



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY  
V PLZNI

KATEDRA MATEMATIKY  
Oddělení matematické analýzy,  
numerické matematiky a geometrie  
Technická 8  
301 00 Plzeň

Prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.  
tel.: +420 377 63 2619  
lavicka@kma.zcu.cz

## Posudek oponenta disertační práce

### *Pozitivita polynomů včetně školských souvislostí*

autora Mgr. Jana Franka

Předkládaná doktorská disertační práce autora Jana Franka se věnuje problematice positivity (PD) a nezápornosti (PSD) polynomů, jakožto jednomu z klasických a vděčných problémů teoretické matematiky, pochopitelně s ohledem na studijní obor z pohledu vzdělávání a s využitím vhodných počítačových systémů (zejména CAS a DGS). Nosným tématem celé práce je rozklad polynomů na součet kvadrátů/čtverců (tzv. problém *Sum Of Squares*, zkráceně SOS). Autor ukazuje jak lze díky vhodnému softwaru řešit i na středních školách úlohy, které by svojí náročností byly ještě nedávno pro žáky nejen neřešitelné, ale prakticky téměř neuchopitelné. Cílem je tedy představit srozumitelnou formou náročnější výpočetní aparát učitelům středních (možná i základních) škol a také jejich talentovaným žákům. Teoretické vymezení daného problému, prezentace matematických algoritmů a sada podrobně řešených příkladů nabízejí možnost, jak si danou problematiku postupně osvojit. Dle mého názoru téma, pojetí, uchopení problematiky, jakož i výsledky odpovídají specifikům a zvyklostem oboru *Informační a komunikační technologie ve vzdělávání* studijního programu *Specializace v pedagogice* a zpracování disertačního úkolu koresponduje se současnými trendy řešené problematiky a aktuálním stavem poznání ve studované disciplíně.

Práce sestává ze šesti základních kapitol (včetně Úvodu a Závěru) doplněných o resumé, použitou literaturu, seznam obrázků a tabulek a o přehled autorovy publikační činnosti, vše v souhrnném rozsahu 158 stran. V úvodní kapitole se autor věnuje obecnému popisu studované problematiky, stručně zmiňuje historický kontext a v závěru vytyčuje směřování disertační práce. Jako motivační prvek je vhodně využít proslulý 17. Hilbertův problém a studium vztahu rozložitelnosti polynomu na součet čtverců a pozitivní semidefinitnosti. Správně je rovněž zmíněn Motzkinův polynom. Kapitola 1 je věnována rozkladu čtverců s využitím

počítače. Je zmíněn základní matematický aparát a jsou uvedeny používané počítačové programy – MATLAB (s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS), Wolfram Mathematica a GeoGebra. Autor se stručně věnuje obecným podmínkám rozkladu a nutným podmínkám pro jeho existenci. Přístup je dokumentován na příkladech vybraných z učiva střední školy, resp. jsou diskutovány některé úlohy matematické olympiády. Příklady mají pro řešení zvolenu jednotnou strategii, vhodně je zařazován software CAS a DGS. Za jistý hendikep této kapitoly považuji, že se pracuje s matematickými pojmy, které jsou exaktně zavedeny a podrobně diskutovány až v kapitole následující – dle mého tomu mělo být určitě naopak, pro čtenáře by to bylo přívětivější. V kapitole 3 se autor zabývá obecným algoritmem rozkladu polynomu na součet čtverců. Zde teprve jsou exaktně definovány pojmy jako Gramova matice polynomu a její vlastní čísla, SOS rozklad, je dokázána nutná a postačující podmínka SOS rozkladu apod. Za velmi užitečné považuji, že je zařazena i moderní metoda využití Newtonových polytopů, která vnáší do studované problematiky zajímavý pohled a její uvedení může být přínosem právě z pohledu střední školy (např. jako téma pro SOČ). Pojmy jsou opět dokumentovány na konkrétních příkladech. V kapitole 4 představuje autor svůj pohled na některé rozdíly mezi klasickým a počítačovým přístupem k problematice SOS. Zejména zdůrazňuje zefektivnění rozsáhlých výpočtů a pomoc při prezentaci abstraktních pojmů. Možná mohlo být více prostoru věnováno příkladům, kdy může počítač poskytnout falešný závěr, resp. kdy je závěr člověkem nepřesně interpretován. Sem patří i příklady, které vyvozují pozitivu polynomu z grafu (získaného např. DGS GeoGebra), kdy je vždy hodnocen jen malý výsek z definičního oboru (chování „mimo obrazovku“ však může být dramaticky jiné). V této části se mohla objevit i zmínka o numerických metodách, případně o problémech, které způsobuje reprezentace reálných čísel formátem s plovoucí desetinnou čárkou (tzv. floating point). Kapitola 5 je pak věnována výhradně sadě řešených příkladů na ověřování pozitivní semidefinitnosti konkrétních polynomů s využitím SOS rozkladu. Autor opět zmiňuje svůj cíl porovnat klasický přístup s počítačovými postupy a rovněž otevřít za pomoci počítačů a programů CAS a DGS svět poměrně náročných výpočtů i nadaným středoškolákům. Významná část této kapitoly je věnována i homogenním polynomům ve dvou neurčitých (příklady 5.3, 5.4, 5.5). Zde si dovoluji jednu poznámku – všechny tyto příklady se dají řešit převedením na polynom jedné neurčité, bylo by tedy vhodnější se zaměřit na jiné situace. V závěrečné kapitole shrnuje výsledky dosažené ve své disertační práci a poukazuje na jasnou provázanost současné matematiky a počítačových technologií. Dává k diskuzi i možné další výzkumné směry.

K práci mám několik následujících poznámek, komentářů či dotazů:

- S ohledem na didakticky zaměřené téma práce by určitě bylo užitečné uvést téma vhodnou motivací. Jednou z motivací je samozřejmě historický nástin tématu zařazený do práce. Nicméně najdou se jistě i příklady z aplikované matematiky či z oblasti aplikací matematiky. Uveďte alespoň některé.
- Studenty by bylo vhodné přesně seznámit s případy, kdy jsou pro polynomy (a pro formy) pojmy PSD a SOS ekvivalentní. Doplňte a dokumentujte na příkladech zařazených do disertační práce.
- Zajímavým (pod)problémem, obzvláště z pohledu některých aplikací, je rozklad polynomu na dva čtverce, kdy pro PSD polynom jedné neurčité stupně  $2d$  najdeme dokonce

$2^{d-1}$  tříd ekvivalentních rozkladů. Setkal jste se i s touto problematikou? Možná by bylo vhodné tento problém uvést jako otázku č. 5 ke čtyřem uvedeným na straně 16 a rovněž se jí věnovat.

- Bylo by didakticky určitě přínosné, kdyby byly diskutovány a rovněž prezentovány situace, kdy chybná interpretace výpočtu či grafického výstupu poskytuje špatný závěr. Nabízí se např. již zmíněné vyvozování nezápornosti jen z grafu, který je však zobrazen jen v malém výřezu. V souvislosti s tímto by bylo vhodné upravit některá tvrzení v práci typu *počítač nám dává řešení na tvrzení počítač nám pomáhá formulovat hypotézu* (kterou musíme následně rigorózně dokázat).
- Jisté výhrady mám k některé použité terminologii a obrátům; např. *segment délky, vydaný polynom, zanášení rovnic* apod. Na některých místech je také zmiňována pozitivita, byť tam má být nezápornost – např. str. 20 konstatování o čtvercích reálných čísel. U zao-krouhlených hodnot je nutné používat znak pro přibližnou rovnost.
- V případě dostatku času bych s ohledem na studijní program u obhajoby rád slyšel, zdali se autor pokusil zařadit studované zajímavé téma do výuky. Na jakém stupni, jakou formou a s jakým ohlasem?

#### **Shrnutí hodnocení disertační práce a související tvůrčí činnosti autora:**

##### *a) Zhodnocení významu disertační práce pro obor*

Práce se zabývá problematikou positivity/nezápornosti polynomů a související transformace uvedeného tématu do prostředí středoškolské matematiky. Jedním z hlavních cílů je diskuse vhodného využití počítačů, programů počítačové algebry a systémů dynamické geometrie. Dle mého názoru jde o práci, která obohacuje studovaný obor, může být inspirací pro navazující výzkum a jejíž zpracování odpovídá požadavkům na DSO Informační a komunikační technologie ve vzdělávání.

##### *b) Vyjádření k postupu řešení problému, použitým metodám a splnění určeného cíle*

Použité metody jsou adekvátní řešenému úkolu a vedly ke splnění cíle, kterým byla prezentace možné didaktické transformace teoretického tématu za pomoci výpočetní techniky. Pokud by měla být práce v některém směru rozšířena, pak pravděpodobně v části týkající se ověření na záčích, případně o části zmíněné ve výše uvedených komentářích.

##### *c) Stanovisko k výsledkům práce a k původnímu konkrétnímu přínosu předkladatele*

Posuzovaná práce představuje ucelené pojednání o studované problematice a přináší zajímavý pohled, který dává do souvislosti oblast počítačové algebry, dynamické geometrie a středoškolské matematiky. Pokud je mi známo, výsledky práce lze považovat za dosažené samostatnou výzkumnou činností a pojetí je původní. Věřím, že práce se může stát užitečnou pomůckou pro učitele matematiky, kteří hledají zajímavá témata, jakož i pro talentované žáky, kteří se o matematiku zajímají hlouběji, zejména pak pro řešitele matematické olympiády.

##### *d) Vyjádření k systematické, přehlednosti, formální úpravě a jazykové úrovni práce*

Předložený text odpovídá strukturou, systematickostí a jazykovou úrovní požadavkům kladeným na disertační práce. Autorův výklad je věcný a korektní a dává čtenáři

představu o studované problematice, jakož i o výsledcích kterých dosáhl. Do jisté míry je k diskuzi pouze pořadí kapitol (viz jedna z výtek v úvodní části posudku). Jako doporučení si dovoluji uvést, že pracím s vysokým podílem matematického textu více sluší sazba v systému  $\text{\TeX}$ , který by měl autor do budoucna využít, obzvláště při směřování svých publikací do mezinárodních časopisů.

e) *Vyjádření k publikacím autora*

Součástí práce je i přehled publikační činnosti autora. Seznam obsahuje jak publikace již otištěné, tak publikace v tisku. Kromě uvedeného seznamu jsem při hodnocení vycházel i z uznávané databáze Scopus (aktuálně zařazeny 2 články) a dále pak z veřejných údajů zanesených do Rejstříku informací o výsledcích (RIV) výzkumu a vývoje v ČR, kde jsem našel 9 prací (4× typ J, 1× typ D, 1× typ C, 3× typ O). Jde hlavně o práce národního, ale v poslední době i mezinárodního charakteru. Tento publikační rozsah a jeho složení považuji v daném oboru za standardní a odpovídající požadavkům kladeným na publikační činnost doktoranda daného DSO. Do budoucna bych očekával, že získané zajímavé výsledky, popř. jejich výběr budou sepsány do podoby článku zaslaného do vhodného mezinárodního recenzovaného časopisu – např. International Journal for Technology in Mathematics Education, Journal for Research in Mathematics Education apod. Výsledky práce by si určitě tuto v uznávaných periodikách zaznamenanou publikaci zasloužily.

f) *Závěrečné vyjádření oponenta*

Autor předloženou práci dokazuje, že zvládá metodiku samostatné výzkumné činnosti ve zvolené disciplíně. Dle mého názoru práce splňuje požadavky kladené na disertační práce k získání akademického titulu doktor ve studijním oboru *Informační a komunikační technologie ve vzdělávání*. Jsou tak dodrženy všechny podmínky vytyčené v §47, odst. (4) ZoVŠ, jakož i všechny náležitosti dané SZŘ ZČU. Proto doporučuji, aby byla práce Mgr. Jana Franka přijata jako disertační a aby mu byl po její úspěšné obhajobě a zodpovězení položených dotazů udělen doktorský titul.

Plzeň, 16. října 2020

...  
Prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.