

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA APLIKOVANÉ ELEKTRONIKY A
TELEKOMUNIKACÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Rozložení magnetického pole v okolí
vzduchových tlumivek**

Autor práce: Jan Hrbek
Vedoucí práce: Doc. Ing. Pavel Karban, PhD.

Plzeň 2012

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jan HRBEK**
Osobní číslo: **E09B0272P**
Studijní program: **B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Elektronika a telekomunikace**
Název tématu: **Rozložení magnetického pole v okolí vzduchových tlumivek**
Zadávací katedra: **Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Popište problematiku vzduchových tlumivek a jejich vliv na okolí.
2. Formulujte problém, sestavte matematický model problému a vytvořte algoritmus pro výpočet.
3. Realizujte numerický model na počítači.
4. Zhodnoťte obdržené výsledky.

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího
Rozsah pracovní zprávy: 20 - 30 stran
Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

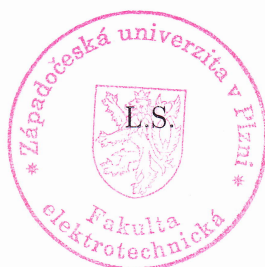
Seznam odborné literatury:


1. Mayer, D., Polák, J.: Metody řešení elektrických a magnetických polí, Praha, SNTL
2. Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: Feynmanovy přednášky z fyziky díl 2, Praha, Fragment, 2001
3. Solin, P.: Partial Differential Equations and the Finite Element Method, John Wiley & Sons, 2005

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Pavel Karban, Ph.D.
Katedra teoretické elektrotechniky
Konzultant bakalářské práce: Ing. František Mach
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání bakalářské práce: 17. října 2011
Termín odevzdání bakalářské práce: 3. června 2012


Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Dr. Ing. Vjačeslav Georgiev
vedoucí katedry

V Plzni dne 17. října 2011

Anotace

Předložená bakalářská práce se zabývá problematikou vzduchových tlumivek a rozložením jejich magnetického pole. Cílem práce je na základě sestaveného matematického modelu vyšetřit rozložení magnetického pole vzduchových tlumivek a jeho vliv na ohřívání vodivých objektů v blízkosti těchto tlumivek.

V úvodu práce je stručné seznámení s jednotlivými typy tlumivek a jejich konstrukčním uspořádáním. Dále je formulován matematický model, který na základě parciálních diferenciálních rovnic popisuje rozložení magnetického a teplotního pole v okolí střídavých tlumivek.

Na závěr práce je vyřešen ilustrativní příklad výpočtu rozložení magnetického pole vzduchových tlumivek a jeho vliv na pole teplotní.

Klíčová slova

Tlumivka, hp -FEM, metoda konečných prvků, sdružená úloha, magnetické pole, teplotní pole

Abstract

Hrbek, Jan. Distribution of Magnetic Field Around Air Reactors. Pilsen, 2012.

Bachelor thesis. University of West Bohemia. Faculty of Electrical Engineering.

Department of Applied Electronics and Telecommunications.

Supervisor: Doc. Ing. Pavel Karban Pavel, Ph.D.

This Bachelor thesis deals with issue of air reactor and distribution of magnetic field on reactor. Main objective of thesis is examine distribution of magnetic field on air reactor according to mathematic model and its influence on heating of conductive object nearby air reactor.

The types of reactors and the structural arrangement are described in the beginning. Mathematic model describe distribution of magnetic and thermal field around the AC reactor on base of partial differential equations.

Demonstrative example of computation distribution of magnetic field on air reactor and effect on thermal field is solving at the conclusion of thesis.

Keywords

Reactor, *hp*-FEM, finite element method, coupled problem, magnetic field, temperature field

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské práce. Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské práce, je legální.

V Plzni dne 1.června 2012

Jan Hrbek

.....
Podpis

Obsah

1	Úvod	8
2	Problematika tlumivek	9
2.1	Tlumivky obecně	9
2.2	Rozdělení tlumivek	9
2.2.1	Vzduchové tlumivky	9
2.2.2	Tlumivky s magnetickým obvodem	11
2.3	Použití tlumivek	12
2.4	Základní zapojení tlumivek	12
2.5	Rozložení magnetického pole v okolí vzduchových tlumivek	13
3	Matematický model	14
3.1	Model magnetického pole	14
3.2	Model teplotního pole	17
4	Ilustrativní příklad	18
4.1	Popis metody řešení	18
4.2	Tlumivka pro rozběh velkého motoru	19
4.3	Řešení ilustrativního příkladu	21
5	Závěr	29
A	Základní vztahy z teorie elektromagnetického pole	34
A.1	Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru	34
A.2	Konstitutivní (materiálové) vztahy	34
A.3	Odvození magnetického vektorového potenciálu	35
A.4	Odvození skalárního elektrického potenciálu	35

Seznam použitých symbolů

Materiálové konstanty

μ	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$	permeabilita
γ	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$	elektrická vodivost
ε	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	permitivita
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	měrná hmotnost
c	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	měrná tepelná kapacita
λ	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	tepelná vodivost

Elektromagnetické pole

\mathbf{H}	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$	intenzita magnetického pole
\mathbf{E}	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$	intenzita elektrického pole
\mathbf{D}	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$	elektrická indukce
\mathbf{B}	T	magnetická indukce
\mathbf{A}	Wb/m	vektorový magnetický potenciál
\mathbf{J}	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$	proudová hustota
ϕ	Wb	magnetický indukční tok
P_J	W	Jouleovy ztráty
p_J	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$	měrné Jouleovy ztráty

Teplotní pole

T	K	teplota
\mathbf{q}	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	tepelný tok

Kapitola 1

Úvod

V práci je řešeno rozložení magnetického pole v okolí vzduchových tlumivek. Toto zadání vzniklo na základě problému, kterým se zabývala firma TPC ENERGO s.r.o., která se se zaměřuje na výrobu transformátorů a tlumivek.

Řešený úkol ovšem není zadáný touto firmou, zadání této práce je pouze inspirováno problémem, který tato firma řešila.

Úkolem je vyšetřit rozložení magnetického pole v okolí vzduchových tlumivek. Vzduchovou tlumivkou protéká střídavý harmonický proud a dochází-li k interakci elektromagnetického pole této tlumivky s konstrukčním blokem (střecha, stěna, atd.), vznikají ztráty v tomto konstrukčním bloku a tím vzniká ohřívání tohoto materiálu. V této práci bude řešeno, v jaké vzdálenosti od tlumivky by měly konstrukční bloky být, aby nedocházelo k ohřevu.

Kapitola 2

Problematika tlumivek

Tlumivky a reaktory jsou hojně používané prvky převážně v silnoproudé elektrotechnice a v elektrických pohonech. Vyskytují se ve velké škále výkonů, od jednotek kVAr do stovek MVar.

2.1 Tlumivky obecně

Již z fyzického uspořádání tlumivky je jasné, že ve své podstatě je tlumivka cívkou. Z tohoto důvodu se jako cívka chová, otáčí fázi mezi napětím a proudem o $\frac{\pi}{2}$, má vlastní indukčnost, parazitní odpor, počet závitů, atd. Z teorie elektromagnetického pole je známo, že v okolí cívek se tvoří elektromagnetické pole a záleží přitom na druhu procházejícího signálu cívkou, například pokud bude cívkou procházet stejnosměrný proud, bude elektromagnetické pole tlumivky stacionární elektromagnetické pole. Jelikož se v silnoproudé elektrotechnice používá signál harmonický o frekvenci 50 Hz, bude elektromagnetické pole v okolí tlumivek nestacionární harmonické.

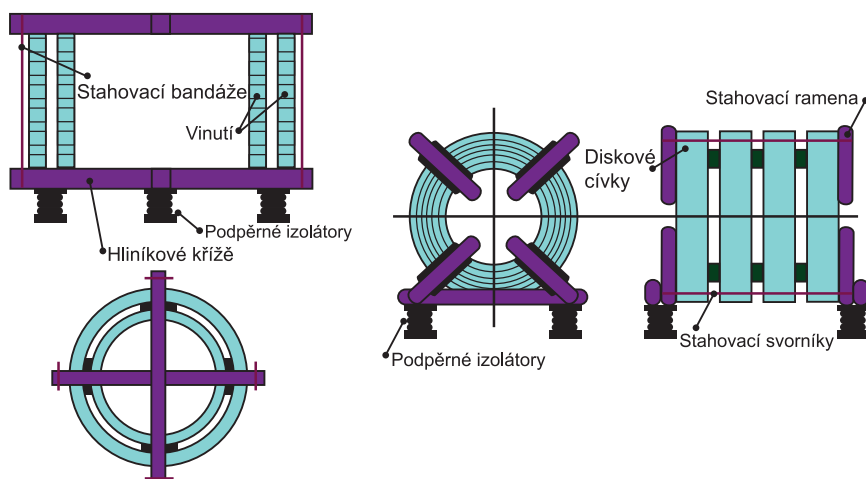
2.2 Rozdělení tlumivek

Tlumivky se dělí na tlumivky vzduchové a na tlumivky s magnetickým obvodem. V této práci budou řešeny pouze tlumivky vzduchové, ale z důvodu přiblížení problematiky bude v krátkosti naznačena funkce obou druhů tlumivek.

2.2.1 Vzduchové tlumivky

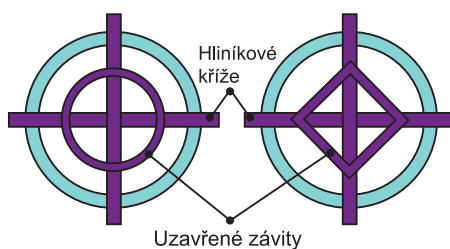
Vzduchové tlumivky jsou tlumivky bez feromagnetického obvodu. Vzduch je prostředí s lineární magnetizační charakteristikou, to je závislost magnetické indukce \mathbf{B} na intenzitě magnetického pole \mathbf{H} , to lze interpretovat pomocí elektrického proudu procházejícího cívkou a magnetického toku. Z definice

vlastní indukčnosti plyne, že vlastní indukčnost dané tlumivky bude konstantní. Tento druh tlumivky lze použít pro všechny aplikace, kromě aplikací, kde se funkčně využívá přesycování magnetického obvodu.



Obrázek 2.1: Vzduchová tlumivka pro střídavé proudy, Vzduchová tlumivka pro stejnosměrné proudy

Lineární magnetizační charakteristika je velkou výhodou vzduchové tlumivky oproti tlumivce s magnetickým obvodem, toto si ale vybírá svou daň velkými rozměry tlumivky, velkým počtem závitů cívky, a tedy i velká hmotnost pramenic ve velkém množství mědi. Největší nevýhodou tohoto druhu tlumivky je ale silné elektromagnetické pole, to zasahuje do konstrukčních částí tlumivky, ale také do elektricky vodivých předmětů v dosahu tohoto pole, tím se do materiálů indukují vířivé proudy a vznikají s tím spojené ztráty.



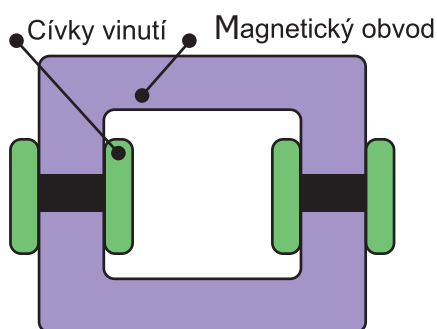
Obrázek 2.2: Výztuhy tvořící zámek nakrátko

Proto je během návrhu tlumivky třeba na toto myslet a vyvarovat se tak konstrukčních prvků, například výztuh stahovacích křížů, které by tvořily závit nakrátko.

Při používání vzduchové tlumivky je zapotřebí daleko více volného prostoru v jejím okolí, než v případě tlumivky s magnetickým obvodem.

2.2.2 Tlumivky s magnetickým obvodem

Tento druh tlumivek je proveden tak, že cívky jsou umístěny na feromagnetických obvodech. V těchto obvodech se uzavírá většina vybuzeného magnetického toku, magnetický tok mimo tento obvod se nazývá rozptylový magnetický tok, který je ve většině případů zanedbatelný (maximálně několik procent celkového magnetického toku). Feromagnetické obvody jsou poskládány ze studeně válcovaných orientovaných plechů, to se provádí kvůli snížení ztrát způsobených frekvencí. Jde o takzvané ztráty v železe nebo se také nazývají ztráty v magnetickém obvodu. V podstatě se na nich podílí skin efekt a vířivé proudy. S rostoucí frekvencí se musí snižovat tloušťka plechů. Podobně jako u transformátorů lze mít magnetický obvod jak v jádrovém, tak v plášťovém provedení. Ve většině případů, ve kterých se používá magnetický obvod v jádrovém provedení, je jádro rozděleno vzduchovými mezerami.



Obrázek 2.3: Tlumivka na magnetickém obvodu

2.3 Použití tlumivek

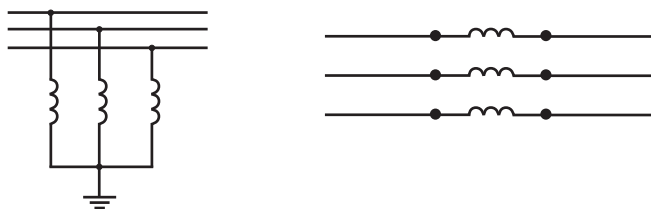
Jak již bylo zmíněno, tlumivky se používají převážně v silnoproudé elektrotechnice a elektrických pohonech. Nejčastější použití je pro kompenzaci účinníku $\cos \varphi$.

Účinník je podíl činného a jalového výkonu v elektrickém obvodu a vyjadřuje, jak velkou část zdánlivého výkonu lze přeměnit na užitečnou energii. Při kompenzaci účinníku je snaha o jednotkový účinník, tedy aby $\cos \varphi = 1$, tedy fázový posun φ byl roven 0. Tím pádem se bude přenášet jen činný výkon, který se může přeměnit na užitečnou energii. Toho se docílí při kapacitní zátěži právě zařazením tlumivky do obvodu. Při kompenzaci účinníku pomocí tlumivky se posouvá fáze tak, že v ideálním případě je $\varphi = 90^\circ$, přičemž u čistě kapacitní zátěže je $\varphi = -90^\circ$, jelikož se v sériovém zapojení fázové posuvy sčítají, tak vyjde $\varphi = 0$ a tedy účinník $\cos \varphi = 1$. V reálném prostředí nikdy není ideální kapacitní ani induktivní charakter zátěže, svou roli tam hraje parazitní odpor, u kapacitní zátěže svod, tím pádem nikdy není fázový posuv 90° (popřípadě -90°). Kompenzace účinníku pomocí tlumivky se používá při kapacitním nebo odporově-kapacitním charakteru zátěže.

Další aplikace tlumivek v elektrotechnice jsou pro omezení nadproudů a zkratových proudů, ke spouštění velkých třífázových synchronních i asynchronních motorů (z důvodu omezení velkých proudových rázů), pro regulaci výkonu v síti, k odstranění vyšších harmonických složek napětí.

2.4 Základní zapojení tlumivek

Tlumivky, ať s magnetickým obvodem nebo vzduchové mají dvě základní zapojení a to paralelní a sériové. Sériové zapojení spočívá v připojení tlumivky mezi dva uzly elektrického obvodu. Toto zapojení slouží pro omezení proudů v obvodu. Paralelní zapojení spočívá v připojení tlumivky mezi uzel a zem. Tento druh zapojení se používá pro kompenzaci účinníku. Kromě těchto dvou zapojení lze tlumivky zapojovat ještě v kombinaci s kondenzátorovými bateriemi.



Obrázek 2.4: Paralelní zapojení tlumivky, Sériové zapojení tlumivky

2.5 Rozložení magnetického pole v okolí vzduchových tlumivek

Dochází-li k interakci nestacionárního elektromagnetického pole s látkou, dochází ke ztrátám v daném materiálu. V případě tlumivek je elektromagnetické pole harmonické, tedy nestacionární, tudíž se budou ztráty v materiálu vyskytovat taktéž. Ztráty v materiálu lze rozdělit do tří skupin – způsobené vodivostí látky, způsobené polarizací látky a způsobené magnetizací látky. Při ztrátách se mění elektromagnetická energie především na teplo.

Ztráty způsobené vodivostí látky nás v této problematice zajímají nejvíce. Ty jsou způsobeny tím, že se do materiálu indukuje pomocí elektromagnetického pole indukované napětí, jelikož jde o vodivý materiál, dochází k průtoku elektrického proudu. Prochází-li elektrický proud materiálem, který má reálnou složku impedance, dochází k přeměně elektrické energie na teplo. Tyto ztráty jsou povětšinou označovány jako Jouleovy ztráty. Rozhodující parametr pro tento druh ztrát je měrná vodivost γ .

Další druhy ztrát v této práci nejsou řešené, protože nemají vliv na okolí vzduchových tlumivek.

K prostudování této problematiky byly použity [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

Kapitola 3

Matematický model

V této kapitole je uveden a vysvětlen obecný matematický model vzduchových tlumivek protékaných střídavým harmonickým proudem. Tento model popisuje slabě sdruženou úlohu, tedy úlohu řešící dvě fyzikální pole a to pole magnetické a pole teplotní. Proto je tato kapitola rozdělena do dvou částí, pro magnetické pole a pro teplotní pole.

3.1 Model magnetického pole

Model magnetického pole je odvozen z Maxwellových rovnic pro stacionární pole a následnou úpravou je převeden pro použití v nestacionárním harmonickém magnetickém poli.

Zákon celkového proudu (zobecněný Amperův zákon) neboli první Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru ve znění:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{H} je vektor intenzity magnetického pole, \mathbf{J} je vektor proudové hustoty a $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ je hustota posuvného proudu. Hustotu posuvného proudu lze zanedbat, z důvodu zanedbatelné velikosti ε oproti γ . Protože $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ a $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, lze předpokládat, že pokud bude γ daleko větší než ε , lze člen $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ zanedbat. Ve skutečnosti je opravdu γ daleko větší než ε a proto bude člen s parciální derivací zanedbán. Po zanedbání posuvného proudu rovnice vypadá takto:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (3.2)$$

Dalším krokem je dosažení za intenzitu magnetického pole \mathbf{H} ze vztahu mezi \mathbf{H} a magnetickou indukcí \mathbf{B} (A.5), tím ze vztahu (3.2) vznikne vztah ve tvaru:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (3.3)$$

Jelikož cílem odvozování matematického modelu problému je převedení veličin charakteristických pro elektromagnetické pole na potenciály, v tomto případě na vektorový magnetický potenciál, byl použit vztah mezi \mathbf{B} a \mathbf{A} (A.9), tím se rovnice upraví na tvar:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}. \quad (3.4)$$

Do tohoto momentu byl odvozován matematický model z 1. Maxwellovy rovnice, dále bude odvozována část z 2. Maxwellovy rovnice.

Faradayův indukční zákon neboli druhá Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru ve znění:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole. Opět je cílem převést z veličin charakteristických pro elektromagnetické pole na vektorový magnetický potenciál, proto je opět použit vztah (A.9) a tímto dojde ke změně tvaru rovnice:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Ten lze upravit na tvar:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Odstraněním operátoru rotace vznikne konečný tvar rovnice pro intenzitu elektrického pole:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.8)$$

Dosazením z konstitutivního vztahu pro proudovou hustotu \mathbf{J} a intenzitu elektrického pole \mathbf{E} (A.7) do rovnice (3.8), lze tuto rovnici zapsat:

$$\mathbf{J} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} \varphi, \quad (3.9)$$

kde γ je konduktivita. V této chvíli lze rovnice (3.4) a (3.9) spojit, vznikne jedna rovnice ve tvaru:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.10)$$

Dále lze provést úprava podle vztahů (A.7) a (A.15):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_{ext}, \quad (3.11)$$

kde \mathbf{J}_{ext} je proudová hustota externích proudů. Lze také říci, že

$$-\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_{eddy}, \quad (3.12)$$

kde \mathbf{J}_{eddy} je vektor proudové hustoty vířivých proudů. Rovnice (3.12) lze dosadit do vztahu (3.11) a vyjde rovnice ve tvaru:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_{eddy} + \mathbf{J}_{ext}. \quad (3.13)$$

A jelikož v magnetickém harmonickém poli platí:

$$\mathbf{J}_{eddy} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\gamma j \omega \mathbf{A}. \quad (3.14)$$

Z dosazení rovnice (3.14) do rovnice (3.13) se získá vztah:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = -\gamma j \omega \mathbf{A} + \mathbf{J}_{ext}. \quad (3.15)$$

Pouhou jednoduchou úpravou rovnice se získá konečný tvar matematického modelu magnetického pole řešeného problému:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) + \gamma j \omega \mathbf{A} = \mathbf{J}_{ext}. \quad (3.16)$$

K prostudování této problematiky byly použity [11], [12], [5], [13], [8].

3.2 Model teplotního pole

Teplu se v tomto problému šíří vedením, proto je pro popis teplotního pole použita rovnice pro vedení tepla neboli Fourier-Kirchhoffova rovnice. Tu lze zapsat ve tvaru:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c \frac{dT}{dt} - p_J, \quad (3.17)$$

kde T je teplota, λ tepelná vodivost, ρ měrná hmotnost, c měrná tepelná kapacita a P_J měrné Jouleovy ztráty.

Jouleovy ztráty, jsou ztráty vzniklé tepelnými účinky vířivých proudů a jsou definovány pomocí Jouleova zákona, který je ve znění:

$$p_J = \frac{\|\mathbf{J}_v\|^2}{\gamma}. \quad (3.18)$$

Po dosazení z rovnice (3.18) do rovnice (3.17) získáme následující vztah:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\|\mathbf{J}_v\|^2}{\gamma}. \quad (3.19)$$

Tato rovnice reprezentuje matematický model teplotního pole. K prostudování této problematiky byly použity [14], [10].

Kapitola 4

Ilustrativní příklad

Ilustrativní příklad byl řešen pomocí aplikace Agros2D, který využívá k řešení problémů fyzikálních polí adaptivní metodu konečných prvků vyššího řádu přesnosti (*hp*-FEM). Pro psaní algoritmů se v aplikaci Agros2D využívá jazyk Python.

Pro ilustrativní příklad výpočtu vzduchové tlumivky byla vybrána tlumivka používaná pro rozběhy synchronního motoru.

4.1 Popis metody řešení

Analytické řešení fyzikálních problémů už od začátku vývoje počítačů slouží spíše jen pro pochopení principu jednotlivých fyzikálních zákonů a disciplín při výuce. Tato řešení vyžadovala idealizace, zjednodušení problémů, nemluvě o tom, že některé problémy nebylo téměř možné analyticky řešit a pokud řešení bylo možné, tak velmi nepřesné. Proto se začaly se vznikem počítačů aplikovat i numerické metody, které využívaly výpočetní techniky pro řešení těchto problémů. V dnešní době je numerických metod nepřehledné množství (Monte Carlo, momentová metoda, metoda konečných objemů, atd.). Pro řešení elektromagnetického a teplotního pole se nejvíce v minulosti využívala metoda konečných diferencí, v dnešní době je tato metoda již zcela ve všech aplikacích nahrazena metodou konečných prvků. Obě tyto metody mají společné to, že slouží k řešení parciální diferenciální rovnice.

Metoda konečných prvků vychází z již dříve odvozených metod a to z Ritzovy a Galerkinovy metody. Metoda hledá aproximované řešení parciálních diferenciálních rovnic (v některých případech integrálních rovnic).

Princip metody konečných prvků (dále jen FEM) spočívá v tom, že oblast ve které se problém řeší, se diskretizuje. To lze také popsat jako rozdělení spojitě oblasti na množinu jednotlivých podoblastí, jak již název metody naznačuje, počet těchto podoblastí je konečný a mají tedy konečné rozměry. Základní požadavek na diskretizaci je ten, že se žádné elementy (podoblasti) nesmějí překrývat. Při diskretizaci pomocí trojúhelníkové sítě, tvoří vrcholy

jednotlivých trojúhelníků takzvané uzly, ty musejí být souměrné s vrcholy trojúhelníků sousedních. Je vhodné volit menší elementy v místech, kde jsou očekávány větší změny pole.

Jelikož FEM je metoda, která se používá pro řešení problémů s danými okrajovými podmínkami, tak je nutné znát i okrajové podmínky úlohy. Ty mohou být dvojího typu, Dirichletova podmínka, kde má hranice oblasti jasně danou hodnotu, nebo Neumannova nulová podmínka, kde je derivace podle normály nulová (ve specifických případech může být i nenulová, to je nehomogenní Neumannova okrajová podmínka). Dále FEM, díky rozdělení oblasti, aproximuje neznámé, hledané řešení uvnitř každé podoblasti jednoduchou funkcí (například lineární). V této funkci je potřeba určit koeficienty, to je řešeno soustavou rovnic pro jednotlivé uzly. Tím se dostane vyjádření aproximující funkce v elementu v závislosti na hodnotách v uzlových bodech. Dále je potřeba odvodit rovnice pro element, funkcionál¹ celé oblasti je roven součtu funkcionálů všech podoblastí.

Protože potřebujeme tento funkcionál minimalizovat, musíme nejprve vyjádřit jeho derivace podle hodnot hledané funkce v uzlech. Z tohoto dostaneme soustavu rovnic.

Protože aplikace Agros2D využívá k řešení adaptivní metodu konečných prvků vyšších řádů přesnosti, nabízí možnosti nastavení řádu polynomu, h -adaptivitu, p -adaptivitu a hp -adaptivitu. Zjednodušeně lze říci, že řádem polynomu lze opravovat přesnost řešení, není však vhodné nastavovat vysoké řády polynomu v případech, kdy to není za potřebí, jelikož vyšší řád polynomu bude mít delší výpočetní dobu. h -adaptivita automaticky zjemňuje síť v místech, kde je toto vhodné. p -adaptivita automaticky mění řád polynomu. hp -adaptivita spojuje obě tyto adaptivity, tudíž se automaticky zjemňuje síť a zároveň se automaticky mění řád polynomu. K prostudování této problematiky byly použity [15], [16], [6].

4.2 Tlumivka pro rozběh velkého motoru

V této části bude popsáno geometrické uspořádání a princip vzduchových tlumivek používaných pro rozběhy motorů. Z těchto znalostí se v dále v textu vychází.

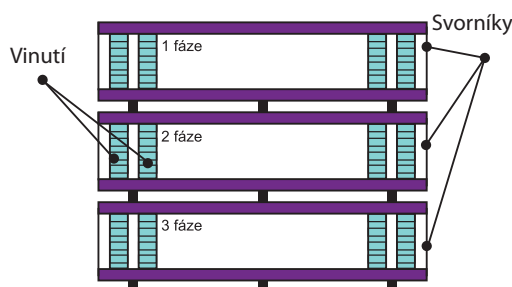
Rozeběh motoru pomocí tlumivky se provádí u střídavých synchronních i asynchronních motorů, které nelze z důvodu velkých spínacích proudů při rozběhu přímo připojit na rozvodnou síť.

Těmto tlumivkám se říká spouštěcí a vinutí těchto tlumivek je opatřeno odbočkami, které se během rozběhu motoru postupně vyřazují a po rozběhu motoru se tlumivka odpojí úplně. Zařazením tlumivky se během spouštění motoru sníží napětí na svorkách motoru, z toho plyne i snížení proudu

¹Funkcionál je matematický operátor, který zobrazuje prostor funkcí (vektorový prostor) do množiny komplexních čísel (skalárů)

odebíraného ze sítě, což je požadováno. Tímto krokem ale dochází i k nežádoucímu zmenšení točivého momentu.

Jednotlivé části spouštěcí tlumivky musí být navrženy s respektováním momentové charakteristiky zátěže, aby rozběh nikdy neselhal a k rozběhu motoru došlo vždy. Tlumivky pro rozběhy motorů jsou navrhovány jako robustní vzduchové cívky nad sebou (náznorně ukazuje geometrické rozložení Obr.4.1) a jsou stažené svorníky a bandážemi.



Obrázek 4.1: Vzduchová tlumivka pro rozběhy velkých motorů

Při návrhu spouštěcí tlumivky se vychází z faktu, že tlumivka bude zatěžována pouze při rozbězích motorů, tudíž ne na trvalý provoz. Proto nejsou rozhodující parametry ztráty, ale oteplení po dobu spouštění a mechanická pevnost, ale ta zde nebude řešena.

Při návrhu tlumivky se většinou počítá s třemi spuštěními motoru těsně po sobě o době trvání 3×20 s. To ovšem neplatí pro tlumivky navrhované pro speciální aplikace s motorem, který bude mít přerušovaný provoz. Při návrhu se také neuvažuje odvod tepla pomocí chlazení a počítá se s celým ztrátovým výkonem, který se akumuluje v tělese tlumivky a způsobuje její oteplení.

Výhodou použití vzduchových tlumivek pro rozběh motorů je to, že rozběh je rychlý, plynulý a bez velkých proudových nárazů.

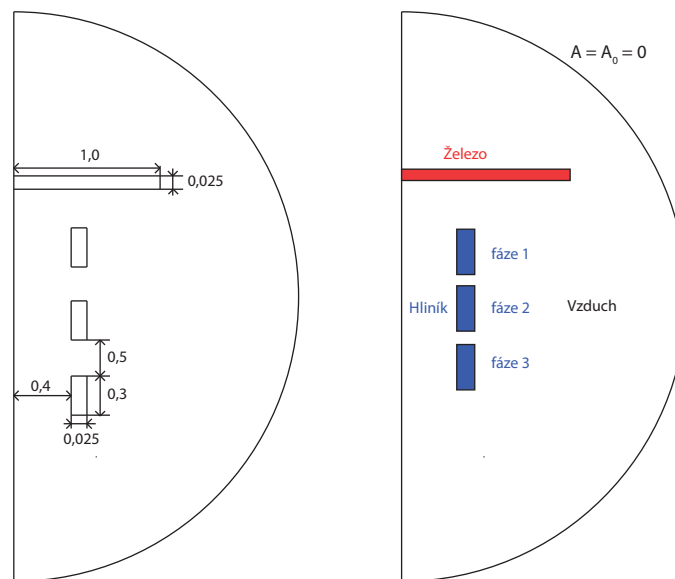
Pro rozběhy motorů lze používat i tlumivky s feromagnetickým jádrem, ale zde je jeden významný problém. Je nutno zařídit, aby v žádném z provozních stavů nedošlo k přesycení feromagnetického jádra, pokud by došlo k přesycení feromagnetického jádra, tlumivka by spínací proud omezovala velmi málo, který v tomto případě může dosáhnout stejných hodnot jako bez použití tlumivky. Pro tuto nevýhodu se tlumivky s feromagnetickým jádrem pro tuto aplikaci téměř nepoužívají. K prostudování této problematiky byla použita [2].

4.3 Řešení ilustrativního příkladu

Jak již bylo zmíněno pro ilustrativní příklad výpočtu vzduchové tlumivky byla vybrána tlumivka používaná pro rozběhy synchronního motoru. Z textu výše je známo, jak vypadá geometrie takovéto tlumivky, proto lze navrhnout geometrické rozložení pro výpočet. Známý jsou i elektrické parametry tlumivky:

Tabulka 4.1: Elektrické parametry zkoumané tlumivky

Jmenovité vstupní napětí	3 x 7200 V
Jmenovitý proud	2400 A
Počet závitů	90



Obrázek 4.2: Okótované geometrické rozložení úlohy, Okrajové podmínky v magnetickém poli a použité materiály

V levé části Obr.4.2 je zobrazeno geometrické uspořádání úlohy i s rozměry a na pravém obrázku jsou znázorněny použité materiály a okrajové podmínky v magnetickém poli.

Obr.4.3 znázorňuje okrajové podmínky elementu střechy v modelu teplotního pole. Neumannova okrajová podmínka (zelená barva na Obr.4.3) byla do modelu přidána, protože jde o osově symetrický problém a materiál pokračuje za osu. Konvekce (červená a modrá barva na Obr.4.3), neboli přenos tepla prouděním byl do modelu přidán, protože mimo střechu bude prostředí, mezi kterým a střechou bude docházet k přenosu tepla. V případě poslední hrany elementu střechy (černá barva na Obr.4.3), byl dosazen přímo tepelný tok na základě zjištěných P_J , což bylo respektováno jako zdroj teplotního pole.

$$\begin{array}{c}
 f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{\text{ext}} - T) \\
 f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \boxed{\hspace{10em}} \quad f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{\text{ext}} - T) \\
 f = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = p_J
 \end{array}$$

Obrázek 4.3: Okrajové podmínky v teplotním poli

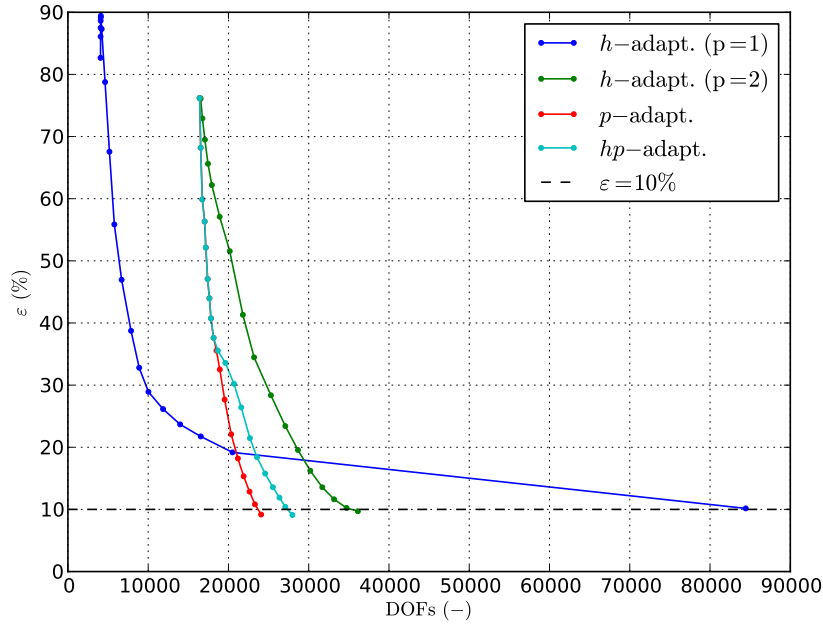
Řešená úloha je slabě sdružená, zahrnuje tedy model magnetického pole i model teplotního pole. Parametry materiálů jsou časem neměnné, tedy jsou konstantní. Nejprve bylo řešeno rozložení magnetického pole v okolí tlumivky, během řešení této úlohy byly zaznamenávány velikosti Jouleových ztrát P_J a měrných Jouleových ztrát p_J . Měrné Jouleovy ztráty p_J byly dále využity v řešení rozložení teplotního pole, jako zdroj tepla.

Zatímco řešení rozložení magnetického pole je harmonická analýza, u teplotního pole je třeba zjišťovat vývoj teploty v čase, jedná se tedy o přechodný děj.

Jak již bylo zmíněno v předchozím textu, pro řešení byla použita aplikace Agros2D, která využívá knihovny Hermes založené na metodě hp -FEM. Tato aplikace nabízí pro řešení využít h -adaptivitu, p -adaptivitu, hp -adaptivitu, nastavení řádu polynomu a velikost elementu. Pro zjištění přesnosti výpočtu bylo nutné zjistit konvergenci pro jednotlivé adaptivity, aby výsledné řešení bylo co možná nejpřesnější a zároveň nebylo zbytečně náročné na výpočetní čas.

To bylo provedeno a výsledek ukazuje konvergenční graf (Obr.4.4). Z tohoto grafu je patrné, že stanovenou hodnotu adaptivní chyby $\varepsilon < 10\%$ protíná průběh p -adaptivity při nejnižším počtu stupňů volnosti². Velmi podobně tomu je i při použití hp -adaptivity, zatímco použití h -adaptivity s lineárními elementy potřebuje několikanásobně vyšší počet stupňů volnosti. Přesto, že průběh p -adaptivity protínal stanovenou hodnotu adaptivní chyby $\varepsilon < 10\%$ při nižším počtu stupňů volnosti, byla pro výpočty použita hp -adaptivita, protože výpočet byl rychlejší.

²DOFs - počet vzájemně nezávislých proměnných



Obrázek 4.4: Konvergence řešení modelu magnetického pole pro jednotlivé adaptivity

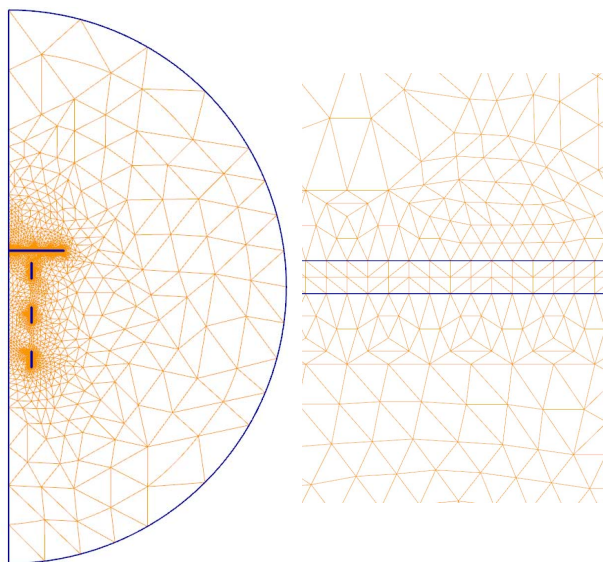
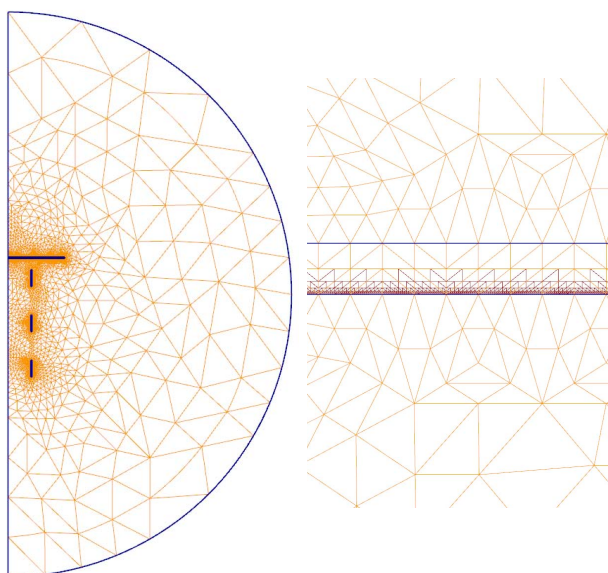
Při výpočtech konvergence byly zapisovány i hodnoty P_J pro jednotlivé adaptivity při adaptivní chybě $\varepsilon = 10\%$ (Tab.4.2). Tyto hodnoty budou dále použity pro další výpočty. V případě hp -adaptivity a p -adaptivity je řádem polynomu myšlen počáteční řád polynomu.

Tabulka 4.2: Hodnoty P_J při výpočtech konvergence

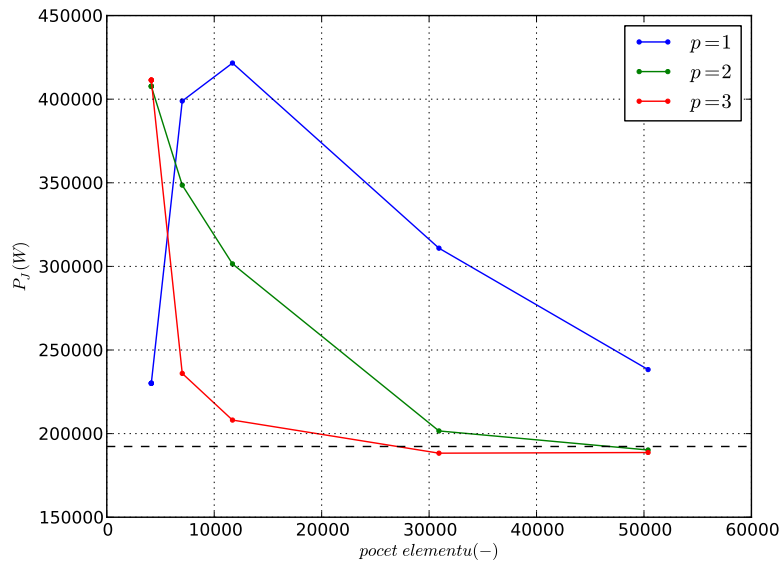
Adaptivita	Řád polynomu	P_J [W]
h -adaptivita	$p = 1$	1.894e+05
h -adaptivita	$p = 2$	1.912e+05
p -adaptivita	$p = 2$	1.933e+05
hp -adaptivita	$p = 2$	1.980e+05
aritmetický průměr		1.923e+05

Dále jsou zobrazeny počáteční a řešená síť pro p -adaptivitu (Obr.4.5) a h -adaptivitu (Obr.4.6). Je vidět, že zatímco u p -adaptivity se řešená síť přesně shoduje se sítí počáteční, u h -adaptivity je síť uvnitř střechy směrem k tlumivce zjemněná. Počáteční síť je značena oranžovou barvou a řešená síť barvou červenou.

Dalším úkolem při řešení příkladu je zjistit počtu elementů pro výpočet vzdálenosti vnější hranice. To bylo řešeno postupným snižováním obsahu elementu v oblasti střechy a zjišťováním P_J v závislosti právě na počtu elementů. Průběhy z těchto výpočtů jsou vidět na Obr.4.7.

Obrázek 4.5: p -adaptivita počáteční síť, p -adaptivita řešená síťObrázek 4.6: h -adaptivita počáteční a řešená síť, h -adaptivita detail počáteční a řešená síť

Referenční hodnota byla vypočítána právě z Tab.4.2 jako aritmetický průměr hodnot. Zde je vidět, že při $p = 1$ vůbec nedojde k protnutí referenční hodnoty P_J , proto přichází v úvahu pouze $p = 2$ a $p = 3$. Zde byl z důvodu kratší výpočetní doby zvolen $p = 2$. Ten protíná referenční hodnotu P_J při počtu elementů 38660 (Po odečtení z grafu tato hodnota byla ověřena novým výpočtem), což odpovídá obsahu elementů $7e - 06$. Tato hodnota byla použita v dalších výpočtech.



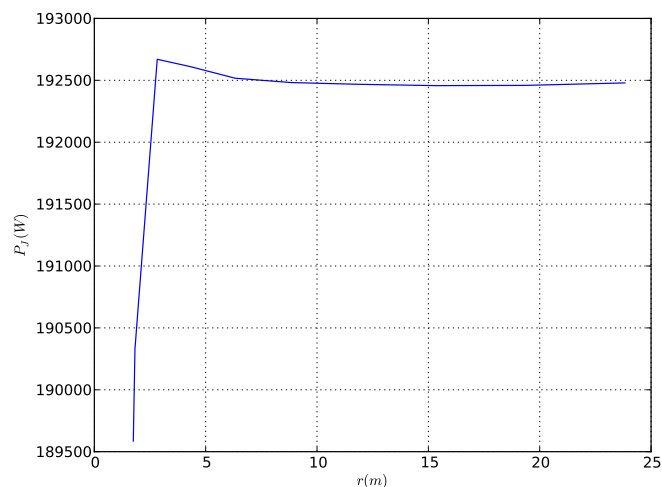
Obrázek 4.7: P_J v závislosti na počtu elementů

Další částí řešeného úkolu bylo zjistit vliv vnější hranice na P_J . Do výpočtu byly použity údaje z předchozího výpočtu a to, $p = 2$ a obsah elementu $7e - 06$.

Výpočet byl navržen tak, že poloměr vnější hranice se postupně zvyšoval a zaznamenávaly se hodnoty P_J . Graf z tohoto výpočtu je vidět na Obr.4.8. Zde jde vyzorovat, že pokud poloměr vnější hranice bude větší než 8 m, tak k výraznému ovlivnění P_J nedojde. Tato znalost byla důležitá při výpočtu ideální vzdálenosti střechy od vzduchové tlumivky.

Jelikož už jsou známy všechny informace, které jsou potřeba pro výpočet vzdálenosti střechy od tlumivky, lze tento výpočet provést.

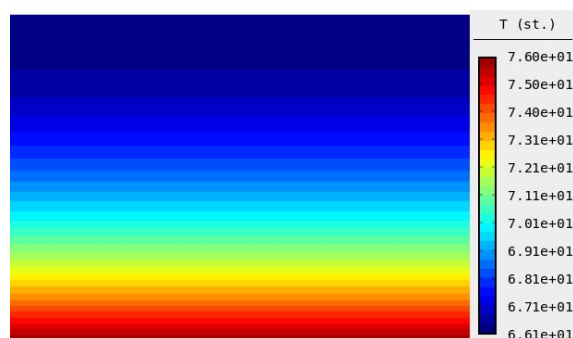
Pro úplnost byly v tomto odstavci shrnuty informace k výpočtu, které vyplynuly z textu výše. Pro výpočty byla použita hp -adaptivita a vnější hranice měla poloměr 8 m. Výpočet byl navržen tak, že postupně byla zvětšována vzdálenost střechy od tlumivky, přičemž byly zaznamenávány hodnoty P_J , p_J a T . Střecha byla posouvána dokud se $T = 20^\circ\text{C}$, poté se výpočet zastavil. Výpočet v každé vzdálenosti od tlumivky trval po dobu

Obrázek 4.8: Konvergence P_J v závislosti na poloměru vnější hranice

přechodného děje, po dobu $t = 60s$. Časový krok byl zvolen $t = 5 s$. Jako počáteční podmínky na teplotu okolí byla předpokládána teplota okolí $T = 20^\circ\text{C}$ a koeficient přestupu tepla $\alpha = 10$. Teplota střechy $T = 20^\circ\text{C}$ byla vybrána úmyslně, protože jak již bylo zmíněno teplota okolí byla zvolena $T = 20^\circ\text{C}$, proto tuto teplotu měla střecha ve vzdálenosti, kde na ni již nemělo magnetické pole vliv. Vzdálenost střechy od horního okraje tlumivky byla dále v textu značena h .

Jelikož byla využita *hp*-adaptivita, byla zvolena adaptivní chyba $\varepsilon < 10\%$, při maximálně 25 krocích.

Teplota je ve střeše rozložena nerovnoměrně, proto uváděná teplota je průměrná teplota střechy. Rozložení teploty ve střeše je vidět na Obr.4.9, tento obrázek platí pro vzdálenost střechy od horního okraje tlumivky 0, 2 m.



Obrázek 4.9: Detail rozložení teploty ve střeše

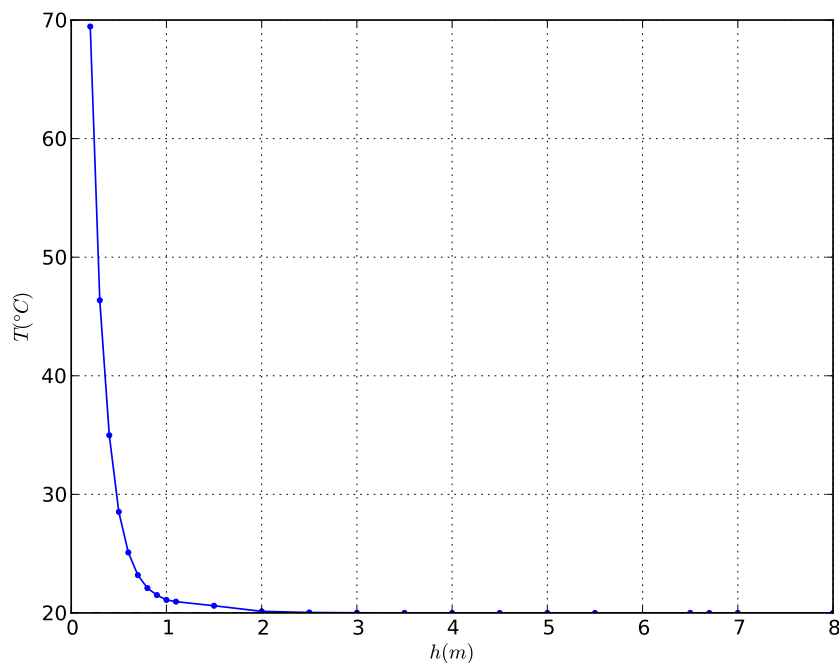
Vypočtená data jsou vidět v Tab. 4.3.

Tabulka 4.3: Hodnoty P_J , p_J a T v závislosti na vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky h

Vzdálenost h [m]	P_J [W]	p_J [Wm^{-3}]	T [°C]
0.2	197866.0	62982.757	69.4543
0.3	105479.0	33575.036	46.3632
0.4	59936.4	19078.364	34.9804
0.5	34092.1	10851.861	28.5209
0.6	20389.4	6490.153	25.0961
0.7	12754.9	4060.014	23.1879
0.8	8387.75	2669.906	22.0964
0.9	6011.03	1913.3718	21.5024
1.0	4398.31	1400.0267	21.0993
1.1	3805.88	1211.450	20.9512
1.5	2605.21	829.264	20.6048
2.0	575.849	183.298	20.1337
2.5	160.285	51.020	20.0372
3.0	52.8941	16.836	20.0123
3.5	19.7857	6.297	20.0046
4.0	8.155	2.595	20.0019
4.5	3.62408	1.153	20.0008
5.0	1.70782	0.543	20.0004
5.5	0.842582	0.268	20.0002
6.5	0.226323	0.072	20.0001
6.7	0.176066	0.056	20.0
7.0	0.12113	0.038	20.0
8.0	0.0362268	0.011	20.0

Při hodnocení výsledků je nutné brát v úvahu, že během výpočtu mohlo docházet k chybám. Pro příklad bych uvedl chybu, která nejvíce ovlivnila přesnost výsledku, touto chybou bylo odhadnutí koeficientu přestupu tepla $\alpha = 10$. Určení koeficientu přestupu tepla silně závisí na prostředí a bez znalosti podmínek místa, kde se tlumivka nachází, nelze určit.

Graf z výpočtu závislosti teploty střechy na vzdálenosti horního okraje tlumivky a střechy je vidět na Obr.4.10.



Obrázek 4.10: Závislost teploty střechy na vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky

Z grafu je vidět, že tlumivka výrazně ovlivní teplotu střechy od vzdálenosti $h = 1 \text{ m}$, při vzdálenosti větší už tlumivka na teplotu střechy má minimální vliv. Z toho lze vycházet při návrhu zastřešení tlumivky. Při výpočtech vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky závisí hlavně na daném prostředí tlumivky, jiné nároky na teplotu budou v prostorech, kde hrozí vznícení a jiné v prostorech, kde může být teplota vyšší. Pro případ prostorů s nebezpečím vznícení by bylo pro výpočet nejprve zjistit přesněji koeficientu přestupu tepla α , aby výpočty byly co nejpřesnější.

Kapitola 5

Závěr

Mezi hlavní cíle této práce patřilo sestavení matematického modelu rozložení magnetického a teplotního pole pro okolí vzduchových tlumivek a tento model použit pro výpočet ilustrativního příkladu. Oba tyto cíle byly splněny, s tím, že nebylo možné obdržené výsledky z řešení ilustrativního příkladu porovnat s experimentálními výsledky.

Matematický model magnetického pole byl odvozen z Maxwellových rovnic. Výsledná parciální diferenciální rovnice respektuje to, že se v této úloze jedná o harmonické nestacionární magnetické pole.

Matematický model teplotního pole byl popsán pomocí rovnice pro vedení tepla, neboli Fourier-Kirchhoffovy rovnice.

Z řešení ilustrativního příkladu vyplynulo, že u řešeného typu vzduchové tlumivky stačí, aby vodivé konstrukční prvky byly ve výšce 6.7 m nad horním okrajem této tlumivky a ohřívání těchto prvků, vlivem magnetického pole vzduchové tlumivky, nebude probíhat. Ovšem, pokud by minimální ohřívání nebylo na závalu v dané aplikaci, tak už i při vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky 0.6 m je průměrná teplota střechy $T = 25.096^\circ\text{C}$. U tohoto výsledku by bylo zajímavé porovnání s experimentálními výsledky, z důvodu ověření správnosti řešení, popřípadě zjištění odchylky mezi teoreticky řešenými a experimentálně získanými hodnotami. To však nebylo možné.

Je nutné brát v úvahu, že výpočet byl zatížen chybou vstupních dat a to koeficientu přestupu tepla α , který nebyl zjištěn regulérně pomocí experimentu nebo výpočtu, ale byl odhadnut. Tato chyba mohla velice ovlivnit výsledky výpočtů. Pro určení koeficientu přestupu tepla α je nutné znát prostředí, ve kterém tlumivka pracuje. Výsledky se budou lišit i při změnách počasí.

Literatura

- [1] Vítězslav Pankrác. *Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice 1. část.* Elektrotechnika, 2009/2.
- [2] Vítězslav Pankrác. *Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice 2. část.* Elektrotechnika, 2010/9.
- [3] Vítězslav Pankrác. *Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice 3. část.* Elektrotechnika, 2010/10.
- [4] Vítězslav Pankrác. *Tlumivky v silnoproudé elektrotechnice 4. část.* Elektrotechnika, 2010/63.
- [5] D.Mayer. *Teorie elektromagnetického pole.* Tiskové středisko ZČU, 2004.
- [6] Z.Škvor J.Vokurka J.Macháč, K.Novotný. *Numerické metody v elektromagnetickém poli.* Česká technika - vydavatelství ČVUT, 2007.
- [7] K.Novotný. *Teorie elektromagnetického pole II.* Vydavatelství ČVUT, 1997.
- [8] M.Sands R.P.Feynman, R.B.Leighton. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3.* Fragment, 2001.
- [9] Tomáš Tajtl Jiřina Mertlová, Pavla Hejtmánková. *Teorie přenosu a rozvodu elektrické energie.* Elektrotechnika, 2008.
- [10] Josef Rada a kolektiv. *Elektrotepelná technika.* SNTL, 1985.
- [11] J.Polák D. Mayer. *Metody řešení elektrických a magnetických polí.* SNTL/ALFA, 1983.
- [12] J.Polák. *Vektorová analýza.* ZČU Plzeň - ediční středisko, 1993.
- [13] K.Novotný. *Teorie elektromagnetického pole I.* Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [14] F.Mach. *Teoretické základy elektrotepelných procesů.* 2011.

- [15] B. Ulrych D. Mayer. *Základy numerického řešení elektrických a magnetických polí*. SNTL/ALFA, 1988.
- [16] K.Segeth M.Křížek. *Numerické modelování problémů elektrotechniky*. Karolinum, 2001.

Seznam obrázků

2.1	Vzduchová tlumivka pro střídavé proudy, Vzduchová tlumivka pro stejnosměrné proudy	10
2.2	Výztuhy tvořící závit nakrátko	10
2.3	Tlumivka na magnetickém obvodu	11
2.4	Paralelní zapojení tlumivky, Sériové zapojení tlumivky	12
4.1	Vzduchová tlumivka pro rozběhy velkých motorů	20
4.2	Okótované geometrické rozložení úlohy, Okrajové podmínky v magnetickém poli a použité materiály	21
4.3	Okrajové podmínky v teplotním poli	22
4.4	Konvergence řešení modelu magnetického pole pro jednotlivé adaptivity	23
4.5	p -adaptivita počáteční síť, p -adaptivita řešená síť	24
4.6	h -adaptivita počáteční a řešená síť, h -adaptivita detail počáteční a řešená síť	24
4.7	P_J v závislosti na počtu elementů	25
4.8	Konvergence P_J v závislosti na poloměru vnější hranice	26
4.9	Detail rozložení teploty ve střeše	26
4.10	Závislost teploty střechy na vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky	28

Seznam tabulek

4.1	Elektrické parametry zkoumané tlumivky	21
4.2	Hodnoty P_J při výpočtech konvergence	23
4.3	Hodnoty P_J , p_J a T v závislosti na vzdálenosti střechy od horního okraje tlumivky h	27

Příloha A

Základní vztahy z teorie elektromagnetického pole

A.1 Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

Maxwellovy rovnice jsou základní zákony teorie elektromagnetického pole, ze kterých ostatní rovnice pro popis elektromagnetického pole přímo nebo nepřímo plynou. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru platí pouze v regulárních bodech, ve kterých jsou spojitě a spojitě diferencovatelné.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -\rho \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Veličiny objevující se v Maxwellových rovnicích jsou intenzita magnetického pole \mathbf{H} , proudová hustota \mathbf{J} , elektrická indukce \mathbf{D} , intenzita elektrického pole \mathbf{E} , magnetická indukce \mathbf{B} a ρ je objemová hustota náboje. V případě, že se jedná o elektromagnetické pole stacionární, budou časové parciální derivace nulové.

A.2 Konstitutivní (materiálové) vztahy

Z důvodu výskytu více prostředí, ve kterých se elektromagnetické pole zkoumá a rozdílnosti jejich vlastností, nestačí pouze magnetická indukce \mathbf{B} a intenzita elektrického pole \mathbf{E} . Je zapotřebí zavést další veličiny, které budou

mít stejný smysl jako veličiny \mathbf{B} a \mathbf{E} , ale budou respektovat také vlastnosti prostředí. Ve vakuu stačí vektory \mathbf{B} a \mathbf{E} .

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{A.7})$$

A.3 Odvození magnetického vektorového potenciálu

Stejně jako u pole elektrostatického, i pole magnetického lze a je výhodné zavést potenciál. Narozdíl od elektrostatického pole jde o pole nezářivé, vírové, proto magnetický potenciál nebude skalární veličina, ale vektorová veličina. Zavedení vektorového magnetického potenciálu využívá vektorové identity $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$, kde \mathbf{G} je obecné vektorové pole. Lze tedy zapsat rovnici (A.4) ve tvaru:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{A.8})$$

Odstraněním divergence lze tuto rovnici zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{A.9})$$

Vektorový magnetický potenciál \mathbf{A} je jednoznačně určený svojí rovnicí, až na gradient libovolné funkce, jelikož platí

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0 \quad (\text{A.10})$$

Z toho plyne, aby vztah mezi vektorovým magnetickým potenciálem \mathbf{A} a magnetickou indukcí \mathbf{B} opravdu platil, musíme definovat podmínku, která omezí výskyt daného gradientu libovolné funkce. Tato podmínka se jmenuje Coulombova kalibrační podmínka a je ve znění:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.4 Odvození skalárního elektrického potenciálu

Pro odvození vztahu pro elektrický potenciál se vychází z 2. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru pro elektrostatické pole.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Dále vyplývá z rovnice (A.12), že elektrostatické pole ve svých regulárních bodech je nevírové (potenciální). Z vektorové analýzy je pro tento stav známo, že:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (\text{A.13})$$

kde φ je skalární spojitá funkce. Obě rovnice se rovnají nule, tedy rovnají se i sobě a lze napsat:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi. \quad (\text{A.14})$$

Po odstranění rotace dostáváme rovnici ve tvaru:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (\text{A.15})$$

Toto je výhodné, protože lze počítat se skalárním potenciálem a nikoliv s vektorem intenzity elektrického pole. V rovnici (A.15) může být zarážející znaménko minus před pravou stranou rovnice. Toto je zde správně, z matematického hlediska je gradient potenciálu vektor, udávající směr největšího nárůstu. Ovšem z fyzikálního hlediska je dokázáno, že vektor intenzity elektrického pole má směr od vyššího potenciálu k nižšímu. Toho se docílí již zmíněným znaménkem minus.

K prostudování této problematiky byla použita [5].