Oponentský posudek na rigorózní práci

Uchazeč:	**Mgr. Martin Hamáček**
Název práce:	Fučíkovo spektrum Laplaceova operátoru s integrální okrajovou podmínkou a jeho parametrizace
Oponent:	Doc. RNDr. Jiří Benedikt, Ph.D.

Autor práce se zabývá Fučíkovým spektrem Σ nelokální úlohy pro radiální Laplaceův operátor s integrální podmínkou

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) = 0 \quad \text{pro } r \in (0,1),$$
$$u'(0) = 0, \qquad \int_0^1 r^{n-1}u(r)\mathrm{d}r = 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je dimenze, u^+ je kladná část a u^- záporná část řešení a dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje spektrální parametr. Kapitola 1 je úvodní, v kapitole 2 jsou zformulovány úlohy, v kapitole 3 jsou vyjádřena příslušná klasická vlastní čísla pomocí nulových bodů Besselovy funkce prvního druhu.

Stěžejní jsou kapitoly 4 a 5. V kapitole 4 je první větev (větve jsou číslovány podle počtu nulových bodů příslušných vlastních funkcí v $(0,1)$) té části Σ^+ Fučíkova spektra, které odpovídají vlastní funkce s kladnou limitou v nule, ztotožněna s nulovou hladinou funkce dvou proměnných $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ zahrnující základní i modifikované Besselovy funkce prvního a druhého druhu. V kapitole 5 je pro speciální případ $n = 3$ díky možnosti vyjádřit příslušné Besselovy funkce pomocí goniometrických funkcí uděláno totéž pro všechny větve Σ^+. Vhodnou volbou parametrického systému hyperbol v rovině (α, β) je pak funkce $\mathcal{G}$ na každé z hyperbol vyjádřena jako kubická funkce proměnné α, resp. β, která má právě jeden reálný kořen, a tudíž lze celé Σ^+ vyjádřit pomocí Cardanova vzorce parametricky jako křivka a dokázat, že je hladká a regulární.

Pomocná tvrzení jsou dokázána v přílohách A–C. Práce navazuje na autorovu diplomovou práci.

Získané výsledky jsou podle mého názoru dokázány vhodnými metodami a v zásadě korektně, bez závažných věcných chyb. Jsou poměrně zajímavé a mohly by být publikovány v některém odborném časopise. Práce obsahuje přiměřené množství formálních, typografických a gramatických chyb, nešikovných formulací a překlepů. Některých věcných chyb a nepřesností se týkají některé níže uvedené otázky k obhajobě. Dále práce obsahuje některé zbytečné části, např. důkaz Cardanových vzorců, důkaz (5.20) (vztah (5.18) nemůže nebýt dobře definován), zbytečné opakování – např. úloha (1.2) na str. 1 je totéž co (2.2) na str. 3, totéž je znovu na str. 5 bez čísla, podobně (1.3), dále rozdělení na lemma 2.1 a větu 2.2, pro důkaz existence a jednoznačnosti pevného bodu reálné funkce reálné proměnné na str. 35 a 70 je zbytečné používat Banachovu větu o kontrakci atd.

Závěrem: práce **splňuje** požadavky podle čl. 4 odst. 4 Řádu rigorózního řízení na FAV.

Otázky s obhajobě:

1. V práci mi chybí zmínka o aplikacích. Jaké využití může mít znalost spektra úlohy (2.1), zejména s ohledem na integrální podmínku? Jakou roli v tom hraje fakt, že vlastní čísla jsou všechna reálná čísla (viz Poznámka 3.4) a pouze vlastní čísla odpovídající radiálně symetrickým vlastním funkcím tvoří diskrétní množinu?
2. V práci je dokázáno (pro $n = 3$), že Σ^+ je třídy C^1. Je i třídy C^2 nebo vyšší? Jak by se dalo dokázat, že je C^∞?
3. Str. 6, v části (ii) důkazu věty 3.1 – jak z toho, že u není konstantní na $(0,1)$ plyne, že pravá strana v (3.3) je kladná pro všechna $r \in (0,1)$?
4. Str. 9, předposlední odstavec poznámky 3.4 – integrál „úhlové“ části je vždy 0? Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$?
5. Str. 11 – proč se o úloze (4.2) říká, že je nedourčená, když je na straně 13 vypočteno její řešení jednoznačně?
6. Str. 15–17 – v částech (III) a (IV) chybí zdůvodnění, proč už řešení nemá v $(0,1)$ žádný další nulový bod. V případě (III) je to triviální, v případě (IV) méně.

7. Str. 23, důkaz lemmatu 5.1 – měla by se zdůvodnit oprávněnost použití l'Hospitalova pravidla, tj. $rv'(r) \to 0$ pro $r \to 0+$. Např. tak, že v' má v nule vlastní limitu, což podle mého názoru není úplně triviální.
8. Str. 24–25 – pokud vyjádření $\mathcal{M}$ z věty 5.5 nazýváte explicitní, jak by vypadalo implicitní?
9. Str. 26 nahoře – platí toto vyjádření I_n i pro $n = 0$? Má vůbec smysl zavádět I_0?
10. Str. 30 – jakou má funkce $\Psi \in C^1([-1, 1])$ derivaci v -1?

V Plzni dne 7. října 2020

Jiří Benedikt

Posudek oponenta rigorózní práce

MGR. MARTIN HAMÁČEK: FUČÍKOVO SPEKTRUM LAPLACEOVA OPERÁTORU S INTEGRÁLNÍ OKRAJOVOU PODMÍNKOU A JEHO PARAMETRIZACE.

Studijní program: Matematika a její aplikace

Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky

Mgr. Martin Hamáček se ve své práci zabývá úlohou na vlastní čísla a Fučíkovým spektrem pro Laplaceův operátor. Hledá radiálně symetrická řešení splňující nelokální integrální podmínku. Ukáže, jaká je posloupnost vlastních čísel a příslušných vlastních funkcí a jak vypadá první větev Fučíkova spektra, a to pro obě úlohy v libovolné dimenzi. Ukáže dále, jak vypadá celé Fučíkovo spektrum v prostoru dimenze 3. Dokáže, že se skládá ze dvou souvislých větví a nalezne popis každé z nich pomocí hladké souvislé regulární křivky.

Po stručném historickém úvodu jsou v druhé kapitole zformulovány obě zkoumané úlohy a je dokázaná jistá symetrie Fučíkova spektra. Ve třetí kapitole je nalezena posloupnost vlastních čísel a vlastních funkcí včetně jejich explicitního tvaru. V další kapitole je pro případ dimenze $n = 3$ nalezena a popsána první větev Fučíkova spektra (ve světle poslední kapitoly vlastně *první část souvislé větve Fučíkova spektra*). Autor konstruuje postupně dvě množiny v rovině Fučíkových koeficientů, ve kterých je „kladná část" Fučíkova spektra (příslušná řešení jsou v počátku kladná) popsána hladkými a hladce na sebe navazujícími křivkami, takže dohromady tvoří souvislou větev. Spolu se symetrickou „zápornou částí" je tak hladkými křivkami popsáno celé Fučíkovo spektrum studované úlohy.

Rigorózní práce je čtivá, téma je zajímavé a aktuální a ukazuje, jak vypadá Fučíkovo spektrum pro nelokální podmínku. Zpracovaná problematika není jednoduchá, důkazy mnoha tvrzení jsou značně technické a zdá se, že k získání některých odhadů bylo potřeba geniálních nápadů. Důkazy vybraných tvrzení a odvození mnoha vzorců jsou pro hladší čtení samotného textu správně umístěny do Apendixu, který tak zabírá třetinu práce.

V textu jsem nenašel žádnou závažnou chybu, jen některé nepřesnosti a překlepy. Některé kroky možná mohly být okomentovány podrobněji kvůli hladšímu čtení místy technického textu. Místo formulace „můžeme psát" bych proto na některých místech jako čtenář uvítal raději konkrétní zdůvodnění dané transformace. Trochu mi v práci chybí nějaké závěrečné shrnutí, ve kterém se mohly jednotlivé kapitoly propojit. Méně znalý čtenář by se v něm například mohl utvrdit, že průsečíky obou větví Fučíkova spektra leží na ose $\alpha = \beta$ a jsou to právě všechna kladná vlastní čísla dané úlohy.

Student prokázal, že dané problematice rozumí, předkládanou práci přes uvedené nedostatky hodnotím velmi kladně, navrhuji uznat ji jako rigorózní práci a doporučuji ji k obhajobě.

V Českých Budějovicích, 18. 10. 2020, Jan Eisner

Otázky pro studenta:

Jaký může být parametr β v Lematu 4.1? (str. 12)

S čím souvisí dolní omezení na parametr α v odhadu I_1^+? (konec kroku III, str. 15, konec kroku IV, str. 17)