Posudek disertační práce

Student dr. studijního programu: **Mgr. Jan Frank**

Doktorský studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Informační a komunikační technologie ve vzdělávání

Školitel: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Název dizertační práce: Pozitivita polynomů včetně školských souvislostí

Posudek vypracoval: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc., Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

---

Dizertační práce se zabývá jedním z důležitých matematických problémů, kdy se má určit, zda je reálný polynom pozitivně semidefinitní (PSD), tj. zda daný polynom nabývá pro všechny proměnné nezáporných hodnot. Jedná se o 17. problém ze slavné přednášky matematika Davida Hilberta na světovém kongresu matematiků v Paříži v roce 1900, kde bylo formulováno 23 problémů matematiky. 17. Problém je v dizertační práci formulován takto: „Nalezněte způsob, jak vyjádřit pozitivně semidefinitní racionální funkci jako součet čtverců racionálních funkcí“.

V práci je podán podrobný historický přehled o vývoji problému. Je známo, že ne každý PSD polynom lze vyjádřit jako součet čtverců polynomů (SOS – sum of squares). S konkrétním příkladem polynomu, který je PSD, ale nelze jej zapsat jako součet čtverců polynomů, přišel až v r. 1967 americký matematik T. S. Motzkin. Po něm následovala řada matematiků, kteří uváděli podobné příklady polynomů, např. R. M. Robinson.

Po historickém úvodu následuje teoretická část, ve které je popsána hlavní metoda převádění PSD polynomů do tvaru SOS. V této metodě se např. používají vlastnosti Grammovy matice a jejích vlastních čísel či využití Newtonova polygonu při omezení počtu sčítanců, které se vyskytují v rozkladu SOS. V práci jsou využívány programy počítačové algebry např. MATLAB s balíčky SOSTOOL S a SeDuMi, které jsou k dispozici od devadesátých let minulého století, pomocí nichž lze po zadání PSD polynomu získat informaci, že daný polynom je rozložitelný na součet čtverců. Používán je také program GeoGebra, který je zdarma k dispozici studentům na základních, středních i vysokých školách. Program

GeoGebra obsahuje kromě příkazů dynamické geometrie také příkazy počítačové algebry, pomocí nichž lze řadu výpočtů provádět a graficky znázorňovat.

Cíle dizertační práce jsou následující:

1. Lze každý PSD polynom rozložit na součet čtverců polynomů?
2. Jaké jsou nutné podmínky existence rozkladu polynomu na SOS?
3. Jakým způsobem (jednoduše) nalézt požadované polynomy?
4. Je získaný rozklad polynomu na součet čtverců polynomů jedinečný?

Hlavní část práce představují řešené příklady, které demonstrují různé situace při hledání rozkladu PSD polynomů na součet čtverců. Na několika příkladech je ukázán způsob nalezení rozkladu konkrétního polynomu na součet čtverců. Velmi pěkný je příklad na straně 19, kde je ukázán středoškolský způsob rozkladu polynomu. Poté následuje nalezení rozkladu s použitím počítače. Obdobně jsou zpracovány případy Motzkinova a Robinsonova polynomu, které nelze vyjádřit ve tvaru součtu čtverců. Příklady na možnost či nemožnost zapsat jistý PSD polynom jako součet čtverců polynomů se začaly objevovat i ve školské matematice, např. v úlohách matematické olympiády. V disertační práci jsou tyto úlohy komentovány v kapitole 2.3.

Předložená dizertační práce svědčí o autorově hluboké znalosti této nesnadné problematiky. O velmi dobrém přehledu svědčí i uvedená použitá literatura i vlastní publikace autora.

Z hlediska matematiky neosahuje práce nic nového. Hlavní přínos disertační práce spočívá ve schopnosti autora vyložit poměrně obtížnou problematiku, která se běžně nepřednáší ani na fakultách matematického zaměření, způsobem, který je přístupný studentům střední školy, řešitelům matematické olympiády, či budoucím učitelům matematiky na fakultách připravujících učitele. K této tzv. didaktické transpozici je nutná velmi dobrá znalost teorie a hlavně schopnost autora rozdělit řešení (nalezeni rozkladu SOS) na několik dílčích kroků, které je zapotřebí náležitě a pod možno jednoduše, vysvětlit. Tuto činnost – vysvětlení nové a potřebné matematické teorie žákům střední školy či budoucím učitelům matematiky odpovídajícím způsobem – pokládám za velmi důležitou. Domnívám se, že tento úkol se autorovi podařil.

Celkové hodnocení:

Cíle stanovené v disertaci byly splněny. Rozbor o současném stavu problematiky svědčí o velmi dobré orientaci autora v tématu práce. Je zřejmé, že se autor výše uvedenou problematikou dlouhodobě zabývá.

Dizertační práce se zabývá aktuální a velmi hodnotnou tématikou. Výsledky mohou obohatit učitelskou praxi v práci s nadanými studenty i samotnou přípravu učitelů. Praktické využití práce je nesporné.

Po stránce formální je práce na vysoké úrovni. Je přehledně napsaná, čtenář se v ní dobře orientuje. Kladně hodnotím časté zařazení obrázků a grafů k osvětlení problému či k prezentaci výsledků.

Závěr:
Disertační práci doporučuji k obhajobě v doktorském studiu.

Otázky k obhajobě:

a) Ukažte jednoduše, že Motzkinův polynom je pozitivně semidefinitní.

b) Ukažte řešení úlohy matematické olympiády č. 325 na str. 34.

České Budějovice 29. října 2020

prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.