



Katedra mechaniky
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Numerické řešení vybraných problémů
neizotermického proudění nestlačitelných kapalin
pomocí lattice Boltzmannovy metody**

David Hron

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Vimmer, Ph. D.
Plzeň 2020

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE (projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **David HRON**
Osobní číslo: **A17B0601P**
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**
Studijní obor: **Počítačové modelování**
Téma práce: **Numerické řešení vybraných problémů neizotermického proudění nestlačitelných kapalin pomocí lattice Boltzmannovy metody**
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Provedení rešerše týkající se modelování izotermického a neizotermického proudění pomocí lattice Boltzmannovy metody.
2. Teoretický popis lattice Boltzmannovy metody.
3. Vývoj příslušných algoritmů pro implementaci lattice Boltzmannovy metody za účelem simulace neizotermického proudění nestlačitelných kapalin.
4. Numerické řešení vybraných problémů neizotermického proudění nestlačitelných kapalin.
5. Vyhodnocení a diskuse dosažených numerických výsledků.

Rozsah bakalářské práce: **20 – 40 stran A4 včetně příloh**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. A. A. Mohamad: Lattice Boltzmann Method – Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. Springer-Verlag London, 2011.
2. Z. Guo, Ch. Shu: Lattice Boltzmann Method and its Applications in Engineering. Advances in Computational Fluid Dynamics, vol. 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
3. M. C. Sukop, D.T. Thorne, Jr.: Lattice Boltzmann Modeling – An introduction for Geoscientists and Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
4. S. Succi: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, 2001.
5. Matlab: uživatelský manuál.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2019**
Termín odevzdání bakalářské práce: **29. května 2020**

Radová

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka



Jan Vimmr

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl použitou literaturu a všechny prameny, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 5. července 2020

.....
Podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval především doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph. D. za produktivní konzultace a cenné rady. Dále bych rád poděkoval svým rodičům, že mě krmí a šatí, Kateřině Škorváňkové za revizi v poslední etapě, bráchovi za konzultaci anglické anotace a všem dobrým lidem, kterým nevadí šroubovaná souvětí a občasné chyby ve skloňováním.

Anotace

Bakalářská práce se zabývá numerickým řešením problematiky izotermického, a především neizotermického proudění nestlačitelných vazkých kapalin lattice Boltzmannovou metodou. Na základě prostudované literatury, která je uvedena v této práci a která se zaměřuje na modelování izotermického a neizotermického proudění nestlačitelných kapalin pomocí lattice Boltzmannovy metody, je odvozena klíčová rovnice lattice Boltzmannovy metody. Následně je demonstrován způsob implementace klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody na příkladech izotermického a neizotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve čtvercové 2D kavitě. Je vysvětlen rozdíl mezi problémy nucené a přirozené konvekce neizotermického proudění, které lattice Boltzmannova metoda řeší.

Klíčová slova: lattice Boltzmannova metoda, proudění ve 2D kavitě, neizotermické proudění, nestlačitelná vazká kapalina, numerická simulace, nucená konvekce, přirozená konvekce

Abstract

This bachelor's thesis is focused on the numerical solution of the problems of isothermal and especially non-isothermal flow of incompressible viscous fluids using the lattice Boltzmann method. Based on the studied literature, which is presented in this work and which focuses on modeling the isothermal and non-isothermal flow of incompressible fluids using the lattice Boltzmann method, the key equation of the lattice Boltzmann method is derived. Subsequently, the method of implementing the key equation of the lattice of the Boltzmann method is demonstrated on examples of isothermal and non-isothermal square 2D cavity. The difference between the problems of forced and natural convection of non-isothermal flow, which the lattice Boltzmann method solves, is explained.

Keywords: lattice Boltzmann method, flow in 2D cavity, nonisothermal flow, incompressible viscous fluid, numerical simulations, forced convection, natural convection

Obsah

Úvod	1
1 Princip Boltzmannovy metody	3
2 Implementace "klíčové rovnice" lattice Boltzmannovy metody	6
2.1 Kolize	8
2.2 Distribuce	11
2.3 Okrajové podmínky	11
2.3.1 Okrajová podmínka na pevné nepohyblivé stěně typu "bounce-back"	12
2.3.2 Okrajová podmínka na pohyblivou stěnu se zadanou rychlostí	15
2.4 Rozšíření pro neizotermický problém	18
2.4.1 Nucená konvekce	18
2.4.2 Přirozená konvekce	19
2.4.3 Okrajové podmínky pro řešení proudění neizotermické kapaliny	20
3 Podobnostní modelování	23
3.1 Vztah mezi reálnými (fyzikálními) veličinami a veličinami používanými při implementaci LBM	23
3.1.1 Bezrozměrná teplota	24
3.2 Reynoldsovo číslo a Machovo číslo	25
3.3 Prandtlovo číslo	26
3.4 Rayleighovo číslo	26
4 Izotermické proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve 2D kavitě	27
4.1 2D kavita s horní pohyblivou stěnou	27
4.2 2D kavita se čtyřmi pohyblivými stěnami	33
5 Neizotermické proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve 2D kavitě	36
5.1 2D kavita s horní pohyblivou stěnou	36
5.2 2D kavita se čtyřmi pohyblivými stěnami	40
5.3 2D kavita s nepohyblivými stěnami	42
Závěr	45
Použitá literatura	46

Úvod

Předložená bakalářská práce se zabývá modelováním laminárního proudění nestlačitelné vazké kapaliny pomocí lattice Boltzmannovy metody (LBM). Lattice Boltzmannova metoda je explicitní numerická metoda, která se ve srovnání s klasickými metodami, jako je metoda konečných prvků (FEM), začala používat pro řešení proudění kapalin teprve nedávno. Pro lattice Boltzmannovu metodu je tekutina jako taková nahrazena shluky částic. Výpočet proudění je pak prováděn v bodech zvolené výpočtové mřížky, kde dochází k přesunu (k proudění) těchto shluků částic ve vybraných směrech a k pomyslné vzájemné srážce (ke kolizi) mezi shluky částic. Přestože veškeré dynamické procesy jsou zjednodušeny pouze na tyto dva procesy (distribuci shluků částic a kolizi shluků částic), ukazuje se, že lattice Boltzmannova metoda může velice věrně popisovat reálné proudění (zejména pro nízká Reynoldsova čísla). Nespornou výhodou metody je její relativně snadná algoritmicizace a programová implementace. Zejména tedy jednoduchá implementace okrajových podmínek na obdélníkové mřížce a (pro naši práci velice podstatná) jednoduchá implementace metody pro řešení neizotermického proudění kapalin. Hlavním cílem práce je vyvinout vlastní řešič založený na LBM pro řešení vybraných problémů neizotermického proudění nestlačitelných vazkých kapalin.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola se zabývá teoretickým minimem, které je třeba znát k pochopení principu lattice Boltzmannovy metody. Je odvozena výchozí klíčová rovnice lattice Boltzmannovy metody.

Druhá kapitola se věnuje implementaci klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody odvozené v předchozí kapitole pro řešení proudění ve dvoudimenzionálním prostoru pomocí rychlostního modelu D2Q9. Je představen význam relaxačního času a způsob řešení kolizního kroku pomocí přístupu single relaxation time (SRT) a multiple relaxation time (MRT). Velký důraz je kladen na představení okrajových podmínek pro interakci částic s pevnou pohyblivou a nepohyblivou nepropustnou stěnou. Dále jsou představeny problémy přirozené a silové konvekce pro případ řešení proudění neizotermické kapaliny. Okrajové podmínky jsou ukázány přímo na vybraném příkladu, který bude řešen v následujících kapitolách.

Třetí kapitola vysvětluje vztah mezi jednotkami využívanými lattice Boltzmannovou metodou a fyzikálními. Jsou představena užívaná podobnostní čísla a jejich významy. Důraz je kladen na vhodnou volbu relaxačních časů k zabezpečení funkčnosti metody.

Ve čtvrté kapitole jsou prezentovány výsledky izotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny na vybraných příkladech. Podrobně jsou okomentovány výsledky problému proudění kapaliny ve čtvercové kavitě s horní pohyblivou stěnou. Na tomto problému byla také demonstrována implementace okrajových podmínek ve druhé kapitole. Na příkladu byl rovněž podrobně ukázán způsob volby parametrů a přepoččet veličin podle návodu ze třetí kapitoly. Dosažené numerické výsledky pro různá Reynoldsova čísla byly porovnány s literaturou [1], [2] a [5]. Dále byl numericky řešen problém čtvercové kavity se čtyřmi pohy-

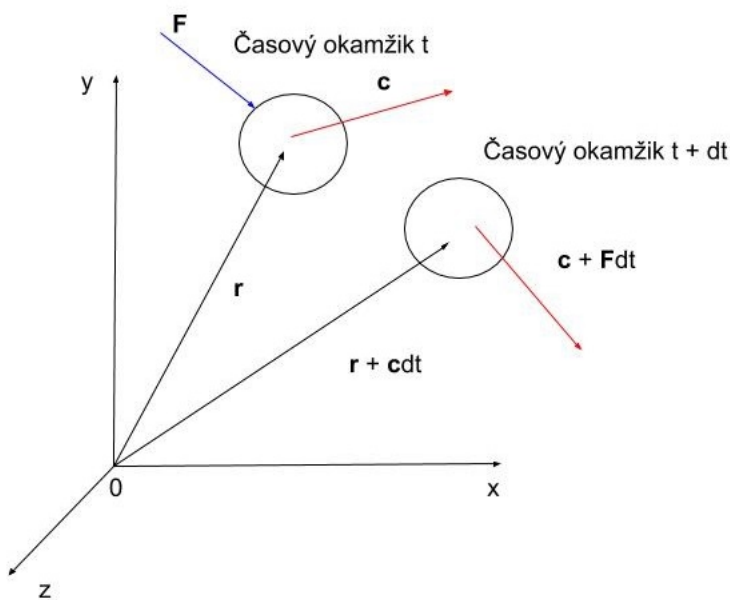
blivými stěnami. Výsledky řešení tohoto problému byly porovnány s literaturou [2].

Pátá kapitola představuje výsledky neizotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny na vybraných příkladech. Výsledky řešení problému čtvercové kavity s horní pohyblivou a ohřívanou stěnou byly porovnány s literaturou [1]. Byl užit přístup nucené konvekce. Příklad čtvercové kavity se čtyřmi pohyblivými stěnami z předchozí kapitoly byl rozšířen o neizotermické zadání a výsledky jsou v této kapitole odprezentovány. Na příkladu proudění tekutiny v kavitě s nepohyblivými ohřívanými stěnami byl užit přístup přirozené konvekce.

1 Princip Boltzmannovy metody

Tekutiny se od pevných látek liší především velkou pohyblivostí svých částic. Částice do sebe narážejí a ovlivňují tak vzájemně své trajektorie. Zkoumat proudění tekutin na mikroskopickém měřítku popisem chování každé jedné částice je v mnoha případech téměř nemožné. Proto proudění tekutin zkoumáme na takzvaném mezoskopickém měřítku pomocí Boltzmannovy rovnice. Boltzmannova rovnice je důležitou rovnicí statistické mechaniky. Nezkoumá pohyb každé částice zvlášť, ale poskytuje nám informace o výskytu jednoho shluku částic pomocí takzvané distribuční funkce (distribution function).

Uvažujme nyní shluk částic pohybující se rychlostí \mathbf{c} v místě určeném polohovým vektorem \mathbf{r} v čase t . Takový shluk popisuje distribuční funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$. Distribuční funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$ vyjadřuje počet částic nacházejících se v daném čase t a v dané oblasti mezi místy určenými polohovými vektory \mathbf{r} a $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, rychlostí mezi \mathbf{c} a $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$. Uvažujme také, že na shluk částic působí vnější síla \mathbf{F} .



Obr. 1: Schéma pohybu shluku částic

Vycházíme-li z druhého Newtonova pohybového zákona, potom vnější síla \mathbf{F} pozmění rychlost shluku částic za diferenciálně malý časový okamžik dt o $d\mathbf{c} = \mathbf{F} dt$ a změní pozici takového shluku částic o $d\mathbf{r} = \mathbf{c} dt$, viz obr. 1. Pokud platí

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{c} dt, \mathbf{c} + \mathbf{F} dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{c} - f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{c} = 0, \quad (1)$$

potom nedochází ke kolizi mezi částicemi. Reálně se s takovým případem ne-

setkáváme často, a proto zavádíme takzvaný kolizní operátor $\Omega(f)$ tak, že platí rovnice

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{c} dt, \mathbf{c} + \mathbf{F} dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{c} - f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{c} = \Omega(f) dt d\mathbf{r} d\mathbf{c}. \quad (2)$$

Vydělením rovnice (2) výrazem $dt d\mathbf{r} d\mathbf{c}$ a limitním přechodem $dt \rightarrow 0$ získáváme

$$\frac{df}{dt} = \Omega. \quad (3)$$

S vědomím skutečnosti, že distribuční funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$ je funkcí tří proměnných, a ze znalosti derivace složené funkce získáme rovnici

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} d\mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (4)$$

Rovnici (4) vydělíme diferenciálně malým časovým krokem dt a dostaneme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5)$$

Vztah (5) přepíšeme jako

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \mathbf{a} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (6)$$

kde \mathbf{a} je zrychlení shluku částic. Případně přepíšeme rovnici (6) do tvaru

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7)$$

Konečně dosazením rovnice (7) do rovnice (3) získáme

$$\Omega = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (8)$$

kde m je hmotnost jednoho shluku částic a, jak již bylo uvedeno, \mathbf{F} je vnější objemová síla působící na jeden shluk částic. Pokud tuto sílu budeme dále uvažovat nulovou, získáváme Boltzmannovu rovnici ve známém tvaru ($\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$)

$$\Omega = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla f. \quad (9)$$

Relace mezi distribuční funkcí a makroskopickými veličinami charakterizujícími proudové pole, jako je hustota tekutiny ρ , makroskopická rychlost tekutiny \mathbf{u} a vnitřní energie e , jsou následující

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int m f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}, \quad (10)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int m \mathbf{c} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}, \quad (11)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t)e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int m\mathbf{v}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}. \quad (12)$$

V rovnicích (10) až (12) je \mathbf{v} relativní rychlost shluku částic vůči makroskopické rychlosti tekutiny \mathbf{u} , pro kterou platí, že $\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{u}$, viz [1].

Boltzmannova rovnice je parciální diferenciální rovnice se zdrojovým členem. Její řešení komplikuje fakt, že kolizní operátor Ω je funkce závislá na distribuční funkci f . Pro řešení parciální diferenciální rovnice je třeba kolizní operátor také diskretizovat. Nejrozšířenější (nejznámější) formulace kolizního operátoru je vyjádřena pomocí BGKW (Bhatnagar, Gross, Krook, Welander) aproximace z roku 1954, viz [1]

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f), \quad (13)$$

kde f^{eq} je lokální rovnovážná distribuční funkce a ω je relaxační frekvence, respektive τ je relaxační čas.

Dosažením rovnice (13) do rovnice (9) představujeme Boltzmannovu rovnici v podobě

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\nabla f = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f). \quad (14)$$

Lattice Boltzmannova metoda představená v této práci diskretizuje rovnici (14) a uvažuje ji v daných směrech. Klíčovou rovnicí lattice Boltzmannovy metody ve směru i představujeme jako

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i\nabla f = \omega(f_i^{eq} - f_i) = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i). \quad (15)$$

Proveďme Taylorův rozvoj distribuční funkce $f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t)$, kde Δt je zvolený iterační krok, následovně

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial f_i}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{c}_i\Delta t + \dots \quad (16)$$

Úpravou a vydělením rovnice (16) časovým krokem Δt dostaneme

$$\frac{f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{c}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{c}_i, \quad (17)$$

odtud plyne

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)). \quad (18)$$

Způsob implementování klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody, tj. rovnice (18), pro hojně užívaný D2Q9 rychlostní model bude objasněn v následující kapitole.

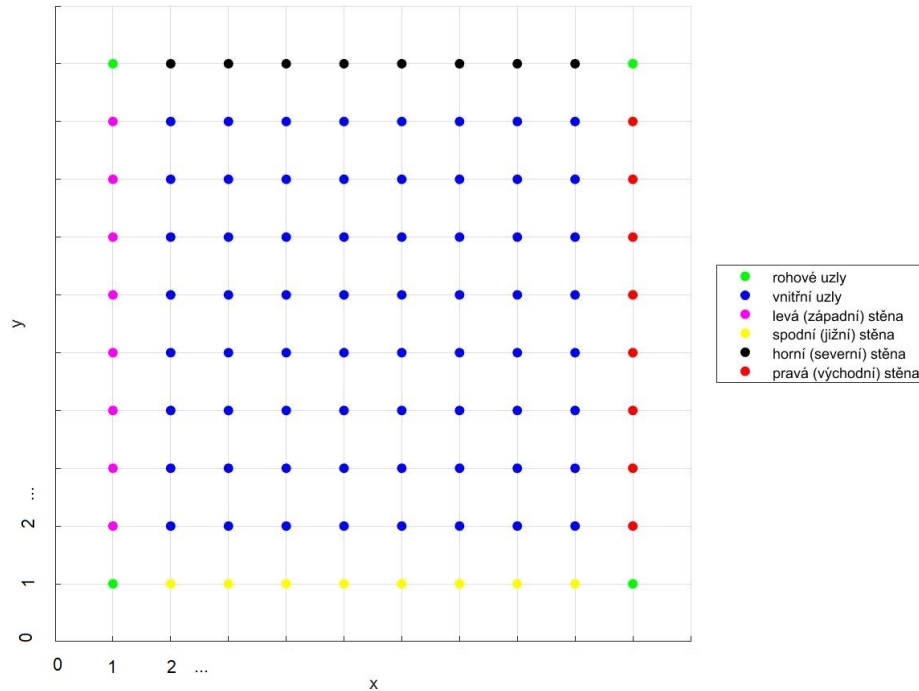
Na tomto místě popíšeme ještě vztah mezi relaxačním časem τ a kinematickou viskozitou kapaliny ν . Ten je odvoditelný z Navier-Stokesových rovnic a pro naše potřeby jej uvedeme v podobě

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}, \quad (19)$$

kde Δx je rozměrový krok užitý při numerickém řešení klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody.

2 Implementace "klíčové rovnice" lattice Boltzmannovy metody

V této kapitole je vysvětlen způsob implementace rovnice (18) pro řešení proudění nestlačitelných kapalin ve dvoudimenzionálním prostoru pomocí lattice Boltzmannovy metody.

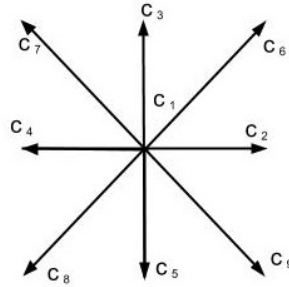


Obr. 2: Příklad výpočtové mříže

Diskretizovanou výpočtovou oblast si představíme jako mříž, viz obr. 2, kdy v každém uzlu této mříže provádíme výpočet a zajímá nás tak rychlost shluku částic nacházejících se v tomto místě. Poznamenejme dále, že výpočtem shluků částic v uzlech, které jsou na okraji výpočtové mříže, čili na stěně výpočtové oblasti, se budeme zabývat v odstavci 2.3. Je možné dokázat, že pro 2D model proudění postačí uvažovat pohyb (distribuci) sledovaného shluku v devíti směrech, a to včetně jednoho pro setrvání v klidu. Rychlosti odpovídající těmto směrům se označují jako mikroskopické rychlosti a v této práci je budeme značit jako \mathbf{c}_i , kde $i = 1, \dots, 9$, viz obr. 3. Takový model rychlostí je běžně označován jako D2Q9, kde D2 popisuje dvoudimenzionální problém a Q9 značí počet zohledněných směrů.

Pro prostorový krok Δx při takto volené výpočtové mříži platí $\Delta x = 1$, viz obr. 2, řádkové vektory mikroskopických rychlostí \mathbf{c}_i pro model D2Q9 lze potom vyjádřit následovně

$$\begin{aligned}
 i = 1 : \mathbf{c}_1 &= [0, 0], \\
 i = 2 : \mathbf{c}_2 &= [1, 0], \\
 i = 3 : \mathbf{c}_3 &= [0, 1], \\
 i = 4 : \mathbf{c}_4 &= [-1, 0], \\
 i = 5 : \mathbf{c}_5 &= [0, -1], \\
 i = 6 : \mathbf{c}_6 &= [1, 1], \\
 i = 7 : \mathbf{c}_7 &= [-1, 1], \\
 i = 8 : \mathbf{c}_8 &= [-1, -1], \\
 i = 9 : \mathbf{c}_9 &= [1, -1].
 \end{aligned} \tag{20}$$



Obr. 3: Vektory \mathbf{c}_i pro $i = 1, \dots, 9$

Každé částici na výpočtové mříži přiřadíme diskrétní distribuční funkci $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)$ nebo jednoduše $f_i(\mathbf{r}, t)$, $i = 1, \dots, 9$, která popisuje pravděpodobnost proudění v jednom konkrétním směru. Každé distribuční funkci f_i pak náleží váhový faktor (weighting factor) w_i . Pro ten platí, že součet váhových funkcí ve všech směrech $i = 1, \dots, 9$ je roven jedné

$$\sum_{n=1}^9 w_i = 1. \tag{21}$$

V případě uvažovaného modelu rychlostí D2Q9 pro jednotlivé váhové faktory platí, viz [1],

$$w_1 = \frac{4}{9}; w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = \frac{1}{9}; w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = \frac{1}{36}. \tag{22}$$

Rovnovážná distribuční funkci f_i^{eq} vystupující v rovnici (18) má podle [7] tvar

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} - \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}^2}{4c_s^2} \right), \quad (23)$$

kde c_s je rychlost zvuku, pro níž podle [1] platí

$$c_s = \frac{\Delta x}{\Delta t \sqrt{3}}. \quad (24)$$

Na tomto místě uveďme, že makroskopická hustota ρ kapaliny v daném uzlu výpočetní mříže je dána součtem distribučních funkcí shluku částic

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^9 f_n(\mathbf{r}, t) \quad (25)$$

a pro výpočet makroskopické rychlosti \mathbf{u} kapaliny v daném směru platí

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^9 f_n(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}_n. \quad (26)$$

Vraťme se nyní k rovnici (18). Pravou stranu této rovnice nazýváme kolize (collision) a levou stranu rovnice nazýváme distribuce (streaming). Máme tedy dva kroky, které jsou při vlastní numerické implementaci provedeny nezávisle na sobě. Pro implementaci samotnou nezáleží na tom, který z kroků (kolize, distribuce) je proveden jako první. V této práci bude kolize realizována jako první.

2.1 Kolize

V tomto odstavci popíšeme implementaci pravé strany rovnice (18). Během kolizní fáze dochází ve všech uzlech, ve kterých probíhá výpočet, k pomyslné srážce shluků částic.

Prvním v této práci představeným přístupem k řešení kolizního kroku je takzvaný single relaxation time model, zkráceně SRT model. Lattice Boltzmannovu metodu užívající principu SRT někdy také souhrnně označujeme jako SRT-LBM. Jak název metody napovídá, SRT se opírá pouze o jeden parametr, a to relaxační čas τ , který je třeba vhodně zvolit tak, aby byla zaručena numerická stabilita metody a aby byla zohledněna vazba mezi relaxačním časem τ a kinematickou vizkozitou ν kapaliny, viz (19). Ze vztahu (19) je zřejmé, že pokud hodnota relaxačního času τ bude blízká k $\frac{1}{2}$, potom kinematická viskozita ν bude svou hodnotou blízká nule. Reynoldsovo číslo (viz odstavec 3.2) by se potom svou hodnotou limitně blížilo k nekonečnu. Takové zadání postrádá fyzikální význam. Proto musí být $\tau > \frac{1}{2}$. Pro příliš velké relaxační časy však dochází k velkým změnám hustoty. Kapalina se tak chová jako "pseudostlačitelná", což v případě řešení problému proudění nestlačitelné kapaliny, se jeví jako problematické.

Zavádíme postkolizní distribuční funkci $f_i^{postkolizni}(\mathbf{r}, t)$ odpovídající pravé straně rovnice (18)

$$f_i^{postkolizni}(\mathbf{r}, t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)); i = 1, \dots, 9. \quad (27)$$

V každém kolizním kroku je proveden výpočet nových (postkolizních) distribučních funkcí $f_i^{postkolizni}(\mathbf{r}, t)$ v jednotlivých bodech výpočtové mříže. Kolize vznikly přitečením shluků částic v daném časovém kroku do těchto uzlů. Uvědomme si, že během inicializace algoritmu nedochází ke kolizi, a tudíž platí

$$f_i(\mathbf{r}, t) = f_i^{eq}(\mathbf{r}, t). \quad (28)$$

Dosadíme-li rovnici (28) do rovnice (27), získáme postkolizní distribuční funkci

$$f_i^{postkolizni}(\mathbf{r}, t) = f_i^{eq}(\mathbf{r}, t). \quad (29)$$

Alternativou k přístupu SRT je takzvaný MRT - multiple relaxation time, neboli přístup s mnohonásobným relaxačním parametrem. Ten je vhodnější použít, je-li hodnota τ blízká k $\frac{1}{2}$, a tedy, klesá-li numerická stabilita SRT přístupu. MRT přístup uskutečňuje kolizní krok v momentovém prostoru. Pro každý moment je potom vhodné volen jeden relaxační čas. Implementujeme-li D2Q9 model rychlostí, pak využíváme devíti parametrů $s_i \in [1; 2], s_i = 1, \dots, 9$, které jsou umístěny do diagonální matice \mathbf{S} následovně

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9)^T. \quad (30)$$

V případě této práce byly parametry voleny stejně jako v publikaci [1], tedy

$$\mathbf{S} = \text{diag}\left(1, 0; 1, 4; 1, 4; 1, 0; 1, 2; 1, 0; 1, 2; \frac{2}{(1+6\nu)}, \frac{2}{(1+6\nu)}\right). \quad (31)$$

Kolizní faktor je diskretizován v rychlostním prostoru podle rovnice (13). Diskretizace kolizního faktoru v momentovém prostoru je dána

$$\Omega = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}[\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}, t)]. \quad (32)$$

Pomocí transformační matice \mathbf{M} lze uskutečnit převod mezi vektorem momentů \mathbf{m} a vektorem distribučních funkcí \mathbf{f}

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{m}, \quad (33)$$

kde vektorem \mathbf{f} rozumíme vektor $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_9)^T$ a \mathbf{m} je definován podle [1],[9] jako

$$\mathbf{m} = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T, \quad (34)$$

kde ρ označuje hustotu, e energii, ϵ kvadrát energie, j_i složku hybnosti v daném směru, q_i složku energetického toku v daném směru a p_{xx} diagonální prvky

tenzoru napětí a p_{xy} mimodiagonální prvky tenzoru napětí. Pro D2Q9 model je matice \mathbf{M} dána jako

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

a inverzní matice \mathbf{M}^{-1} k matici \mathbf{M} je dána

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Prvky vektoru \mathbf{m}^{eq} z rovnice (32) jsou dle [1] a [8] definovány následovně

$$\begin{aligned} m_1^{eq} &= \rho, \\ m_2^{eq} &= \rho(-2 + 3(\rho(u_x^2 + u_y^2))), \\ m_3^{eq} &= \rho(1 - 3(\rho(u_x^2 + u_y^2))), \\ m_4^{eq} &= \rho u_x, \\ m_5^{eq} &= -\rho u_x, \\ m_6^{eq} &= \rho u_y, \\ m_7^{eq} &= -\rho u_y, \\ m_8^{eq} &= \rho(u_x^2 - u_y^2), \\ m_9^{eq} &= \rho u_x u_y. \end{aligned} \quad (37)$$

Po dosazení kolizního faktoru v momentovém prostoru do rovnice (27) můžeme uvažovat

$$\mathbf{f}^{postkolizni} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}[\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}, t)], \quad (38)$$

případně po uplatnění rovnice (33)

$$\mathbf{f}^{postkolizni} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M}[\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{f}^{eq}(\mathbf{r}, t)]. \quad (39)$$

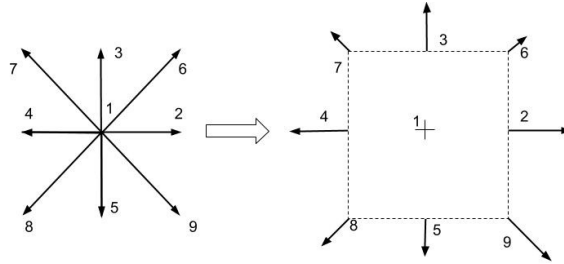
Poznamenejme, že přístupy SRT a MRT nejsou jedinými možnými přístupy k řešení. Jako jeden z dalších přístupů budiž alespoň zmíněn přístup two relaxation time - TRT.

2.2 Distribuce

Následujících několik řádků se zabývá implementací levé strany rovnice (18). Při distribuci dochází k přesunu distribučních funkcí do sousedních uzlů ve směrových vektorů, viz obr. 4, podle rovnice

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^{\text{postkolizní}}(\mathbf{r}, t); i = 1, \dots, 9. \quad (40)$$

Následně pak probíhá vyhodnocení rychlosti a hustoty kapaliny v daném uzlu výpočtové mříže užitím rovnic (25) a (26). Problém chybějících distribučních funkcí na okraji výpočtové mříže, o nichž nám distribuční krok informaci neposkytuje, řešíme implementací okrajových podmínek (viz odstavec 2.3).



Obr. 4: Schéma přesunu distribučních funkcí f_i pro $i = 1, \dots, 9$ po uplatnění kroku distribuce

2.3 Okrajové podmínky

Jak již bylo zmíněno v odstavci 2.2, distribuční krok nám neposkytuje informaci o všech distribučních funkcích nacházejících se na okraji výpočtové mříže, což nám znemožňuje vyhodnotit hustotu ρ a makroskopickou rychlost \mathbf{u} kapaliny podle rovnic (25) a (26). Problém řeší okrajové podmínky zadávané na hranici výpočtové oblasti. V kapitolách 4 a 5 jsou numericky řešeny problémy proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve čtvercové 2D kavitě. Zde jsme užili okrajové podmínky na pevně nepropustné stěně typu "bounce-back" a okrajovou podmínku pro pohyblivou stěnu se zadanou rychlostí. Obě tyto podmínky budou diskutovány v následujících odstavcích.

Ukažme si odvození okrajové podmínky na pevných nepohyblivých stěnách typu "bounce-back" a na pohyblivé stěně se zadanou rychlostí pro případ proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve čtvercové 2D kavitě s horní pohyblivou stěnou, který je řešen v odstavci 4.1, viz obr. 10.

2.3.1 Okrajová podmínka na pevné nepohyblivé stěně typu "bounce-back"

Okrajová podmínka typu "bounce-back" je užitá při interakci tekutiny s rovnou pevnou nepropustnou stěnou. Popisuje situaci, kdy shluky částic narážejí na pevnou nepropustnou stěnu s neklouzavým povrchem po stejných trasách, po kterých se odrážejí zpět do výpočtové oblasti. Pro numerickou implementaci tedy reálně aplikujeme nerovnovážnou bounce back okrajovou podmínku (NEBB) podle [4], tedy

$$f_i - f_i^{eq} = \bar{f}_i - \bar{f}_i^{eq}, \quad (41)$$

kde f_i je hledaná distribuční funkce a \bar{f}_i je "protější" distribuční funkce. Je-li neznámou distribuční funkcí f_3 , potom "protější" distribuční funkcí je podle okrajové podmínky typu "bounce-back" f_5 . Je-li neznámou distribuční funkcí f_6 , potom "protější" distribuční funkcí je f_8 apod, viz obr. 5.

Konkrétně pro úlohu formulovanou v odstavci 4.1 byla tato podmínka užitá na levé (západní), pravé (východní) a spodní (jižní) stěně výpočtové oblasti.

Věnujme se nyní aplikaci podmínky na spodní (jižní) stěně výpočtové oblasti. Uvažujeme tedy shluk částic interagující se stěnou, viz. obr. 5, tedy shluk, který se nachází v uzlu na spodní stěně výpočtové oblasti podle obr. 2. Distribuční funkce f_8, f_5, f_9, f_2, f_1 a f_4 po uplatnění distribučního kroku jsou známé. Distribuční funkce f_6, f_3 a f_7 jsou neznámé a v obr. 5 jsou vyznačeny červeně.

Výchozí rovnicí pro určení distribuční funkce f_3 pomocí okrajové podmínky typu "bounce-back" je tedy dosazením do rovnice (41)

$$f_3 - f_3^{eq} = f_5 - f_5^{eq}. \quad (42)$$

Po dosazení rovnice (23) do rovnice (42) dostaneme

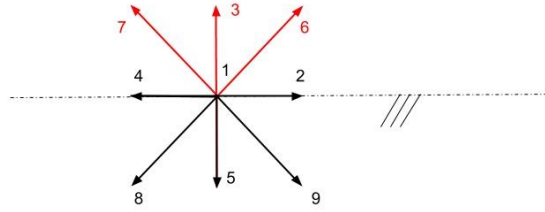
$$f_3 - w_3 \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} - \frac{\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u}^2}{4c_s^2} \right) = f_5 - w_5 \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} - \frac{\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u}^2}{4c_s^2} \right). \quad (43)$$

Protože odvozujeme okrajovou podmínku typu "bounce-back" na pevné nepohyblivé stěně, musí pro rychlost tekutiny na stěně platit $\mathbf{u} = [0, 0]^T$. Po dosazení získáme

$$f_3 - w_3 \rho = f_5 - w_5 \rho. \quad (44)$$

S ohledem na skutečnost, že váhové funkce w_3 a w_5 se podle (22) rovnají, získáme konečný tvar okrajové podmínky typu "bounce-back" pro distribuční funkci f_3 na **spodní stěně** výpočtové oblasti, tedy

$$f_3 = f_5. \quad (45)$$



Obr. 5: Shluk částic nacházející se na spodní (jižní) stěně výpočtové oblasti

Analogicky získáme okrajové podmínky pro zbývající distribuční funkce f_6 a f_7 jako

$$f_6 = f_8, \quad (46)$$

$$f_7 = f_9. \quad (47)$$

Obdobně získáme okrajovou podmínku pro shluk částic nacházející se na pravé (východní) a levé (západní) rovné nepohyblivé nepropustné stěně výpočtové oblasti, viz obr. 6. Pro **levou stěnu** je představujeme následovně

$$f_6 = f_8, \quad (48)$$

$$f_2 = f_4, \quad (49)$$

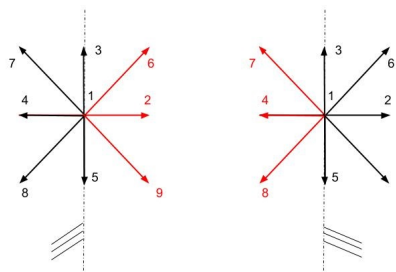
$$f_9 = f_7 \quad (50)$$

a pro **pravou stěnu** platí

$$f_8 = f_6, \quad (51)$$

$$f_4 = f_2, \quad (52)$$

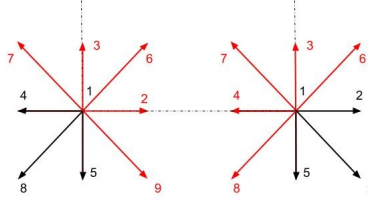
$$f_7 = f_9. \quad (53)$$



Obr. 6: Shluky částic nacházející se na bočních stěnách výpočtové oblasti

Speciální pozornost věnujme ještě uzlům výpočtové mříže, které se nacházejí ve

spodních rozích výpočtové oblasti, viz obr. 2. O takových uzlech nemůžeme tvrdit, že leží jen na boční nebo jen na spodní stěně výpočtové oblasti. I tyto chybějící distribuční funkce (na obr. 7 jsou vyznačeny červeně) jsou nalezeny pomocí okrajové podmínky typu "bounce-back".



Obr. 7: Shluky částic nacházející se v dolních rozích výpočtové oblasti

Pro **pravý dolní roh** platí

$$f_3 = f_5, \quad (54)$$

$$f_7 = f_9, \quad (55)$$

$$f_4 = f_2, \quad (56)$$

$$f_8 = f_6. \quad (57)$$

Nicméně distribuční funkce f_6 v rovnici (57) zůstává neznámou. Pro její určení rozepíšeme nyní sumu v rovnici (25), tedy

$$\rho = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9. \quad (58)$$

Předpokládáme, že hustota v rohových uzlech je rovna hustotě v sousedních uzlech ve stejné hladině (tj. v hladině jižní stěny). Hustota ρ tedy v rovnicích není neznámou. Takový proces nazýváme **extrapolací hustoty**. Nyní dosadíme rovnice (54) až (57) do rovnice (58)

$$\rho = f_1 + 2 \cdot f_2 + 2 \cdot f_5 + 2 \cdot f_6 + 2 \cdot f_9 \quad (59)$$

a následně vyjádříme neznámou f_6

$$f_6 = \frac{\rho}{2} - f_5 - f_9 - \frac{f_1}{2}. \quad (60)$$

Okrajové podmínky pro **levý dolní roh** výpočtové oblasti tak popisují rovnice (54), (55), (56), (57) a (60). Pro **pravý dolní roh** výpočtové oblasti byly analogicky odvozeny následující okrajové podmínky

$$f_3 = f_5, \quad (61)$$

$$f_2 = f_4, \quad (62)$$

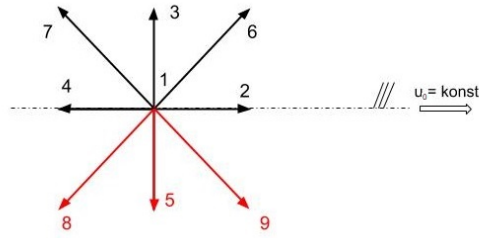
$$f_6 = f_8, \quad (63)$$

$$f_7 = f_9. \quad (64)$$

$$f_9 = \frac{\rho}{2} - f_5 - f_4 - f_8 - \frac{f_1}{2}. \quad (65)$$

2.3.2 Okrajová podmínka na pohyblivou stěnu se zadanou rychlostí

Uvažujme nyní horní pohyblivou stěnu výpočtové oblasti. Ta se pohybuje konstantní rychlostí $u_x = u_0$. Neznámými distribučními funkcemi jsou funkce f_8 , f_5 a f_9 , viz obr. 8.



Obr. 8: Shluk částic nacházející se na horní stěně výpočtové oblasti

Pro určení distribuční funkce f_5 vyjdeme z rovnice (41)

$$f_5 - f_5^{eq} = f_3 - f_3^{eq}. \quad (66)$$

Po dosazení rovnice (23) do podmínky (66) píšeme

$$f_5 - w_5 \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} - \frac{\mathbf{c}_5 \cdot \mathbf{u}^2}{4c_s^2} \right) = f_3 - w_3 \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^2} - \frac{\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{u}^2}{4c_s^2} \right). \quad (67)$$

V tomto případě dosadíme za $\mathbf{u} = [u_0, 0]^T$, jak plyne z podstaty zadání, a za mikroskopické rychlosti $\mathbf{c}_3 = [0, 1]^T$ a za $\mathbf{c}_5 = [0, -1]^T$ podle vztahu (20). Po dosazení a roznásobení získáváme

$$f_5 - w_5 \rho = f_3 - w_3 \rho. \quad (68)$$

Vzhledem k tomu, že váhové funkce w_5 a w_3 se rovnají, viz (22), získáváme okrajovou podmínku pro distribuční funkci f_5 ve tvaru

$$f_5 = f_3. \quad (69)$$

Pro určení zbývajících neznámých distribučních funkcí f_8 a f_9 rozepišme nyní sumu v rovnici (26)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2 + \mathbf{c}_3 f_3 + \mathbf{c}_4 f_4 + \mathbf{c}_5 f_5 + \mathbf{c}_6 f_6 + \mathbf{c}_7 f_7 + \mathbf{c}_8 f_8 + \mathbf{c}_9 f_9). \quad (70)$$

S využitím x -ových složek vektorů mikroskopických rychlostí $\mathbf{c}_i, i = 1, \dots, 9$ definovaných v (20) upravíme rovnici (70) na tvar

$$u_0 \equiv u_x = \frac{1}{\rho}(f_2 - f_4 + f_6 - f_7 - f_8 + f_9). \quad (71)$$

Analogicky rozepíšeme rovnici (70) do směru osy y

$$u_y = \frac{1}{\rho}(f_3 - f_5 + f_6 + f_7 - f_8 - f_9). \quad (72)$$

Protože horní stěna výpočtové oblasti se pohybuje rychlostí $\mathbf{u} = [u_0, 0]^T$ a s ohledem na podmínku (69), můžeme rovnici (72) přepsat jako

$$0 = f_6 + f_7 - f_8 - f_9. \quad (73)$$

Máme tedy dvě rovnice (71) a (73) pro dvě neznámé f_8 a f_9 . Ty řešíme. Nejprve z rovnice (73) vyjádříme neznámou f_8

$$f_8 = f_6 + f_7 - f_9 \quad (74)$$

a následně ji dosadíme do rovnice (71)

$$\rho u_0 = f_2 - f_4 - 2 \cdot f_7 + 2 \cdot f_9. \quad (75)$$

Z rovnice (75) pak vyjádříme neznámou distribuční funkci f_9 jako

$$f_9 = \frac{\rho u_0}{2} + f_7 + \frac{f_4 - f_2}{2}. \quad (76)$$

Dosažením rovnice (76) do rovnice (74) potom pro f_8 získáme

$$f_8 = -\frac{\rho u_0}{2} + f_6 + \frac{f_2 - f_4}{2}. \quad (77)$$

Okrajové podmínky pro **horní pohyblivou stěnu** uvažované výpočtové oblasti se zadanou konstantní rychlostí u_0 ve své konečné podobě představují rovnice (69), (76) a (77).

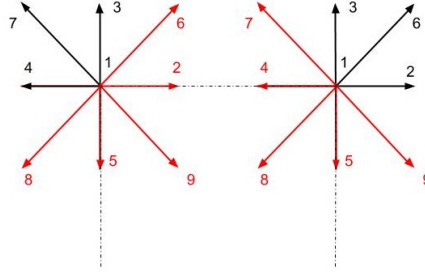
Zvláštní pozornost si opět zaslouží rohové uzly. Zastavme se nyní u okrajových podmínek pro levý horní uzel, viz obr. 9. Distribuční funkce f_5, f_9 a f_2 určíme pomocí okrajové podmínky typu "bounce-back" následovně

$$f_5 = f_3, \quad (78)$$

$$f_9 = f_7, \quad (79)$$

$$f_2 = f_4, \quad (80)$$

$$f_6 = f_8. \quad (81)$$



Obr. 9: Shluky částic nacházející se v horních rozích výpočtové oblasti

Distribuční funkci f_8 určíme analogicky jako jsme to udělali v předchozím odstavci, tj. pomocí extrapolace hustoty v rohových uzlech. Pro f_8 tedy platí

$$f_8 = \frac{\rho}{2} - f_3 - f_4 - f_7 - \frac{f_1}{2}. \quad (82)$$

Okrajové podmínky pro **levý horní roh** výpočtové oblasti tak popisují rovnice (78), (79), (80), (81) a (82). Pro **pravý horní roh** výpočtové oblasti byly analogicky odvozeny následující okrajové podmínky

$$f_5 = f_3, \quad (83)$$

$$f_9 = f_7, \quad (84)$$

$$f_4 = f_2, \quad (85)$$

$$f_8 = f_6, \quad (86)$$

$$f_7 = \frac{\rho}{2} - f_5 - f_4 - f_8 - \frac{f_1}{2}. \quad (87)$$

2.4 Rozšíření pro neizotermický problém

Na pozadí numerického řešení neizotermického proudění nestlačitelné vazké newtonské kapaliny pomocí lattice Boltzmannovy metody stojí Navier-Stokesovy rovnice a energetická rovnice. Navier-Stokesovy rovnice pro 2D proudění nestlačitelné vazké kapaliny lze vyjádřit v kartézském souřadném systému jako

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_x, \quad (88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F_y, \quad (89)$$

kde u je rychlost ve směru osy x a v je rychlost ve směru osy y , ν je kinematická viskozita kapaliny a F_i jsou vnější objemové síly. Energetickou rovnici uvádíme v podobě

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho c_p} \Phi, \quad (90)$$

kde k je tepelná vodivost kapaliny, c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku a Φ představuje tepelný zdroj působící na jednotku objemu, jako např. radiace nebo zdroj tepla způsobený chemickou reakcí. Problém nucené konvekce (forced convection) řeší Navier-Stokesovy rovnice a energetickou rovnici nezávisle na sobě, tj. teplota je vyhodnocována pomocí vypočteného rychlostního pole v každém výpočetním kroku. Problém přirozené konvekce (natural convection) řeší tyto rovnice jako provázaný celek. Pro tento případ je výchozí rovnice lattice Boltzmannovy metody, tj. rovnice (18), přímo modifikována. Obě zmíněné úlohy budou představeny v následujících odstavcích a numericky řešeny v kapitole 5.

2.4.1 Nucená konvekce

Je-li řešen problém nucené konvekce, pak je pro výpočet makroskopické rychlosti tekutiny a hustoty užita rovnice (18) tak, jak bylo nastíněno doposud v kapitole 2. Navíc zavádíme distribuční rovnici pro výpočet teploty g_i ve směru i v daném místě zadaném polohovým vektorem \mathbf{r} a čase t , rovnovážnou funkci pro výpočet teploty g_i^{eq} ve směru i v daném místě zadaném polohovým vektorem \mathbf{r} a čase t a analogicky k rovnici (18) platí

$$g_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_t} (g_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - g_i(\mathbf{r}, t)), \quad (91)$$

kde τ_t je relaxační čas teplotní distribuční funkce. Pro rovnovážnou teplotní funkci g_i^{eq} platí, viz [10],

$$g_i^{eq} = T(\mathbf{x}, t) w_i \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} \right), \quad (92)$$

kde T je makroskopická teplota. Vztah mezi makroskopickou teplotou a distribučními funkcemi teploty pak je

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^9 g_n(\mathbf{r}, t). \quad (93)$$

Relaxační čas teplotní distribuční funkce τ_t je potom odlišný od relaxačního času τ distribuční funkce f a platí, že je potřeba i ten vhodně zvolit tak, aby byla zajištěna numerická stabilita podobně jako při volbě relaxačního času τ , blíže viz odstavce 2.1, a aby byl zohledněn vztah mezi relaxačním časem distribuční funkce teploty τ_t . Ten pro rychlostní model D2Q9 uvedeme podle [18] v podobě

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{2\tau_t - 1}{6}, \quad (94)$$

kde α je součinitel teplotní vodivosti. Výpočet teploty dle výše představených rovnic tak probíhá v každém uzlu výpočtové mříže. Pravou stranu rovnice (91) nazveme kolizí a levou stranu distribucí. Rovnici tak řešíme analogicky, jako když jsme řešili rovnici (18), viz odstavce 2.1 a 2.2. S problémem se opět setkáváme při výpočtu distribučních funkcí na okraji výpočtové mříže. Tento problém řeší zavedení okrajových podmínek, viz odstavec 2.4.3.

2.4.2 Přirozená konvekce

Řešíme-li problém přirozené konvekce, potom bude zavedena distribuční funkce teploty g_i stejně jako v případě řešení problému nucené konvekce, viz rovnice (91) až (93), a navíc bude rozšířena klíčová rovnice lattice Boltzmannovy metody (18) o nový člen. Dle Boussinesqovy aproximace budeme uvažovat vnější sílu \mathbf{F} , která ve 2D po rozepsání do složek x, y činí

$$F_x = \rho g_x \beta (T - T_{mean}), \quad (95)$$

$$F_y = \rho g_y \beta (T - T_{mean}), \quad (96)$$

kde T_{mean} je střední teplota, g_k je gravitační konstanta ve směru příslušné osy a β je součinitel teplotní roztažnosti. Boussinesqova aproximace vnější síly je do LBM modelu zavedena v podobě

$$F_i = 3w_i F = 3w_i g_x \beta (T - T_{mean}) c_x + 3w_i g_y \beta (T - T_{mean}) c_y, \quad (97)$$

kde c_x a c_y rozumíme příslušnou složku mikroskopického vektoru \mathbf{c}_i . Rovnici (18) potom konečně upravujeme do tvaru

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)) + \rho F_i. \quad (98)$$

Kolizní (pravá) část rovnice (18) je tak rozšířena o člen ρF_i . Rovnice je řešena dle stejného principu, jaký byl popsán v předchozích odstavcích. Makroskopická rychlost zkoumané tekutiny a hustota tekutiny je vyhodnocována podle rovnic (25) a (26). Stejně tak je souběžně řešena rovnice (91) tak, jak bylo nastíněno v odstavci 2.4.1. Teplota tekutiny je vyhodnocována podle rovnice (93).

2.4.3 Okrajové podmínky pro řešení proudění neizotermické kapaliny

Jak bylo zmíněno v odstavci 2.4.1, při řešení problémů nucené i přirozené konvekce se setkáváme s problémem chybějící teplotní distribuční funkce g_i na okraji výpočtové oblasti, což nám znemožňuje vyhodnotit teplotu tekutiny T podle rovnice (93). Při řešení neizotermického proudění vazké tekutiny ve 2D kavitě se v kapitolách 4 a 5 setkáme se zadáním, kdy je stěna kavity ochlazována (respektive ohřívána), nebo kdy je teplotně izolována. Okrajové podmínky řešící toto zadání budou představeny v následujících odstavcích.

Ukažme si odvození okrajové podmínky pro adiabaticky izolovanou stěnu a odvození okrajové podmínky pro ohřívanou (respektive ochlazovanou stěnu) na příkladu řešeném v odstavci 5.1, viz. obr. 21. Tekutina v této výpočtové oblasti měla na počátku bezrozměrnou teplotu $T_0 = 0$. Horní (severní) stěna výpočtové oblasti je ohřívána na bezrozměrnou teplotu $T_w = 1$ a zároveň se pohybuje rychlostí u_0 . Na levé (západní) a pravé (východní) stěně je udržována konstantní bezrozměrná teplota $T_m = 0$. Spodní (jižní) stěna je adiabaticky izolována.

Adiabaticky izolovaná stěna

Matematickou formulaci okrajové podmínky pro adiabaticky izolovanou spodní (jižní) stěnu výpočtové oblasti zapíšeme následovně

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (99)$$

Pro aproximaci lattice Boltzmannovou metodou uvažujeme v rovnici (99) rozměrový krok ∂y konstantní, pevně daný, rovný rozměrovému distribučnímu kroku Δy . Proto můžeme tímto rozměrovým krokem rovnici vynásobit a získáme

$$\partial T = 0. \quad (100)$$

Symbolem ∂T nyní rozumíme teplotní změnu úměrnou rozměrovému kroku Δy . Rovnici (100) diskretizujeme následovně

$$T^{y=2} - T^{y=1} = 0, \quad (101)$$

kde $T^{y=1}$ je teplota na jižní stěně a $T^{y=2}$ je teplota ve vedlejší (v našem případě vyšší) hladině, viz obr. 2. Rovnici (101) přepíšeme do podoby

$$T^{y=1} = T^{y=2} \quad (102)$$

Následně v rovnici (102) rozepíšeme makroskopickou teplotu tekutiny jako součet distribučních funkcí teploty podle rovnice (93), dostaneme

$$\sum_{n=1}^9 g_i^{y=1}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^9 g_i^{y=2}(\mathbf{r}, t), \quad (103)$$

kde $g_i^{y=1}$ je potom teplotní distribuční funkce na zkoumané (v našem případě spodní) stěně výpočtové oblasti a $g_i^{y=2}$ je teplotní distribuční funkce ve vedlejší (v našem případě vyšší) hladině. Z rovnice (103) tedy plynou následující okrajové podmínky pro spodní (jižní) stěnu kavity

$$g_i^{y=1} = g_i^{y=2}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. \quad (104)$$

Stejná okrajová podmínka byla užita i pro všechny rohové uzly.

Ochlazovaná (respektive ohřívaná) stěna na danou teplotu

Zaměříme se nyní na horní (severní) stěnu výpočtové oblasti. Je zadána Dirichletova okrajová podmínka na severní stěně výpočtové oblasti - v našem případě je to teplota na stěně T_w . Neznámými distribučními funkcemi teploty g_i jsou nyní distribuční funkce teploty g_8 , g_5 a g_9 , analogicky k problému řešenému v odstavci 2.3.2. Ostatní distribuční funkce teploty známe po uplatnění distribučního kroku. Pro určení distribuční funkce teploty g_5 vyjdeme z výchozí rovnice okrajové podmínky typu "anti bounce-back", kterou podle [16] užíváme právě, je-li na stěně výpočtové oblasti zadána Dirichletova podmínka. Obecný tvar okrajové podmínky typu "anti bounce-back" podle [18] je

$$g_i - g_i^{eq} = -(\bar{g}_i - \bar{g}_i^{eq}) = \bar{g}_i^{eq} - \bar{g}_i, \quad (105)$$

kde g_i je hledaná distribuční funkce teploty a \bar{g}_i je "protější" distribuční funkce teploty. Do rovnice (105) dosadíme a dostaneme

$$g_5 - g_5^{eq} = g_3^{eq} - g_3. \quad (106)$$

Zaměříme se nyní na rovnovážnou distribuční funkci teploty g_5^{eq} , tedy na rovnici (92). Do této rovnice dosadíme $\mathbf{u} = [u_0, 0]^T$, jak plyne z podstaty zadání, a za $\mathbf{c}_5 = [0, -1]$, viz (20), potom platí

$$g_5^{eq} = T_w \cdot w_5 \left(1 + \frac{[0, -1] \cdot [u_0, 0]^T}{c_s^2} \right) = T_w \cdot w_5. \quad (107)$$

Obdobně určíme rovnovážnou distribuční funkci teploty g_3^{eq} . Do vztahu (92) dosadíme $\mathbf{u} = [u_0, 0]^T$ a $\mathbf{c}_3 = [0, 1]$, viz (20), dostaneme

$$g_3^{eq} = T_w \cdot w_3 \left(1 + \frac{[0, 1] \cdot [u_0, 0]^T}{c_s^2} \right) = T_w \cdot w_3. \quad (108)$$

Po dosazení rovnic (107) a (108) do rovnice (106) získáváme

$$g_5 - T_w \cdot w_5 = T_w \cdot w_3 - g_3. \quad (109)$$

Z rovnice (109) algebraickou úpravou vyjádříme neznámou

$$g_5 = T_w \cdot (w_3 + w_5) - g_3. \quad (110)$$

Analogicky určíme i zbývající neznámé g_9 a g_8

$$g_9 = T_w \cdot (w_7 + w_9) - g_7, \quad (111)$$

$$g_8 = T_w \cdot (w_6 + w_8) - g_6. \quad (112)$$

Okrajové podmínky pro **horní ohřivanou stěnu** výpočtové oblasti tedy popisují rovnice (110), (111) a (112).

Obdobně určíme okrajové podmínky pro pravou (východní) a levou (západní) stěnu výpočtové oblasti. Pro shluky na pravé stěně jsou neznámými funkce g_7 , g_4 a g_8 a pro shluky na levé stěně jsou neznámými funkce g_2 , g_6 a g_9 , viz obr. 5. Připomeňme si, že na pravé i levé stěně výpočtové oblasti je Dirichletovou okrajovou podmínkou konstantní teplota $T_m = 0$. Pro **pravou stěnu** výpočtové oblasti platí

$$g_7 = T_m \cdot (w_7 + w_9) - g_9 = -g_9, \quad (113)$$

$$g_4 = -g_2, \quad (114)$$

$$g_8 = -g_6 \quad (115)$$

a pro **levou stěnu** výpočtové oblasti platí

$$g_2 = -g_4, \quad (116)$$

$$g_6 = -g_8, \quad (117)$$

$$g_9 = -g_7. \quad (118)$$

3 Podobnostní modelování

Podobnostní modelování funguje na principu existence invariantů podobnosti, tj. bezrozměrných podobnostních čísel. Jestliže u dvou různých zkoumaných objektů probíhají procesy, jejichž podobnostní čísla se rovnají, označíme je za podobné. Zkoumání procesu probíhá potom na objektu, který je z různých důvodů dosažitelnější.

3.1 Vztah mezi reálnými (fyzikálními) veličinami a veličinami používanými při implementaci LBM

Lattice Boltzmannova metoda (dále jen LBM) je aplikovatelná na řešení reálných problémů. LBM pracuje s vlastními jednotkami, takzvanými lattice Boltzmannovskými jednotkami. Všechny veličiny, které jsme zavedli v kapitole 2 a dosud používali (jako např. makroskopická rychlost u_0 , hustota ρ , ...), jsou v lattice Boltzmannovských jednotkách. Pro správnou implementaci lattice Boltzmannovy metody je nutné znát vztah mezi lattice Boltzmannovskými a reálnými (fyzikálními) veličinami.

Poznamenejme, že v dalším textu budou veličiny v lattice Boltzmannovských jednotkách značeny apostrofem (jako Q') a reálné (fyzikální) veličiny bez apostrofu (jako Q). Způsobů přepočtu fyzikálních veličin na veličiny užívající lattice Boltzmannovu metodu je vícero. V naší práci zavedeme konverzní faktory, které nám zprostředkují přepočet reálných (fyzikálních) veličin na veličiny lattice Boltzmannovské.

Zavádíme konverzní faktor pro rozměr C_l tak, že platí

$$l = l' \cdot C_l. \quad (119)$$

Analogicky platí přímá úměrnost mezi reálným časovým krokem Δt a časovým krokem v lattice Boltzmannovských jednotkách $\Delta t'$

$$\Delta t = C_t \cdot \Delta t', \quad (120)$$

kde C_t je konverzní faktor pro čas. Pro případ reálného rozměrového kroku platí

$$\Delta x = C_l \cdot \Delta x', \quad (121)$$

kde $\Delta x'$ je rozměrový krok v lattice Boltzmannovských jednotkách. Volbou mikroskopických rychlostí \mathbf{c}_i ve tvaru podle vztahu (20) a výpočtové mříže podle obr. 2 jsme již zvolili, že

$$\Delta x' = 1. \quad (122)$$

Velikost časového iteračního kroku v lattice Boltzmannovských jednotkách $\Delta t'$ uvažujeme rovnou velikosti rozměrového kroku, viz [1], [4], a platí tedy

$$\Delta t' = 1. \quad (123)$$

Po dosazení rovnic (122) a (123) do rovnic (120) a (121) platí

$$\Delta x = C_l \cdot 1 = C_l, \Delta t = C_t \cdot 1 = C_t. \quad (124)$$

Pro výpočet konverzního faktoru pro čas C_t užíváme vztahu mezi relaxačním časem a kinematickou viskozitou ν , viz (19). Tedy

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{C_l^2}{C_t} \Rightarrow C_t = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{C_l^2}{\nu}. \quad (125)$$

Uvažujme nyní stejný vztah v lattice Boltzmannovských jednotkách, kam dosadíme za $\Delta x'$ a $\Delta t'$ podle vztahů (122) a (123). Následně vyjádříme relaxační čas τ , tedy

$$\nu' = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{\Delta x'^2}{\Delta t'} = \frac{2\tau - 1}{6} \Rightarrow \tau = 3 \cdot \nu' + \frac{1}{2}. \quad (126)$$

Nyní určíme relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t . Nejprve přepíšeme rovnici (94) pomocí veličin v lattice Boltzmannovských jednotkách a vyjádříme neznámou, tedy

$$\alpha' = \frac{2\tau_t - 1}{6} \frac{\Delta x'^2}{\Delta t'} \Rightarrow \tau_t = \frac{3\Delta t' \alpha'}{\Delta x'^2} + \frac{1}{2}. \quad (127)$$

Nyní dosadíme do rovnice (127) podle (122) a (123) a dostaneme

$$\tau_t = \frac{3\Delta t' \alpha'}{\Delta x'^2} + \frac{1}{2} = 3\alpha' + \frac{1}{2}. \quad (128)$$

Povšimněme si analogii mezi relaxačním časem τ (viz (126)) a relaxačním časem distribuční funkce teploty τ_t (viz (128)).

Podobně lze z teorie podobnostního modelování stanovit převodní vztah mezi fyzikální (makroskopickou) rychlostí u_0 a lattice Boltzmannovskou rychlostí u'_0

$$u_0 = C_u \cdot u'_0, \quad (129)$$

kde C_u je konverzní faktor pro rychlost. Rychlost v lattice Boltzmannovských jednotkách u'_0 a rozměr v lattice Boltzmannovských jednotkách l' obvykle volíme a dopočítáváme kinematickou viskozitu v lattice Boltzmannovských jednotkách ν' s užitím Reynoldsova podobnostního čísla, viz odstavec 3.2.

Poznámku si zaslouží ještě vztah mezi lattice Boltzmannovskou hustotou ρ' a reálnou (fyzikální) hustotou kapaliny ρ . V této práci zkoumáme proudění nestlačitelné kapaliny. Z definice nestlačitelné homogenní kapaliny víme, že $\rho = konst.$, a tedy i $\rho' = konst.$ Hodnota lattice Boltzmannovské hustoty je díky tomu pro samotný numerický výpočet irelevantní a bývá zpravidla nastavena na hodnotu $\rho' = 1$ za účelem jednoduchosti výpočtu.

3.1.1 Bezrozměrná teplota

Při užití lattice Boltzmannovy metody pro řešení proudění neizotermické kapaliny zavádíme takzvanou bezrozměrnou teplotu T' jako podíl rozdílu okamžité fyzikální teploty T od počáteční reálné teploty T_0 a změny reálné teploty ΔT na výpočtové oblasti. Odsud získáváme převodní vztah

$$T' = \frac{T - T_0}{\Delta T}. \quad (130)$$

Pro pojmenování bezrozměrné teploty se již neuzívá označení "teplota v lattice Boltzmannovských jednotkách", přesto ji však v této práci označíme apostrofem jako T' .

3.2 Reynoldsovo číslo a Machovo číslo

Reynoldsovo bezrozměrné podobnostní číslo je definováno vztahem

$$Re = \frac{u_0 \cdot l}{\nu}, \quad (131)$$

kde l je charakteristický rozměr, u_0 je charakteristická rychlost a ν kinematická viskozita kapaliny.

Z teorie podobnostního modelování uvažujeme rovnost mezi Reynoldsovým číslem vyjádřeným v lattice Boltzmannovských jednotkách Re' , tj. Reynoldsovo číslo modelu, a Reynoldsovým číslem vyjádřeným v reálných fyzikálních jednotkách Re , tj. Reynoldsovo číslo zkoumaného jevu, tedy

$$Re = Re'. \quad (132)$$

Ze znalosti Reynoldsova čísla Re , rozměru l' a rychlosti u'_0 snadno dopočítáváme lattice Boltzmannovskou kinematickou viskozitu ν' následovně

$$Re = Re' = \frac{u_0 \cdot l}{\nu} = \frac{u'_0 \cdot l'}{\nu'} \Rightarrow \nu' = \frac{u'_0 \cdot l' \cdot \nu}{u_0 \cdot l} = \frac{1}{C_l} \cdot \frac{1}{C_u} \cdot \nu. \quad (133)$$

Je zřejmé, že během jediného numerického výpočtu je možné řešit vícero problémů se stejným Reynoldsovým číslem.

Dalším důležitým bezrozměrným číslem hojně užívaným především v aerodynamice je takzvané Machovo číslo, které je definováno jako podíl makroskopické rychlosti u_0 a rychlosti zvuku c_s v daném prostředí, tedy

$$Ma = \frac{u_0}{c_s}. \quad (134)$$

Je možné odvodit vztah mezi Reynoldsovým podobnostním číslem a Machovým podobnostním číslem podle rovnice

$$Re = \frac{u_0 \cdot l}{\nu} = \frac{c_s \cdot l}{\nu} \frac{u_0}{c_s} = Ma \frac{c_s \cdot l}{\nu}. \quad (135)$$

Analýzy ukazují, že LBM řeší přesně Navier-Stokesovy rovnice pro případ proudění nestlačitelné kapaliny pouze pro nízká Machova čísla.

Lattice Boltzmannovou metodou řešíme tedy problém pro nízké Machovo číslo. Pro řešení takového problému je nutné vhodně zvolit hodnotu rozměru v LB jednotkách l' , rychlosti v LB jednotkách u'_0 a relaxační čas τ , který přímo ovlivňuje hodnotu kinematické viskozity, viz rovnice (19). Zpravidla je rychlost v LB jednotkách volena na hodnotu 0,1 nebo 0,2 [1]. Rozměr v LB jednotkách l' a relaxační čas τ jsou potom volíme právě tak, aby byla splněna rovnost Reynoldsových čísel, viz (132). Je-li hodnota relaxačního času τ blízká k $\frac{1}{2}$, je třeba užít metodu MRT - tedy metodu, která užívá více různých relaxačních časů. Metoda SRT je v takových případech nedostatečná, viz odstavec 2.1.

3.3 Prandtlovo číslo

Při řešení neizotermických problémů je dalším důležitým parametrem pro samotné numerické řešení součinitel teplotní vodivosti α . Hodnotu Prandtlova čísla pro různá prostředí najdeme ve fyzikálních tabulkách. V kapitolách 4 a 5 pracujeme s hodnotami $Pr = 0,71$ a $Pr = 1,1$.

Definujeme Prandtlovo číslo Pr jako podíl kinematické viskozity tekutiny ν a součinitele teplotní vodivosti tekutiny α

$$Pr' = \frac{\nu'}{\alpha'} = Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (136)$$

V kapitole 5 uijeme Prandtlovo číslo pro určení hodnoty součinitele teplotní vodivosti v lattice Boltzmannovských jednotkách α' , který dále uijeme pro určení relaxačního času distribuční funkce teploty τ_t podle rovnice (128).

3.4 Rayleigho číslo

Rayleigho podobnostní číslo Ra je definováno vztahem

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\alpha\nu}, \quad (137)$$

kde g je gravitační konstanta a z podstaty podobnostních čísel zjevně platí, že

$$Ra = Ra'. \quad (138)$$

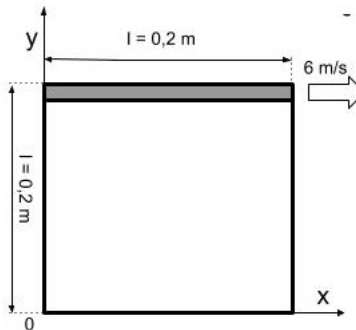
Jedná se o podobnostní číslo uplatněné při řešení problému přirozené konvekce, viz [1], [6]. V kapitole 5 bude užito Rayleigho číslo k určení součinu $g' \cdot \beta'$ v lattice Boltzmannovských jednotkách. Tento součin nám potom bude dalším důležitým parametrem při numerické implementaci pro uplatnění rovnice (97), viz odstavec 5.3.

4 Izotermické proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve 2D kavitě

V této kapitole jsou prezentovány dosažené numerické výsledky izotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve čtvercové kavitě. Numerické výpočty byly realizovány ve výpočtovém prostředí MATLAB, v němž byla provedena vlastní implementace lattice Boltzmannovy metody. Získané numerické výsledky jsou zde porovnány s numerickými výsledky publikovanými v literatuře a vypočtenými pomocí stejné metody, tj. literatura [1], [2].

4.1 2D kavita s horní pohyblivou stěnou

Pro ověření správnosti vlastní implementace lattice Boltzmannovy metody budeme uvažovat problém izotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve 2D kavitě, čtvercové výpočtové oblasti s horní pohyblivou stěnou. Takové zadání je častým testovacím problémem pro verifikaci numerických metod řešení proudění tekutin. Uvažujeme čtvercovou 2D kavitu o délce stěny $l = 0,20$ m, která je naplněna po okraj tekutinou o konstantní teplotě a kinematické viskozitě $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3}$ m²/s. Horní stěna kavity se pohybuje rychlostí $u_0 = 6$ m/s, viz obr. 10.



Obr. 10: Geometrie výpočtové oblasti pro řešení proudění ve 2D kavitě s horní pohyblivou stěnou - problém 4.1

Před numerickou simulací samotnou je nutné přepočítat parametry podle teorie podobnosti prezentované v kapitole 3 z reálných jednotek na takzvané lattice Boltzmannovské jednotky, abychom správně mohli implementovat vztahy z kapitoly 2. Neznámými v tuto chvíli jsou tedy veličiny ν' , l' a u_0' . Určeme nejprve Reynoldsovo číslo pro zadaný problém dosazením do rovnice (131), tedy

$$Re = \frac{u_0 \cdot l}{\nu} = \frac{6 \cdot 0,2}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 1000. \quad (139)$$

Pro výpočet pomocí lattice Boltzmannovy metody zvolme nyní 100 uzlů ve směru osy x a 100 uzlů ve směru osy y . Protože platí rovnice (122), tedy že $\Delta x' = 1$, znamená to, že

$$l' = 100. \quad (140)$$

Užitím rovnice (119) získáme konverzní faktor pro rozměr

$$C_l = \frac{l}{l'} = \frac{0,2}{100} \text{ m} = 0,002 \text{ m}. \quad (141)$$

Rychlost modelované kapaliny v lattice Boltzmannovských jednotkách zpravidla volíme na hodnotu 0,1 nebo 0,2, viz odstavec 3.2. My volíme

$$u'_0 = 0,1. \quad (142)$$

Nyní určíme konverzní faktor rychlosti pomocí rovnice (129), tedy

$$C_u = \frac{u_0}{u'_0} = \frac{6}{0,1} \text{ m/s} = 60 \text{ m/s}. \quad (143)$$

Konečně dopočítáváme kinematickou viskozitu ν' dosazením do rovnice (133) následovně

$$\nu' = \frac{1}{C_l} \cdot \frac{1}{C_u} \cdot \nu = \frac{1}{0,002} \cdot \frac{1}{60} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,01. \quad (144)$$

Relaxační čas τ , důležitý parametr figurující v pravé straně klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody (18), určíme dosazením do rovnice (126)

$$\tau = 3 \cdot \nu' + \frac{1}{2} = 3 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} = 0,53. \quad (145)$$

Pro takovou hodnotu relaxačního času τ považujeme metodu single relaxation time ještě za dostatečnou. Pravá strana klíčové rovnice lattice Boltzmannovy metody (18) je tedy řešena metodou SRT, viz odstavec 2.1. Levá strana rovnice (18) je řešena podle postupu popsaného v odstavci 2.2. Hustota a makroskopická rychlost tekutiny je vyhodnocována dosazením do rovnic (25) a (26). Okrajové podmínky právě pro toto zadání jsou podrobně popsány v odstavci 2.3.

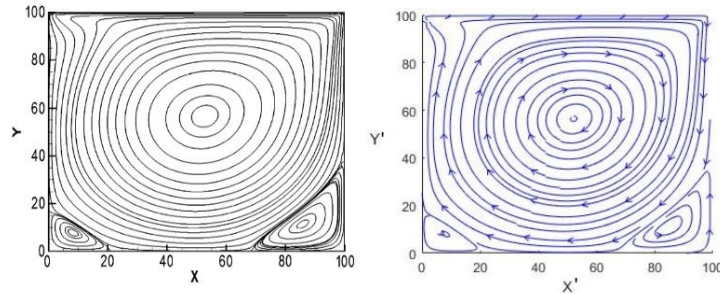
Výsledky stejně jako v případě literatury [1] prezentujeme v lattice Boltzmannovských jednotkách, viz obr. 11 a obr. 13, a to v čase, kdy se rychlostní pole daného problému již významně neměnilo, tj. v případě naší vlastní implementace v iteračním čase $t' = 20000$ vyjádřeným v lattice Boltzmannovských jednotkách. Přepočtíme nyní čas v lattice Boltzmannovských jednotkách t' na reálný čas t . Dosazením do rovnice (125) dostaneme konverzní faktor pro čas C_t

$$C_t = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{C_l^2}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,53 - 1}{6} \frac{0,002^2}{1,2 \cdot 10^{-3}} \text{ s} = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ s}. \quad (146)$$

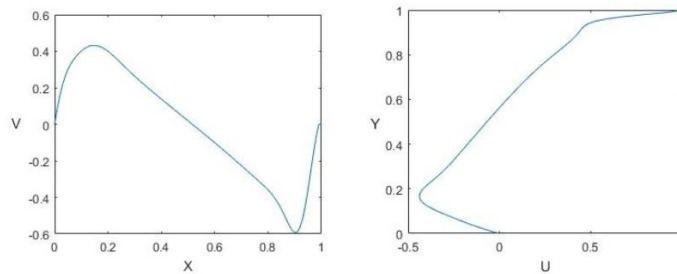
S využitím konverzního faktoru pro čas C_t dostaneme hodnotu reálného (fyzikálního) času

$$t = t' \cdot C_t = 20000 \cdot 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 0,66 \text{ s}. \quad (147)$$

Na obr. 11 je ukázána vizualizace proudnic proudového pole získaná vlastní implementací a vizualizace proudnic proudového pole převzatá z literatury [1]. Na obr. 12 jsou zobrazeny rychlostní profily v příčném a podélném řezu vedeným ve středu 2D kavity, které jsme získali vlastní implementací. Rychlostní profily v příčném a podélném řezu vedenými ve středu 2D kavity převzaté z literatury [1] jsou na obr. 13.



Obr. 11: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace (vpravo) a převzaté z literatury [1] (vlevo) při řešení problému 4.1 pro $Re = 1000$



Obr. 12: Rychlostní profily v příčném a podélném řezu vedeným ve středu 2D kavity získané vlastní implementací při řešení problému 4.1 pro $Re = 1000$

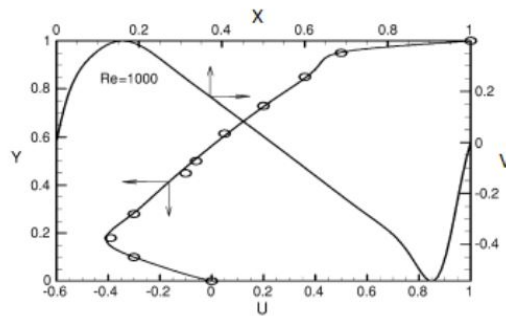
Uspokojivá shoda je pozorována především tehdy, porovnáme-li rychlostní profily v příčném a podélném řezu vedeným ve středu kavity získanými naším programem s výsledky zveřejněnými v literatuře, viz obr. 12 a obr. 13.

Problém nyní modifikujeme. Uvážíme tři různé případy Reynoldsova čísla. Nejprve zkoumejme problém proudění kapaliny ve čtvercové 2D kavitě o Reynoldsově číslu $Re = 100$, poté o Reynoldsově číslu $Re = 400$ a konečně o Reynoldsově číslu $Re = 3200$. Délku čtvercové 2D kavity v lattice Boltzmannovských jednotkách budeme uvažovat stále stejnou, tedy podle (140) $l' = 100$. Rychlost v lattice Boltzmannovských jednotkách volíme podle (142), tedy $u_0' = 0,1$. Kinematickou viskozitu v lattice Boltzmannovských jednotkách ν' volíme tak, aby se Reynoldsovo číslo rovnalo vždy příslušné hodnotě. Z rovnice (131) tedy

vyjádříme neznámou a dostaneme vztah pro výpočet kinematické viskozity v latice Boltzmannovských jednotkách

$$\nu' = \frac{u_0' \cdot l'}{Re}. \quad (148)$$

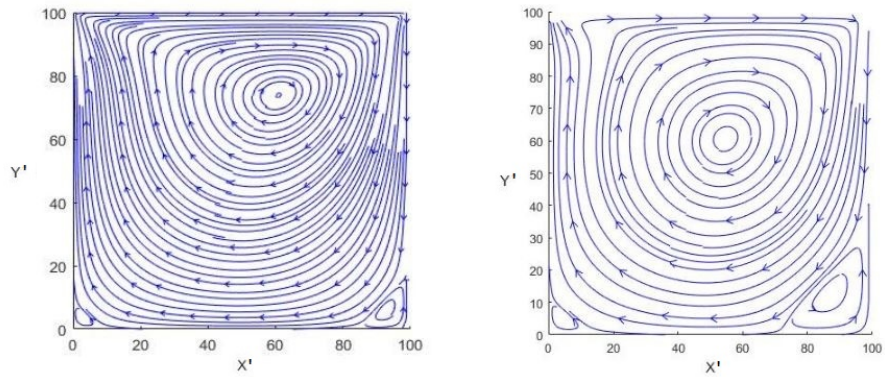
Relaxační čas τ je pak dopočítáván podle rovnice (126). Problém byl řešen metodou MRT. Numerické výsledky vlastní implementace jsou zde prezentovány vždy v iteračním čase, kdy už se proudové pole problému významně neměnilo.



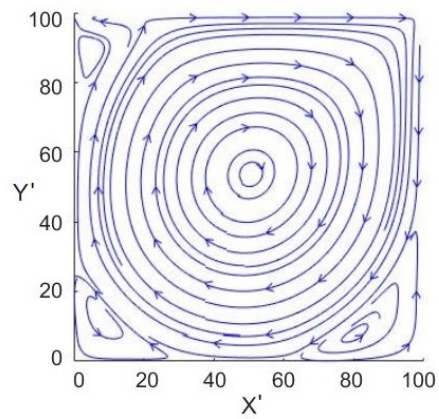
Obr. 13: Rychlostní profily v příčném a podélném řezu vedeným ve středu 2D kavity převzaté z literatury [1] při řešení problému 4.1 pro $Re = 1000$

Na obr. 14 je zobrazena vizualizace proudového pole pro $Re = 100$ (vlevo) a $Re = 400$ (vpravo). Na obr. 15 je ukázána vizualizace proudového pole pro $Re = 3200$. Vizualizace proudových polí převzatá z literatury [5], které autoři získali při řešení stejných problémů pomocí stejné metody, jsou na obr. 16. Dovolíme si tvrdit, že je pozorována dobrá shoda mezi výsledky, které jsme získali pomocí vlastní implementace, a mezi výsledky, které jsme převzali z literatury. Pro úplnost byla sestavena tab. 1, která popisuje umístění center vírů pro problém 4.1.

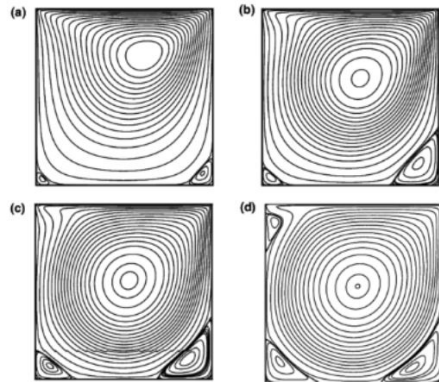
Především z obr. 11, obr. 14 a obr. 15 je patrná tendence, kdy s rostoucím Reynoldsovým číslem dochází k přesunu víru směrem ke středu čtvercové kavity.



Obr. 14: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace při řešení problému 4.1 pro $Re = 100$ (vlevo) a $Re = 400$ (vpravo)



Obr. 15: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace při řešení problému 4.1 pro $Re = 3200$



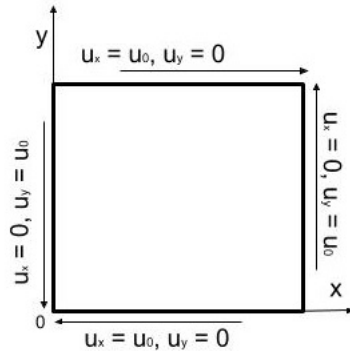
Obr. 16: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě převzatá z literatury [1] při řešení problému 4.1 pro (a) $Re = 100$, (b) $Re = 400$, (c) $Re = 1000$, (d) $Re = 3200$

Tab. 1: Umístění středů víru pro problém 4.1

Pozice centra hlavního víru		
$Re[-]$	$x/l[-]$	$y/l[-]$
100	0,605	0,740
400	0,545	0,605
1000	0,546	0,588
3200	0,521	0,581

4.2 2D kavita se čtyřmi pohyblivými stěnami

Pro další ověření funkčnosti vlastní implementace uvažujeme nyní problém 2D čtvercové kavity se čtyřmi pohyblivými stěnami.



Obr. 17: Geometrie výpočtové oblasti pro řešení proudění ve 2D kavitě se čtyřmi pohyblivými stěnami - problém 4.2

Uvažujeme tři různé případy. Nejprve zkoumejme proudění kapaliny ve čtvercové 2D kavitě o Reynoldsově čísle $Re = 10$, poté proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 100$ a konečně proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 127$. Horní stěna kavity se pohybuje konstantní rychlostí v kladném směru osy x . Dolní stěna se pohybuje stejnou konstantní rychlostí v opačném směru. Pravá stěna kavity se pohybuje touto rychlostí v kladném směru osy y . Levá stěna kavity se pohybuje stejnou rychlostí v opačném směru, viz obr. 17.

Pro řešení problému byla zvolena síť o 161 uzlech ve směru osy x a 161 uzlech ve směru osy y , tedy stejně jako tomu je v literatuře [2]. Platí tedy, že

$$l' = 161. \quad (149)$$

Kinematickou viskozitu a hodnotu rychlosti volíme tak, aby platilo, že se Reynoldsovo číslo rovná příslušné hodnotě. Hodnotu rychlosti v lattice Boltzmannovských jednotkách volíme podle rovnice (142), tedy $u'_0 = 0,1$. Hodnotu kinematické viskozity v LB jednotkách ν' získáme dosazením do rovnice (148). Relaxační čas τ konečně dopočítáváme dosazením do rovnice (126).

Výsledky, které jsme získali vlastní implementací, porovnáváme s literaturou. Na obr. 18 je zobrazena vizualizace proudnic proudového pole získaná vlastní implementací (vpravo) a vizualizace proudnic proudového pole převzatá z literatury [2] (vlevo) pro problém proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 10$. Stejně můžeme porovnat vizualizace proudových polí na obr. 19 pro problém proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 100$ a na obr. 20 pro proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 127$. Zároveň byly sestaveny tab. 2, tab. 3

a tab. 4, které zobrazují umístění center vírů pro řešený problém. Výsledky jsou prezentovány v čase, kdy se již proudové pole významně neměnilo, tedy bylo ustálené.

Naše výsledky se od výsledků publikovaných v literatuře nikdy nelišily o více než 2,5 %, viz tab. 2, tab. 3 a tab. 4. Takovou shodu hodnotíme jako dostatečnou, a řešič tedy považujeme za zvalidovaný. Mírně odlišné výsledky jsou pravděpodobně způsobeny rozdílným způsobem implementace okrajových podmínek.

Tab. 2: Umístění center vírů pro problém 4.2 pro $Re = 10$

Pozice center vírů pro $Re = 10$								
	Levý vír		Pravý vír		Dolní vír		Horní vír	
	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]
vlastní výsledky	0,152	0,491	0,848	0,509	0,152	0,491	0,509	0,848
literatura [2]	0,150	0,490	0,849	0,510	0,149	0,490	0,510	0,850
relativní chyba	1,13 %	0,20 %	0,11 %	0,20 %	1,97 %	0,20 %	1,96 %	0,24 %

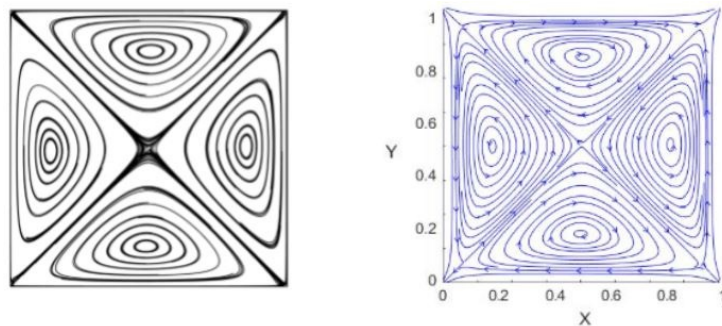
Tab. 3: Umístění center vírů pro problém 4.2 pro $Re = 100$

Pozice center vírů pro $Re = 100$								
	Levý vír		Pravý vír		Dolní vír		Horní vír	
	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]
vlastní výsledky	0,160	0,445	0,837	0,543	0,160	0,445	0,543	0,837
literatura [2]	0,160	0,450	0,840	0,550	0,160	0,450	0,550	0,840
relativní chyba	0,00 %	1,11 %	0,36 %	1,27 %	0,00 %	1,11 %	1,27 %	0,36 %

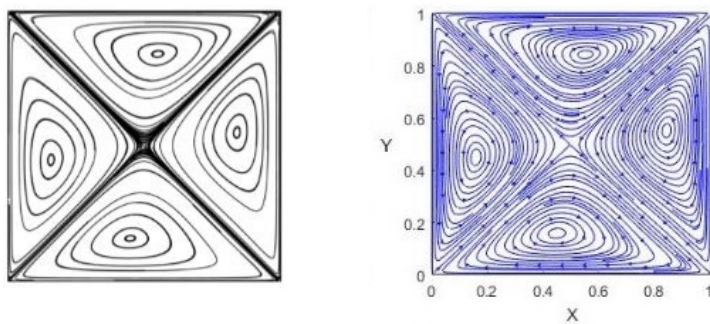
Tab. 4: Umístění center vírů pro problém 4.2 pro $Re = 127$

Pozice center vírů pro $Re = 127$								
	Levý vír		Pravý vír		Dolní vír		Horní vír	
	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]	x/l [-]	y/l [-]
vlastní výsledky	0,166	0,444	0,830	0,545	0,441	0,165	0,545	0,830
literatura [2]	0,170	0,450	0,830	0,550	0,449	0,168	0,548	0,830
relativní chyba	2,35 %	1,33 %	0,00 %	0,90 %	1,78 %	1,79 %	0,55 %	0,00 %

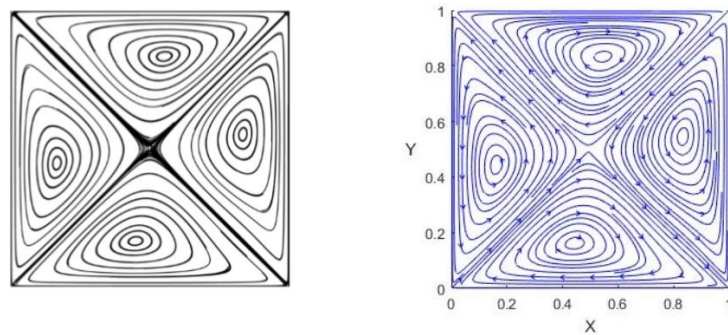
Z obr. 18 až 20 je patrný trend, kdy s rostoucím Reynoldsovým číslem se poloha center vírů posouvá vždy po směru nejbližší pohyblivé stěny.



Obr. 18: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná vlastní implementací (vpravo) a převzatá z literatury [2] (vlevo) při řešení problému 4.2 pro $Re = 10$



Obr. 19: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná vlastní implementací (vpravo) a převzatá z literatury [2] (vlevo) při řešení problému 4.2 pro $Re = 100$



Obr. 20: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná vlastní implementací (vpravo) a převzatá z literatury [2] (vlevo) při řešení problému 4.2 pro $Re = 127$

5 Neizotermické proudění nestlačitelné vazké kapaliny ve 2D kavitě

Byla provedena simulace neizotermického proudění tekutiny ve čtvercové nádobě, tj. v kavitě. Získané výsledky, které prezentujeme v této kapitole, byly porovnány s literaturou ([1], [3]). Autoři užíli při řešení stejné metody.

5.1 2D kavita s horní pohyblivou stěnou

Jako testovací úlohu vlastního řešiče problému nucené konvekce uvažujeme nyní následující problém. Kavita o délce stěny $l = 0,2\text{ m}$ je naplněna tekutinou o kinematické viskozitě $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2/\text{s}$. Uvažujeme problém nucené konvekce pro Prandtlovo číslo $Pr = \frac{\alpha}{\nu} = 0,71$. Horní stěna kavity se pohybuje rychlostí $u_0 = 6\text{ m/s}$. Tekutina má na počátku teplotu $T_0 = 0^\circ\text{C}$ na celé sledované výpočtové oblasti. Horní stěnu kavity zahříváme na teplotu $T_w = 1^\circ\text{C}$. Dolní stěna kavity je tepelně izolována. Na levé (západní) a pravé (východní) stěně je udržována konstantní teplota $T_m = 0^\circ\text{C}$, viz obr. 21.

Délku stěn, kinematickou viskozitu a rychlost horní stěny kavity je nutné přepočítat na veličiny užívající lattice Boltzmannovské jednotky stejně jako v případě prvního neizotermického problému, viz rovnice (139) až (144). Dále určujeme relaxační čas τ_t podle rovnice (145). Navíc je nutné určit relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t . Za tímto účelem vypočítáme součinitel teplotní vodivosti v lattice Boltzmannovských jednotkách α' užitím rovnice (136) následovně

$$Pr = \frac{\nu'}{\alpha'} \Rightarrow \alpha' = \frac{\nu'}{Pr} = \frac{0,01}{0,71} = 0,014. \quad (150)$$

Relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t určíme pak dosazením do rovnice (128)

$$\tau_t = 3\alpha' + \frac{1}{2} = 3 \cdot 0,014 + \frac{1}{2} = 0,542. \quad (151)$$

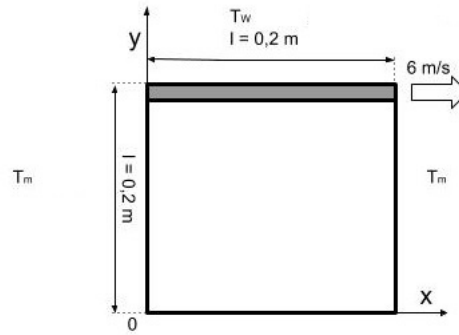
Dosazením do rovnice (130) získáváme ještě vztah mezi bezrozměrnou teplotou a reálnou teplotou vyjádřenou ve stupních Celsia, tedy

$$T' = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} = \frac{T - 0}{1 - 0} = T. \quad (152)$$

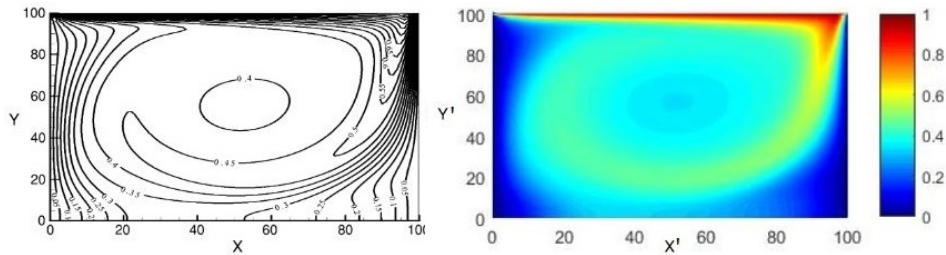
Postup, který byl při řešení problému lattice Boltzmannovou metodou užit, podrobně popisuje odstavec 2.4., a to včetně okrajových podmínek pro výpočet distribuční funkce teploty na stěnách čtvercové 2D kavity v odstavci 2.4.3 řešící právě toto zadání.

Výsledky jsou prezentovány v iteračním čase $t' = 22000$ (tj. $t = 0,73\text{ s}$). Vizualizace proudnic proudového pole je tak pro stejný problém prezentována na obr. 11. Výstupem vlastní implementace je vizualizace izoterm teplotního pole, ta je porovnána s výsledky publikovanými v literatuře na obr. 22. Dalším výstupem je graf teplotních profilů podél výšky kavity v různých jejích délkách

a i tyto teplotní profily porovnáváme s literaturou na obr. 23. Pozorujeme dobrou shodu mezi vlastní implementací a literaturou.



Obr. 21: Geometrie výpočtové oblasti pro řešení proudění ve 2D kavitě s horní pohyblivou ohřívanou stěnou - problém 5.1.



Obr. 22: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace (vpravo) a převzaté z literatury [1] (vlevo) při řešení problému 5.1 pro $Re = 1000$

Problém nyní modifikujeme. Uvažujme nyní úlohu proudění kapaliny o kinematické viskozitě $\nu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ve čtvercové 2D kavitě o délce stěny $l = 0,2 \text{ m}$ s horní pohyblivou ohřívanou stěnou podle obr. 21. Pro tento problém uvažujme Prandtlovo číslo $Pr = 1,1$. Algoritmus provedeme pro případ různých Reynoldsových čísel $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$ a $Re = 3200$. Volba rychlosti v lattice Boltzmannovských jednotkách u_0' , délky v lattice Boltzmannovských jednotkách l' a kinematické viskozity v lattice Boltzmannovských jednotkách ν' , potažmo volba relaxačního času τ , proběhla stejně jako v odstavci 4.1. Navíc volíme součinitel teplotní vodivosti v lattice Boltzmannovských jed-

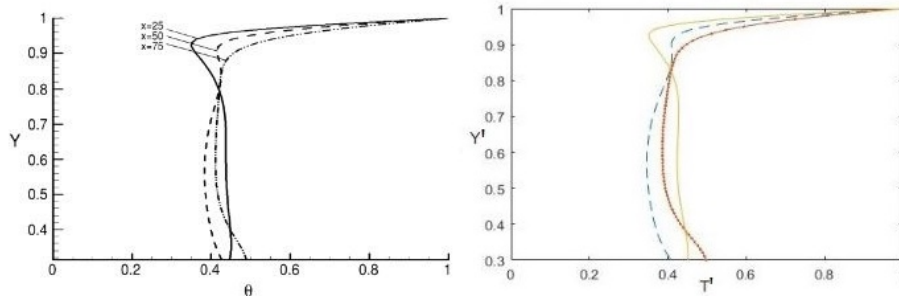
notkách α' , viz (136),

$$Pr = \frac{\nu'}{\alpha'} \Rightarrow \alpha' = \frac{\nu'}{Pr} \quad (153)$$

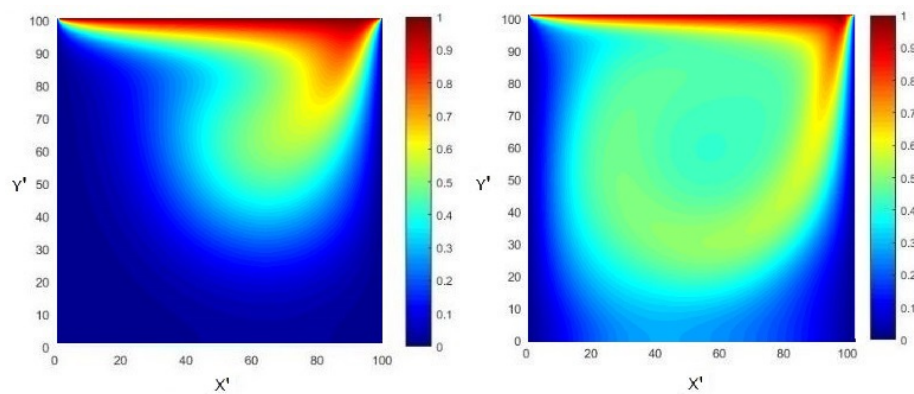
a relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t dosazením do rovnice (128).

Vizualizaci izoterm teplotního pole prezentujeme pro případ problému o Reynoldsově čísle $Re = 100$ a $Re = 400$ na obr. 24, a pro případ tekutiny o Reynoldsově čísle $Re = 1000$ a $Re = 3200$ na obr. 25 vždy ve stejném čase ($t = 1, 5$ s). Vizualizace proudnic proudových polí pro tyto problémy ve stejných časech jsou zobrazeny na obr. 11, obr. 14 a obr. 15. Připomeňme, že problém nucené konvekce vyhodnocuje teplotní pole na základě pole rychlostního. Vizualizace proudnic proudových polí tak zůstaly nezměněny.

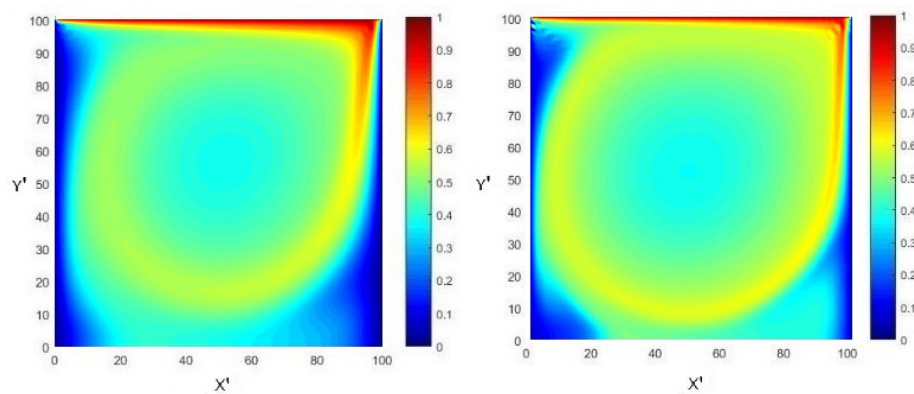
Z obr. 24 a obr. 25 je patrné, že pro problémy vyšších Reynoldsových čísel, a tedy pro problémy vyšší rychlosti horní pohyblivé stěny, se teplota ze stěny do středu výpočtové oblasti za daný čas přenese rychleji než v případě nižších Reynoldsových čísel. Pro vyšší Reynoldsova čísla je totiž kapalina rozpohybována na vyšší rychlosti, než je tomu v případě nižších Reynoldsových čísel.



Obr. 23: Teplotní profily v příčných řezech vedenými ve vybraných vzdálenostech 2D kavity získané vlastní implementací (vpravo) a převzaté z literatury [1] (vlevo) při řešení problému 5.1 pro $Re = 1000$



Obr. 24: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace při řešení problému 5.1 $Pr = 1,1$ pro $Re = 100$ (vlevo) a $Re = 400$ (vpravo)

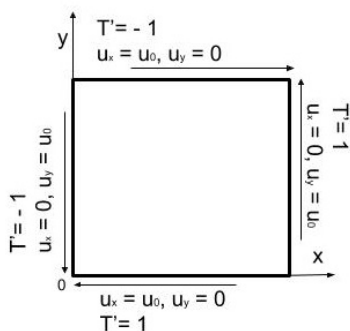


Obr. 25: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace při řešení problému 5.1 $Pr = 1,1$ pro $Re = 1000$ (vlevo) a $Re = 3200$ (vpravo)

5.2 2D kavitá se čtyřmi pohyblivými stěnami

V tuto chvíli lze vyvinutý řešič pro neizotermické proudění nestlačitelné vazké tekutiny považovat za zvalidovaný. Rozšíříme nyní problém z literatury [2] o neizotermické zadání a výsledky zde odprezentujeme.

Stejně jako v odstavci 4.2. budeme uvažovat tři různé případy. Nejprve zkusíme proudění kapaliny ve čtvercové 2D kavitě o Reynoldsově čísle $Re = 10$, poté o Reynoldsově čísle $Re = 100$ a konečně o Reynoldsově čísle $Re = 127$ a počáteční bezrozměrné teplotě $T_0' = 0$ na celé sledované ploše. Uvažujeme pro tento problém Prandtlovo číslo $Pr = 1,1$. Pohyb stěn kavity uvažujeme stejný jako v odstavci 4.2. Horní (severní) a levou (východní) stěnu ochlazujeme o jeden bezrozměrný stupeň na $T' = -1$; dolní (jižní) a pravou (západní) stěnu ohříváme o jeden bezrozměrný stupeň na teplotu $T' = 1$, viz obr. 26.

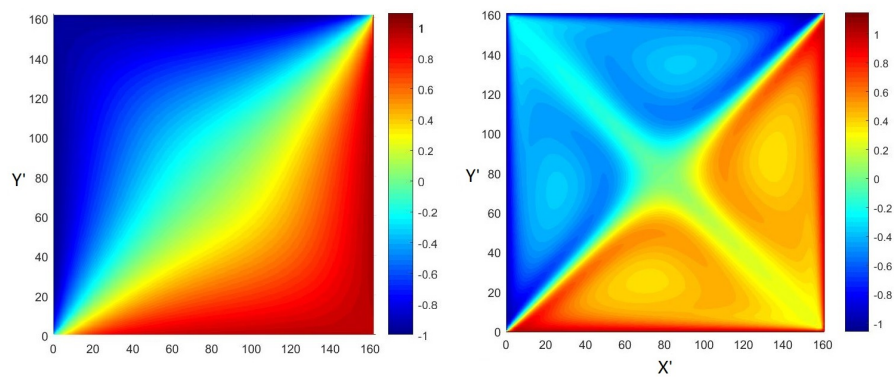


Obr. 26: Geometrie výpočtové oblasti pro řešení neizotermického proudění ve 2D kavitě se čtyřmi pohyblivými stěnami - problém 5.2

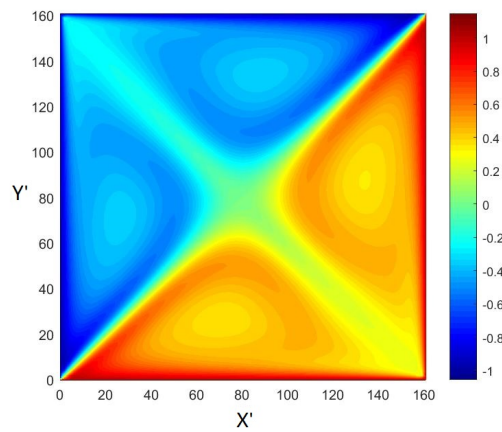
Úlohu řešíme jako problém nucené konvekce. Veličiny u_0' , ν' , l' a τ volíme stejně jako v odstavci 4.2. Následně volíme součinitel teplotní vodivosti v lattice Boltzmannovských jednotkách α' dosazením do rovnice (153) a relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t dosazením do rovnice (128).

Vizualizaci izoterm teplotního pole prezentujeme vždy v iteračním čase vyjádřeném v lattice Boltzmannovských jednotkách $t' = 20000$. Vizualizace proudnic proudového pole pro daný problém v tomto iteračním čase prezentujeme v odstavci 4.2. Na obr. 27 jsou zobrazeny vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě pro problém proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 10$ (vlevo) a pro problém proudění kapaliny o Reynoldsově čísle $Re = 100$ (vpravo). Vizualizace izoterm teplotního pole pro kapalinu o Reynoldsově čísle $Re = 127$ je na obr. 28.

Podle našich předpokladů pozorujeme vizualizace izoterm teplotního pole souměrné podle úhlopříček čtvercových výpočtových oblastí.



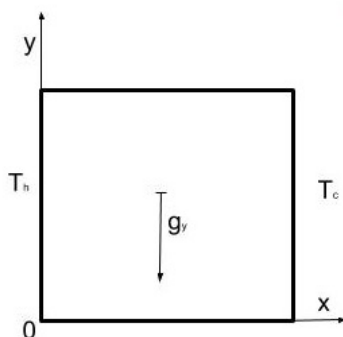
Obr. 27: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná vlastní implementací při řešení problému 5.2. pro $Re = 10$ (vlevo) a pro $Re = 100$ (vpravo)



Obr. 28: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná vlastní implementací při řešení problému 5.2. pro $Re = 127$

5.3 2D kavita s nepohyblivými stěnami

Testovacím zadáním pro řešení problému přirozené konvekce, kterému se podrobně věnoval odstavce 2.4.2, bude právě problém 2D kavity s nepohyblivými stěnami. Čtvercová kavita je naplněna tekutinou. Uvažujme pro tento problém Prandtlovo číslo $Pr = 0,71$, Rayleighovo číslo $Ra = 10^5$ a počáteční teplotu tekutiny $T_0 = 0^\circ\text{C}$ na celé sledované výpočtové oblasti. Levá (západní) stěna kavity je ohřívána na teplotu $T_h = 1^\circ\text{C}$ a na pravé (východní) stěně kavity je udržována stabilní teplota $T_c = 0^\circ\text{C}$. Uvažujeme působení gravitačního zrychlení $g_y = 9,81 \text{ m/s}^2$ působící proti kladnému směru osy y , viz obr. 29.



Obr. 29: Geometrie výpočtové oblasti pro řešení neizotermického proudění ve 2D kavitě s nepohyblivými stěnami - problém 5.3

Pro implementaci samotnou bylo potřeba určit hodnoty veličin τ , l' , τ_t stejně jako tomu bylo při řešení předchozích problémů. Zvolíme tedy $l' = 100$. Protože řešíme pouze testovací problém nerefluktující skutečný problém, kinematickou viskozitu v lattice Boltzmannovských jednotkách ν' prostě zvolíme $\nu' = 0,03$. Potom dopočítáme součinitel teplotní vodivosti v lattice Boltzmannovských jednotkách α' pomocí Prandtlova čísla následovně

$$Pr = \frac{\nu'}{\alpha'} \Rightarrow \alpha' = \frac{\nu'}{Pr} = \frac{0,03}{0,71} = 0,042. \quad (154)$$

Připomeňme si, že vztah mezi bezrozměrnou teplotou T' a reálnou teplotou T popisuje rovnice (152). Relaxační čas distribuční funkce teploty τ_t dopočítáváme potom dosazením do rovnice (128) a relaxační čas τ dopočítáváme dosazením do rovnice (126). Pro užití rovnice (97) je navíc třeba určit součin $g' \cdot \beta'$ pomocí Rayleighova čísla, tj. rovnice (137),

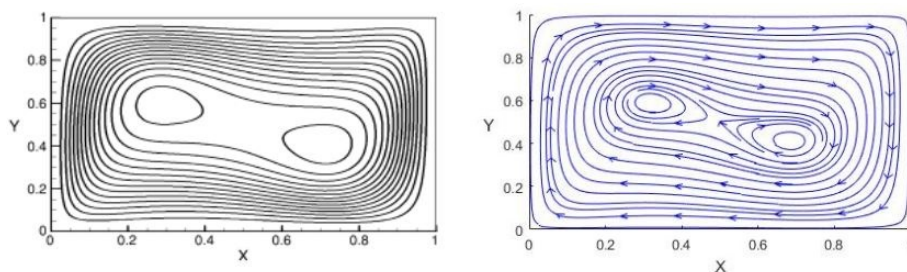
$$g' \cdot \beta' = \frac{Ra \cdot \alpha' \nu'}{(T_h' - T_c') l'^3} = \frac{10^5 \cdot 0,042 \cdot 0,03}{(1 - 0) \cdot 100^3} = 0,013 \quad (155)$$

a bezrozměrnou střední teplotu T'_{mean} volíme následovně

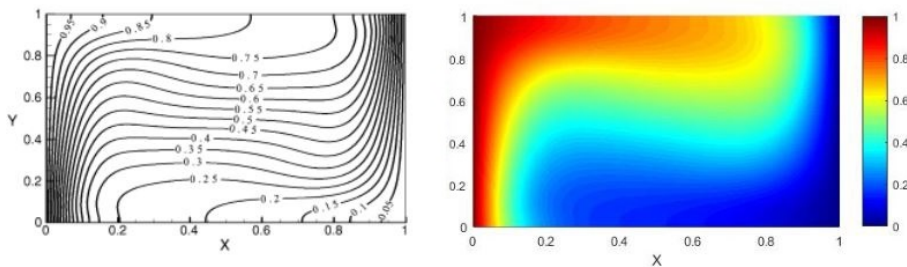
$$T'_{mean} = \frac{T_h' - T_c'}{2} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}. \quad (156)$$

Vizualizace proudnic proudového pole získaná vlastní implementací porovnáváme s literaturou [1], viz obr. 30. Stejně tak byly porovnány vizualizace izoterm teplotního pole, viz obr. 31. Výsledky hodnotíme jako v relativně dobré shodě.

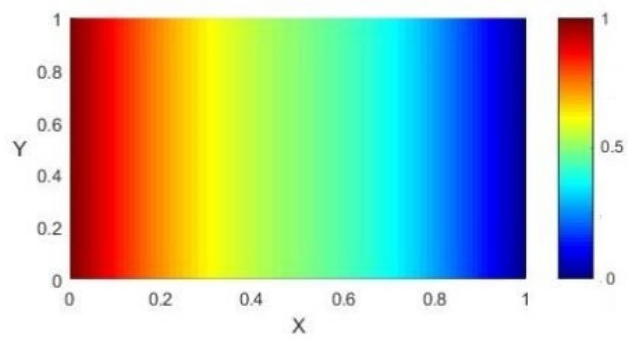
Pokud bychom uvažovali gravitační konstantu ve směru x i ve směru y nulovou, potom by platilo, že by vnější síla F_i v rovnici (98) byla také nulová. Řešili bychom pak v podstatě problém nucené konvekce. Změna teploty tekutiny by nerozpochovala tekutinu v kavitě. Teplota by se přenášela z ohříváné stěny do kapaliny podle obr. 32.



Obr. 30: Vizualizace proudnic proudového pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace (vpravo) a převzaté z literatury [1] (vlevo) při řešení problému 5.3



Obr. 31: Vizualizace izoterm teplotního pole ve 2D kavitě získaná pomocí vlastní implementace (vpravo) a převzaté z literatury [1] (vlevo) při řešení problému 5.3



Obr. 32: Neizotermický problém 5.3 řešený jako problém nucené konvekce

Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce bylo implementovat lattice Boltzmannovu metodu pro řešení problémů izotermického a zejména neizotermického proudění nestlačitelných vazkých kapalin ve 2D. První tři teoretické kapitoly systematicky vysvětlovaly čtenáři způsob, jaký byl při implementaci užit. Na problému izotermického proudění a později neizotermického proudění kapaliny ve čtvercové kavitě s horní pohyblivou stěnou a na proudění neizotermického proudění kapaliny ve čtvercové kavitě s nepohyblivými stěnami pak byla porovnáním výsledků s literaturou (autoři užíli při řešení problémů stejné metody) ověřena správnost vlastní implementace vyvinutých algoritmů. Následně byly rozšířeny příklady z [2] o neizotermické zadání a výsledky odprezentovány. V práci jsou rovněž ukázány rozdíly mezi problémem nucené a přirozené konvekce v rámci řešení neizotermického proudění nestlačitelné vazké kapaliny.

Možností dalšího rozšíření práce se nabízí hned několik. Ať už je to modelování proudění ve složitějších 3D geometriích nebo modelování turbulentního proudění. Lattice Boltzmannova metoda není součástí běžných profesionálních výpočtových systémů řešících proudění, přesto mnohé zdroje předpokládají do budoucna její přibývající využití i v průmyslu.

Použitá literatura

1. Mohamad, A. A. (2011) Lattice Boltzmann Method - Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. London, Springer-Verlag.
2. Perumal D, Dr.Arumuga and Dass, Anoop. (2011) Multiplicity of steady solutions in two-dimensional lid-driven cavity flows by Lattice Boltzmann Method. Computers and Mathematics with Applications. 61. 3711-3721. 10.1016/j.camwa.2010.03.053.
3. Almalawi, Saeed J. (2012) Lattice Boltzmann Applied to Fluid Flow and Heated Lid-Driven Using 2D Square Lattice Dimension (D2Q9). Theses and Dissertations. 1233. <https://preserve.lehigh.edu/etd/1233>
4. Qisu Zou and Xiaoyi He. (1996). On pressure and velocity flow boundary conditions and bounceback for lattice Boltzmann BGK model.
5. Gupta, M.M., and J.C. Kalita. (2005). A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: Streamfunction-Velocity formulation. Journal of Computational Physics.
6. Çengel, Yunus A. (2002). Heat and Mass Transfer (Second ed.). McGraw-Hill.
7. X. He and L.-S. Luo. (1997). Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation. Journal of Statistical Physics 88.
8. A. Kuzmin, Z. L. Guo, and A. A. Mohamad. (2011). Simultaneous in corporation of mass and force terms in the multi-relaxation-time framework for lattice Boltzmann schemes.
9. P. Lallemand and L.S. Luo. (2000). Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. Tech. Report No.2000-17, NASA/CR-2000-210103, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center.
10. Succi S. (2007). Applied lattice Boltzmann method for transport phenomena, momentum, heat and mass transfer. Can J Chem Eng.
11. S. Mohammed, T. Reis. (2017). Using the lid-driven cavity flow to validate moment-based boundary conditions for the lattice Boltzmann equation. Arch. Mech. Eng. 64 (1).
12. Z. Guo, Ch. Shu. (2013). Lattice Boltzmann Method and its Applications in Engineering. Advances in Computational Fluid Dynamics, vol. 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
13. M. C. Sukop, D.T. Thorne, Jr. (2007). Lattice Boltzmann Modeling - An introduction for Geoscientists and Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

14. Heubes, Daniel & Bartel, Andreas & Ehrhardt, Matthias. (2013). An introduction to Lattice-Boltzmann methods. *Novel Trends in Lattice-Boltzmann Methods - Reactive Flow, Physicochemical Transport and Fluid-Structure Interaction*.
15. Gabbanelli, S. & Drazer, German & Koplik, Joel. (2005). Lattice Boltzmann Method for non-Newtonian (Power-Law) Fluids. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*.
16. Dubois, François & Lallemand, Pierre & Tekitek, Mohamed Mahdi. (2019). On anti bounce back boundary condition for lattice Boltzmann schemes. *Computers & Mathematics with Applications*. 10.1016/j.camwa.2019.03.039.
17. Almalawi, Saeed J. (2012). Lattice Boltzmann Applied to Fluid Flow and Heated Lid-Driven Using 2D Square Lattice Dimension (D2Q9). *Theses and Dissertations*. Paper 1233
18. Krueger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., & Viggien, E. M. (2016). *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*. (Graduate Texts in Physics). Springer.