Oponentský posudek na disertační práci Ing. Evy Turnerové

Isogeometric analysis for incompressible turbulent flow

Předložená disertační práce je věnována numerickému řešení matematických modelů popisujících turbulentní proudění nestlačitelných tekutin s využitím isogeometrické analýzy. Jedná se o problematiku důležitou pro řadu aplikací a zajímavou z matematického hlediska.

V úvodní kapitole je čtenář stručně uveden do rozsáhlé problematiky numerické simulace nestlačitelného turbulentního proudění. Je pojednáno o turbulenci jako takové, o různých matematických modelech používaných k její numerické simulaci, o metodách pro diskretizaci těchto modelů i o postupech používaných k řešení soustav algebraických rovnic odpovídajících diskretizovaným modelům. Jsou zde též shrnuty metody použité v disertaci.

Krátká druhá kapitola se věnuje podrobněji popisu nestlačitelného proudění včetně popisu proudění v blízkosti stěny.

Ve třetí kapitole jsou nejprve uvedeny různé modely nestlačitelného proudění včetně formulace počátečních a okrajových podmínek. Následně jsou stručně odvozeny tzv. Reynolds-Averaged Navierovy–Stokesovy (RANS) rovnice a diskutovány různé modely pro určení turbulentní viskozity a turbulentní kinetické energie.

Čtvrtá kapitola je věnována diskretizacím modelů. Nejprve je odvozena slabá formulace stacionárních nestlačitelných Navierových–Stokesových rovnic, diskutována jejich linearizace, zavedena diskretizace Galerkinovou metodou a je pojednáno o řešení příslušného systému lineárních algebraických rovnic. Poté je podrobně popsána konstrukce konečně rozměrných prostorů v rámci isogeometrické analýzy. Dále jsou diskutovány různé stabilizační metody pro rovnice advekce–difúze–reakce.

Pátá kapitola obsahuje výsledky numerických experimentů pro nestlačitelné Navierovy–Stokesovy rovnice, rovnice advekce–difúze a model turbulence založený na RANS rovnicích a k–ω modelu. K diskretizaci jsou použity B-splajny, v případě rovnic popisujících proudění jsou uvažovány páry prostorů pro aproximaci rychlosti a tlaku stabilní ve smyslu splnění inf–sup podmínky, nelineární úlohy jsou linearizovány pomocí Picardovy metody, pro řešení vznikajících lineárních algebraických problémů je použit přímý řešič. Nejprve jsou prezentovány výsledky simulace laminárního proudění získané řešením Navirových–Stokesových rovnic pro tři různé výpočetní úlohy. Následuje rozsáhlá část věnovaná numerickému řešení rovnic advekce–difúze, které hrají důležitou úlohu v modelech turbulentního proudění. Zde jsou prezentovány výsledky srovnávající různé stabilizační metody a studující vliv volby stabilizačních parametrů na kvalitu přibližného řešení. Poslední část této kapitoly je věnována simulaci turbulentního proudění mezi lopatkami turbíny.

Na konci disertace je uvedeno shrnutí a plánovaný budoucí výzkum, seznam literatury a publikací autorky a tři dodatky týkající se simulace turbulentního proudění.

Předložená disertační práce se věnuje komplikované problematice jak z hlediska modelování uvažované fyzikální situace tak i z hlediska numerického řešení příslušných modelů. Pokrývá problematiku širokého rozsahu – od matematického modelování, přes diskretizace až po vlastní numerické simulace a může posloužit pro získání základního přehledu o stavu poznání v této oblasti. Přitom uvažovaná isogeometrická analýza je poměrně moderním, nestandardním a netriviálním přístupem. Je třeba vyzdvihnout zejména provedené numerické experimenty týkající se použití stabilizačních metod pro rovnice advekce–difúze diskretizované v rámci isogeometrické analýzy, které přinášejí nové poznatky o vlastnostech stabilizačních metod. Disertační práci lze tak považovat za přínosnou pro další rozvoj oboru. To dokládají i četné publikace autorky, z nichž dvě byly uveřejněny v kvalitních impaktovaných časopisech a tři v recenzovaných sbornících.

Práce je dobře strukturovaná, přehledná a srozumitelná a formální úprava práce je na dobré úrovni. Je napsána v anglickém jazyce a vcelku dobře se čte, i když obsahuje jazykové chyby a rušivě působí zejména poměrně časté chyby v použití jednotného a množného čísla. Počet ostatních drobných chyb je přiměřený rozsahu práce. Zvolené postupy a použité metody jsou přiměřené studované problematice a odpovídají současnému stavu poznání. Autorka přehledně pojednala o všech podstatných aspektech numerické simulace turbulentního proudění uvažovaného v práci a provedla funkční implementaci odvozeného diskrétního problému, a tudíž lze konstatovat, že hlavní cíl disertační práce byl splněn.

K práci mám nicméně i řadu kritických připomínek. Všeobecně lze říci, že řada tvrzení v práci je nepřesných nebo zjednodušujících. Uvedu pouze několik příkladů: na str. 5 je uvedeno, že pokud pokud jsou rychlost a tlak aproximovány prostory stejného řádu, je nutné použít PSPG stabilizaci, což je ovšem jen jedna z mnoha možností; na str. 10 je uvedena Bernoulliho rovnice, avšak není řečeno, že platí pouze pro ideální kapalinu; charakteristika Galerkinovy metody na str. 34 je nesprávná a odpovídá v podstatě jakémukoli přístupu používanému v rámci metody konečných prvků; ekvivalence mezi (78) a (76) zmíněná na str. 35 platí pouze při vhodné volbě prostorů pro testovací funkce; není pravda, že integrály v (80) existují za uvedených přepokladů; na str. 42 je uvedeno, že různé typy bázových funkcí vedou k různým metodám, což rovněž nemusí být pravda. Co se týče struktury práce, není mi jasné, proč některé části týkající se simulace turbulentního proudění byly přesunuty do dodatků, když se jedná o materiál, který by měl být těžištěm práce. Mnohem vhodnější by bylo uvést tento materiál v předchozích kapitolách a věnovat se mu podrobněji. Další mé připomínky se týkají použitých postupů:

- Používat nekonsistentní varianty metody SUPG uvedené na str. 58 není vhodné, zvláště pokud má významný vliv reakční člen a je nenulová pravá strana, jako je tomu v k–ω modelu turbulence. Nekonsistentní metoda vede pak většinou k velké chybě přibližného řešení.

- Numerické výsledky prezentované v části 5.1 nemají příliš velkou vypovídací hodnotu, neboť z nich není možné zjistit, jak velkou chybou jsou zatíženy. Bylo by bývalo mnohem přínosnější, kdyby byly provedeny numerické experimenty, které lze srovnat s jinými publikovanými výpočty nebo experimentálními výsledky. Např. se nabízelo použít standardní benchmark problém pro simulaci proudění v kanále kolem kruhové překážky.

- V části 5.2 není srovnání numerických výsledků získaných metodou SUPG pro stabilizační parametry definované vztahy (113), (115), (116) a (117) příliš přínosné, neboť pro použitá data vedou vztahy (113), (115) a (116) k téměř stejným hodnotám. Parametry τ_S^3 a τ_S^4 definované vztahy (117) a (118) jsou obecně nevhodné, neboť pro $\Delta t \to 0$ se jejich hodnoty blíží nule a stabilizační efekt tak vymizí. To ukazují i výsledky na str. 72 a 93. Se závěry ohledně parametrů τ_S^3 a τ_S^4 uvedenými na str. 94 nemohu souhlasit.

K práci mám následující otázky:

- Existují různé volby okrajové podmínky pro Navierovy–Stkesovy rovnice na neumannovské části hranice. Proč byla uvažována právě "do-nothing" podmínka uvedená na str. 18 a ne třeba směrová "do-nothing" podmínka navržená prof. Malte Braackem?
- Proč je pravá strana $\mathbf{f}$ na str. 38 aproximována funkcí $\mathbf{f}_h$?
- Proč se stabilizační parametr definovaný vztahem (127) uvažuje pouze s isotropní umělou difúzí a nikoli s umělou difúzí ve směru kolmém k proudění, pro niž byl navržen?
- Předepsaný maximální počet iterací v Picardově metodě zmíněný na str. 61 považuji za velmi malý. Bylo testováno, jaký vliv na řešení by mělo zvětšení počtu Picardových iterací?
- Na str. 92 je uvedeno, že v části 5.2.1 byly prezentovány výsledky pro stacionární řešení. Jak je potom možné, že metody I-SUPG a IT-SUPG dávají různé výsledky?
- Slabá formulace uvedená na str. 122 neodpovídá okrajovým podmínkám v úloze (142) a troufám si tvrdit, že pro žádnou smysluplnou volbu okrajových podmínek při nenulové míře části hranice $\partial\Omega_N$ tuto slabou formulaci nelze získat. Konkrétně jsou v (148) chybně difúzní členy a pravá strana v bilanci hybnosti. Autorka by měla při obhajobě buď prokázat, že slabá formulace je v pořádku, a nebo provést změny v úloze (142), slabé formulaci (148), a tudíž i v odpovídajícím diskrétním problému. Numerické výsledky získané pomocí chybné metody je třeba spočítat znovu a okomentovat, jak se liší od výsledků uvedených v disertační práci.
- Předpokládám, že Picardově metodě uvedené na str. 123 je třeba rozumět tak, že prvky posloupností $\overline{\mathbf{u}}^{n+1,m}$, $\overline{p}^{n+1,m}$, $k^{n+1,m}$ a $\omega^{n+1,m}$ definují pro dostatečně velké m řešení $\overline{\mathbf{u}}^{n+1}$, $\overline{p}^{n+1}$, k^{n+1} a ω^{n+1} v čase t_{n+1}. Rovnice pro $\overline{\mathbf{u}}^{n+1,m+1}$ však

závisí na k^{n+1} a prostřednictvím ν_T^{n+1} (pravděpodobně) též na ω^{n+1}. Na druhou stranu rovnice pro $k^{n+1,m+1}$ a $\omega^{n+1,m+1}$ závisí na $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$. Není tedy jasné, jak se řešení v čase t_{n+1} vypočítá. Přitom na str. 96 je uvedeno, že výpočet $\bar{\mathbf{u}}$ a $\bar{p}$ je oddělen od výpočtu k a ω.

- Odhlédneme-li od vlastnosti isogeometrické analýzy přesně reprezentovat výpočetní oblast a snadno generovat triangulaci, je výhodnější pro studované problémy aplikovat klasickou metodu konečných prvků nebo isogeometrickou analýzu?

Práce je celkově zajímavá a prokazuje předpoklady autorky k samostatné tvořivé práci. Proto předloženou disertační práci doporučuji k obhajobě.

V Praze dne 27. 1. 2020

doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr., DSc.
Univerzita Karlova
Matematicko–fyzikální fakulta

Posudek disertační práce

Isogeometrická analýza pro modelování nestlačitelného turbulentního proudění

Ing. Evy Turnerové

Předložená práce se zabývá speicální variantou Galerkinovy metody pro numerické řešení systému Navierových-Stokesových rovnic v kombinaci s modelem turbulence. Unikátnost metody spočívá v aproximaci prostoru řešení pomocí B-splajnů. Tato metoda byla navržena Hughesem a kol. v roce 2005 pod názvem isogeometrická analýza (IgA). Jedná se tedy o poměrně novou a neprobádanou metodu. Výhodou metody je její vysoký řád přesnosti, snadná *h-p-k* adaptace a v neposlední řadě i velmi přesná aproximace křivočarých hranic pomocí B-splajnů či NURBS křivek a ploch a tím i (alespoň teoreticky) snadné propojení s CAD systémy. Zde je však třeba zmínit i možné komplikace spojené s tím, že reálné objekty vytvořené CAD systémy, jsou často velice složité a hraniční plochy nebývají tzv. vodotěsné (tj. $R^3 \setminus \Gamma$ se nerozpadne na dvě souvislé množiny). Dalším technickým problémem může být rozklad složité oblasti na jednoduše parametrizovatelné části.

Autorka v práci uvádí základní rovnice mechaniky tekutin popisující laminární a turbulentní proudění nestlačitelné tekutiny. Jmenovitě se jedná o Navierovy-Stokesovy rovnice v Reynoldsovsky středovaném tvaru (RANS) doplněné o jednorovnicový či dvourovnicový model turbulence. Dále popisuje standardní postup řešení známý z metody konečných prvků, tj. uvádí slabou formulaci spojitého problému, linearizaci pomocí Picardových aproximací a nakonec uvádí diskrétní problém. Na tomto místě provádí diskretizaci obecně pro zatím nespecifikované konečněrozměrné prostory V_h a W_h.

Isogeometrické analýze se autorka začíná věnovat v kapitole 4.2. Podává zde stručný popis B-splajnů a NURBS křivek a ploch a popisuje aproximaci složitějších prostorových útvarů pomocí rozdělení na jednodušší podoblasti (tzv. *multipatch* oblast). To sice na jednu stranu umožňuje použití metody ve složitějších oblastech, na druhou stranu to však může představovat zásadní komplikaci srovnatelnou s obtížemi při tvorbě strukturovaných víceblokových sítí pro standardní metodu konečných diferencí či objemů. Jádrem práce je zřejmě stabilizace IgA metody, které se autorka věnuje v kapitole 4.3. Z literatury známá S*treamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) metoda se ukazuje jako nedostatečná a proto je doplněna ještě o dodatečnou stabilizaci

V poslední kapitole se autorka věnuje numerickým experimentům zahrnujícím jak jednoduché testovací případy, tak jeden případ turbulentního proudění 2D modelem turbínové mříže. Autorka zde provádí rozbor jednotlivých přístupů ke stabilizaci IgA metody a ukazuje, že stabilizace pomocí SOLD metody umožňuje řešení problémů popsaných pomocí RANS rovnic. Volba koeficientů však není jednoduchá a jak píše autorka v závěru v budoucnu bude třeba se stabilizaci IgA metody ještě věnovat.

Hodnocení práce

Práce se zabývá velmi aktuální problematikou vývoje metod vysokého řádu přesnosti pro řešení problémů mechaniky tekutin. Autorka aplikuje IgA na řešení RANS rovnic. To představuje rozhodně veliký přínos jak po teoretické stránce, tak po stránce aplikační. Z tohoto hlediska práci hodnotím velmi kladně. Po formální stránce však práci musím vytknout jisté nedostatky. Chybí mi zde jasné stanovení cílů práce a jasné oddělení vlastního přínosu od poznatků čerpaných z literatury. Dále na mne práce působila poněkud nevyváženým dojmem. Zatímco úvodní kapitoly jsou zpracovány velmi podrobně, tak stěžejní část věnující se popisu IgA je snad až příliš stručná. Není mi tak úplně jasné, jak byly voleny prostory V_h a W_h (B-splajny nebo NURBS?) ani jakým způsobem byl řešen problém *multipatch* oblastí. Práci by určitě prospěla i kompletní formulace řešených úloh (tj. slabá formulace diskrétních problémů včetně stabilizace a definice prostorů V_h a W_h). U numerických výsledků mi schází ověření srovnáním buď s experimentálními daty (ta jsou alespoň pro případ zpětného schodu dostupná) nebo s výpočty jiných autorů (pokud možno i jinou metodou). Dále autorka neuvádí některé důležité parametry (např. Reynoldsovo číslo) a čtenář si tak musí hodnotu odhadnout na základě rozměrů obrázku. Na druhou stranu je však možné pochválit pečlivý rozbor různých variant stabilizace. To považuji za největší přínos předložené práce.

Vzhledem k obtížnosti zvoleného tématu práce a k dosaženým výsledkům práci i přes výše uvedené nedostatky **doporučuji k obhajobě**.

V Praze dne 20.12.2019

Doc. Ing. Jiří Fürst, PhD.