

[REKTORYS, 2000]

1.2 PARABOLA

1.2.1 DEFINICE

Parabolu nazýváme množinou právě těch bodů roviny, které mají stejné vzdálenosti od pevného body F (ohnisko paraboly) této roviny a od pevné přímky d (řídící přímka paraboly) této roviny, přičemž přímka d neprochází bodem F . [BARTSCH, 1996]



Na obrázku vidíme parabolu v základní poloze:

$V = [m; n]$ – vrchol paraboly

F – ohnisko paraboly

d – řídící přímka

$o = \overrightarrow{FV}$ – osa paraboly

$p = |DF|$ – poloparametr paraboly

$2p = 2|DF|$ – parametr paraboly

D – je bod na průsečíku osy paraboly o a řídící přímky d

PF – ohniskový průvodič

PL – řídící průvodič

$$|DV| = |VF| = \frac{1}{2}p$$

Obrázek 1: Parabola v základní poloze
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kanonické tvary rovnice paraboly v základní poloze:

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \quad (\text{osa } o \parallel x \text{ a } V = [m; n])$$

$$y^2 = 2px \quad (\text{osa } o = x \text{ a } V = [0; 0])$$

Ohnisko takovéto paraboly je pak v bodě: $F = \left[\frac{p}{2}; 0\right]$.

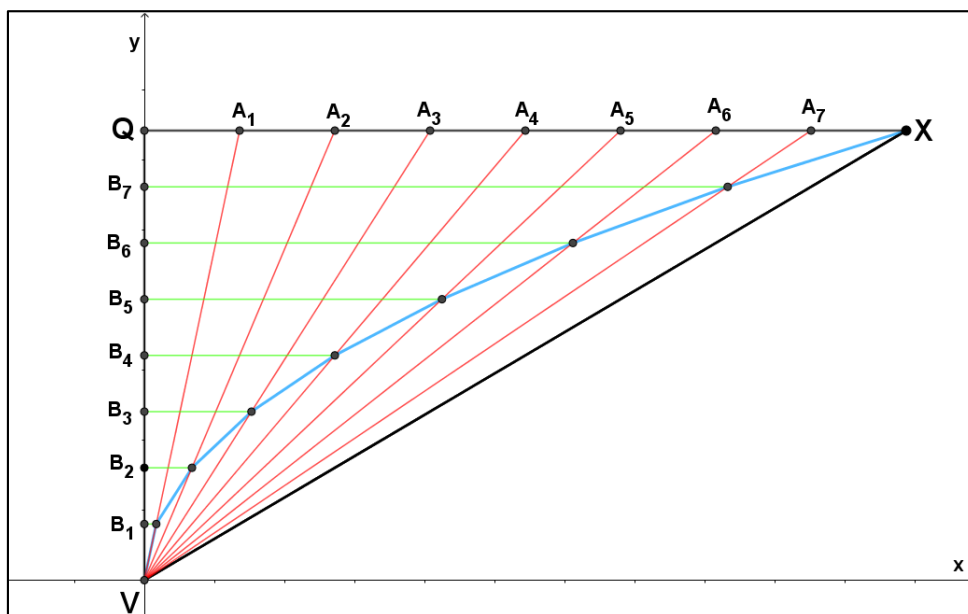
Znaménko poloparametru paraboly p nám dále říká, zda je parabola otevřená doprava ($p > 0$) či doleva ($p < 0$).

1.2.2 KONSTRUKCE PARABOLY

1) Mějme zadány souřadnicové osy x a y , vrchol paraboly $V = [m, n]$ a bod paraboly $X[x, y]$.

Postup:

- Bodem P vedeme rovnoběžnou přímku m k ose x . Průsečím přímky m a osy y označíme jako bod Q .
- Nyní rozdělíme úsečku PQ dělicími body, které jsou od sebe stejně vzdáleny a označme je jako: $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$, kde n je libovolné celé číslo. A úsečku VQ rozdělíme dělicími body $B_1, B_2, B_3 \dots, B_n$, které mají mezi sebou stejné vzdálenosti.
- Vytvoříme úsečky s počátkem v bodě V a koncovými body v $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$. V obrázku zobrazeny červeně.
- A přímky z bodů $B_1, B_2, B_3 \dots, B_n$ rovnoběžné s osou x , které jsou v obrázku zobrazeny zeleně.
- Naše hledané body paraboly leží na průsečících těchto úseček a rovnoběžek, právě tak že pro úsečku z A_1 nás zajímá průsečí s rovnoběžkou z B_1 , pro úsečku z A_2 nás zajímá průsečí s rovnoběžkou z B_2 , atd.

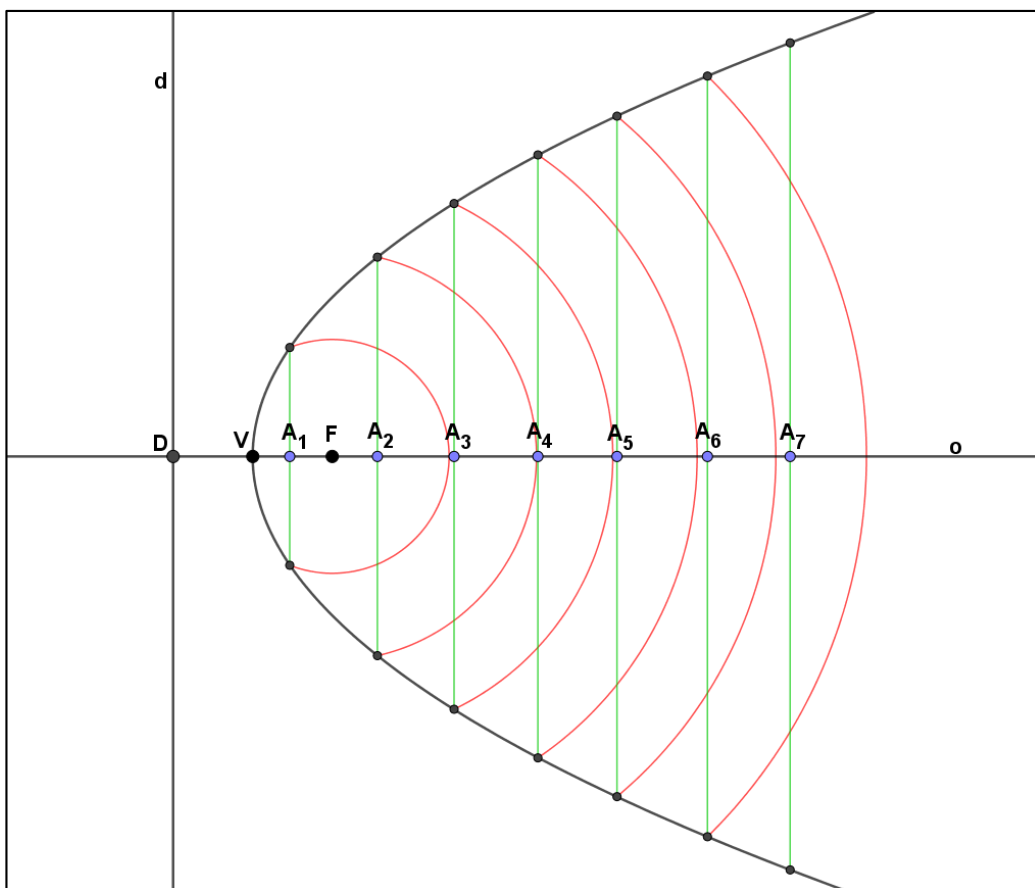


Obrázek 2: Konstrukce paraboly se zadaným vrcholem V , osami x, y a bodem paraboly P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

- 2) Mějme zadáno ohnisko paraboly $F = \left[\frac{p}{2}; 0\right]$ a řídicí přímka d . Známe tedy i vzdálenost ohniska F a řídicí přímky d , která je rovna poloparametru paraboly p .

Postup:

- Z definice paraboly víme, že vrchol V leží na středu úsečky FD .
- Sestrojíme přímku o (osu paraboly), která bude procházet ohniskem paraboly $F = \left[\frac{p}{2}; 0\right]$ a bude kolmá k řídicí přímce d . Vzniklý průsečík označíme jako bod D .
- Nyní si na přímce o zvolme libovolné body $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$, kde n je libovolné celé číslo. V těchto bodech sestrojíme k přímce o kolmice.
- V následujícím kroku sestrojíme n kružnic, které mají střed v ohnisku paraboly F a poloměry $|DA_1|, |DA_2|, |DA_3| \dots, |DA_n|$.
- Průsečíky těchto kružnic a kolmic jsou hledané body paraboly.

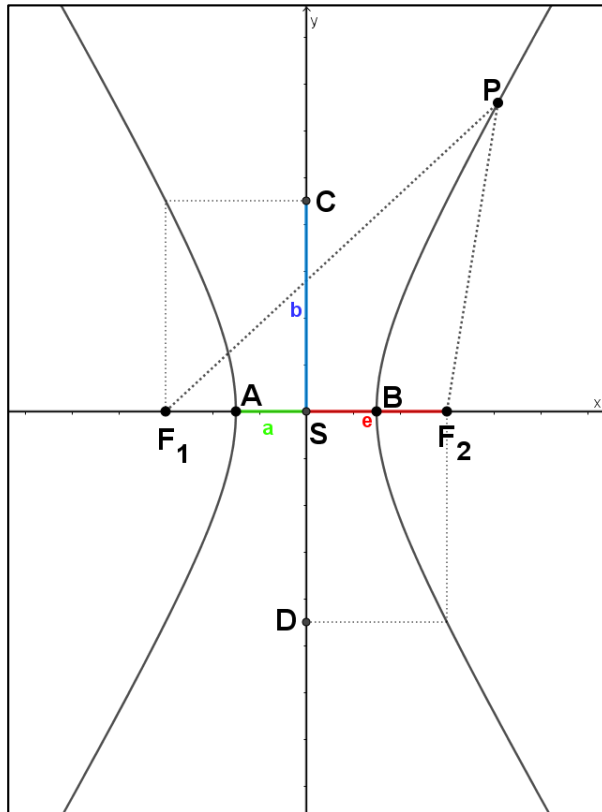


Obrázek 3: Konstrukce paraboly se zadaným ohniskem F a řídicí přímkou d .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

1.3 HYPERBOLA

1.3.1 DEFINICE

Hyperbolou nazýváme množinu právě těch bodů P v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (ohniska hyperboly) konstantní rozdíl $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ vzdáleností, přičemž je $0 < 2a < 2e = |F_1F_2|$. [BARTSCH, 1996]



Na obrázku vidíme hyperbolu v základní poloze:

$S = [m; n]$ – střed hyperboly

$P = [x; y]$ – bod na hyperbole

F_1, F_2 – ohniska hyperboly, $|F_1F_2| = 2e$

A, B – hlavní vrcholy, $|AB| = 2a$

C, D – vedlejší vrcholy, $|CD| = 2b$

PF_1, PF_2 – průvodiče hyperboly

$|PF_1| - |PF_2| = 2a$

$|SA| = |SB| = a$

$|SC| = |SD| = b$

Obrázek 4: Hyperbola v základní poloze.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kanonický tvar rovnice hyperboly s reálnou osou (úsečkou AB) v ose x

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Pokud má hyperbola střed v bodě $S = [0; 0]$ získáme tvar rovnice: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

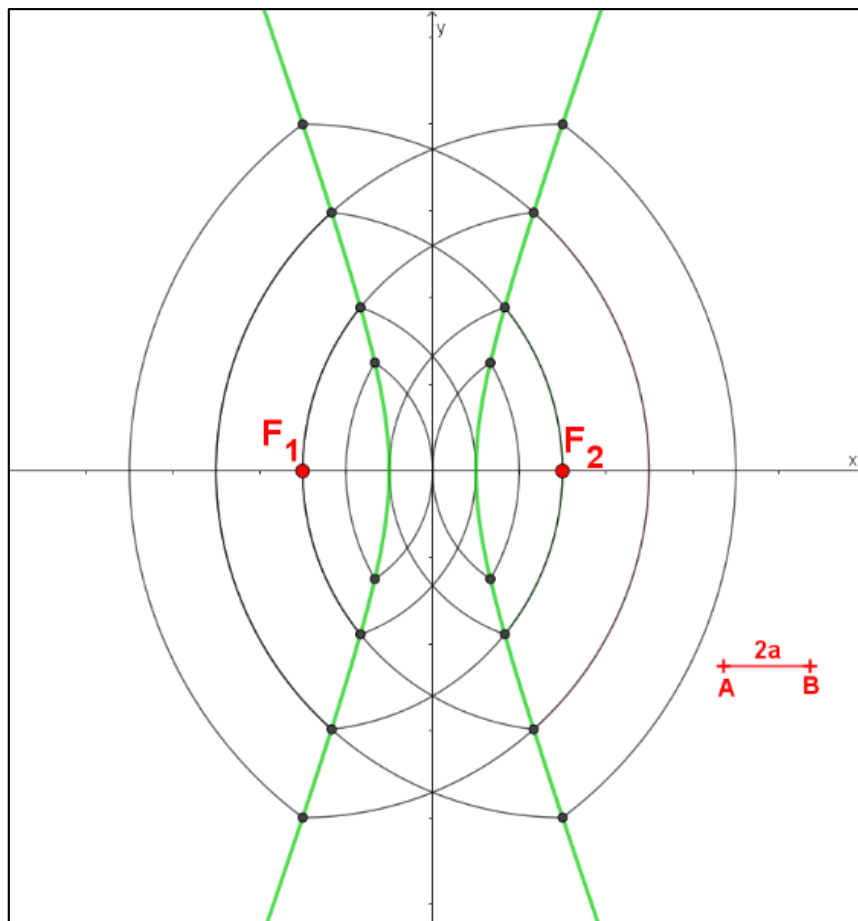
Rovnice asymptot hyperboly: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

1.3.2 KONSTRUKCE HYPERBOLY

1) Mějme zadány ohniska F_1, F_2 a délku hlavní osy $|AB| = 2a$.

Postup:

- Sestrojme kružnice l_1, l_2 se středy v bodech F_1, F_2 a libovolným poloměrem p .
- Nyní sestrojme kružnice k_1, k_2 se středy v bodech F_1, F_2 a poloměrem $r = 2a + p$.
- Získání čtyři průsečíky těchto 4 kružnic jsou hledané body hyperboly.
- Při změně poloměru p , získáme další body hyperboly.

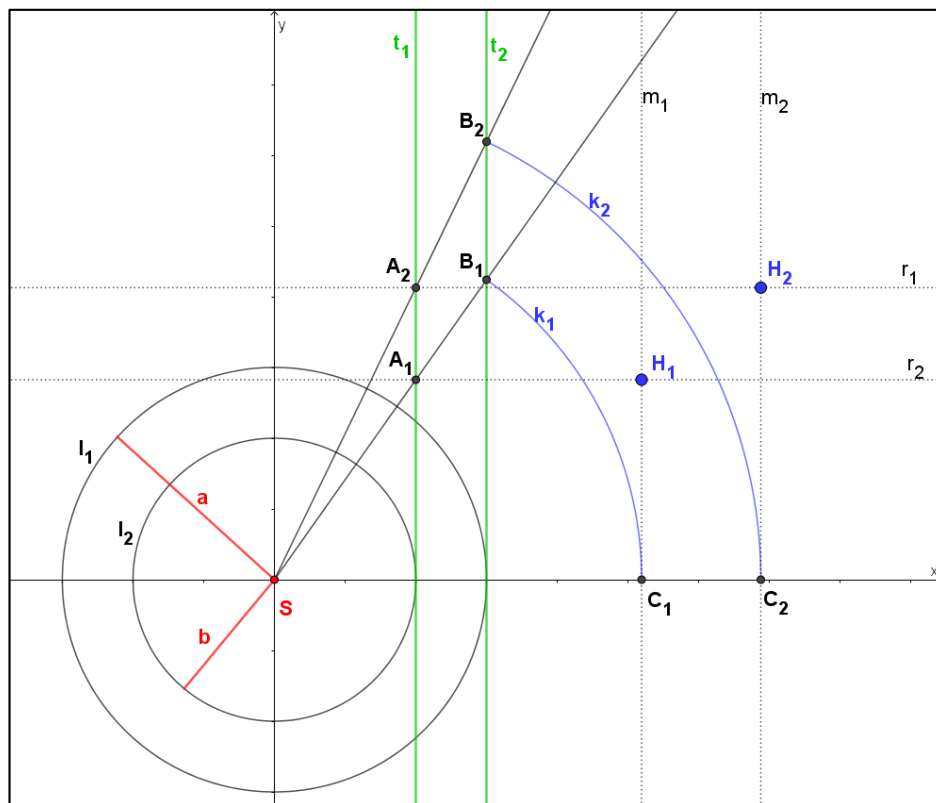


Obrázek 5: Konstrukce hyperboly se zadanými ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní osy $|AB| = 2a$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

2) Mějme zadány délky poloos $|AS| = |SB| = a$ a $|DS| = |SC| = b$.

Postup:

- Zvolíme si bod S , jako střed hyperboly.
- Sestrojíme kružnice l_1, l_2 , kde obě kružnice mají střed v bodě S a kde jejich poloměry jsou rovny velikosti úseček a a b .
- K těmto kružnicím sestrojíme tečny t_1, t_2 , které jsou zároveň kolmé k reálné ose x .
- Zvolme libovolnou přímku, která prochází středem S a protíná tečny t_1, t_2 v bodech A_1B_1 .
- Nyní sestrojíme kružnici k_1 se středem v bodu S a poloměrem rovným délce úsečky SB_1 a označme průsečík této kružnice a reálné osy x jako bod C_1 .
- Bodem C_1 povedeme přímku m_1 kolmou k reálné ose x a bodem A_1 přímku r_1 rovnoběžnou s reálnou osou x . Průsečík přímek m_1 a r_1 je hledaný bod hyperboly H_1 . Další body najdeme obdobně, jako já v obrázky viz bod H_2 .

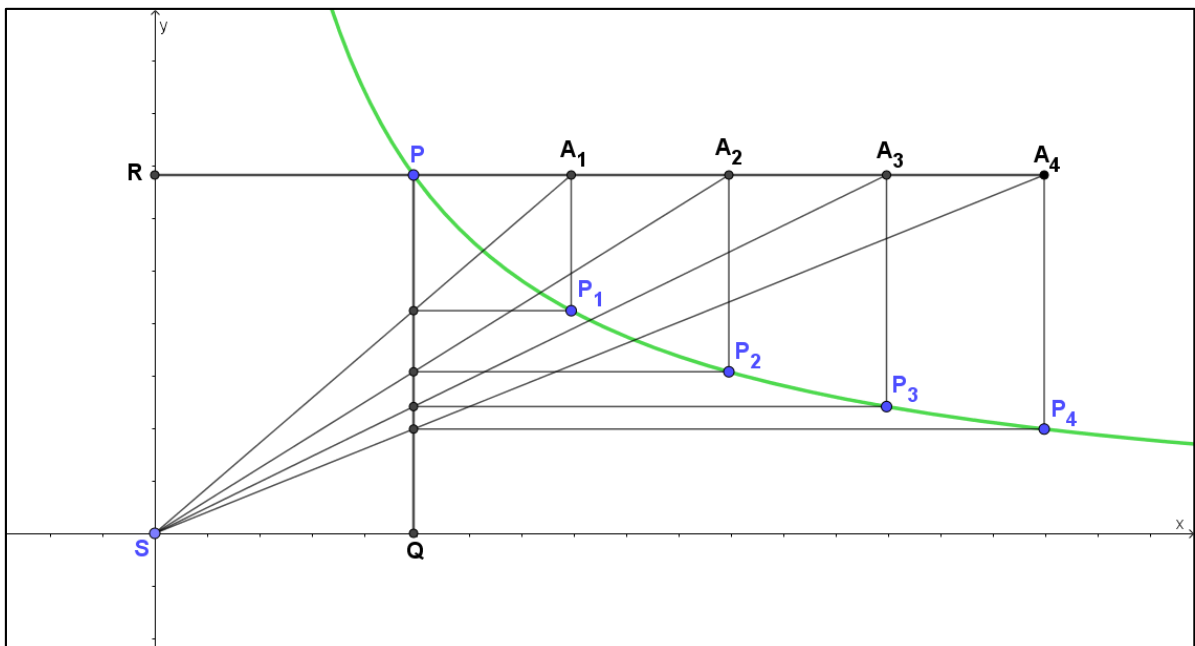


Obrázek 6: Konstrukce hyperboly se zadanou délkou poloos $|AS| = |SB| = a$ a $|DS| = |SC| = b$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3) Mějme zadané osy x a y jako asymptoty hyperboly a jeden bod hyperboly $P = [x; y]$.

Postup:

- Vedme dvě úsečky, které vedou bodem P a jsou kolmé k souřadnicovým osám x a y . Průsečíky těchto kolmic a souřadnicových os označme jako Q a R .
- Prodlužme úsečku PR za bod P a zvolme na tomto prodloužení libovolné body $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$ (kde n je libovolné celé číslo) které spojíme se středem $S = [0; 0]$.
- Z míst, kde nám úsečky $A_1S, A_2S, A_3S \dots, A_nS$ tvoří průsečíky s úsečkou PQ , povedeme rovnoběžky se souřadnicovou osou x .
- Nyní z bodů $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$ vedme rovnoběžky s reálnou osou y .
- Průsečíky těchto dvojic rovnoběžek nám odpovídají hledaným bodům hyperboly.

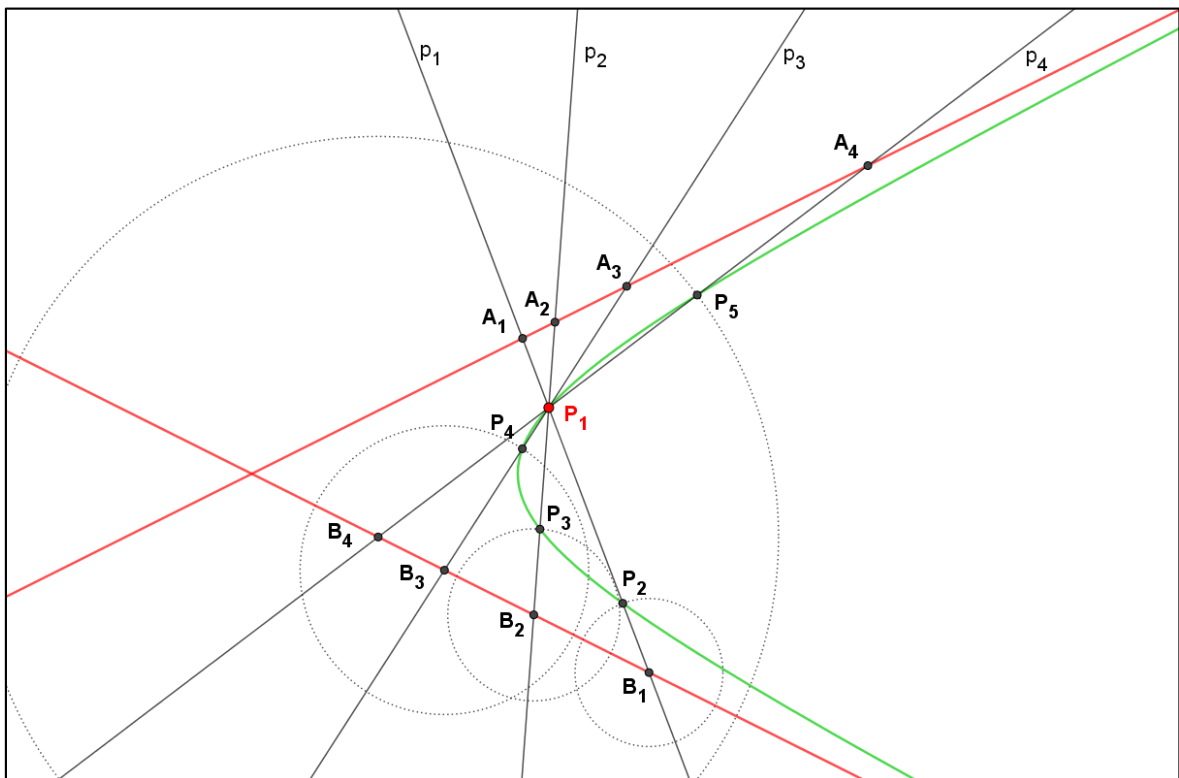


Obrázek 7: Konstrukce hyperboly se zadaným bodem hyperboly P a osami x a y , kterými jsou asymptoty hyperboly. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

4) Mějme zadané asymptoty hyperboly a je jeden její bod $P = [x; y]$.

Postup:

- Sestrojme libovolnou přímku p_1 , která prochází bodem P_1 a protíná asymptoty ve dvou bodech A_1 a B_1 .
- Sestrojme kružnici se středem v bodu B_1 a poloměrem o délce úsečky A_1P_1 .
- Průsečík této kružnice a přímky p_1 označme jako bod P_2 . Tento bod je dalším bodem hyperboly.
- Pro nalezení dalších bodů hyperboly, vedeme bodem P_1 další přímky a celý postup opakujeme.



Obrázek 8: Konstrukce hyperboly se zadanými asymptotami a bodem hyperboly P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

2 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH A KVADRATICKÝCH ROVNIC

2.1 LINEÁRNÍ ROVNICE

Nejprve se podíváme na nejjednodušší případ a tím jsou lineární rovnice, respektive soustava dvou lineárních rovnic. Lineární funkce algebraicky zapíšeme takto:

$$r_1: y = a_1x + b_1$$

$$r_2: y = a_2x + b_2$$

Graficky tento příklad vyřešíme tak, že zakreslíme obě přímky do grafu a určíme souřadnice průsečíku $P[x; y]$, které jsou zároveň řešením soustavy rovnic. Pokud průsečík neexistuje, tak soustava nemá řešení a pokud jsou obě přímky identické, pak je samozřejmě řešení nekonečně mnoho.

Příklad 1:

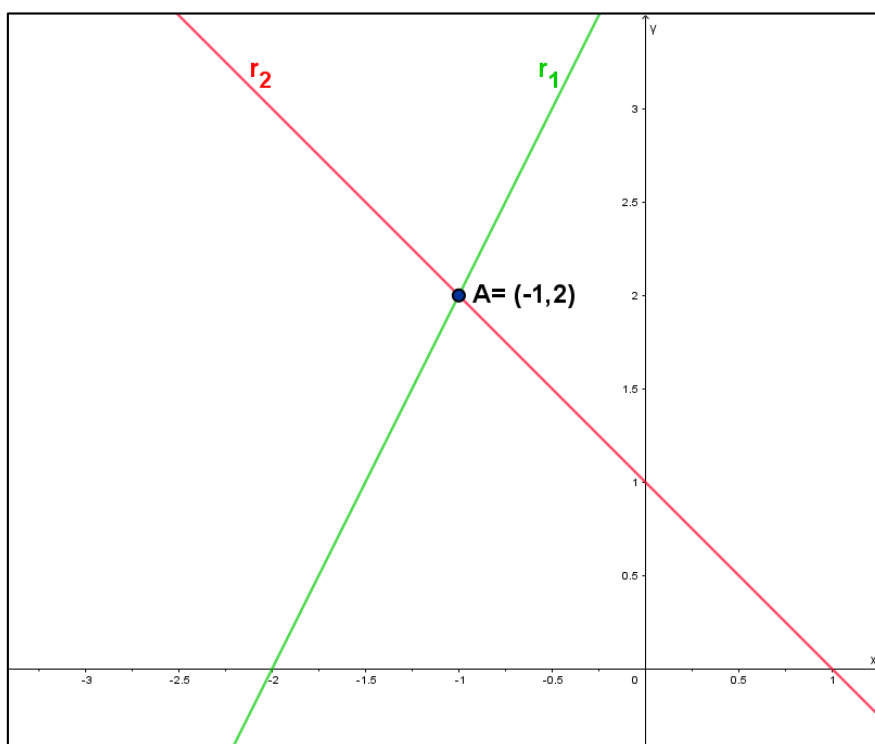
Vyřešte (pomocí dvou přímek) soustavu rovnic $r_1: 2x - y = -4$ a $r_2: x + y = 1$.

Algebraické řešení:

Z druhé rovnice vyjádříme hodnotu $y = 1 - x$ a dosazením do první rovnice dostaneme rovnici: $2x - (1 - x) = -4$ a po snadné úpravě: $x = -1$, vypočtenou hodnotu x dosadíme zpětně do druhé rovnice a získáme hodnotu $y = 2$. Tato soustava rovnic má právě jedno řešení a tím je $[-1; 2]$.

Grafické řešení:

- Z první rovnice: $2x - y = -4$ vyjádříme y : $y = 2x + 4$.
Sestrojíme tedy graf funkce $r_1: y = 2x + 4$.
- Z druhé rovnice: $x + y = 1$ vyjádříme y : $y = 1 - x$.
Sestrojíme tedy graf funkce $r_2: y = 1 - x$.
- Zadané rovnice jsou rovnicemi různoběžek s jedním společným bodem A . V bodě $A = [-1; 2]$, kde se obě přímky protínají, se nachází hledané řešení této soustavy rovnic, a to odpovídá řešení, které jsme našli algebraicky.



Obrázek 9: Graf různoběžných přímek r_1 a r_2 a jejich průsečíku A .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2:

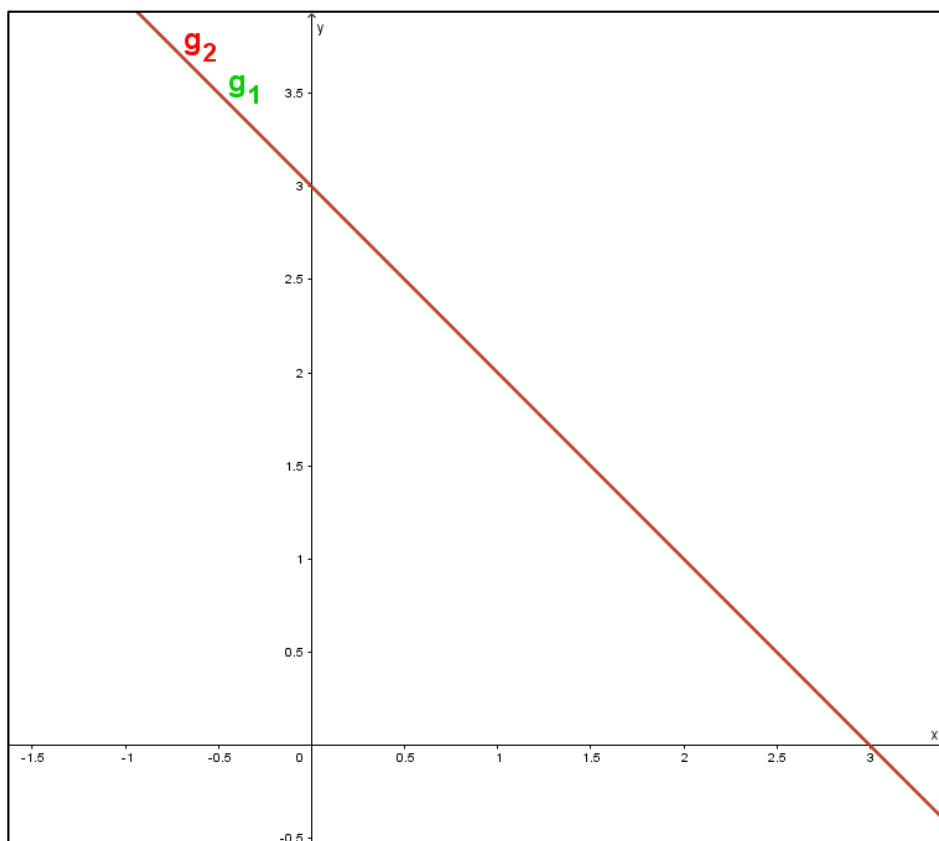
Vyřešme graficky (pomocí dvou přímek) soustavu rovnic $g_1: x + y = 3$ a $g_2: 3x + 3y = 9$.

Algebraické řešení:

Z první rovnice vyjádříme hodnotu $y = 3 - x$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme rovnici: $3x + 3(3 - x) = 9$ po snadné úpravě, tedy: $0 = 0$ z čehož vyplývá, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Grafické řešení:

- Z první rovnice: $x + y = 3$ vyjádříme $y: y = 3 - x$.
Sestrojíme tedy graf funkce $g_1: y = 3 - x$.
- Z druhé rovnice: $3x + 3y = 9$ vyjádříme $y: y = 3 - x$.
Sestrojíme tedy graf funkce $g_2: y = 3 - x$.
- V tomto příkladu nám vznikly dvě identické přímky. Tato soustava rovnic má tedy nekonečně mnoho řešení, a to odpovídá řešení, které jsme našli algebraicky.



Obrázek 10: Graf totožných přímek g_1 a g_2
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 3.

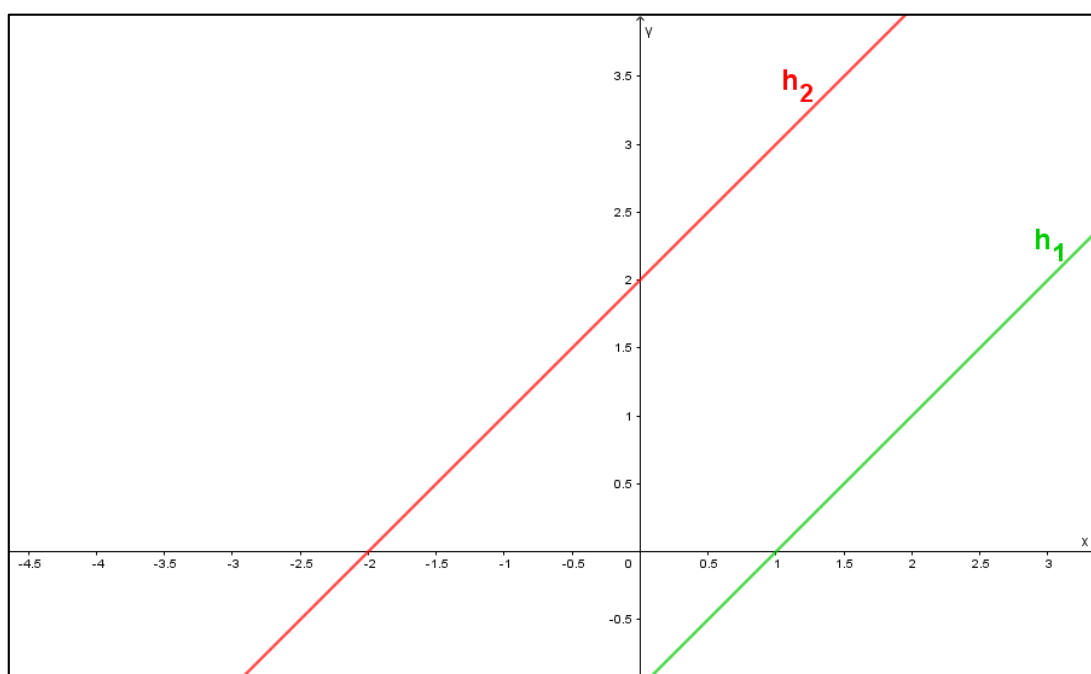
Vyřeš graficky (pomocí dvou přímek) soustavu rovnic $h_1: x - y = 1$ a $h_2: x - y = -2$.

Algebraické řešení:

Z první rovnice vyjádříme hodnotu $y = x - 1$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme rovnici: $x - (x - 1) = -2$ po snadné úpravě, tedy: $1 = -2$ z čehož vyplývá, že soustava rovnic nemá žádné řešení.

Grafické řešení:

- Z první rovnice: $x - y = 1$ vyjádříme y : $y = x - 1$.
Sestrojíme tedy graf funkce $h_1: y = x - 1$.
- Z druhé rovnice: $x - y = -2$ vyjádříme y : $y = x + 2$.
Sestrojíme tedy graf funkce $h_2: y = x + 2$.
- V tomto příkladu nám vznikly dvě rovnoběžné přímky. Tato soustava rovnic tudíž nemá žádné řešení, a to odpovídá řešení, které jsme našli algebraicky.



Obrázek 11: Graf rovnoběžných přímek h_1 a h_2 .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

2.2 KVADRATICKÉ ROVNICE

Uvažujme nyní rovnice obsahující neznámou ve druhé mocnině, tj. rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla. Algebraické řešení kvadratické rovnice už není, tak prosté jako v případě lineární rovnice. V jednodušších případech je na první pohled vidět rozklad, kterým převedeme rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ do tvaru $(dx + e) \cdot (fx + g) = 0$. Potom $-\frac{e}{d}, -\frac{g}{f}$ jsou řešeními takovéto rovnice. Tento způsob bohužel ve většině případů fungovat nebude. V takovém případě můžeme použít diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Pokud je diskriminant $D > 0$, pak má kvadratická rovnice dva různé reálné kořeny. Pokud je $D = 0$, pak má kvadratická rovnice dva stejné reálné kořeny a pokud je $D < 0$, pak kvadratická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel \mathbb{R} .

Pomocí diskriminantu lze vypočítat kořeny kvadratické rovnice dosazením do následujícího

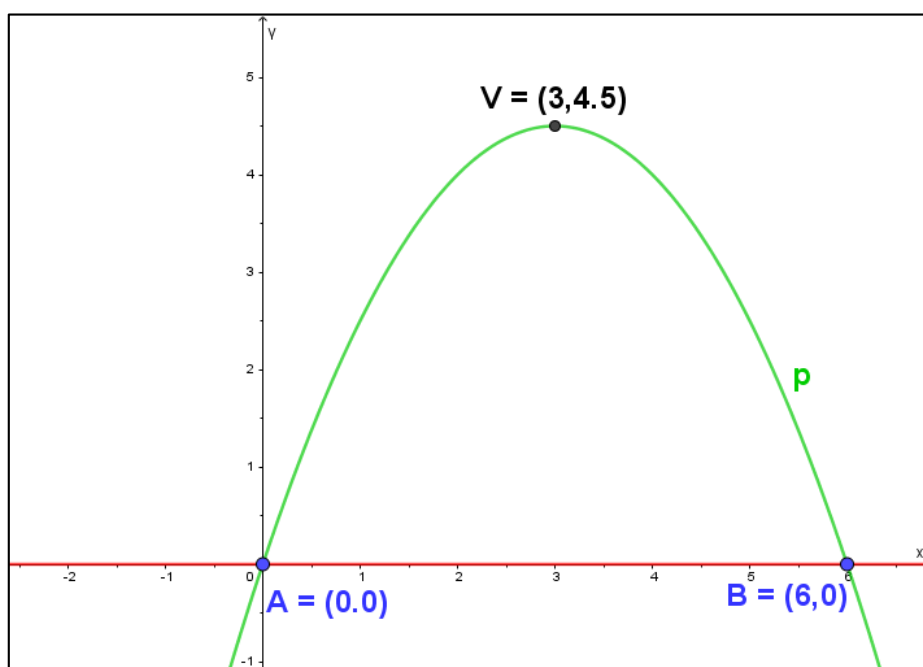
vzorce: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Graficky nalezneme řešení kvadratické rovnice tak, že sestrojíme graf funkce $y = ax^2 + bx + c$ a sestrojíme průsečíky se souřadnicovou osou x . Pokud průsečíky existují, potom má kvadratická rovnice řešení. Obecně má dvě řešení a ve speciálním případě, kdy se vrchol paraboly dotýká souřadnicové osy x , má pouze jedno řešení. V případě, že průsečík neexistuje, nemá kvadratická rovnice řešení.

Příklad 1:

Graficky vyřešme kvadratickou rovnici: $p: -0,5x^2 + 3x = 0$.

- Sestrojíme graf kvadratické funkce $y = -0,5x^2 + 3x$, jejíž vrchol tedy leží v bodě $V = [3; 4,5]$ a její ohnisko v bodě $F = [3; 4]$.
- Jelikož se má tato kvadratická rovnice rovnat 0, přímkou, na které budeme hledat průsečíky, je nám zde osa x , která má rovnici $y = 0$.
- Konstanta $a = -0,5$, tedy platí $a < 0$, z toho plyne, že maximum funkce $y = -0,5x^2 + 3x$ se nachází ve vrcholu paraboly.
- Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 3)$ a klesající na intervalu $(3; \infty)$.
- Nalezneme průsečíky grafu paraboly s osou x , kterými zde jsou body A a B .
- Řešení jsou tedy pro tento příklad dvě: $x_1 = 0$ $x_2 = 6$.



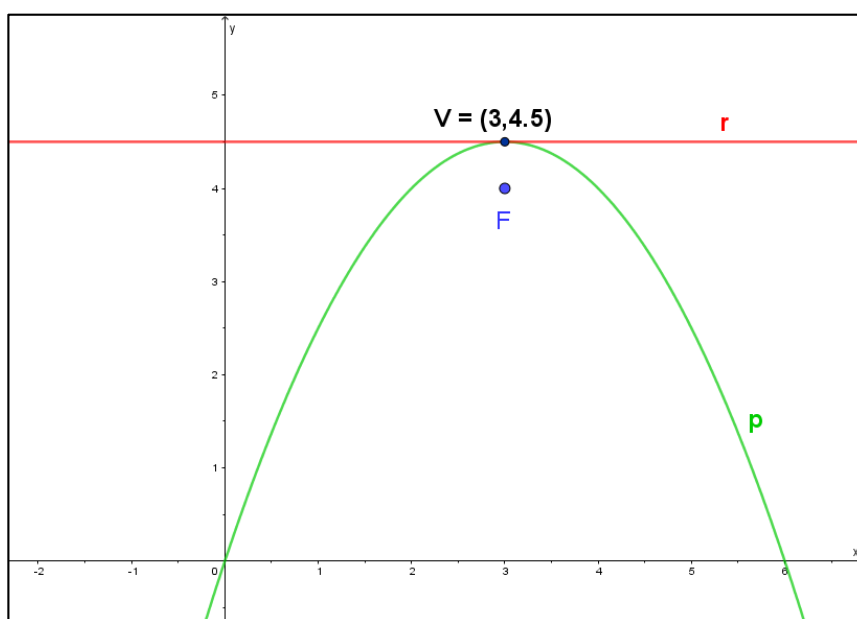
Obrázek 12: Graf paraboly p , přímky x a jejich průsečíků A, B .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Provedeme kontrolu grafického řešení algebraickým výpočtem. V tomto případě nebude nutné se uchýlovat k výpočtu kořenů pomocí diskriminantu. Z rovnice $-0,5x^2 + 3x = 0$ vytkneme x : $x(-0,5x + 3) = 0$. Z této rovnice je zřejmé, že $x_1 = 0$ a výsledek rovnice: $-0,5x_2 + 3 = 0$ je $x_2 = 6$. Výsledek grafického a algebraického řešení je tedy totožný.

Příklad 2:

Graficky vyřešte kvadratickou rovnici: $-0,5x^2 + 3x = 4,5$.

- Sestrojíme graf kvadratické funkce $p: y = -0,5x^2 + 3x$ (viz příklad 1).
- Jelikož se má tato kvadratická rovnice rovnat číslu 4,5, přímka, na které budeme hledat průsečíky má rovnici $y = 4,5$.
- Konstanta $a = -0,5$, tedy platí $a < 0$, z toho plyne, že maximum funkce $y = -0,5x^2 + 3x$ se nachází ve vrcholu paraboly.
- Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 3)$ a klesající na intervalu $\langle 3; \infty)$.
- Nalezneme průsečíky grafu paraboly s přímkou $y = 4,5$, kterými je zde bod V, tedy vrchol paraboly.
- Jelikož přímka $r: y = 4,5$ prochází vrcholem paraboly, má tato rovnice právě jedno řešení a tím je $x = 3$.
- Kontrolu algebraickým výpočtem provedeme takto: rovnici $-0,5x^2 + 3x - 4,5 = 0$ vynásobíme dvěma a získáme vztah: $x^2 - 6x + 9 = 0$, nyní provedeme rozklad na součin $(x - 3) \cdot (x - 3) = 0$. Z této rovnice je zřejmé, že $x_{1,2} = 3$. Rovnice má tedy pouze jedno řešení a tento výsledek odpovídá grafickému řešení.

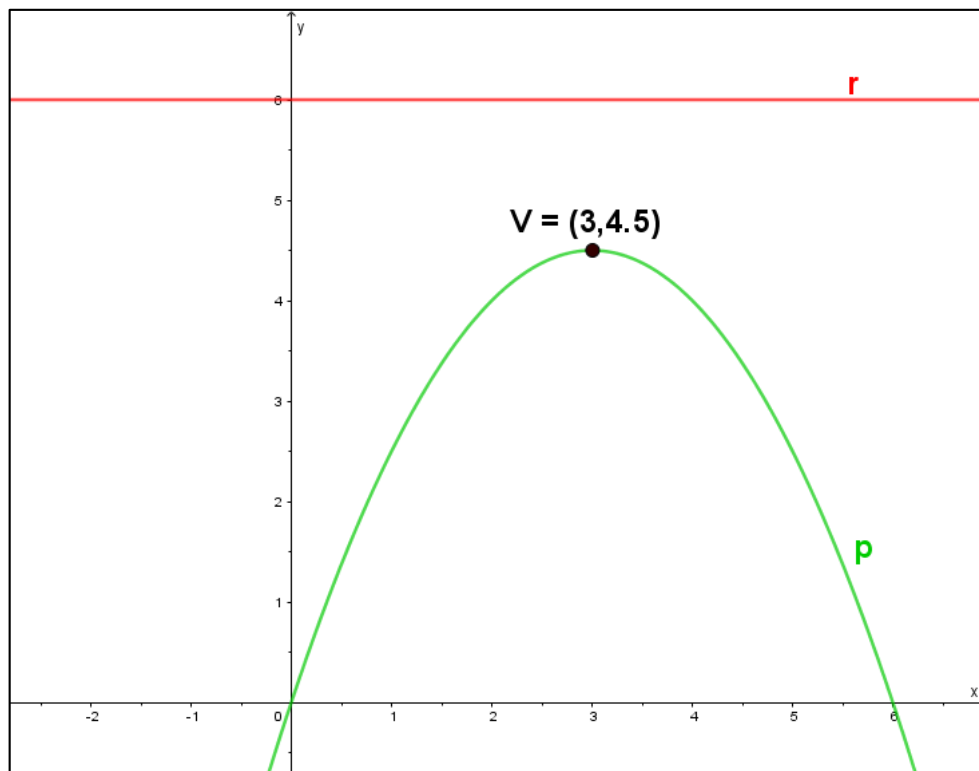


Obrázek 13: Graf paraboly p , přímky r a jejich průsečíku V .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 3:

Graficky vyřešte kvadratickou rovnici: $-0,5x^2 + 3x = 6$.

- Sestrojíme graf kvadratické funkce $p: y = -0,5x^2 + 3x$ (viz příklad 1).
- Jelikož se má tato kvadratická rovnice rovnat číslu 6, přímka, na které budeme hledat průsečíky má rovnici $r: y = 6$.
- ($a = -0,5$) \rightarrow ($a < 0$) z toho plyne, že maximum funkce $y = -0,5x^2 + 3x$ se nachází ve vrcholu paraboly.
- Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 3)$ a klesající na intervalu $(3; \infty)$.
- Průsečíky grafu paraboly s přímkou $y = 6$, pro tento příklad žádný není. Proto rovnice: $-0,5x^2 + 3x = 6$ nemá žádné řešení.
- Algebraickou kontrolu tentokrát provedeme pomocí výpočtu diskriminantu: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-6) = 9 - 12 = -3$. Záporný diskriminant nám říká, že tato rovnice nemá řešení. Dospěli jsme tedy ke stejnému závěru jako v případě grafického řešení.



Obrázek 14: Graf paraboly p , přímky r .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

2.3 ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE POMOCÍ KRUŽNICE A PŘÍMKY

V této části se pokusíme nalézt řešení kvadratické rovnice ve tvaru $dx^2 + ex + f = 0$ pomocí kružnice a přímky. Kružnici zapíšeme ve tvaru $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a přímku ve tvaru $s: y = ax + b$. Vyjádřeno graficky, hledáme průsečík kružnice k o poloměru r , se středem v bodě $[m; n]$, a přímky s .

Algebraické řešení bude opět vycházet z toho, že z rovnice přímky vyjádříme jednu proměnou, například y a vsadíme jí do rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (ax + b - n)^2 = r^2$. Je zřejmé, že se jedná kvadratickou rovnicí, pokusíme se jí upravit do tvaru: $dx^2 + ex + f = 0$, abychom mohli využít vzorců pro výpočet diskriminantu.

$$\rightarrow a^2x^2 + 2abx - 2anx + b^2 - 2bn + m^2 - 2mx + n^2 + x^2 - r^2 = 0$$

$$\rightarrow (a^2 + 1)x^2 + ((2b - 2n)a - 2m)x + b^2 - 2bn + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

Z předcházející úpravy vyplývá, že $d = (a^2 + 1)$, $e = (2b - 2n)a - 2m$, $f = b^2 - 2bn + m^2 + n^2 - r^2$. Jak využít diskriminantu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice je popsáno v předcházejícím případě, takže pouze připomenu výsledný vzorec pro řešení kořenů:

$$x_{1,2} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4df}}{2d}.$$

Příklad 1:

Graficky vyřešme kvadratickou rovnici: $x^2 = 0$ pomocí kružnice a přímky.

Postup:

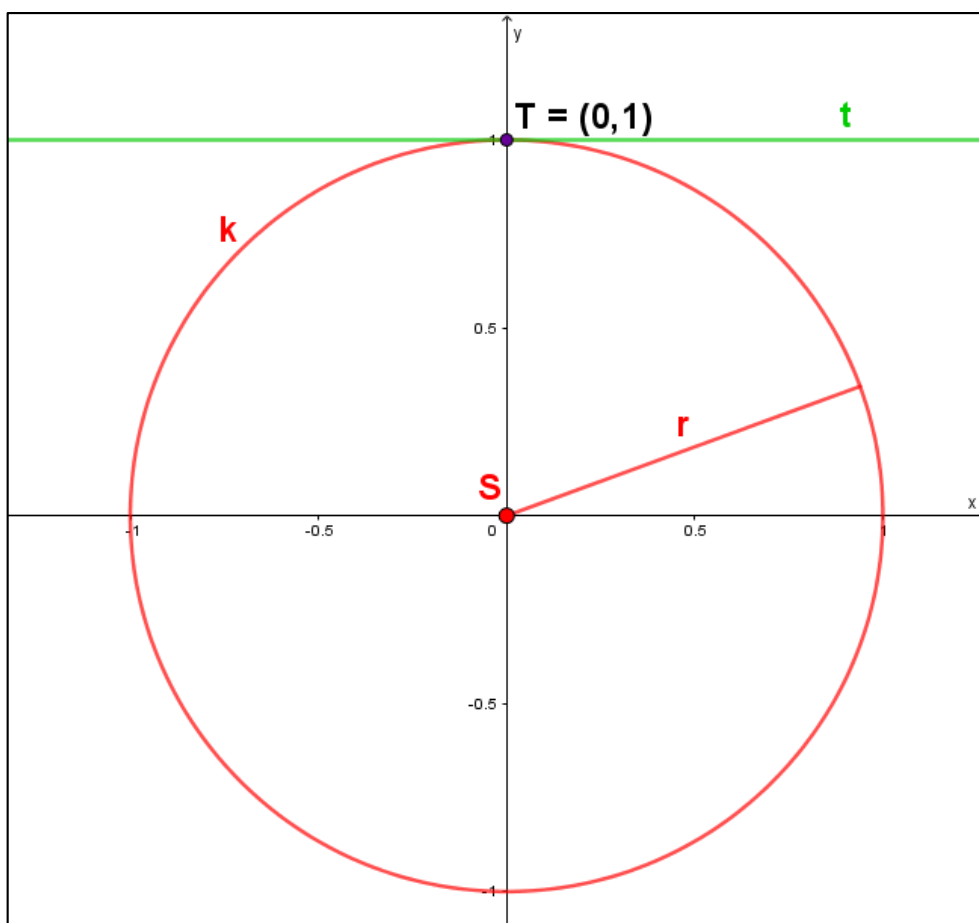
Abychom mohli použít kružnici a přímku, musíme rovnici upravit. Přičteme k oběma stranám 1 a získáme rovnici $x^2 + 1 = 1$, ze které už jsou zřejmé rovnice kružnice a přímky.

Sestrojme kružnici k : $x^2 + y^2 = 1$, která má střed v bodě $S = [0; 0]$ a poloměr $r = 1$.

Dále sestrojme přímku t , která má rovnici $t: y = 1$.

Přímka t má s kružnicí k jeden společný bod $T = [0; 1]$, přímka t je tedy tečnou kružnice k .

Tato soustava rovnic má pouze jedno jediné řešení a tím je $x = 0$.



Obrázek 15: Graf kružnice k , přímky t a jejich průsečíku T .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2:

Graficky vyřešme kvadratickou rovnici: $x^2 = 0,75$ pomocí kružnice a přímky.

Postup:

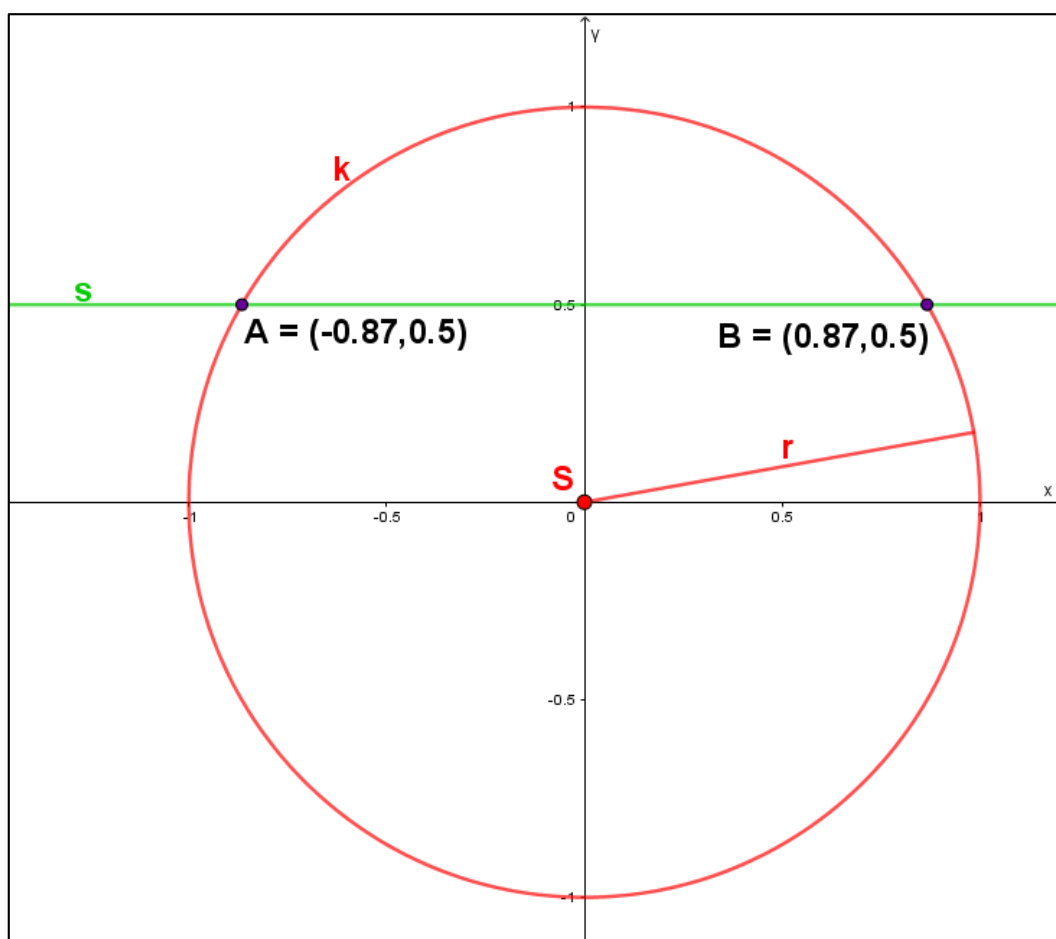
Abychom mohli použít kružnici a přímku, musíme rovnici upravit. Přičteme k oběma stranám 0,25 a získáme rovnici $x^2 + 0,25 = 1$, ze které už jsou zřejmé rovnice kružnice a přímky.

Sestrojíme kružnici k : $x^2 + y^2 = 1$, která má střed v bodě $S = [0; 0]$ a poloměr $r = 1$.

Dále sestrojíme přímku t , která má rovnici s : $y = 0,5$.

Přímka s má s kružnicí k dva společné body: $A \doteq [-0,87; 0,5]$, $B \doteq [0,87; 0,5]$ přímka s je tedy sečnou kružnice k .

Tato soustava rovnic má právě dvě řešení, kterými jsou: $x_1 \doteq -0,87$ $x_2 \doteq 0,87$.



Obrázek 16: Graf kružnice k , přímky s a jejich průsečíků A, B .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 3:

Graficky vyřešme kvadratickou rovnici: $x^2 + 3 = 0$ pomocí kružnice a přímky.

Postup:

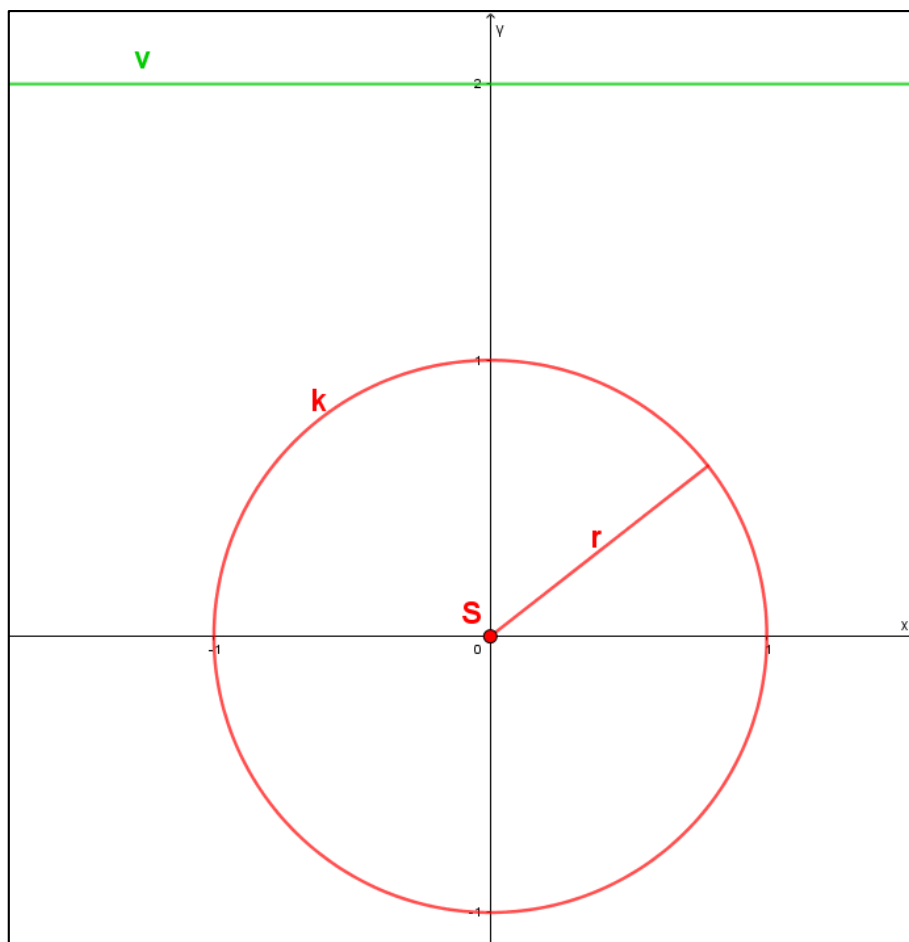
Abychom mohli použít kružnici a přímku, musíme rovnici upravit. Přičteme k oběma stranám 1 a získáme rovnici $x^2 + 4 = 1$, ze které už jsou zřejmé rovnice kružnice a přímky.

Sestrojme kružnici k : $x^2 + y^2 = 1$, která má střed v bodě $S = [0; 0]$ a poloměr $r = 1$.

Dále sestrojme přímku v , která má rovnici v : $y = 2$.

Přímka nemá s kružnicí k žádný společný bod, jde tedy o vnější přímku kružnice k .

Tato soustava rovnic nemá řešení.



Obrázek 17: Graf kružnice k a přímky v .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3 ŘEŠENÍ ROVNIC 3. STUPNĚ

3.1 RYZE KUBICKÁ ROVNICE $x^3 = 2a^3$ (PROBLÉM ZDVOJENÍ KRYCHLE)

Jedná se o jednu z nejstarších kubických úloh naší z období zhruba 400 let př. n. l. *Legenda říká, že na ostrově Délos vypukla epidemie moru, obyvatelé umírali. Vypravili proto poselstvo do delfské věštírny s důležitým posláním: zjistit, jakým způsobem si naklonit bohy, aby mor pominul. Pýthie odpověděla, že je třeba zdvojit oltář boha Apollóna, který měl tvar krychle a byl ze zlata. Byla tedy odlita druhá zlatá krychle, stejně velká, a postavena na krychli první. Mor však trval. Poselstvo se opět vydalo do delfské věštírny. Dozvěděli se, že je třeba navíc zachovat tvar oltáře. Tuto úlohu však na ostrově Délos řešit neuměli. Obrátili se s prosbou o pomoc na Platóna. Ten jim však pravil: „Bohové se na vás hněvají, neboť se málo věnujete geometrii.“ [BEČVÁŘ a FUCHS, 1993]*

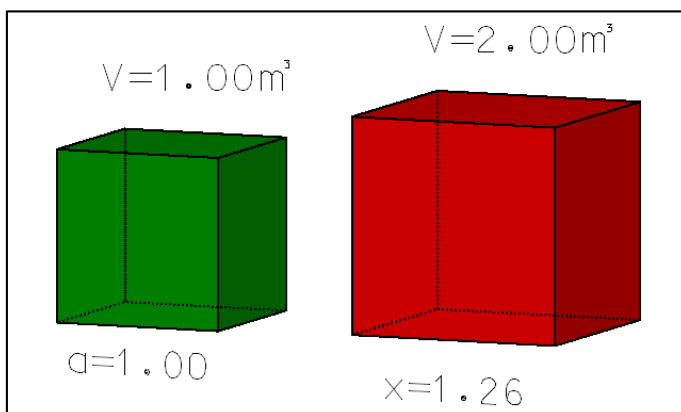
V duchu této legendy se o zdvojení krychle hovoří jako o délském problému či délské úloze.

Tuto úlohu může algebraicky zapsat takto: $x^3 = 2a^3$, kde a je velikost hrany stávající krychle a x je hledaná velikost hrany krychle o dvojnásobném objemu. Rovnici můžeme upravit do tvaru: $x = a\sqrt[3]{2}$.

Například:

Původní (zelená) krychle má délku strany $a = 1 \text{ m}$ a objem $V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ m}^3$.

Dále chceme vytvořit takovou krychli, pro kterou platí, že její objem je dvojnásobkem krychle zelené, tedy: $x^3 = 2a^3$ do této rovnice dosadíme $a = 1$ a získáme rovnici: $x^3 = 2$, nyní jen celý výraz odmocníme třetí mocninou a hledaný výsledek je: $x = \sqrt[3]{2}$ z čehož vyplývá, že: $x \doteq 1,26$. Hledaná (červená) krychle má tedy délku strany $x \doteq 1,26 \text{ m}$.



Obrázek 18: Zelená krychle: hrana a a objem $V = 1 \text{ m}^3$. Červená krychle o dvojnásobném objemu $V = 2 \text{ m}^3$ o délce hrany x . (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Microstation)

3.1.1 ARCHYTAS Z TARENTU (430 L PŘ. N. L.)

Historikové matematiky se shodují, že nejstarší způsob řešení tohoto problému přináší Archytas z Terentu, státník, filozof, matematik, následovník Pythagora a osobní přítel Platóna. Ve své době byl slavný a jsou mu připisovány různé zásluhy a vynálezy. Byl generálem armády svého městského státu po 7 let (zákon zakazoval jednotlivci držet tento úřad déle než rok) a nikdy nebyl poražen. Byl pravděpodobně první, kdo systematicky popsal zákonitosti mechaniky na základě matematických principů.

Jím navržené řešení je sice velice nepraktické, ale na druhou stranu ukazuje neuvěřitelnou představivost vynalézavost tehdejších matematiků. Při řešení využil anuloid, válcovou a kuželovou plochu.

Vydeme z předpokladu, že máme dvě úsečky a, b pro které platí, že $a < b$ a pokusíme se najít dvě střední úměrné úsečky r, s , tj. úsečky pro které tedy platí: $\frac{b}{r} = \frac{r}{s} = \frac{s}{a}$, nebo také $r^2 = bs, s^2 = ar$.

Sestrojme v pravouhlé soustavě (jako počátek soustavy zvolíme bod O) tři plochy:

1) Anuloid (červená) s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = b\sqrt{x^2 + y^2}$

(červená plocha vzniklá otáčením kružnice k se středem v bodě $[\frac{1}{2}b; 0; 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}b$ v rovině xz , kolem osy z).

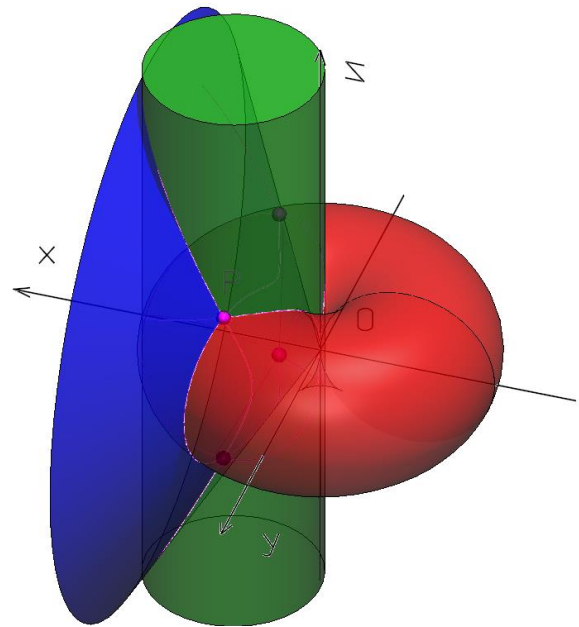
2) Rotační válcová plocha (zelená) s rovnicí $x^2 + y^2 = bx$

(vzniklá rotací osy z okolo přímky $(\frac{1}{2}b; 0; z)$)

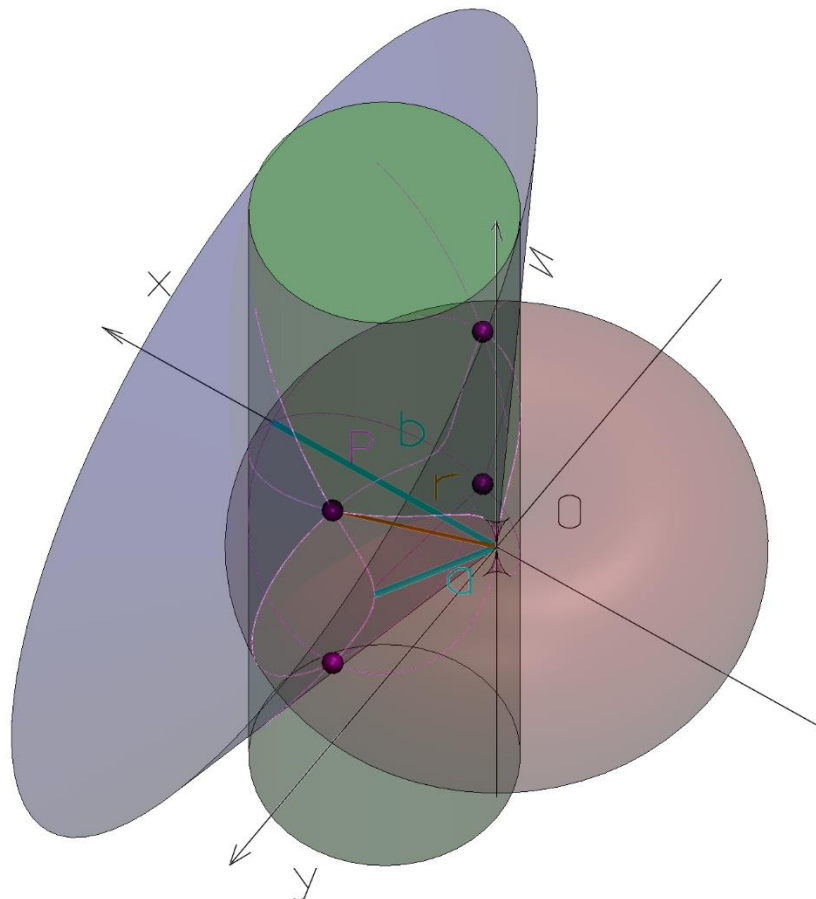
3) Rotační kuželová plocha (modrá) s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$

(vzniklá rotací polopřímky s rovnicí $y = \sqrt{(\frac{b^2}{a^2} - 1) \cdot x}, x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ okolo osy x)

Z obrázku je patrné, že existují celkem 4 vzájemné průsečíky těchto tří ploch. Vzhledem k symetrii je možné si vybrat jakýkoliv z nich. Označme ho $P(x; y; z)$ a jeho půdorys označme jako $P_1(x, y)$. Potom rovinná vzdálenost průsečíku P_1 od počátku O je hledaná úsečka $s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{b \cdot a^2}$ a prostorová vzdálenost průsečíku P od počátku O je hledaná úsečka: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt[3]{b^2 \cdot a}$ a zvolíme-li $b = 2a$, pak je hrana zdvojené krychle rovna hodnotě $s = \sqrt[3]{2a \cdot a^2} = a \sqrt[3]{2}$.



Obrázek 19: Prostorový model anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Microstation)



Obrázek 20: Prostorový model anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Microstation)

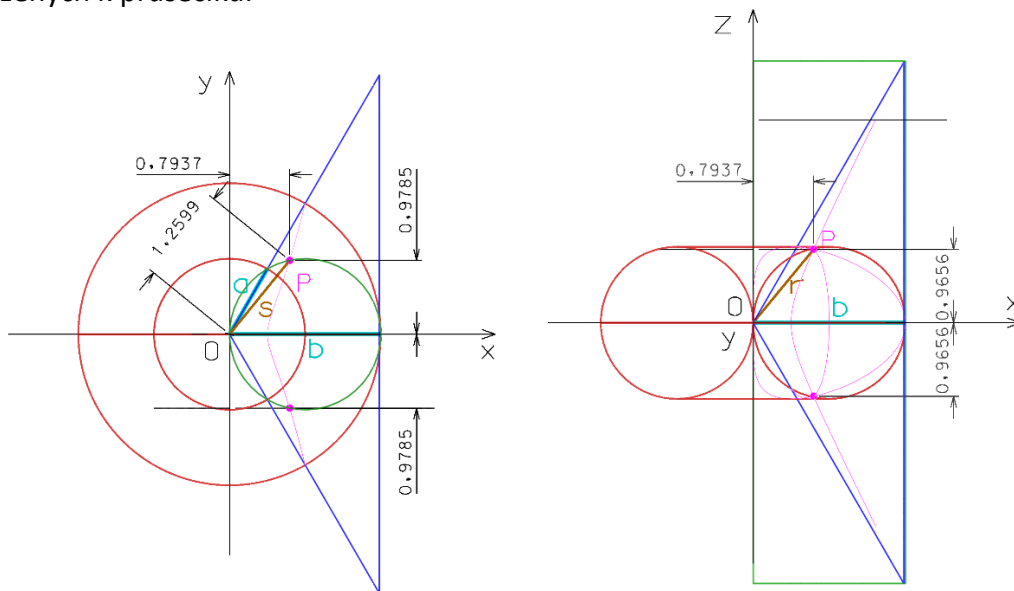
Příklad 1:

Vyřešme kubickou rovnici $x^3 - 2 = 0$.

Ze zadání vidíme, že $a = 1$ a abychom mohli použít Archytasovu metodu, tak musíme zvolit za b dvojnásobek a , tedy $b = 2$.

- Sestrojíme anuloid, který bude mít rovnici: $x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, tedy se bude jednat o plochu vzniklou otáčením kružnice k se středem v bodě $[1; 0; 0]$ a poloměrem 1 v rovině xz , kolem osy z .
- Sestrojíme rotační válcovou plochu danou rovnicí: $x^2 + y^2 = 2x$, tedy plochu, která vznikne rotací osy z okolo přímky $(1; 0; z)$.
- Sestrojíme rotační kuželovou plochu danou rovnicí: $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$, tedy plochu, která vznikne rotací polopřímky s rovnicí $y = \sqrt{3}x, x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ okolo osy x .

Vzhledem k tomu, že tuto metodu uvádím pouze pro pořádek a jako kuriozitu, tak dále nebudu detailně popisovat deskriptivní konstrukci těchto ploch a metodu nalezení jejich průsečíků. Použila jsem nástroje CAD, které mi umožnily poměrně snadno namodelovat daná tělesa a určit jejich průsečík. Na Obrázku 21 je zobrazen půdorys a bokorys včetně kót vztahených k průsečíku.



Obrázek 21: Půdorys (vlevo) a bokorys (vpravo) anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Microstation)

Výsledné souřadnice průsečíku jsou tedy $P \doteq [0,7937; 0,9785; 0,9656]$ a $P_1 \doteq [0,7937; 0,9785]$. Vzdálenost: $s \doteq 1,2599 \doteq \sqrt[3]{2}$, tedy řešení zadané úlohy zdvojení krychle.

3.1.2 MENAECHMUS (†320 L. PŘ. N. L.)

Menaechmus přichází hned se dvěma způsoby řešení. V obou využívá kuželoseček a jejich vzájemných průsečíků. V prvním případě použijeme dvě paraboly a v druhém případě parabolu a rovnostrannou hyperbolu.

Menaechmus byl bratrem Dinostratuse, který použil kvadratrix k řešení kvadratury kruhu. Zároveň se k němu vztahuje příběh o králi, který chtěl zkratku ke geometrii. Tento příběh vypráví právě o Menaechmusovi a Alexandrovi. Král povídá Menaechmusovi „*pro cestování po kraji jsou k dispozici královské cesty a cesty pro prostý lid, ale v geometrii existuje pouze jedna cesta pro všechny.*“ Tento nebo podobný příběh bývá často připisován k Euclidovi a Ptolemyovi, ale byla spíše snaha pozdějších autorů připsat tento příběh známějšímu matematikovi. Bohužel se mnoho informací o jeho práci nedochovalo. Největším jeho počinem byl pravděpodobně objev vzniku kuželoseček řezem kuželové plochy.

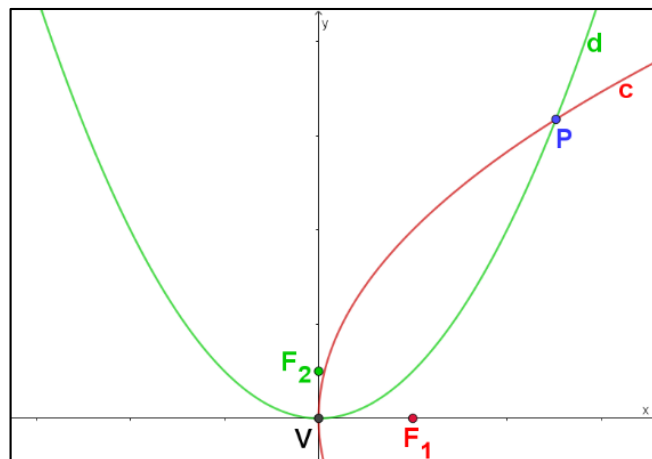
1. Řešení

Sestrojíme dvě paraboly:

- První bude mít ohnisko v bodě $F_1 = \left[\frac{b}{4}; 0\right]$ a vrchol $V = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $c: y^2 = bx$. V obrázku 22 jde o parabolu červené barvy.
- Druhá bude mít ohnisko v bodě $F_2 = \left[0; \frac{a}{4}\right]$ a vrchol $V = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $d: x^2 = ay$. V obrázku 22 jde o parabolu zelené barvy.

Sestrojíme průsečík P těchto parabol v prvním kvadrantu. Algebraicky tento průsečík získáme tím, že z první rovnice $c: y^2 = bx$ vyjádříme x .

Tedy $x = \frac{y^2}{b}$ a dosadíme do rovnice druhé $d: x^2 = ay$.



Obrázek 22: Graf parabol c a d a jejich průsečík P . (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Dosad' $y^2 = bx$, do $y^2 = \frac{x^4}{a^2}$

$$\frac{x^4}{a^2} = bx$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

Dosad' $x = \frac{y^2}{b}$

$$\left(\frac{y^2}{b}\right)^2 = ay$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay$$

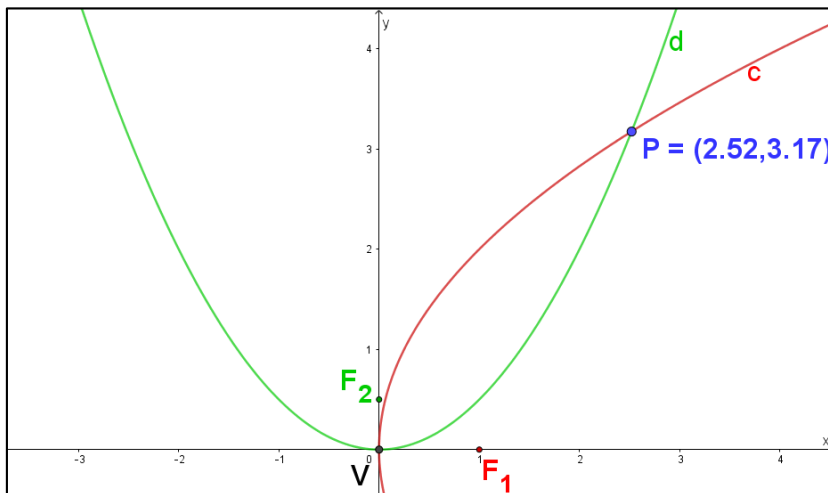
$$y^3 = ab^2 \quad y = \sqrt[3]{ab^2}$$

Průsečík parabol má tedy souřadnice $P = [\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$. Zvolíme-li $b = 2a$ je hrana zdvojené krychle rovna číslu $x = a \sqrt[3]{2}$.

Příklad 1:

Zvolme tedy $a = 2$, $b = 4$. Sestrojíme dvě paraboly:

- První bude mít ohnisko v bodě $F_1 = [1; 0]$ a vrchol $V = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $c: y^2 = 4x$. V grafu jde o parabolu červené barvy.
- Druhá bude mít ohnisko v bodě $F_2 = [0; \frac{1}{2}]$ a vrchol $V = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $d: x^2 = 2y$. V grafu jde o parabolu zelené barvy.



Obrázek 23: Graf parabol: c a d a jejich průsečík P . (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Sestrojíme průsečík v prvním kvadrantu a zjistíme jeho souřadnice $P \doteq [2,52; 3,17]$.

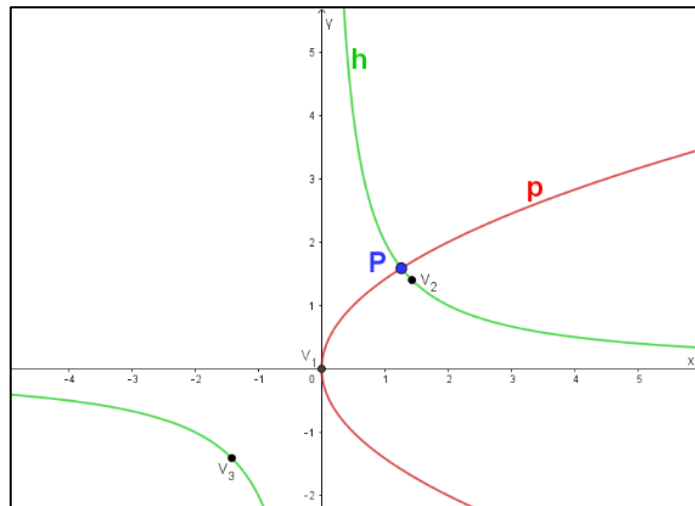
Provedeme algebraickou kontrolu: dosadíme $a = 2$ a $b = 4$ do odvozeného obecného vztahu $P = [\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$ a dostáváme průsečík: $P = [2\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{4}] \doteq [2,52; 3,17]$.

Je zřejmé, že souřadnice průsečíku zjištěné grafickou konstrukcí odpovídají hodnotám vypočteným algebraicky.

2. Řešení

Sestrojíme parabolu, která bude mít ohnisko v bodě $F_1 = \left[\frac{b}{4}; 0\right]$ a vrchol $V_1 = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $p: y^2 = bx$. V obrázku 24 jde o křivku červené barvy.

Sestrojíme hyperbolu, která bude mít střed $S = [0; 0]$ a vrcholy v bodech $V_2 = [\sqrt{ab}; \sqrt{ab}]$, $V_3 = [-\sqrt{ab}; -\sqrt{ab}]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $h: xy = ab$. V obrázku 24 jde o křivku zelené barvy.



Obrázek 24: Graf paraboly p , hyperboly h a jejich průsečík P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Opět sestrojíme průsečík P paraboly a hyperboly v prvním kvadrantu. Algebraicky tento průsečík získáme tím, že z rovnice paraboly $p: y^2 = bx$ vyjádříme x a y .

Tedy $x = \frac{y^2}{b}$. A dosadíme do rovnice hyperboly: $xy = ab$.

Dosaď $y^2 = bx$ do $x^2y^2 = a^2b^2$

$$x^2bx = a^2b^2$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

Dosaď $x = \frac{y^2}{b}$

$$\frac{y^3}{b} = ab$$

$$y^3 = ab^2, \quad y = \sqrt[3]{ab^2}$$

Hledaný průsečík má souřadnice $P = \left[\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}\right]$. Zvolíme-li opět $b = 2a$ je hrana zdvojené krychle rovna číslu $x = a \sqrt[3]{2}$.

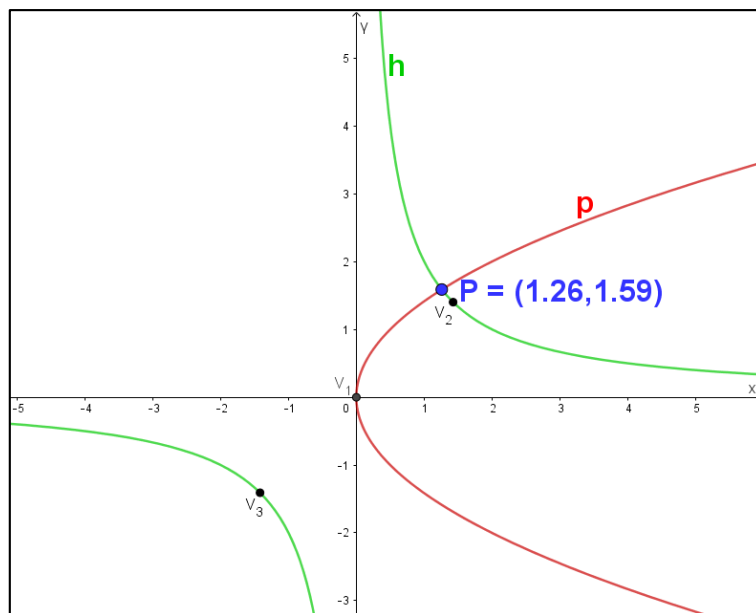
Příklad 2:

Zvolme $a = 1$, $b = 2$.

Sestrojme parabolu, která bude mít ohnisko v bodě $F_1 = \left[\frac{1}{2}; 0\right]$ a vrchol $V_1 = [0; 0]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $p: y^2 = 2x$. V obrázku 25 jde o křivku červené barvy.

Sestrojme hyperbolu, která bude mít střed $S = [0; 0]$ a vrcholy v bodech $V_2 = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, $V_3 = [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ a lze jí vyjádřit rovnicí $h: xy = 2$. V obrázku 25 jde o křivku zelené barvy.

Sestrojíme průsečík v prvním kvadrantu a zjistíme jeho souřadnice $P \doteq [1,26; 1,59]$.



Obrázek 25: Graf paraboly p , hyperboly h a jejich průsečík P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Provedeme algebraickou kontrolu: dosadíme $a = 1$ a $b = 2$ do odvozeného obecného vztahu $P = \left[\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}\right]$ a dostáváme průsečík: $P = \left[\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right] \doteq [1,26; 1,59]$.

Je zřejmé, že souřadnice průsečíku zjištěné grafickou konstrukcí odpovídají hodnotám vypočteným algebraicky.

3.1.3 DESCARTES (1596-1650)

René Descartes byl doslova renesanční člověk, který se zabýval filozofií, biologií, matematikou a fyzikou. Známejší je pravděpodobně jako výrok „Ego cogito, ergo sum“ (*Myslím, tedy jsem*). Ale jeho práce na poli algebry a geometrie je také velice významná. Je považován za otce analytické geometrie, kartézský souřadnicový systém je pojmenován po něm. Na poli algebry se zabýval polynomy a je autorem znaménkového pravidla. To, že se začal matematikou vůbec zabývat, je trochu dílem náhody. Při cestě do Nizozemí, ve městě Breda, zahlédl billboard, který vyzýval kolemjdoucí k řešení složité matematické úlohy. Povedlo se mu ji snadno vyřešit a tím přesvědčil sám sebe, že má matematické nadání a že by se tedy matematice měl dále věnovat.

Descartovo řešení Delického problému:

Mějme parabolu c , jejíž rovnice je $c: x^2 = ay$. Pro další výpočty vyjádříme x a y :

$x = \sqrt{ay}$, $y = \frac{x^2}{a}$. Sestrojíme kružnici k , jejíž rovnice je $k: (x - \frac{1}{2}b)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, tedy kružnici se středem $S(\frac{1}{2}b; \frac{1}{2}a)$ a procházející vrcholem paraboly. Dále řešme rovnice:

$$\text{Dosad' } y = \frac{x^2}{a}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$x^2 - xb + \frac{b^2}{4} + \frac{x^4}{a^2} - x^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$-xb + \frac{x^4}{a^2} = 0$$

$$-xba^2 + x^4 = 0$$

$$x^3 = ba^2$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

$$\text{Dosad' } x = \sqrt{ay}$$

$$\left(\sqrt{ay} - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$ay - b\sqrt{ay} + \frac{b^2}{4} + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0$$

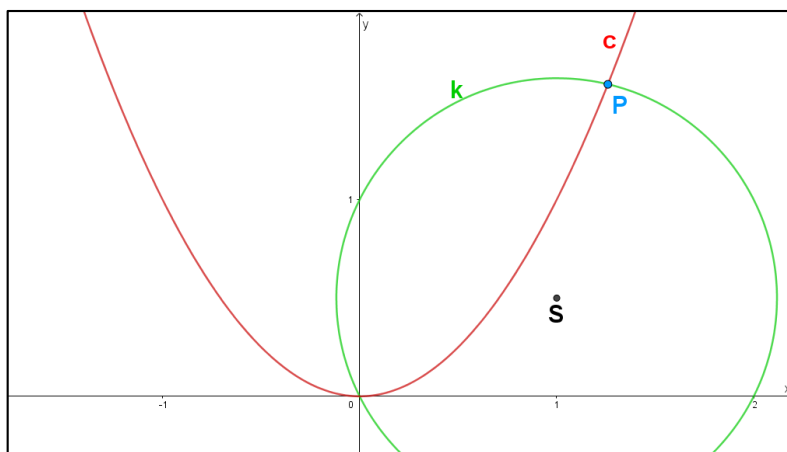
$$y^2 = b\sqrt{ay}$$

$$y^4 = b^2ay$$

$$y^3 = b^2a$$

$$y = \sqrt[3]{ab^2}$$

Řešením rovnic nalezneme společný průsečík $P = [\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$. Zvolíme-li $b = 2a$, kde a je délka hrany původní krychle, poté je náš hledaný výsledek (délka hrany zdvojené krychle) x -ová souřadnice $x = a\sqrt[3]{2}$.

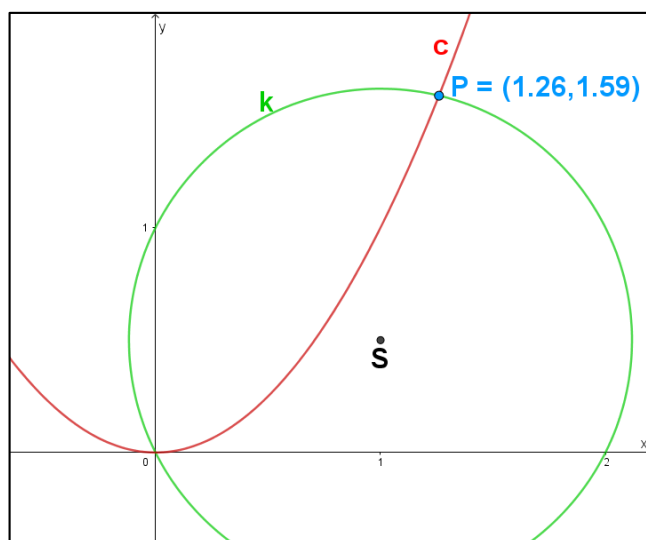


Obrázek 26: Graf paraboly c , kružnice k , a jejich průsečík P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 1:

Zvolíme $a = 1$ a $b = 2$:

Mějme parabolu o rovnici $c: x^2 = y$, v obrázku 27 je parabola označena červeně. Sestrojme kružnici, se středem v bodě S , která má po dosazení a, b tvar $k: (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(1^2 + 2^2)$. Sestrojíme průsečík v prvním kvadrantu a zjistíme jeho souřadnice $P \doteq [1,26; 1,59]$.



Obrázek 27: Graf paraboly c , kružnice k a jejich průsečík P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Provedeme algebraickou kontrolu: dosadíme $a = 1$ a $b = 2$ do odvozeného obecného vztahu $P = [\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$ a dostáváme průsečík: $P = [\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}] \doteq [1,26; 1,59]$. Z čehož vyplývá, že hrana hledané krychle o dvojnásobném objemu má hranu o délce $x = \sqrt[3]{2}$. Je zřejmé, že souřadnice průsečíku zjištěné grafickou konstrukcí odpovídají hodnotám vypočteným algebraicky.

3.1.4 GRÉGOIRE (1668)

Řeší problém zdvojené krychle následujícím způsobem:

Zvolíme obdélník $ABCD$, který má délku stran rovnu a, b . Volíme $b = 2a$.

Sestrojíme k tomuto obdélníku kružnici opsanou k ; jejíž rovnice je $k: x^2 + y^2 = bx + ay$.

Dále sestrojíme hyperbolu h , jejíž rovnice je $h: xy = ab$. Tato hyperbola má střed O v bodě A (zapišme: $A \equiv O$) a jde vrcholem $C = [a; b]$.

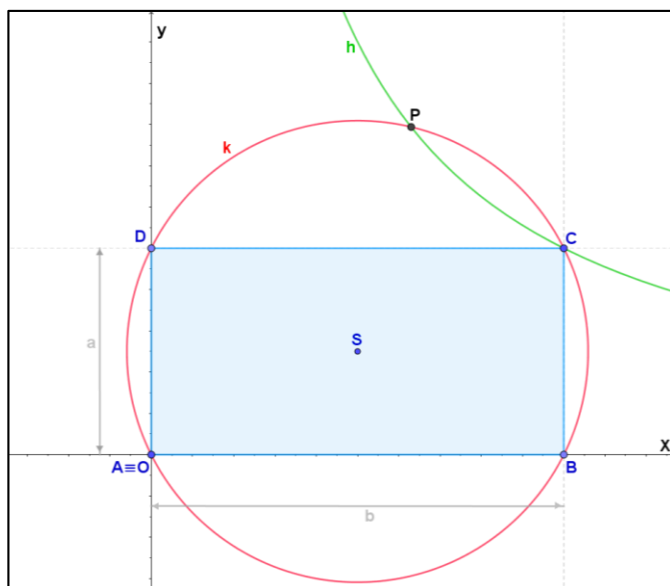
Dosaďme $x = \frac{ab}{y}$ (popřípadě $y = \frac{ab}{x}$) do první rovnice $k: x^2 + y^2 = bx + ay$.

Dosaď $x = \frac{ab}{y}$

- $\frac{(ab)^2}{y^2} + y^2 = \frac{ab^2}{y} + ay$
- $(ab)^2 + y^4 = ab^2y + ay^3$
- $(ab)^2 - ab^2y = ay^3 - y^4$
- $ab^2 * (a - y) = y^3 * (a - y)$
- $ab^2 = y^3$
- $y = \sqrt[3]{ab^2}$

Dosaď $y = \frac{ab}{x}$

- $\frac{(ab)^2}{x^2} + x^2 = \frac{a^2b}{x} + bx$
- $(ab)^2 + x^4 = a^2bx + bx^3$
- $(ab)^2 - a^2bx = bx^3 - x^4$
- $a^2b * (b - x) = x^3 * (b - x)$
- $a^2b = x^3$
- $x = \sqrt[3]{a^2b}$



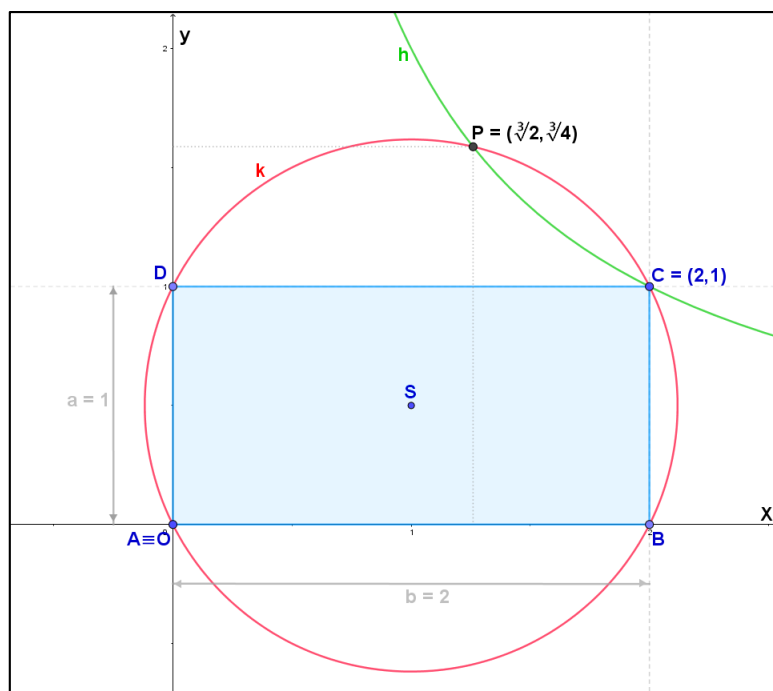
Obrázek 28: Grégoire- řešení delického problému. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Další hledaný průsečík P má souřadnice $[\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$. Z toho vyplývá, že pokud původní krychle měla zadanou délku hrany a krychle o dvojnásobném objemu má tedy délku hrany $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Zvolme obdélník $ABCD$ o délce stran $a = 1$ $b = 2$:

Sestrojme k tomuto obdélníku kružnici opsanou k ; jejíž rovnice je $k: x^2 + y^2 = 2x + 1y$.

Dále sestrojme hyperbolu h , jejíž rovnice je $h: xy = 2$. Tato hyperbola má střed O v bodě A (zapišme: $A \equiv O$) a prochází vrcholem $C = [2; 1]$. Vzniklý průsečík těchto dvou kuželoseček označme jako P , tento bod má souřadnice $[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}]$. Z toho vyplývá, že pokud původní krychle měla zadanou délku hrany $a = 1$, krychle o dvojnásobném objemu má tedy délku hrany $x = \sqrt[3]{2}$.



Obrázek 29: Grégoire- řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Provedeme algebraickou kontrolu: dosadíme zvolené strany $a = 1$ a $b = 2$ do odvozeného obecného vztahu $P = [\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}]$ a dostáváme průsečík: $P = [\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}]$.

Je zřejmé, že souřadnice průsečíku zjištěné grafickou konstrukcí odpovídají hodnotám vypočteným algebraicky.

3.1.5 PLATON (429-347 L. PŘ. N. L.)

Tento významný řecký filosof, pedagog a matematik sestrojil jeden z nejstarších mechanismů na řešení problému zdvojené krychle. Byl to žák Sokratův, založil slavnou Athénskou akademii, která se později stala inspirací a vzorem vznikajících evropských univerzit. Znamějšší jsou spíše jeho filozofická díla, ale i v nich se odkazuje na matematiku a geometrii. Ve své sedmé knize „*Ústava*“ (někdy také překládáno jako „*Republika*“) obecně popisuje i svůj vztah k matematice, kterou rozděluje do čtyř odvětví na aritmetiku, geometrii, stereometrii (prostorovou geometrii) a astronomii. Matematiku považuje za první krok ve výuce filozofie. Na dveřích jeho školy vysela cedule s nápisem: „*ten kdo pohrdá geometrií, nesmí vstoupit do mých dveří*“.

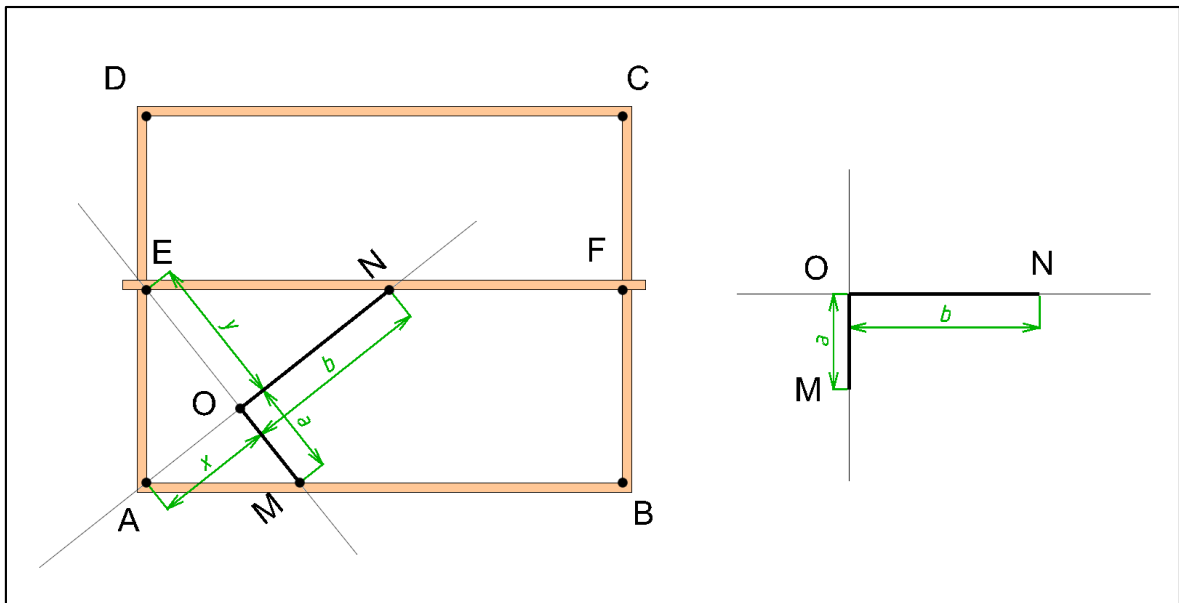
Popis tohoto aparátu:

Tento aparát se skládá z pevného rámu, který na obrázku 30 označíme jako obdélník $ABCD$. Do rámu zasadíme pravítko, které označíme jako úsečku EF , pro kterou platí, že je vždy při posouvání rovnoběžná se spodní hranou rámu, tedy $EF \parallel AB$.

Na vedlejší list papíru si narýsujeme dvě navzájem kolmé úsečky o velikostech a a b , přičemž platí, že $b = 2a$, patu kolmice označíme jako bod O .

List papíru s narýsovanými úsečkami a a b rovnáme pod sestrojovaný rám, přičemž zároveň posouváme pravítko (podle obrázku 30), tak aby platilo: že prodloužená úsečka a nám prochází na jedné straně bodem E , které leží na pravítku a na straně druhé nám vytvoří průsečík s úsečkou AB , který označíme jako M . A prodloužená úsečka b nám prochází na jedné straně bodem A a na straně druhé nám vytvoří průsečík s úsečkou EF , který označíme jako N .

Pro takto sestrojovaný aparát platí, že pro úsečku AO je její délka rovna x , tedy: $|AO| = x$ a pro úsečku EO je její délka y , tedy: $|EO| = y$.



Obrázek 30: Platon- řešení delického problému. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Bentley Microstation)

Z obrázku 30 jsou patrné vztahy:

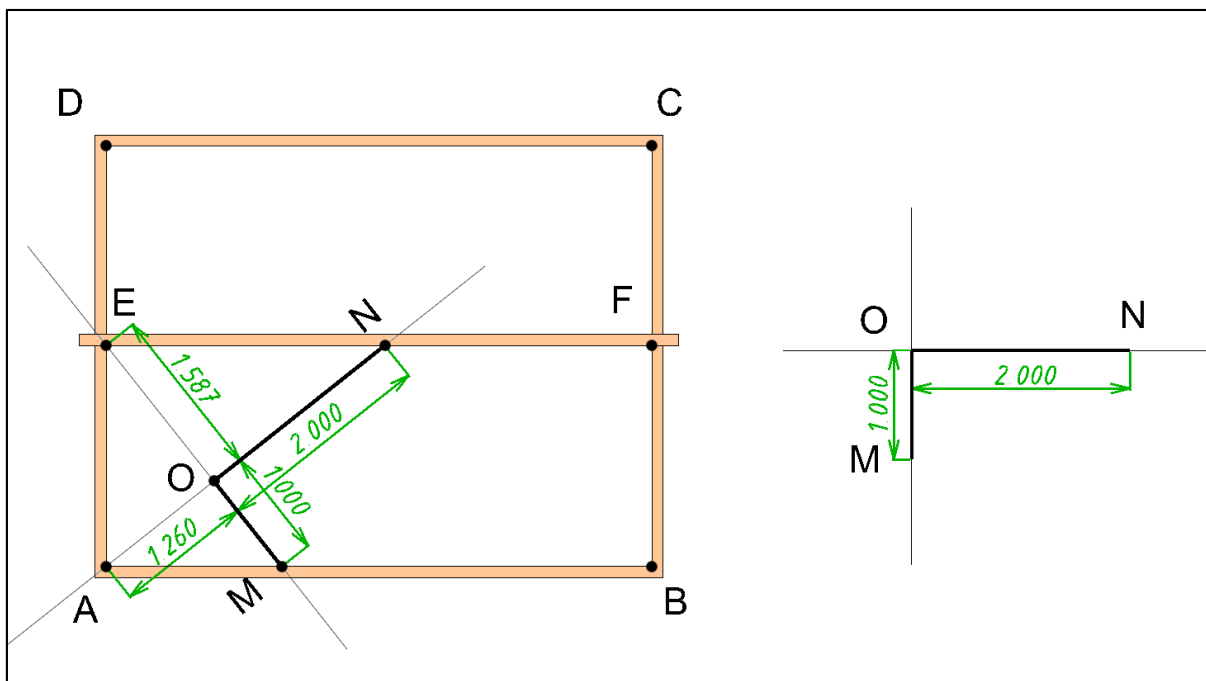
$x^2 = ay$ $x = \sqrt{ay}$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $\sqrt{ay} = \frac{y^2}{b} \quad /b$ $b\sqrt{ay} = y^2 \quad /^2$ $b^2ay = y^4 \quad /\frac{1}{y}$ $b^2a = y^3 \quad /\sqrt[3]{}$ $y = \sqrt[3]{ab^2}$	$y^2 = bx$ $y = \frac{x^2}{a}$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $\sqrt{bx} = \frac{x^2}{a} \quad /a$ $a\sqrt{bx} = x^2 \quad /^2$ $a^2bx = x^4 \quad /\frac{1}{x}$ $a^2b = x^3 \quad /\sqrt[3]{}$ $x = \sqrt[3]{a^2b}$
--	--

Tedy krychle o dvojnásobném objemu má hranu o délce $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Příklad: Zvolíme-li délku úseček $a = 1$ a $b = 2$ a dosadíme do předcházejících rovnic:

$$x = \sqrt[3]{ab^2}, \quad y = \sqrt[3]{a^2b}, \text{ vyjdou nám hledané hodnoty } x = \sqrt[3]{2} \doteq 1,26 \text{ a } y = \sqrt[3]{4} \doteq 1,59.$$

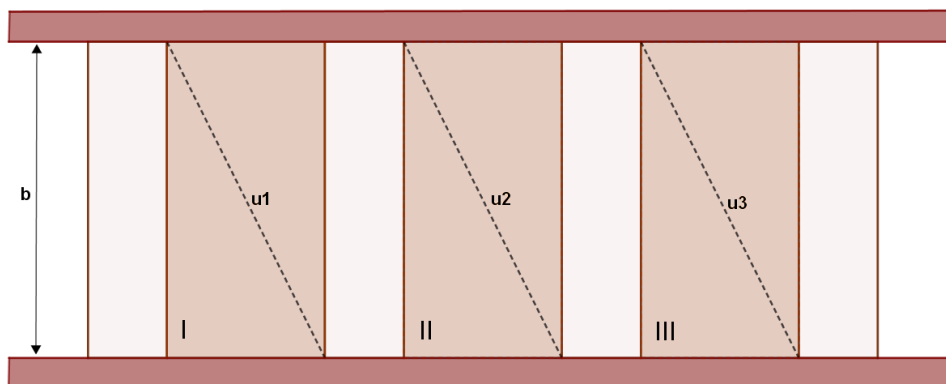
Tedy krychle o dvojnásobném objemu má hranu o délce $x = \sqrt[3]{2} \doteq 1,26$.



Obrázek 31: Platon- řešení delického problému. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu Bentley Microstation)

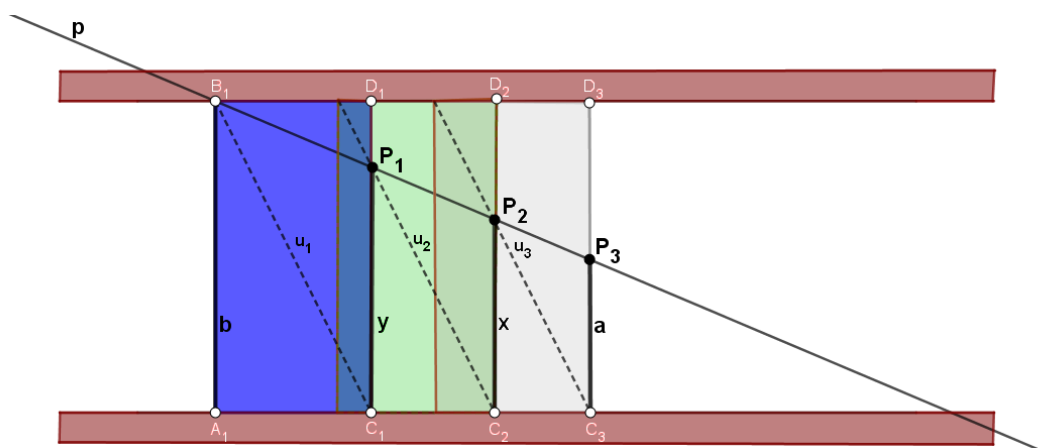
3.1.6 ERATOSTHENÉS Z KYRÉNY

Tento řecký matematik, astronom a geograf sestrojil speciální aparát zvaný mezolabium, který v našem případě řeší problém zdvojené krychle. Ve svém epigramu navádí své přátele, aby se nesnažily řešit Delický problém pomocí složitých konstrukcí Archytase nebo Menaechmuse, ale použili jeho vynález.



Obrázek 32: Eratosthenés z Kyrény- aparát na řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Tento aparát se skládá ze tří obdélníkových destiček (označme římskými číslicemi *I*, *II*, *III*), které jsou specifické tím, že mají stejné rozměry a jsou upevněny v kolejnicích. Jsou tudíž posuvné a navíc se dají podsouvat jedna pod druhou. Vzdálenost kolejnic označme jako b . Dále vyznačme úhlopříčky jednotlivých destiček s označením u_1, u_2, u_3 .



Obrázek 33: Eratosthenés z Kyrény- aparát na řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pro lepší názornost opatříme destičky barvami:

- obdélník $A_1B_1C_1D_1$ č. *I* zastoupí barva modrá
- obdélník $A_2B_2C_2D_2$ č. *II* zastoupí barva zelená
- obdélník $A_3B_3C_3D_3$ č. *III* zastoupí barva šedá

Na krajní hranu šedé destičky, tedy na úsečku C_3D_3 nanese se úsečku C_3P_3 , jejíž délka bude rovna hodnotě a . V našem případě tedy $a = \frac{b}{2}$. Nyní budeme zasouvat tabulky podle obrázku 33, tedy šedou tabulku pod zelenou a zelenou tabulku pod modrou, tak aby úhlopříčka u_2 protínala úsečku C_1D_1 v bodě P_1 a úhlopříčka u_3 protínala úsečku C_2D_2 v bodě P_2 . Vzniklá úsečka C_1P_1 má délku $|C_1P_1| = y$ a úsečka C_2P_2 má délku $|C_2P_2| = x$. Destičky posouváme tak dlouho, dokud nebudeme mít body B_1P_1, P_2, P_3 na jedné přímce, kterou označme písmenem p .

Z obrázku 33 platí:

$$\frac{b}{y} = \frac{BC_1}{P_1C_2} = \frac{y}{x} = \frac{P_1C_2}{P_2C_3} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{b}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a}$$

řešíme tuto soustavu rovnic pro $b = 2a$

$$\frac{b}{y} = \frac{x}{a} \quad /ay$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{a} \quad /ax$$

$$ab = xy$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

dosad' (a zároveň dosadíme místo b hodnotu $2a$)

$$2a^2 = \frac{x^3}{a} \quad /a$$

$$2a^3 = x^3 \quad /\sqrt[3]{\quad}$$

$$x = a\sqrt[3]{2}$$

Mějme krychli o hraně a , krychle o dvojnásobném objemu bude tedy mít hranu $x = a\sqrt[3]{2}$.

3.1.7 PŘIBLIŽNÉ KONSTRUKCE

Pojmem „přibližná konstrukce“ budeme označovat takové konstrukce, které z algebraického hlediska nedávají přesný výsledek, ale pouze se k němu blíží. Z dnešního úhlu pohledu, kdy rýsování grafických konstrukcí provádíme v počítačových softwarech a jediné co nás omezuje v přesnosti, je přesnost reprezentace desetinného čísla v počítači, respektive v daném softwaru, se může zdát použití těchto metod jako úplně nesmyslné. Mějme ale na paměti, že při rýsování na papíře užitím pravítek a kružitek vždy při každé operaci uděláme nějakou drobnou chybu. Pokud máme metodu, která vede k přesnému řešení po sto krocích a metodu která vede k přibližnému řešení po pěti krocích, tak ta přibližná nám dá v praxi pravděpodobně lepší výsledek než metoda teoreticky přesná.

Metoda 1: řetězové zlomky

Řetězových zlomků se dotknou pouze okrajově. Budeme používat řetězové zlomky v následujícím tvaru: $q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \frac{1}{q_5 + \dots \frac{1}{q_n}}}}}$, kde $q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ a $q_1 \in \mathbb{N}_0$. Číslům

q_1, q_2, \dots, q_n říkáme neúplné podíly. Vzhledem k tomu, že se budeme snažit pomocí řetězových zlomků rozepsat iracionální čísla, bude počet prvků q_1, q_2, \dots, q_n nekonečný.

Obecně lze postup pro sestavení řetězového zlomku popsat takto:

Budiž $a > 0, a \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}), a = [a] + \frac{1}{a_1}$, kde **závorky [] značí celou část**.

Potom $q_1 = [a], a_1 > 1, a_1 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \rightarrow a_1 = \frac{1}{a - q_1} \rightarrow q_2 = [a_1], a_2 = \frac{1}{a_1 - q_2}, \dots$

Příklad 1:

Za použití řetězových zlomků rozviň číslo $\sqrt[3]{2}$.

$$q_1 = [\sqrt[3]{2}] = 1, a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$q_2 = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \right] = 3, a_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - 3}$$

$$q_3 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - 3} - 1} \right] = 1, a_3 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - 3} - 1}$$

$$q_4 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - 3} - 1} - 1} - 1} \right] = 5, a_4 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - 3} - 1} - 1} - 5}$$

$$q_5 = \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-3}-1}-5}} \right] = 1, \quad a_5 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-3}-1}-5}}$$

Jak je vidět, tak výpočet dalších členů je nesmírně složitý a bez počítačového vybavení a znalostí moderní matematiky dále neproveditelný. Dle [SEIFERT, 1951] je tato metoda použitelná pouze pro kvadratické problémy.

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \doteq 1.25925, \text{ pro porovnání: } \sqrt[3]{2} \doteq 1,25992.$$

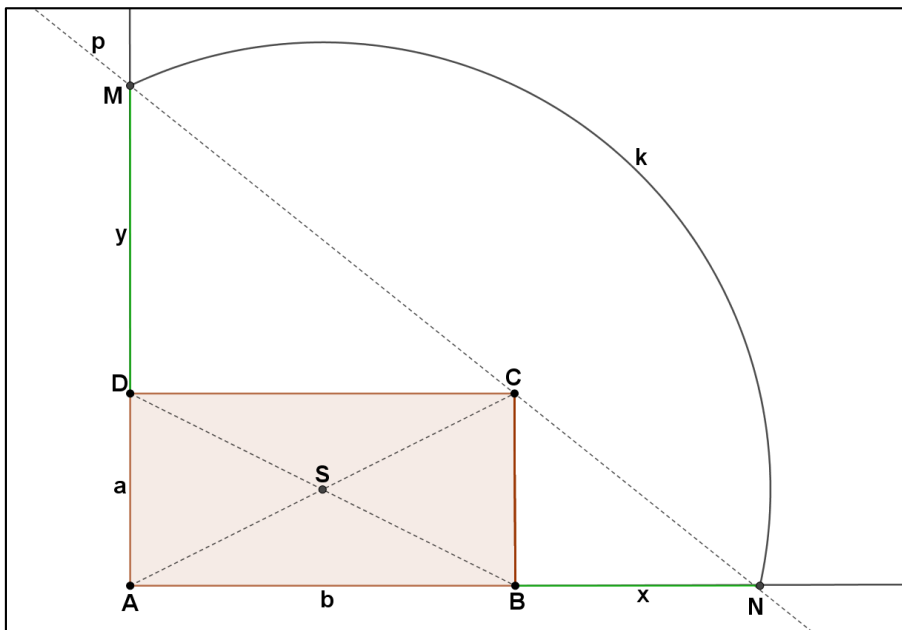
Tato metoda je ale velice zdlouhavá a pro rovnice vyšších řádů nepoužitelná. Proto je lepší dávat přednost konstrukci, kterou lze provést s nejmenším počtem přímek a kružnic a při níž je odchylka od správného výsledku tak malá, že s ní musíme počítat při práci s našimi pomůckami nebo že ji nelze smysly ani postřehnout.

Metoda 2: Apollónius z Pergy (270-186 l. př. n. l.)

Apollónius z Pergy byl významný geometr, který zkompletoval poznatky o kuželosečkách se zaměřením normály, minima a maxima, které vedly k definici poloměru křivosti pro každý bod kuželosečky a ve výsledku ke konstrukci evoluty. Dá se říct, že Apollónius z Pergy uzavírá poznatky starověké řecké geometrie. A rovněž je autorem následující přibližné konstrukce vedoucí k řešení Delického problému.

Postup:

- Narýsujeme obdélník $ABCD$, kde $|AB| = b$, $|AD| = a$, $b = 2a$.
- Sestrojíme střed obdélníku $ABCD$, označme ho S . Tento střed leží na průsečíku úhlopříček obdélníku $ABCD$.
- Dále sestrojíme kružnici k se středem v bodě S , která protíná prodloužené strany obdélníka v bodech M, N . Body M, N, C leží na jedné přímce, kterou nazveme p .
- Vzniknou nám úsečky DM a BN , jejichž délky jsou následovné: $|DM| = y$, $|BN| = x$.



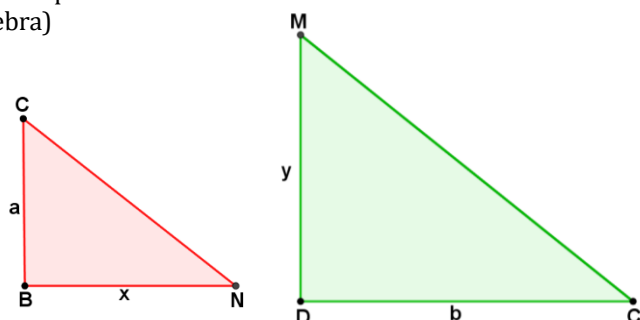
Obrázek 34: Apollónius z Pergy- řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Z obrázku 35 vidíme, že platí:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$$

$$xy = ab$$

(1) v obrázku 36 označeno jako zelená hyperbola h_1



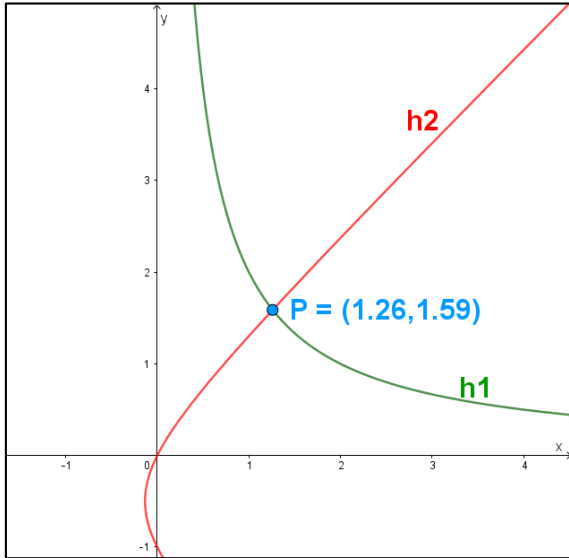
Obrázek 35: Trojúhelníky $\triangle BNC$ a $\triangle DCM$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Jelikož body M, N leží na jedné kružnici o středu S , platí: $|MS| = |NS|$, neboli:

$$\left(y + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - y^2 = ay - bx \quad (2) \text{ v obrázku 36 označeno jako červená hyperbola } h_2$$



Obrázek 36: Graf hyperbol: h_1 a h_2 a jejich průsečík P , pro $a = 1$ a $b = 2$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Nyní je potřeba nalézt průsečík rovnic (1) a (2), který nalezneme jako řešení této soustavy rovnic. Z rovnice (1) vyjádříme x a y , tedy: $x = \frac{ab}{y}$, $y = \frac{ab}{x}$ a dosadíme do rovnice (2).

$$\text{Dosad' } x = \frac{ab}{y}$$

$$\frac{a^2b^2}{y^2} - y^2 = ay - \frac{ab^2}{y}$$

$$a^2b^2 - y^4 = ay^3 - ab^2y$$

$$ab^2(a + y) = y^3(a + y)$$

$$y^3 = ab^2$$

$$y = \sqrt[3]{ab^2}$$

$$\text{Dosad' } y = \frac{ab}{x}$$

$$x^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} = \frac{a^2b}{x} - bx$$

$$x^4 - a^2b^2 = a^2bx - bx^3$$

$$a^2b(b + x) = x^3(b + x)$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

Hledaný průsečík je tedy $P = \left[\sqrt[3]{a^2b}; \sqrt[3]{ab^2}\right]$.

Metoda 3: Vargiova konstrukce (1877)**Postup:**

- Mějme krychli $ABCDEFGH$, která má hranu krychle o délce $a = 1$.
- Sestrojme úhlopříčku stěny $ABCD$ a označme ji u . Délka úhlopříčky je $u = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
- Sestrojme střední geometricky úměrnou obou úseček a, u a dostaneme vztah

$$m_1 = \sqrt{a \cdot u} = \sqrt{a \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \doteq 1,189207.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček u, m_1 a dostaneme vztah

$$m_2 = \sqrt{u \cdot m_1} = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}} = 2^{\frac{3}{8}} \doteq 1,296839.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček m_1, m_2 a dostaneme vztah

$$m_3 = \sqrt{m_1 \cdot m_2} = \sqrt{2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{8}}} = \sqrt{2^{\frac{5}{8}}} = 2^{\frac{5 \cdot 1}{8 \cdot 2}} = 2^{\frac{5}{16}} \doteq 1,241857.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček m_2, m_3 a dostaneme vztah

$$m_4 = \sqrt{m_2 \cdot m_3} = \sqrt{2^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{5}{16}}} = \sqrt{2^{\frac{11}{16}}} = 2^{\frac{11 \cdot 1}{16 \cdot 2}} = 2^{\frac{11}{32}} \doteq 1,269050.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček m_3, m_4 a dostaneme vztah

$$m_5 = \sqrt{m_3 \cdot m_4} = \sqrt{2^{\frac{5}{16}} \cdot 2^{\frac{11}{32}}} = \sqrt{2^{\frac{21}{32}}} = 2^{\frac{21 \cdot 1}{32 \cdot 2}} = 2^{\frac{21}{64}} \doteq 1,255380.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček m_4, m_5 a dostaneme vztah

$$m_6 = \sqrt{m_4 \cdot m_5} = \sqrt{2^{\frac{11}{32}} \cdot 2^{\frac{21}{64}}} = \sqrt{2^{\frac{43}{64}}} = 2^{\frac{43 \cdot 1}{64 \cdot 2}} = 2^{\frac{43}{128}} \doteq 1,262197.$$

- Sestrojme střední geometricky úměrnou úseček m_5, m_6 a dostaneme vztah

$$m_7 = \sqrt{m_5 \cdot m_6} = \sqrt{2^{\frac{21}{64}} \cdot 2^{\frac{43}{128}}} = \sqrt{2^{\frac{85}{128}}} = 2^{\frac{85 \cdot 1}{128 \cdot 2}} = 2^{\frac{85}{256}} \doteq 1,258784.$$

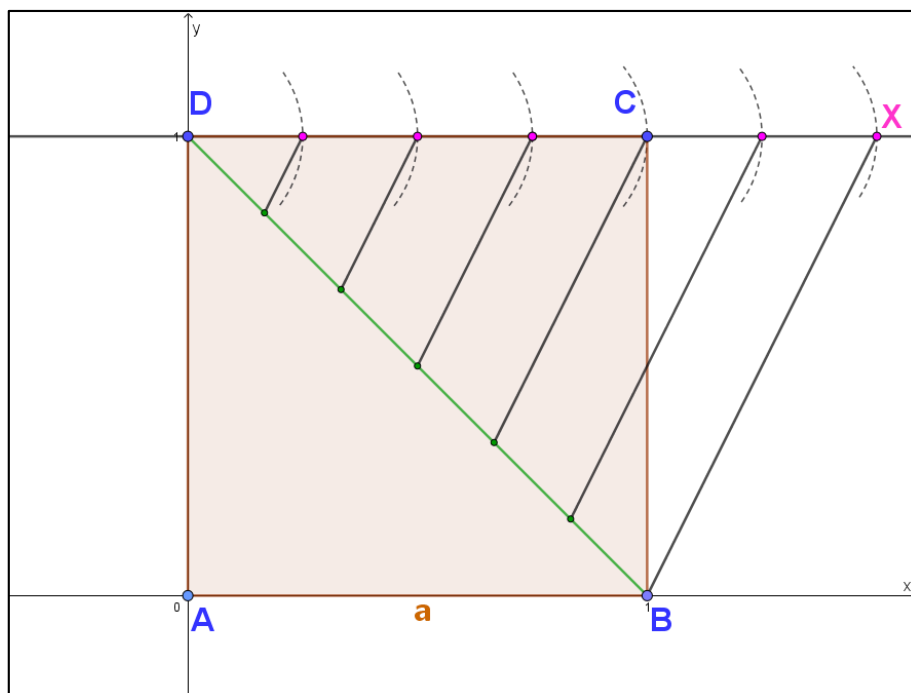
- Každým dalším krokem se více přibližujeme k požadovanému výsledku: $\sqrt[3]{2} \doteq 1.259921$.

Metoda 4: G. Buonafalce (1876)

Uvedeme si zde jednu z mnoha významných metod tohoto matematika.

Postup:

- Mějme čtverec $ABCD$, který má délku strany $|AB| = a = 1$.
- Sestrojme úhlopříčku BD čtverce $ABCD$ a označme ji u .
- Délka úhlopříčky je $|BD| = u = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
- Úhlopříčku u rozdělíme na 6 dílků o stejné délce tak, že zvolíme polopřímku pod úhlem 45° , v našem případě to bude polopřímka $\mapsto DC$. Na této polopřímce sestrojíme šest kružnic o stejném libovolném poloměru. První kružnice bude mít střed v bodě D , každá další kružnice bude mít střed v nově nalezeném průsečíku předešlé kružnice a polopřímky $\mapsto DC$. Z poslední průsečíku, který označíme jako bod X , sestrojíme úsečku XB . Z každého dalšího průsečíku vedeme rovnoběžku k úsečce XB . Průsečíky vzniklých rovnoběžek a úhlopříčky AD jsou hledané body, které dělí úhlopříčku na šestiny.

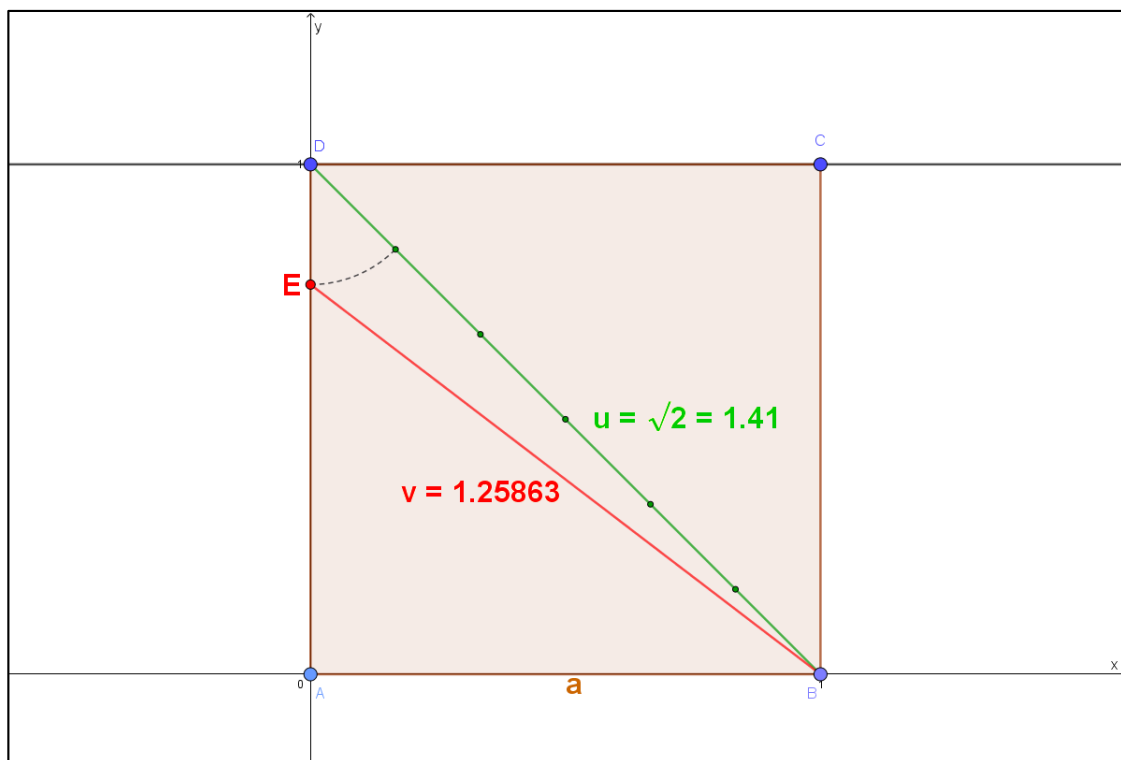


Obrázek 37: Postup na dělení úsečky DB .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

- V dalším kroku nalezneme bod E , který leží na úsečce AD a platí pro něj vztah $|DE| = \frac{1}{6}|BD|$. Sestrojíme tedy kružnici se středem v bodě D a poloměrem $r = \frac{1}{6}\sqrt{2}$, průsečík této kružnice a úsečky AD , je hledaný bod E .
- Víme tedy, že $|AE| = 1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}$.
- Podle Pythagorovy věty platí vztah:

$$|BE| = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{36}} = \sqrt{\frac{74 - 12\sqrt{2}}{36}} \doteq 1,25863.$$

- Vzdálenost: $v = |BE| \doteq 1,25863$ je přibližně rovna hledanému číslu $\sqrt[3]{2} \doteq 1,2599$.



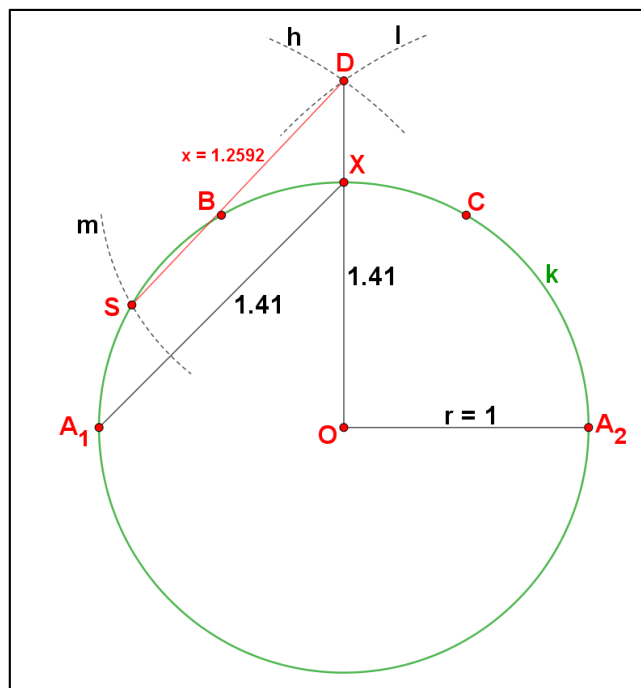
Obrázek 38: G. Buonafalce- řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Metoda 5: Quemper de Lanascol

Nyní zde popíšeme jednu z mnoha konstrukcí tohoto autora na řešení delického problému z jeho spisu „Géométrie de compas“.

Postup této konstrukce:

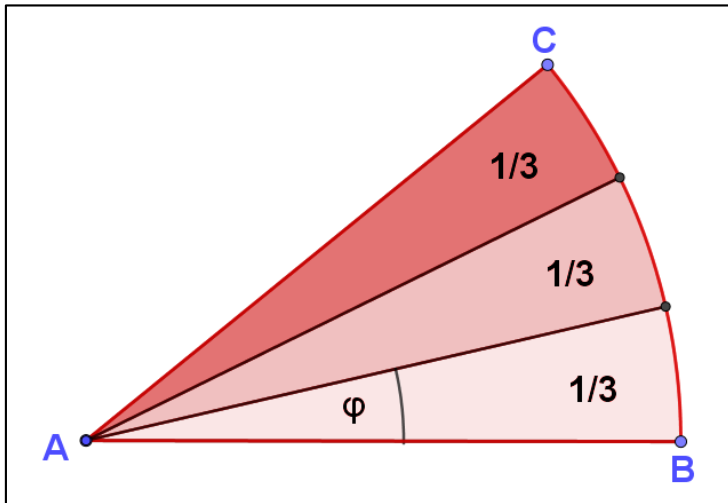
- Zvolme libovolný bod a označme ho písmenem O .
- Narýsujeme kružnici $k(O, r = 1)$, tedy kružnici se středem v bodě O a poloměrem $r = 1$.
- Sestrojíme na kružnici k za užití pomocných kružnic body A_1, B, C, A_2 , tak že platí: $|A_1B| = |BC| = |CA_2| =$ poloměru kružnice $k = 1$.
- Dále sestrojíme dvě kružnice $h(A_1, r = |A_1C|)$, $l(A_2, r = |A_2B|)$. Průsečík těchto dvou kružnic označme jako bod D .
- Nyní sestrojíme bod X , který leží na kružnici k a platí pro něj vztah: $|A_1X| = |A_2X| = |OD|$.
- Bod S najdeme tak, že sestrojíme kružnici m se středem v bodě X a poloměrem $r = 1$. Zapisujeme $m(X, r = 1)$.
- Naše hledané řešení je rovno délce strany SD , tedy $|SD| = x \doteq 1,259281$, což se přibližně rovná číslu $\sqrt[3]{2} \doteq 1,2599$.



Obrázek 39: Quemper de Lanascol- řešení delického problému.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3.2 OBECNÁ KUBICKÁ ROVNICE POMOCÍ TRISEKCE ÚHLU

Dalším typem úlohy, která trápila naše předky, je trisekce úhlu. Metodami eukleidovské geometrie umíme poměrně snadno rozdělit úhel nebo kruhový oblouk na dvě stejné části. Problém nastává, pokud chceme úhel rozdělit na tři stejné části. Tato úloha je pro eukleidovskou geometrii neřešitelná. Starověcí Řekové, ve snaze tento problém vyřešit, našli několik neeukleidovských konstrukcí.



Obrázek 40: Úhel $\sphericalangle BAC = 3\varphi$ rozdělený na tři stejné části.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Cesta, která vede od rozdělení úhlu na tři stejné části ke kubické rovnici, není na první pohled zřejmá jako u Delického problému, kde se navíc jedná o ryze kubickou rovnici. V tomto případě budeme muset použít goniometrických funkcí. Použijeme vzorec pro tangentu trojnásobného úhlu. [BARTSCH, 1996]

$$\operatorname{tg}3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}$$

Provedeme substituci: $\operatorname{tg}3\varphi = a$, $\operatorname{tg}\varphi = x$ a dostaneme rovnici: $a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$, rovnici vynásobíme $1 - 3x$ a upravíme na $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$.

Substitucí $x = y + a$ ji lze převést na kubickou rovnici bez kvadratického členu:

$$(y + a)^3 - 3a(y + a)^2 - 3(y + a) = 0$$

$$y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 - 3ay^2 - 6a^2y - 3a^3 - 3y - 3a - a = 0$$

$$y^3 - 3a^2y - 2a^3 - 3y - 2a = 0$$

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0$$

Příklad

Najděte řešení rovnice $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$.

- Abychom mohli provést řešení kubické rovnice pomocí trisekce úhlu, musí zadání odpovídat tvaru $ax^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$.
- V tomto případě je vidět, že zadání odpovídá předpisu $a = 1$.
- Z předcházející teorie víme, že: $a = tg(\varphi)$ a $\varphi = arctg(a) = \frac{\pi}{4}$.
- Nyní provedeme konstrukci a rozdělíme úhel na tři stejné části.
- Získáme tedy úhel $\frac{\pi}{12}$.
- Potom tedy tangenta tohoto úhlu je řešením zadané rovnice.

$$x = tg\left(\frac{\pi}{12}\right) \doteq 0.2679$$

- Dosazením výsledku do zadání snadno ověříme správnost řešení.

Tento postup lze obecně aplikovat na všechny metody trisekce úhlu, protože tyto metody „pouze“ graficky dělí zadaný úhel na tři stejné části.

3.2.1 HIPPIÁS Z ÉLIDY (5. STOL. PŘ. N. L.)

Hippiás byl sofista, všestranně vzdělaný člověk, matematik a astronom. Byl však i znalcem literatury, hudby a historie, ovládal i některá řemesla. Kritizoval současnou společnost; mj. prohlašoval, že zákon je tyranem lidí, že se dopouští mnoha násilností proti přírodě, že uzavírá lidi do místních společenství, ač jsou od přírody příbuzní atd. Připisuje se mu objev křivky quadratrix, pomocí které bylo možno provádět například i trisekce úhlů.

[BEČVÁŘ a FUCHS, 1993]

Tento úžasný matematik přišel s řešením metody „trisekce úhlů“, které spočívalo v tom, že převedeme problém dělení úhlu na dělení úseček.

Postup této konstrukce:

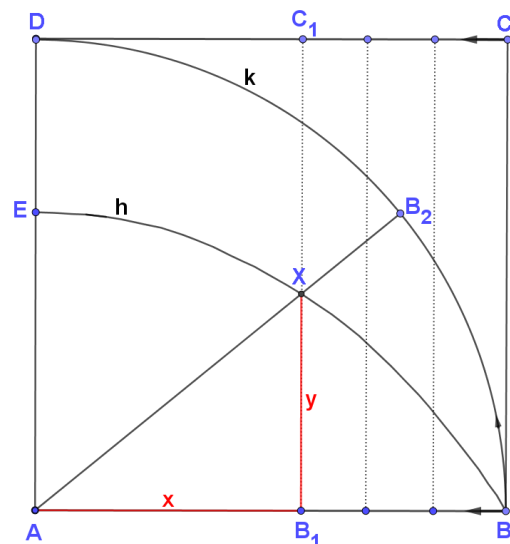
Sestrojíme čtverec $ABCD$

Dále provedme dvě operace, které je nutno provést naráz a kde naše hledaná křivka bude ležet na průsečících, které nám vzniknou.

- Posouváme úsečku BC rovnoměrně do úsečky AD .
- A zároveň posouváme úsečku AB rovnoměrně do úsečky AD , přičemž A je pevný bod, kolem kterého se úsečka AB otáčí. Bod B , se tedy posouvá po kružnici k se středem v bodě A a poloměrem, který bude rovný délce úsečky AB .

Obě úsečky BC a AB , které rovnoměrně posouváme, tvoří řadu průsečíků, kterými proložíme křivku a označíme ji písmenem h . Tato křivka začíná v bodě B a končí v bodě na úsečce AD , který označme jako E .

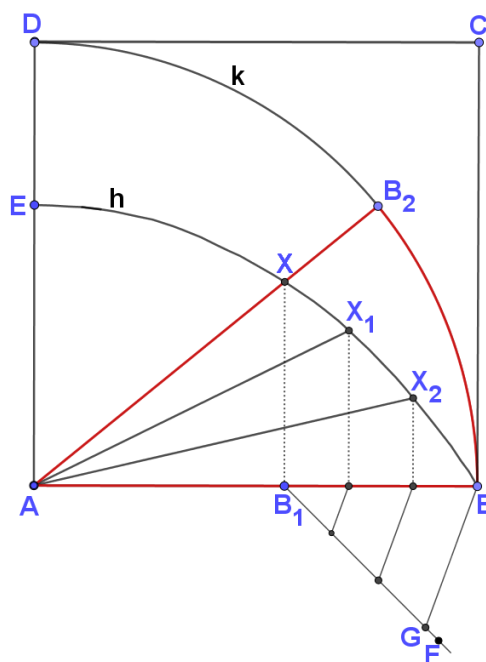
Křivka h se nazývá kvadratrix.



Obrázek 41: Hippiás z Élidy- křivka kvadratrix označena písmenem h .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Nyní již máme připravený aparát na řešení problému dělení úhlu, stačí ukázat jak s ním dále pracovat (viz obrázek 42):

- Určeme libovolný úhel $\sphericalangle BAB_2$ (v obrázku 42: vyznačen červenou barvou), kde bod B_2 leží na části kružnice $k(A, r = |AB|)$, která vede z bodu B do bodu D , tak jako na obrázku 42. Tento úhel bychom rádi rozdělili na tři stejně dlouhé úseky.
- Úsečka AB_2 nám protíná Hippiovu křivku v bodě, který označme jako bod X .
- Jelikož víme, že bodem X prochází i posunutá úsečka BC , snadno nalezneme její průsečík s úsečkou AB a tím bude bod B_1 .
- Úsečku B_1B rozdělíme na tři části. Tak, že si zvolíme polopřímku například pod úhlem 45° , v našem případě to bude polopřímka $\mapsto B_1F$. Na této polopřímce sestrojíme 3 kruhové oblouky o stejném libovolném poloměru. První kružnice bude mít střed v bodě B_1 , každá další kružnice bude mít střed v nově nalezeném průsečíku předešlé kružnice a polopřímky $\mapsto B_1F$. Z poslední průsečíku, který označíme jako bod G , sestrojíme úsečku GB . Z každého dalšího průsečíku vedeme rovnoběžku k úsečce GB . Průsečíky vzniklých rovnoběžek a úsečky B_1B jsou hledané dělicí body, které dělí úsečku B_1B na třetiny. Vytvořené dělicí body nanese přes kolmici na Hippiovu křivku, kde nám vzniknou body X_1, X_2 . Nyní sestrojíme úsečky AX_1 a AX_2 .



Obrázek 42: Hippías z Élidy - řešení problému trisekce úhlu. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Naši křivku h, tedy Hippiovu křivku si nyní vyjádřeme analyticky:

Souřadný systém bude mít střed v bodě A a jako osy poslouží úsečky AB a AD, pro které bude platit: $|AB| = |AD| = 1$ (viz Obrázek 41).

Označme jako α zvolený úhel $\sphericalangle BAX$ ($\alpha = \sphericalangle BAX$), kde bod X je průsečík úsečky AB_2 a úsečky B_1C_1 (tedy bod na Hippiově křivce) a jeho souřadnice jsou označeny jako x a y (viz Obrázek 41).

Z obrázku 41, vidíme vztah:

$$\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-x}{1}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}(1-x)$$

Dále z vlastností pravoúhlého trojúhelníku

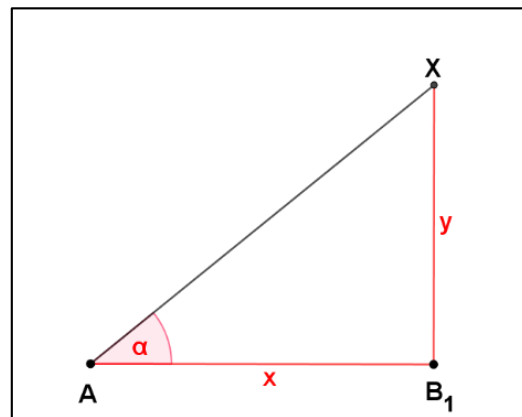
platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)$$

$$y = x \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

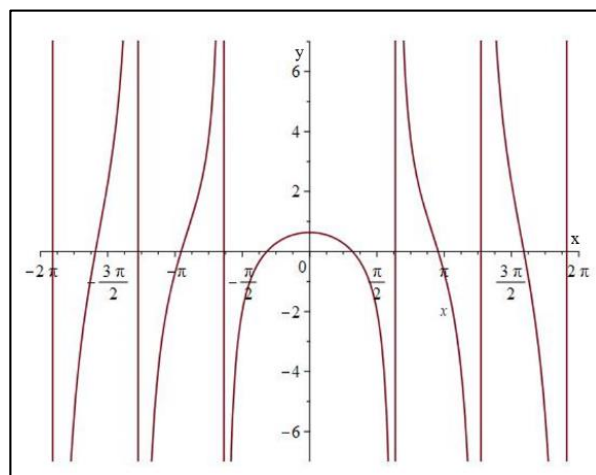


Obrázek 43: Pravoúhlý trojúhelník $\triangle AB_1X$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Na obrázku 44 vidíme graf této funkce.

Délka úsečky AD odpovídá limitě funkce $y = x \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, kde x se blíží k 0, tedy:

$$|AD| = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$



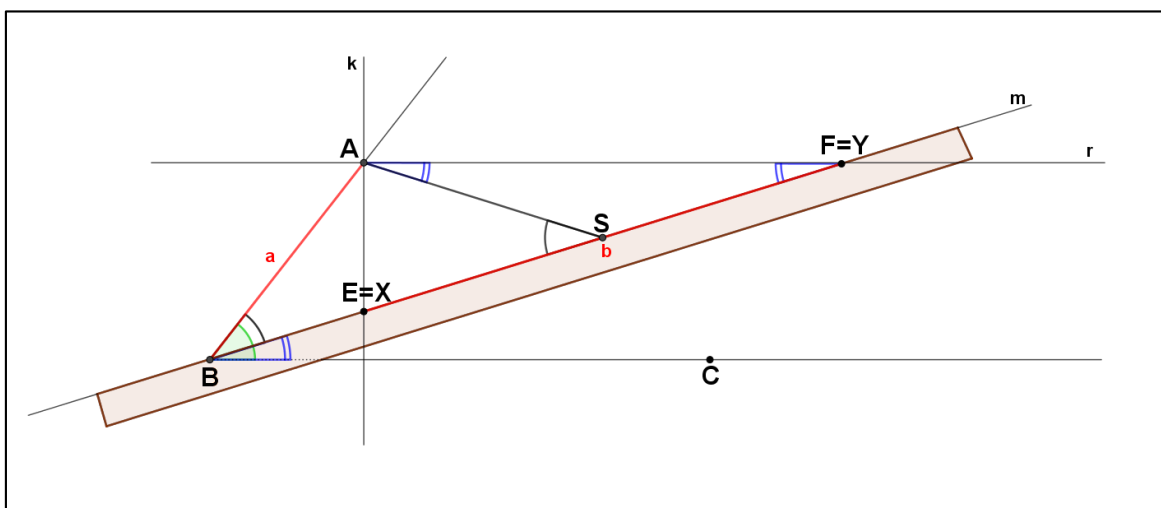
Obrázek 44: Graf funkce $y = x \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu Maple)

3.2.2 METODA VKLÁDÁNÍ

Řecká metoda, která vznikla v 5. - 4. století př. n. l., řeší problém trisekce úhlu následujícím způsobem.

Postup:

- Sestrojíme libovolný úhel $\sphericalangle ABC$.
- Na pravítku vyznačíme body X a Y , tak že platí: $|XY| = b$.
- Úsečka AB má délku $|AB| = \frac{|XY|}{2} = \frac{b}{2} = a$.
- Nyní povedeme přímku r , která bude procházet bodem A a zároveň bude rovnoběžná s úsečkou BC . Zapisujeme $A \in r \wedge r \parallel BC$.
- Sestrojíme přímku k , která bude procházet bodem A a zároveň bude kolmá k úsečce BC . Zapisujeme $A \in k \wedge k \perp BC$.
- Nyní přiložíme a posuneme pravítko tak, aby procházelo bodem B a zároveň protínalo přímky r a k , kde průsečíky označíme jako body E a F , tak že pro délku úsečky EF platí, že je rovna délce úsečky XY , tedy $|EF| = |XY|$. Podle takto přiloženého pravítka sestrojíme přímku m .
- Sestrojíme střed úsečky EF a označme ho bodem S .



Obrázek 45: Problém trisekce úhlu řešení metodou vkládání.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Protože trojúhelník $\triangle FAE$ je pravoúhlý a bod S je půlící bod přepony, víme že $|SF| = |SA| = |AB| = a$, z toho vyplývá, že trojúhelníky $\triangle AFS$ a $\triangle BSA$ jsou rovnoramenné a tedy platí:

$$\sphericalangle AFS = \sphericalangle FAS \text{ (v obrázku 45: modré dvojité úhly)}$$

$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle ASB \text{ (v obrázku 45: černé úhly)}$$

Jelikož vidíme již z Obrázku 45, že úhel $\sphericalangle BSA$ je vnějším úhlem rovnoramenného trojúhelníku $\triangle ASF$ a zároveň je známo, že velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí protilehlých vnitřních úhlů, můžeme konstatovat, že jeho velikost je rovna dvojnásobku úhlu $\sphericalangle SFA$, tedy $|\sphericalangle BSA| = 2 \cdot |\sphericalangle SFA|$.

Úhly $\sphericalangle AFS$ a $\sphericalangle SBC$ jsou střídavé a proto se jejich velikosti rovnají: $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle SBC|$.

Z těchto poznatků vyplývá, $\sphericalangle SBA = 2 \cdot \sphericalangle SBC$ a proto úhel $\sphericalangle SBC$ je přesně jednou třetinou zvoleného úhlu $\sphericalangle ABC$.

3.2.3 PAPPUS Z ALEXANDRIE (4. STOLETÍ N. L.)

Byl to řecký matematik a především významný geometr, který jako první použil k řešení problému trisekce úhlu kuželosečky. V našem případě budeme uvažovat hyperbolu a kružnici.

Postup konstrukce:

Sestrojíme hyperbolu, která má vrcholy v bodech A, B , střed v bodě $S = [m; n]$, tedy pro tento příklad: $S = [0; 0]$ a její asymptoty svírají úhel 120° . Hlavní poloosa hyperboly je rovna číslu a a vedlejší poloosa je rovna číslu $b = a\sqrt{3}$.

Rovnice této hyperboly pak je:

$$h: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{obecná rovnice hyperboly}$$

$$h: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

$$h: y^2 = 3x^2 - 3a^2$$

Nyní sestrojíme na reálné ose x bod C tak, že pro něj platí: $|OC| = |AB| = 2a$ (sestrojíme tedy tento bod jako průsečík osy x a kružnice $l(O; r = 2a)$).

Nyní se dostáváme do fáze, kdy nám do konstrukce vstoupí úhel φ , který chceme rozdělit na tři stejné části. V bodech A a C vyneseme z bodů A, C úhly o velikosti $90^\circ - \varphi$. Průsečík ramen těchto úhlů označíme S . Sestrojíme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem $SA = SC$. Průsečík kružnice k a hyperboly označíme X .

Úhel $\sphericalangle ACX$ označme jako β a úhel $\sphericalangle CAX$ označme jako α . Dokážeme, že $\beta = 2\alpha$ $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$.

Důkaz tvrzení $\beta = 2\alpha$:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{a+x} \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{y}{2a-x}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - 3(x^2 - a^2)} = \frac{y}{2a-x} = \operatorname{tg}(\beta)$$

Důkaz tvrzení $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$:

Pro důkaz tohoto tvrzení využijeme toho, že body A, C, X leží na jedné kružnici se středem v bodě S . Tedy trojúhelníky $\triangle AXS$ a $\triangle SXC$ jsou rovnostranné. Potom, podle věty o součtu úhlů trojúhelníka, lze úhly u vrcholu S zapsat takto:

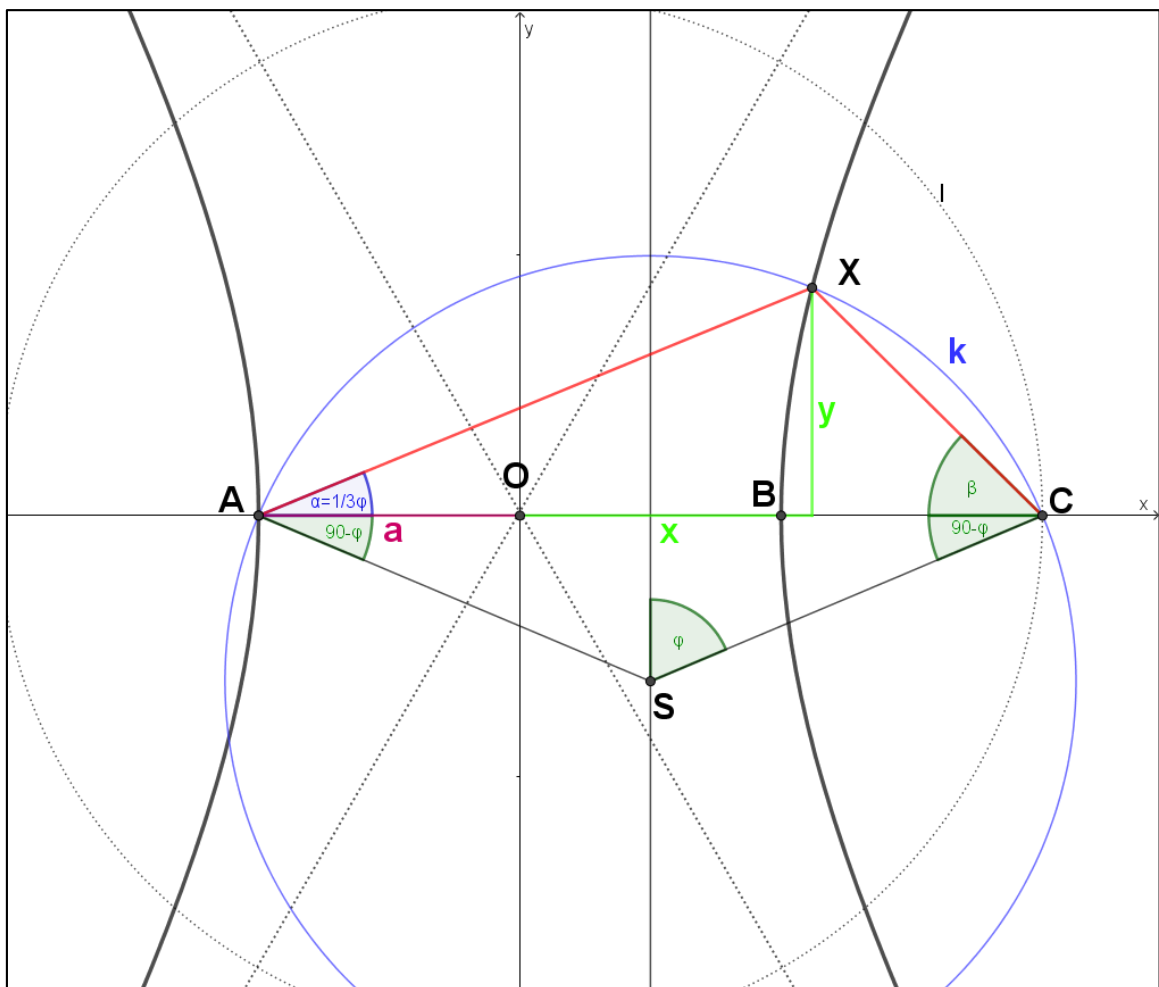
$$\sphericalangle ASX = 180^\circ - 2((90^\circ - \varphi) + \alpha) = 2\varphi - 2\alpha$$

$$\sphericalangle XSB = 180^\circ - 2((90^\circ - \varphi) + \beta) = 2\varphi - 2\beta = 2\varphi - 4\alpha$$

Z obrázku 46 je zřejmé, že součet úhlů $\sphericalangle ASX$ a $\sphericalangle XSB$ je roven dvojnásobku φ , tedy:

$$\sphericalangle ASX + \sphericalangle XSB = 2\varphi = 2\varphi - 2\alpha + 2\varphi - 4\alpha = 4\varphi - 6\alpha, \text{ z čehož úpravou získáme:}$$

$$\varphi = 3\alpha.$$



Obrázek 46: Pappus z Alexandrie- řešení problému trisekce úhlu.
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3.3 ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ROVNIC POMOCÍ KŘIVEK VYŠŠÍCH STUPŇŮ

Staří matematici nebyli příliš nadšeni z používání křivek vyšších stupňů pro řešení kubických problémů. Podle Chaslese bylo použití takových křivek metodicky nesprávné. Důvod pravděpodobně spočíval v tom, že konstrukce kuželoseček byly v té době dokonale popsány, existovaly pomůcky k jejich konstrukci, kdežto pro křivky vyšších stupňů toto neplatilo. Zároveň je ale nutné uvést, že kuželoseček se dá užít maximálně pro řešení kubických a bikvadratických úloh, ale užitím křivky třetího stupně ve spojení s kružítkem lze řešit i některé rovnice šestého stupně.

3.3.1 KUBICKÁ PARABOLA

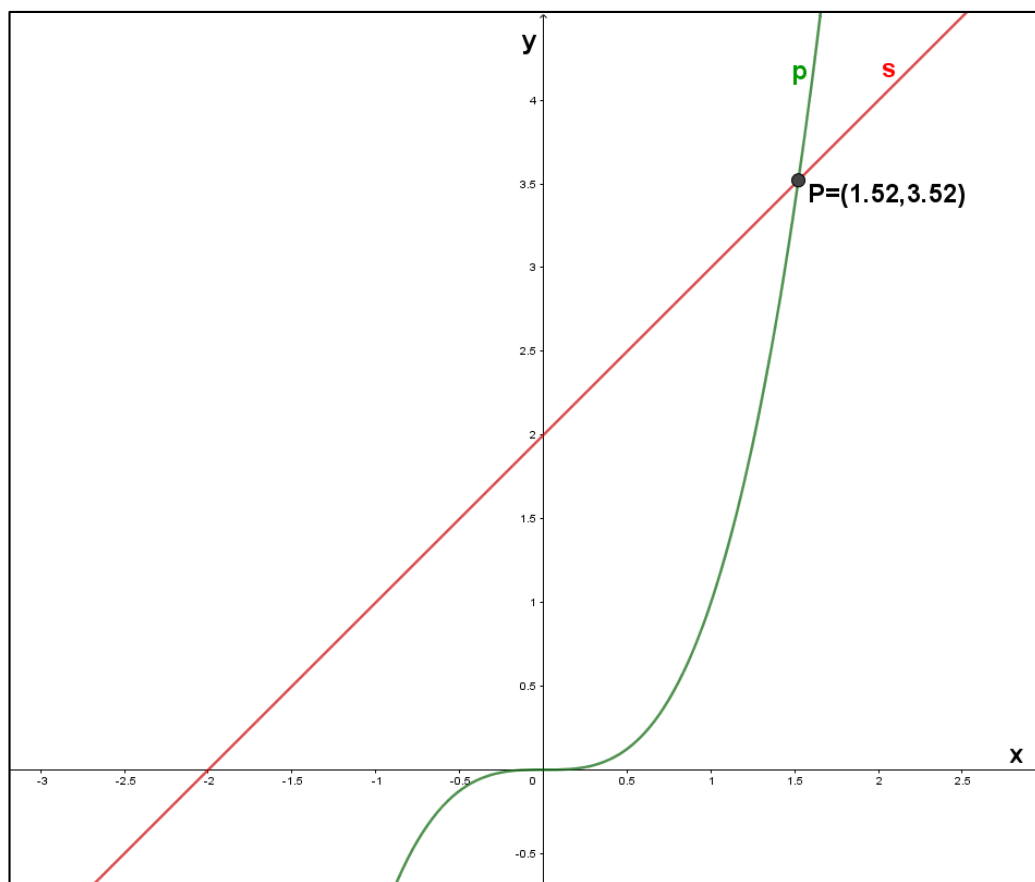
Jednou se základních křivek třetího řádu, kterou lze použít k řešení kubických rovnic, je kubická parabola, která má rovnici $p: y = x^3$.

Mějme tedy kubickou rovnici ve tvaru $x^3 - ax - b = 0$. Řešením bude nalezení průsečíku kubické paraboly $p: y = x^3$ a přímky o rovnici $y = ax + b$.

Příklad 1:

Vyřešte rovnici $x^3 - x - 2 = 0$.

- Narýsujeme kubickou parabolou $p: y = x^3$.
- Narýsujeme přímku $s: y = x + 2$.
- Určíme souřadnice průsečíků kubické paraboly a přímky $P \doteq [1,52; 3,52]$.
- $x \doteq 1,52$ je řešením dané kvadratické rovnice.
- Pro kontrolu provedeme algebraické řešení. To už je ale pro tento typ rovnice značně složité, a proto si pomůžeme výpočetní technikou, která dokáže nalézt přesné řešení $x = \frac{1}{3} \sqrt[3]{27 + 3\sqrt{78}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27 + 3\sqrt{78}}} \doteq 1,5214$. Tedy algebraické řešení odpovídá tomu grafickému.



Obrázek 47: Graf kubické paraboly p , přímky s a jejich průsečíku P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

3.3.2 DIOKLOVA KISOIDA

Další používanou křivkou byla Dioklova kisoida (*zastarale cissoida*), kterou lze zapsat rovnicí

$c: y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$. Opět budeme hledat průsečík s přímkou $p: y = ax + b$. Převedeme-li obecné

vyjádření Dioklovy kisoidy na parametrické, tak získáme následující parametrické rovnice:

$$x = \frac{2rt^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2rt^3}{1+t^2}.$$

Dosadíme parametrické vyjádření do rovnice přímky $p: y = ax + b$ a získáme

$$\frac{2rt^3}{1+t^2} = a \frac{2rt^2}{1+t^2} + b \rightarrow 2rt^3 = 2art^2 + b + bt^2 \rightarrow 2rt^3 - 2art^2 - bt^2 - b = 0$$

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 - b = 0.$$

Konstanty nahradíme: $d = 2r$; $e = -2ar - b$; $f = -b$.

A dostáváme kubickou rovnici ve tvaru: $dt^3 + et^2 + f = 0$.

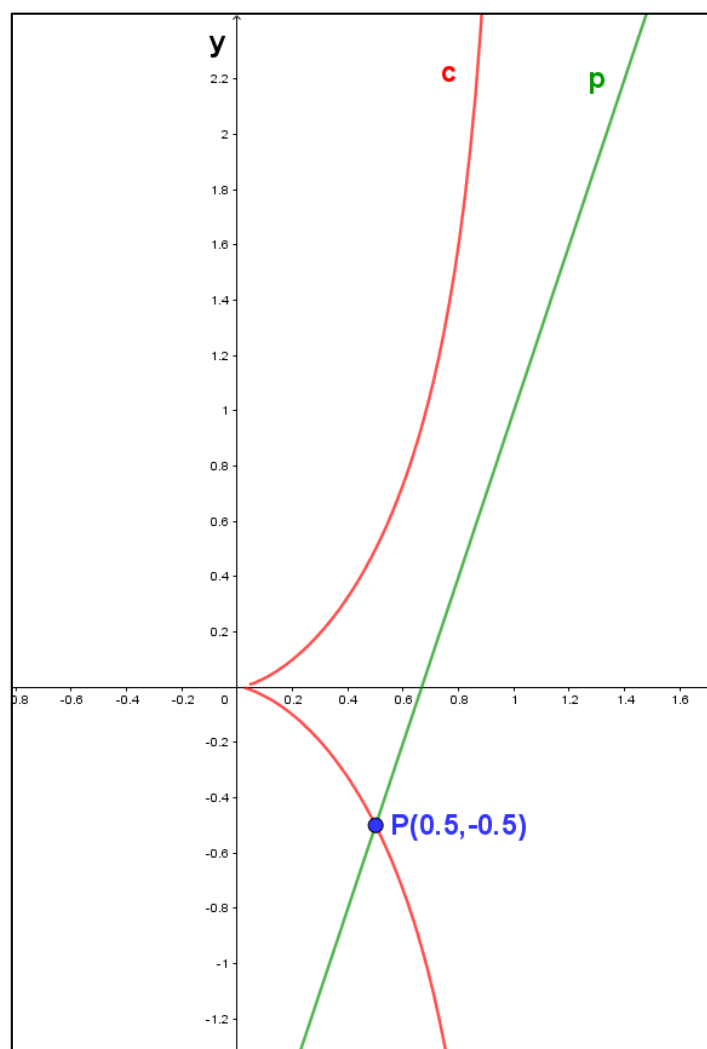
Podle geometrického významu je $t = \frac{y}{x}$.

Příklad 1:

Vyřešte rovnici $t^3 - t^2 + 2 = 0$.

- Nejdříve musíme z rovnice určit parametry přímky a Dioklovi kisoidy.
- $f = -b \rightarrow 2 = -b \rightarrow b = -2$;
- $d = 2r \rightarrow 2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2}$;
- $e = -2ar - b \rightarrow -1 = -2a \frac{1}{2} + 2 \rightarrow a = 3$
- Narýsujeme Dioklovu kisoidu $c: y^2 = \frac{x^3}{1-x}$.
- Narýsujeme přímku $s: y = 3x - 2$.
- Určíme souřadnice průsečíku Dioklovi kisoidy a přímky $P = [0,5; -0,5]$.
- Vzhledem k tomu, že parametr $t = \frac{y}{x} = \frac{-0,5}{0,5} = \mathbf{1}$.
- Dosazením výsledku do rovnice provedeme algebraickou kontrolu:

$$1^3 - 1^2 + 2 = 0 \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} . \text{ Nalezená hodnota je řešením dané kubické rovnice.}$$



Obrázek 48: Graf Dioklovi kisoidy c , přímky p a jejich průsečíku P .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

4 ŘEŠENÍ ROVNIC ČTVRTÉHO STUPNĚ

V tomto případě vyjdeme z obrácené logiky, tedy vybereme si dvě kuželosečky, například parabolu a kružnici, a ukážeme si na jaké typy rovnic čtvrtého stupně je lze použít.

Použijeme parabolu ve tvaru $p: y = x^2$ a kružnici ve tvaru $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Dosadíme rovnici paraboly do rovnice kružnice a tím eliminuje y .

$$(x - m)^2 + (x^2 - n)^2 = r^2 \rightarrow x^2 - 2xm + m^2 + x^4 - 2x^2n + n^2 - r^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^2n + x^2 - 2xm + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

$$x^4 + (-2n + 1)x^2 - 2mx + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

Dosazením za konstanty $c = 1 - 2n, d = -2m, e = m^2 + n^2 - r^2$ dostaneme rovnici:

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Použitím pevné paraboly o rovnici $p: y = x^2$ a kružnice se středem v bodě $[m, n]$ a poloměru r , lze vyřešit libovolnou rovnici čtvrtého stupně ve tvaru

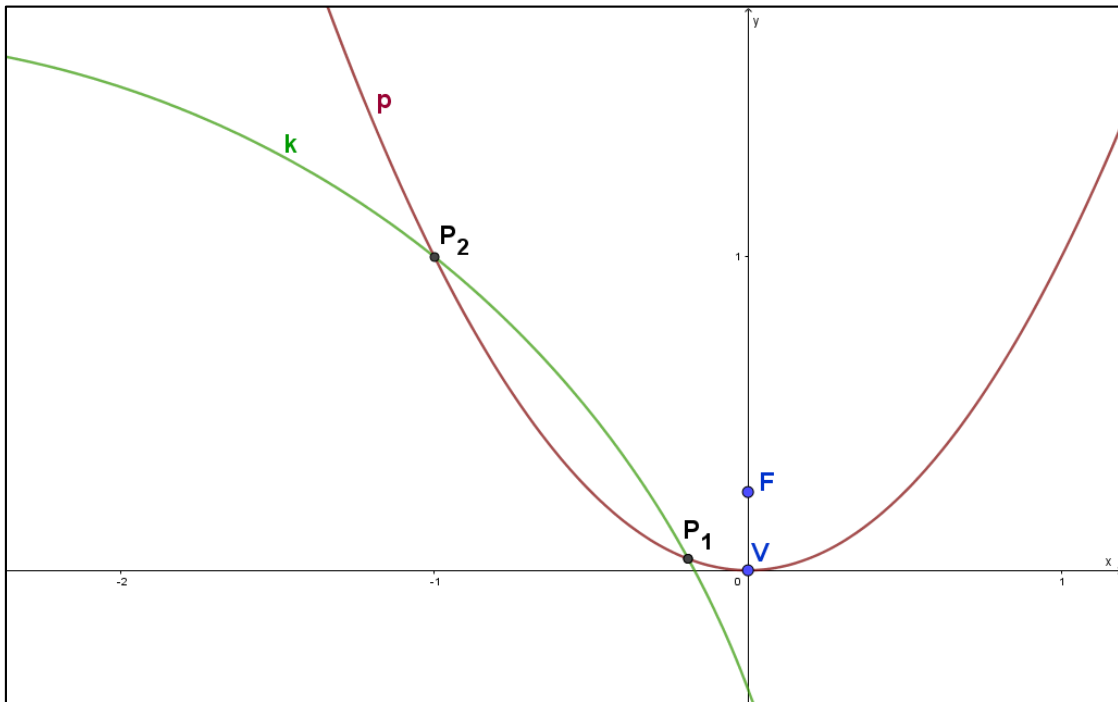
$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Příklad 1

Najděte řešení rovnice $x^4 + 4x^2 + 6x + 1 = 0$.

Sestrojíme parabolou $p: y = x^2$, tedy parabolou s vrcholem v bodě $[0; 0]$ a ohniskem v bodě $[0; 0,25]$. Dále sestrojíme kružnici, jejíž střed vypočteme z předcházejících rovnic. Tedy $c = 4 = 1 - 2n \rightarrow n = -\frac{3}{2}$; $d = 6 = -2m \rightarrow m = -3$, tudíž souřadnice středu kružnice jsou v bodě: $S = [-3; -1,5]$. Poloměr kružnice určíme dosazením do poslední rovnice $e = 1 = m^2 + n^2 - r^2 = 9 + 2,25 - r^2 \rightarrow r = \sqrt{10,25} \doteq 3,20156$.

Sestrojíme průsečíky paraboly a kružnice $P_1 \doteq [-0,19; 0,04]$, $P_2 = [-1; 1]$, řešením rovnice jsou souřadnice x těchto průsečíků, tedy $x_1 \doteq -0,19$ a $x_2 = -1$.



Obrázek 49: Graf paraboly p , kružnice k a jejich průsečíky P_1 a P_2 .
(Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

ZÁVĚR

Tato práce mě zavedla především do starověkého Řecka, kde jsem s úžasem objevovala genialitu tehdejších matematiků. V některých případech bylo poměrně složité převést jejich postupy a metody, které byly vytvořeny k řešení konkrétních problémů, na řešení algebraických rovnic. Některé metody mě přesunuly i do renesance, tedy do doby, kdy Evropa začala objevovat Antickou moudrost. V matematice se byla opět schopná, po dlouhých dobách temna, dostat na úroveň starověkých Řeků a začít jejich myšlenky dále rozvíjet. V tuto chvíli jsem si teprve uvědomila, jak složité to pro ně muselo být, protože až Descartes přichází s nějakou formou algebraického zápisu.

Osobně mě nejvíce zaujaly díky své názornosti metody, které vedly ke konstrukci pomůcek a aparátů, jako byla Platónův rám pro řešení Delického problému, nebo mesolabium Eratosthena. Platónův rám jsem se pokusila i s přiměřeným úspěchem sestrojít a použít.

Během práce jsem se značně zlepšila v používání matematických softwarů, speciálně ve vytváření geometrických konstrukcí v programu GEOGEBRA. Předpokládám, že tyto dovednosti využiji ve své budoucí praxi a dostojím tím slibu doc. RNDr. Františku Ježkovi, CSc., že budu především ve výuce geometrie, jako budoucí pedagog, aplikovat Komenského názornost, tedy ke každému teoretickému výkladu přidat také mnoho vysvětlujících obrázků.

RESUMÉ

This bachelor thesis is focused on the historical ways on how to solve algebraic equations of the third degree and higher using graphical means. The main part is devoted to solving algebraic equations of the third degree. Much of the thesis is dedicated to solving two great problems of the ancient Greeks - the trisection of any given angle and the doubling of the cube.

The first part shows the basic theoretical background and the basic construction of conic sections and the basic means of how to solve quadratic equations graphically. The main part contains several historical methods on how to solve algebraic equations of the third degree. The last part is devoted to solving algebraic equations of higher degrees.

SEZNAM LITERATURY

[1] BARTSCH, Hans Jochen. *Matematické vzorce*. Třetí, revidované vydání. Praha: Mladá fronta, 1996. ISBN 80-204-0607-7.

[2] BEČVÁŘ, J. a E. FUCHS. *Hrdinský věk řecké matematiky* [online]. Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993 [cit. 2017-06-21]. Dostupné z: <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590>

[3] HEATH, Thomas. *A history of greek mathematics: Volume I - FROM THALES TO EUCLID*. AT THE CLARENDON PRESS: OXFORD, 1921.

[4] KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford university press, 1972.

[5] REKTORYS, Karel a spolupracovníci. *Přehled užití matematiky I*. Sedmé vydání. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196180-9.

[6] SEIFERT, Ladislav. *Kubické a bikvadratické problémy* [online]. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1951 [cit. 2017-06-21]. Dostupné z: <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403331>

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Obrázek 1: Parabola v základní poloze	5
Obrázek 2: Konstrukce paraboly se zadaným vrcholem V , osami x , y a bodem paraboly P .	6
Obrázek 3: Konstrukce paraboly se zadaným ohniskem F a řídicí přímkou d	7
Obrázek 4: Hyperbola v základní poloze.	8
Obrázek 5: Konstrukce hyperboly se zadanými ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní osy $AB = 2a$	9
Obrázek 6: Konstrukce hyperboly se zadanou délkou poloos $AS = SB = a$ a $DS = SC = b$	10
Obrázek 7: Konstrukce hyperboly se zadaným bodem hyperboly P a osami x a y , kterými jsou asymptoty hyperboly.....	11
Obrázek 8: Konstrukce hyperboly se zadanými asymptotami a bodem hyperboly P	12
Obrázek 9: Graf různoběžných přímek r_1 a r_2 a jejich průsečíku A	14
Obrázek 10: Graf totožných přímek g_1 a g_2	15
Obrázek 11: Graf rovnoběžných přímek h_1 a h_2	16
Obrázek 12: Graf paraboly p , přímky x a jejich průsečíků A, B	18
Obrázek 13: Graf paraboly p , přímky r a jejich průsečíku V	19
Obrázek 14: Graf paraboly p , přímky r	20
Obrázek 15: Graf kružnice k , přímky t a jejich průsečíku T	22
Obrázek 16: Graf kružnice k , přímky s a jejich průsečíků A, B	23
Obrázek 17: Graf kružnice k a přímky v	24
Obrázek 18: Zelená krychle: hrana a a objem $V = 1m^3$. Červená krychle o dvojnásobném objemu $V = 2m^3$ o délce hrany x	25
Obrázek 19: Prostorový model anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy	27
Obrázek 20: Prostorový model anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy.	27
Obrázek 21: Půdorys (vlevo) a bokorys (vpravo) anuloidu, rotační válcové plochy a rotační kuželové plochy.	28
Obrázek 22: Graf parabol c a d a jejich průsečík P	29
Obrázek 23: Graf parabol: c a d a jejich průsečík P	30
Obrázek 24: Graf paraboly p , hyperboly h a jejich průsečík P	31
Obrázek 25: Graf paraboly p , hyperboly h a jejich průsečík P	32
Obrázek 26: Graf paraboly c , kružnice k , a jejich průsečík P	34
Obrázek 27: Graf paraboly c , kružnice k a jejich průsečík P	34
Obrázek 28: Grégoire- řešení delického problému.....	35
Obrázek 29: Grégoire- řešení delického problému.....	36
Obrázek 30: Platon- řešení delického problému.....	38
Obrázek 31: Platon- řešení delického problému.....	39
Obrázek 32: Eratosthenés z Kyrény- aparát na řešení delického problému.	40
Obrázek 33: Eratosthenés z Kyrény- aparát na řešení delického problému.	40
Obrázek 34: Apollónius z Pergy- řešení delického problému.	44
Obrázek 35: Trojúhelníky $\triangle BNC$ a $\triangle DCM$	44
Obrázek 36: Graf hyperbol: h_1 a h_2 a jejich průsečík P , pro $a = 1$ a $b = 2$	45
Obrázek 37: Postup na dělení úsečky DB	47
Obrázek 38: G. Buonafalce- řešení delického problému.....	48

Obrázek 39: Quemper de Lanascal- řešení delického problému.....	49
Obrázek 40: Úhel $\sphericalangle BAC = 3\varphi$ rozdělený na tři stejné části.	50
Obrázek 41: Hippiás z Élidy- křivka quadratrix označena písmenem h	52
Obrázek 42: Hippiás z Élidy- řešení problému trisekce úhlu.....	53
Obrázek 43: Pravoúhlý trojúhelník $\triangle AB_1X$	54
Obrázek 44: Graf funkce $y = x \cdot \cot g\pi x^2$	54
Obrázek 45: Problém trisekce úhlu řešení metodou vkládání.	55
Obrázek 46: Pappus z Alexandrie- řešení problému trisekce úhlu.....	58
Obrázek 47: Graf kubické paraboly p , přímky s a jejich průsečíku P	60
Obrázek 48: Graf Dioklovi kisoidy c , přímky p a jejich průsečíku P	62
Obrázek 49: Graf paraboly p , kružnice k a jejich průsečíky P_1 a P_2	64