

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY

# **Bakalářská práce**

Plzeň, 2021

Václav Steinbach

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY

# **Bakalářská práce**

KMITÁNÍ BISTABILNÍCH  
MECHANICKÝCH SOUSTAV

Plzeň, 2021

Václav Steinbach

# PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 9. června 2021

.....  
podpis

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D. za čas věnovaný vedení a spolupráci na této práci. Děkuji i za poskytnutí cenných rad, materiálů a literatury při jejím vypracovávání. Rád bych poděkoval i své rodině za psychickou podporu a zázemí při studiu.

# ABSTRAKT

Předkládaná bakalářská práce se zaměřuje na matematické modelování a dynamickou analýzu kmitání bistabilních mechanických soustav. Úvodní kapitola shrnuje motivaci pro studium těchto soustav s ukázkou příkladů běžných bistabilních soustav. Následně je teoreticky přiblížena problematika nelineárních jevů v dynamických systémech. Tato kapitola probírá teorii nelineárních dynamických systémů a jsou zde představeny metody pro posuzování chování těchto systémů. Dále je pozornost zúžena na vybrané modely bistabilních mechanických soustav pro které jsou odvozeny pohybové rovnice. V kapitole Dynamická analýza je pozornost věnována pozorování a rozboru chování těchto vybraných modelů s uvažováním kinematického buzení. Pro jednotlivé soustavy jsou zobrazeny bifurkační diagramy obsahující oblasti chaotické odezvy. Tyto oblasti jsou doplněny o zobrazení příslušných Poincarého řezů. Poslední část popisuje, jakým způsobem byl navržen a vyroben demonstrátor bistabilní soustavy - kyvadla s permanentními magnety. Na základě parametrů demonstrátoru byly voleny parametry odpovídajících výpočtových modelů.

**Klíčová slova:** bistabilita, kmitání, nelinearita, chaos, dynamické systémy, von Missesovo vzpěradlo.

# ABSTRACT

The presented bachelor thesis focuses on mathematical modeling and dynamic analysis of oscillations of bistable mechanical systems. The introductory chapter summarizes the motivation for the study of these systems enriched with examples of common bistable systems. Subsequently, the problem of nonlinear phenomena in dynamical systems is theoretically approached. Second chapter discusses the theory of nonlinear dynamical systems and presents methods for assessing the behavior of these systems. Furthermore, attention is narrowed to chosen models of bistable mechanical systems for which the equations of motion are derived. The chapter Dynamic analysis is devoted to the observation and analysis of the behavior of these selected models with consideration of kinematic excitation. Bifurcation diagrams containing areas of chaotic response are displayed for individual systems. These areas are complemented with the respective Poincaré sections. The last part deals with the physical implementation of a bistable system which is formed by a pendulum with permanent magnets. The particular parameters of the computational models were chosen based on the real parameters of the real system.

**Keywords:** bistability, vibration, nonlinearity, chaos, dynamical systems, von Misses truss.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Bistabilní soustavy jako nelineární oscilátory . . . . .	7
1.1.1	Příklady bistabilních soustav . . . . .	9
1.2	Cíle práce . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Projevy nelinearit v dynamických systémech</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Vybrané modely bistabilních soustav</b>	<b>24</b>
3.1	Metody sestavování pohybových rovnic . . . . .	24
3.2	von Misesovo vzpěradlo . . . . .	25
3.3	Model kyvadla se dvěma magnety . . . . .	27
3.4	Model kyvadla se třemi magnety . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Dynamická analýza vybraných modelů</b>	<b>35</b>
4.1	Analýza von Misesova vzpěradla . . . . .	36
4.1.1	Rovnovážné polohy . . . . .	36
4.1.2	Volné kmitání . . . . .	37
4.1.3	Vynucené kmitání . . . . .	38
4.2	Analýza kyvadla se dvěma magnety . . . . .	42
4.2.1	Rovnovážné polohy . . . . .	43
4.2.2	Volné kmitání . . . . .	43
4.2.3	Vynucené kmitání . . . . .	45
4.3	Analýza kyvadla se třemi magnety . . . . .	50
4.3.1	Rovnovážné polohy . . . . .	51
4.3.2	Volné kmitání . . . . .	51
4.3.3	Vynucené kmitání . . . . .	52

<b>5 Experiment</b>	<b>58</b>
5.1 Návrh reálného modelu . . . . .	58
5.2 Realizace . . . . .	60
5.3 Měření . . . . .	65
<b>6 Závěr</b>	<b>67</b>
<b>Literatura</b>	<b>68</b>



# Kapitola 1

## Úvod

V současné době jsou intenzivně studovány dynamické vlastnosti tzv. bistabilních soustav. Tato práce se zaměřuje na modelování a dynamickou analýzu takovýchto soustav při vynuceném kmitání. Jedním z cílů je poukázat na skutečnost, že i v obyčejných soustavách může být skryto více než se na první pohled může zdát. Mechanickou soustavou rozumíme takovou soustavu, která je schopná konat pouze mechanickou práci. Za bistabilní mechanickou soustavu považujeme takovou soustavu, která má dvě stabilní rovnovážné polohy. Na stabilitu soustavy můžeme nahlížet z toho pohledu, kdy soustava po malém vychýlení (pertrubaci) z rovnovážné polohy v konečném čase zaujme opět rovnovážnou polohu.

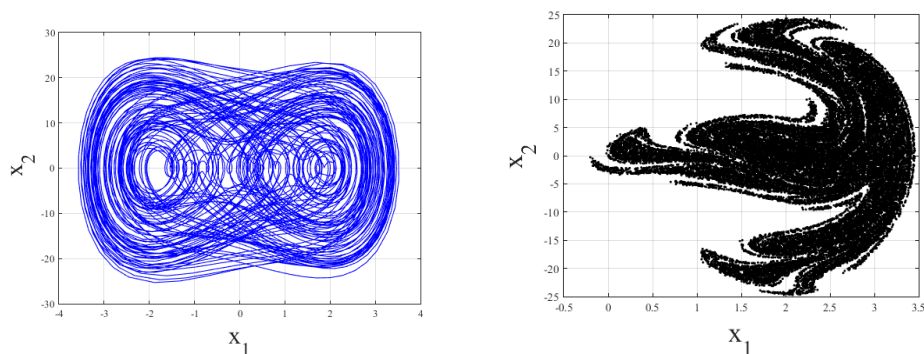
### 1.1 Bistabilní soustavy jako nelineární oscilátory

V této práci se omezíme na tři vybrané případy bistabilních mechanických soustav. Prvním bude ilustrativní příklad mechanické soustavy. Dále budou následovat soustavy obsahující permanentní magnety ve dvou různých konfiguracích. Tyto vybrané soustavy jsou dostatečně názorné a některé výsledky z nich získané je možné zobecnit. Při studiu těchto soustav lze spatřit jistou inspiraci v pozoruhodném chování tzv. Duffingova oscilátoru, jehož matematický model je vyjádřen ve tvaru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \delta \cos \omega t. \quad (1.1)$$

Jedná se o velmi zobecněný matematickým model vibrací vznikajících chodem motoru. Pro seznámení je možné si jednotlivé parametry představit následovně:  $\alpha$  značí vratnou sílu např. v pružině,  $\beta$  vnáší do oscilátoru nelinearitu,  $\gamma$  je

tlumení,  $\delta$  vyjadřuje amplitudu buzení a  $\omega$  kruhovou frekvenci buzení. Tuto rovnici odvodil kolem roku 1918 německý fyzik, mechanik Georg Duffing (1861 – 1944) [1].

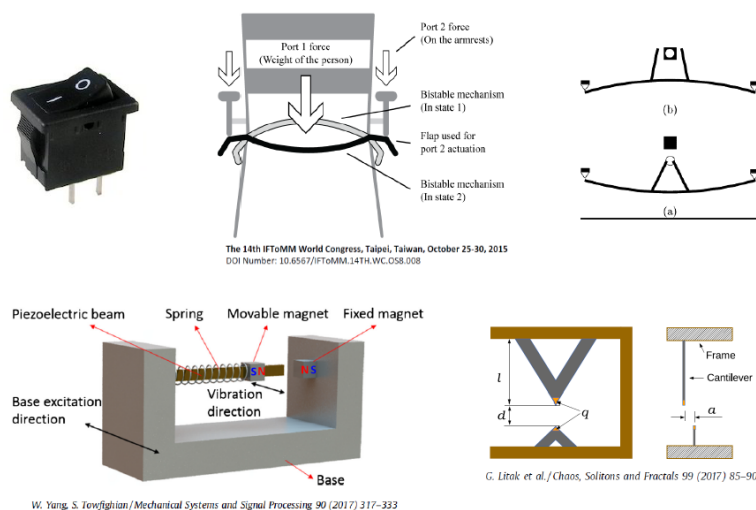


Obrázek 1.1: Zobrazení trajektorie Duffingova oscilátoru ve fázové rovině (vlevo) a příslušného Poincarého řezu pro hodnoty  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 12$ ,  $\gamma = 100$ ,  $\delta = 0.025$  a  $\omega = 4$

Vznik Duffingova oscilátoru můžeme připisovat Duffingovu zájmu o motory a brzdy pohonných jednotek. Byl fascinován vibracemi, které byly vybuzeny bržděním a vibracemi samotného chodu motoru. Jakožto inženýr věděl, že takové vibrace snižují účinnost motoru. Začal tím, že se pokusil samotný jev vibrací motoru co nejvíce abstrahovat. Postupoval velmi sofistikovanou a systematickou cestou, kterou se mu podařilo problém podchytit. Do roku 1917 měl o tomto problému nashromádko dost teoretických i experimentálních výsledků, že mohl v roce 1918 publikovat svojí mistrovskou práci *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz* [1]. Jednalo se o velmi systematickou analýzu různých nelineárních jevů v oscilátorech. Toto notně akademické dílo napsané neakademikem udělalo z Duffinga synonymum pro jeden z nejkoničtějších oscilátorů v moderní dynamice. Na Obr. 1.1 je možné vidět trajektorii pohybu Duffingova oscilátoru ve fázové rovině a příslušný Poincarého řez. Oba tyto pojmy spolu s tím co vypovídají o modelu bude detailně popsáno v následující kapitole. Chování ve fázové rovině na Obr. 1.1 je i bez předchozí znalosti problematiky na pohled neuspořádané. S tímto chováním se lze ve značné míře setkat při zkoumání bistabilních soustav. Právě v těchto přesně definovaných soustavách lze najít skrytý chaos. Tato bakalářská práce pokládá základ snahy o popsání této význačné vlastnosti bistabilních soustav a její využití. Na otázku využití je možné hledat odpověď v tzv. *Energy harvesting*, tedy sběru ztrátové energie. Tyto harvestery stojí na velmi jednoduché myšlence - přetvoření ztrátové energie např. vznikající od

vibrací motoru na napájení částí přístroje kterým můžeme tento motor zkoumat. Příkladem může být napájení čidla vibrací pomocí vibrací stroje. Ukazuje se, že důmyslným použitím vlastností bistabilních soustav by principienlně bylo možné generovat dostatečný elektrický náboj.[2] Jelikož jde o vcelku nově zkoumanou oblast mohla by tato práce v budoucnu pomoci ke komerčnímu využití v oblasti energy harvesterů.

### 1.1.1 Příklady bistabilních soustav



Obrázek 1.2: Příklady různých bistabilních soustav

Zde je možné vidět několik příkladů obyčejných bistabilních soustav. Hned prvním, klasickým příkladem je vypínač. Jak po mechanické tak po elektrické stránce je schopen zaujmou pouze dva stavy. Vypnuto a zapnuto, překlopeno a nepřeklopeno. Dále zde můžeme vidět oboustranně vetknuté, osově předepnuté nosníky, které při působení síly ve středu délky, jsou též schopné zaujmou dvě stabilní polohy. Zbytek příkladů je založen na ohebných metalických páskách, které můžeme vychylovat pomocí magnetických sil. Příkladem bistabilní soustavy může být i bimetalový pásek. Při jeho zahřívání, díky rozdílné tepelné roztažnosti přítomných kovů, se vychýlí pásek z vodorovné polohy do polohy zakřivené. Tato

vlastnost se s oblibou využívá v klasických elektrických troubách, kdy při překročení kritické teploty pásek rozpojí obvod a zamezí dalšímu zahřívání.

## **1.2 Cíle práce**

Cíle této bakalářské práce jsou následující:

- Základní principy a využití bistabilních mechanických soustav.
- Modelování bistabilních soustav a jejich dynamické projevy.
- Dynamická analýza vybraných konfigurací bistabilní soustavy.
- Sestrojení fyzického modelu odpovídající matematickému modelu vybrané bistabilní soustavy.

## Kapitola 2

# Projevy nelinearit v dynamických systémech

V úvodní kapitole byly představeny běžné modely bistabilních soustav a kde se s nimi lze setkat. Při hledání matematických modelů těchto soustav, by bylo zjištěno, že většina modelů bude obsahovat určitý druh nelinearity. Oproti běžně používaným a zkoumaným lineárním modelům jsou ty nelineární méně přímočaré a při jejich studiu a práci s nimi je nutná velká obezřetnost. Tato kapitola se zaměří na základní charakteristiky nelineárních soustav a na jejich projevy tak, aby je bylo možné identifikovat při dynamické analýze. Detailnějším rozbořením nelineárních dynamických systémů a nelineárního kmitání se obecně zabývají například monografie [3], [4]. Teorie nelineárních dynamických systémů otevírá dveře vysvětlení doposud neprobádaných problémů, nebo těch, které byly mnohdy i mylně chápány.

Principiálně lze každý mechanický systém chápat jako systém dynamický. Pokud jsou v matematickém modelu mechanického systému obsaženy vlivy materiálových nebo geometrických nelinearit, pak jej lze klasifikovat jako nelineární dynamický systém, který je charakterizován, tím, že:

- může dojít k náhlé změně stavu při spojitě změně parametrů systému,
- může dojít ke vzniku nestabilního chování, při němž je předvídatelnost vývoje systému silně omezena,
- neexistuje obecné analytické řešení v uzavřeném tvaru.

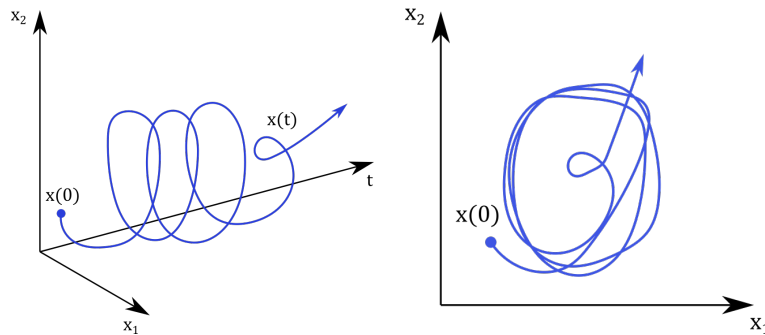
Matematický model obecného deterministického *dynamického systému*, který je spojité v časové oblasti, lze popsat obecně ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.1)$$

kde  $t \in \mathbb{R}$  je čas,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{2n}]^T$  je *stavový vektor* definující stav systému ve *stavovém prostoru*. Pokud stavový prostor obsahuje jako zobecněné souřadnice výchylky a rychlosti (zobecněné hybnosti), mluvíme o tzv. *fázovém prostoru*. Vektor  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$  představuje vektor řídicích parametrů systému a vektor funkcí  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{2n}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  určuje vztahy pro budoucí vývoj systému. Obecný matematický model nelineárního systému může být zapsán ve stavovém prostoru ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t, \mathbf{x}), \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{A}$  je systémová matice popisující lineární část systému. Transformovaný vektor buzení  $\mathbf{p}(t, \mathbf{x})$  zahrnuje jak lineární tak nelineární vnější i vnitřní síly systému. Na základě nalezeného řešení  $\mathbf{x}(t)$  soustavy diferenciálních rovnic pro dané počáteční podmínky  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  lze vývoj systému znázornit ve stavovém prostoru spojitou parametrickou křivkou (kde parametrem je čas), tzv. trajektorií systému, jak je uvedeno na Obr. 2.1 (vlevo) a trajektorií ve fázové rovině 2.1 (vpravo), což je projekce parametrické křivky do roviny  $\widehat{x_2x_1}$ .



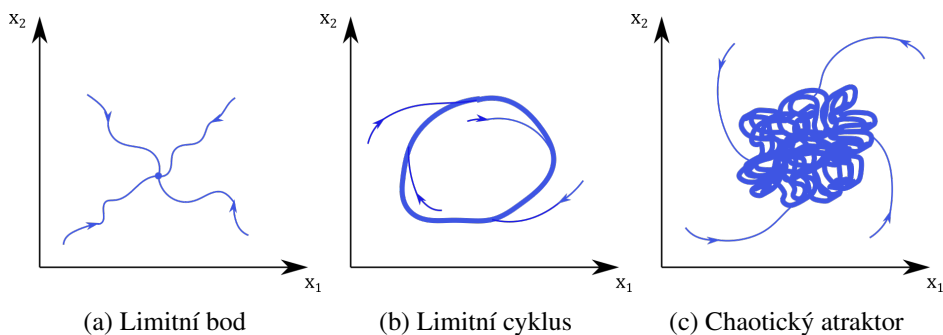
Obrázek 2.1: Znázornění trajektorie systému v rozšířeném stavovém prostoru (vlevo) a ve fázovém prostoru (vpravo)

Ustálený stav nelineárního systému je charakterizován tzv. limitní množinou (atraktorem) bodů ve stavovém prostoru. Základní limitní množiny lze klasifikovat následovně:

- *limitní bod*, je bod (množina bodů) ve stavovém prostoru, k němuž se blíží trajektorie v čase  $t \rightarrow \infty$ ,

- *limitní cyklus* - uzavřená trajektorie systému ve stavovém prostoru (tzv. orbit) reprezentující pohyb s konečnou periodou,
- *kvaziperiodický atraktor* - složitější množina trajektorií systému ve stavovém prostoru s nekonečně dlouhou periodou,
- *chaotický atraktor* - nejsložitější limitní množina, zpravidla nekompaktní, která se vyznačuje nestabilním chováním.

Limitní bod odpovídá statickému rovnovážnému stavu systému, limitní cyklus zase koresponduje s periodickým chováním systému. Ustálí-li se systém do limitního bodu či limitního cyklu, lze mluvit také o stacionárním stavu systému, tedy v čase neměnném stavu. Kvaziperiodické chování je zvláštní množinou na rozhraní mezi periodickou a aperiodickou odezvou. Chaotický atraktor je velmi složitý útvar s komplikovanou vnitřní strukturou, jehož výstižné znázornění je obtížné.



Obrázek 2.2: Znázornění limitních množin v dvojrozměrném fázovém prostoru

Na Obr. 2.2c je proto znázorněn jen pomocí své obálky. Množina všech bodů ve stavovém prostoru, pro které platí, že trajektorie, kterými procházejí jsou zachyceny danou limitní množinou, se nazývá bazén přitazlivosti této limitní množiny. Pokud známe všechny bazény přitazlivosti ve stavovém prostoru, víme, jaké počáteční podmínky jsou zapotřebí pro dosažení zvolené limitní množiny. U prvních tří typů atraktorů můžeme zkoumat jejich stabilitu. Případy znázorněné na Obr. 2.2a a 2.2b odpovídají stabilním limitním množinám. Třetí limitní množina, tedy chaotický atraktor může díky své složitosti vykazovat vnitřní fraktální strukturu. V takovém případě mluvíme o tzv. *podivném aktraktoru*.

Fraktální množiny jsou velmi zvláštní matematické objekty spadající do tzv. *Fraktální geometrie*. Fraktál z latinského adjektiva *fraktus*, které znamená "rozlámaný nebo rozbitý". Tyto "rozlámané" útvary byly pojmenované a popularizované

roku 1977 polským matematikem Benoît Mandelbrotem [5]. Fraktální množiny mohou vyjadřovat nekonečnou hrubost povrchu či odpovídat na otázku spojitého přechodu mezi jednotlivými rozměry. Význačná vlastnost fraktálních množin je, že některé z nich jsou si soběpodobné. Představme si tuto vlastnost jako případ, kdy přiblížením jisté oblasti se naskytne pohled na oblast, ze které bylo přibližování započato atd. Fraktální množiny mohou též tvořit rozhraní bazénů přitažlivosti, v jejichž "blízkém" okolí nemusí existovat jednoznačné určení cílové limitní množiny. Je podivuhodné, že z velmi jednoduchých pravidel dokáží vzniknout na pohled tak složité útvary. Podobně jako jednoduchá mechanická soustava může vykazovat složitý chaotický pohyb.



(a) Mandelbrotova množina v komplexní rovině



(b) Barnsleyho kapradí

Obrázek 2.3: Ukázka dvou fraktálních množin

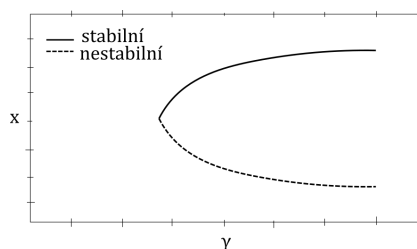
U nelineárních systémů je chápání pohybu odlišné. Mluví-li se o stavu nelineárního systému, není tím myšlen okamžitý stav systému v daném časovém okamžiku, ale stav pohybu tohoto systému. V extrémním případě je samotný statický stav chápán jako rovnovážný výsledek pohybu. Dále jsou uvedeny nejčastější projevy, se kterými je možné se setkat při sledování chování nelineárních systémů. Jedním z charakteristických projevů nelineárních dynamických systémů jsou bifurkace.

Ty vznikají při spojitě změně odpovídajících řídicích parametrů tak, že při přechodu tzv. bifurkačního bodu  $[x_c, \gamma_c]$  v rozšířeném stavovém prostoru dojde ke kvalitativní změně řešení. Systém se v okolí bifurkačního bodu projevuje nestabilně. Lokální bifurkace lze klasifikovat jako statické (sedlo uzlová bifurkace, vidličková bifurkace, transkritická bifurkace) a dynamické (Hopfova bifurkace). Bifurkace jsou zaznamenány především pomocí změn stacionárních stavů a zná-

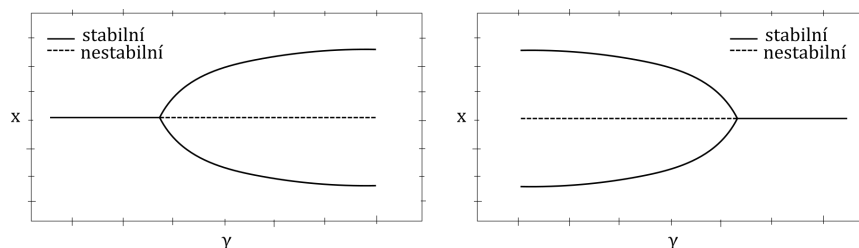


zornují se v tzv. bifurkačním diagramu. Chování systému v okolí bifurkace sedlo-uzel je znázorněno na Obr. 2.4. Počátek odpovídá statickému bifurkačnímu bodu, ze kterého vychází stabilní a nestabilní větve řešení, jechž mají v bifurkačním bodě stejnou směrnici tečny.

Bifurkace znázorněná na Obr. 2.5 se nazývá vidličková bifurkace, protože v bifurkačním bodě vznikají netriviální řešení geometricky podobné vidlím. Bifurkace na Obr. 2.5 (vlevo) představuje superkritickou vidličkovou bifurkaci a na Obr. 2.5 (vpravo) je znázorněna subkritická bifurkace. V případě superkritické vidličkové bifurkace existuje lokálně větev stabilních řešení na jedné straně bifurkačního bodu a dvě stabilní větve stabilních řešení a jedna větev nestabilních řešení na druhé straně bifurkačního bodu. V případě subkritické vidličkové bifurkace je situace opačná. V tomto případě pak všechny větve řešení nemají v bifurkačním bodě stejnou směrnici tečny.



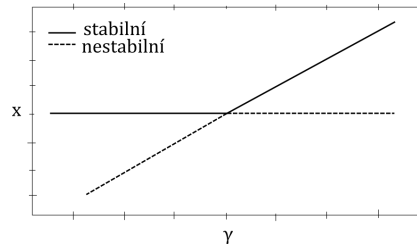
Obrázek 2.4: Znázornění statické sedlo-uzlové bifurkace



Obrázek 2.5: Znázornění superkritické vidličkové bifurkace (vlevo) a subkritické vidličkové bifurkace (vpravo)

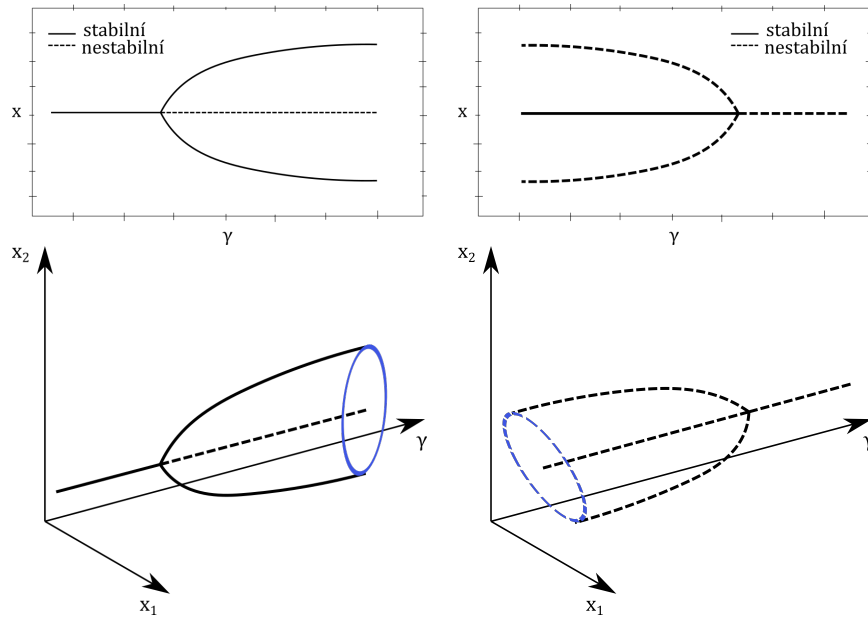
Transkritická bifurkace je charakteristická tím, že existuje triviální a netriviální větev řešení a v bifurkačním bodě dojde k záměně stability mezi těmito řešeními.

*Hopfova bifurkace* provází vznik či zánik limitního cyklu z limitního bodu. Ilustrace superkritického (vlevo) a subkritického (vpravo) typu Hopfovy bifurkace



Obrázek 2.6: Znázornění transkritické bifurkace

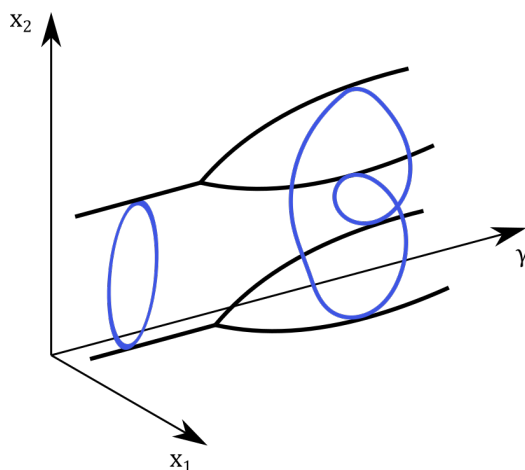
je uvedené na Obr. 2.7. Výskyt Hopfovy bifurkace lze najít například u vzpěru ideálního prutu. Máme-li podélně tuhý prut zatížený osovým periodickým zatížením, pak při nízké hodnotě zatížení bude stacionárním stavem limitní bod odpovídající přímému tvaru prutu. Dosáhne-li zatížení určité vyšší hladiny (odpovídající kritické síle), pak již přímý tvar nebude stabilní a dojde ke zrodu limitního cyklu, který odpovídá podkritickému kmitání prutu. Případně ji lze najít v chování hydrodynamických ložisek.



Obrázek 2.7: Znázornění Hopfovy bifurkace ve dvojrozměrném fázovém prostoru – zrodu limitního cyklu z limitního bodu v závislosti na parametru systému

Dále jsou uvedeny některé případy bifurkací, které se vyskytují, existují-li

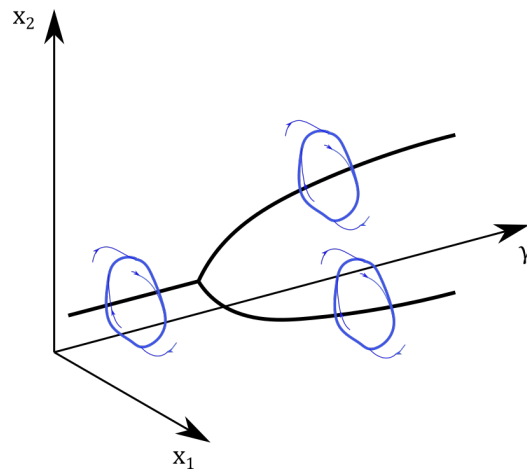
periodická řešení. *Bifurkace zdvojením periody*, jak již název napovídá, způsobí zdvojení periody limitní množiny. Původní množina se náhle rozštěpí (limitní cyklus na Obr. 2.8), přičemž rozštěpené části trajektorie se od sebe rychle lokálně vzdálí.



Obrázek 2.8: Znárodnění bifurkace zdvojením periody v rozšířeném stavovém prostoru

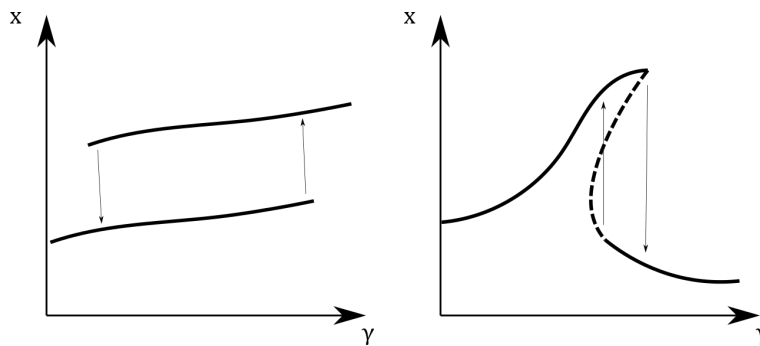
Systému, v němž existuje periodické řešení a v němž existuje superkritická a vidličková bifurkace, odpovídá chování v okolí bifurkačního bodu uvedené na Obr. 2.9. Dojde-li u dynamického systému k této bifurkaci, pak řešení přejde do jedné ze dvou stabilních větví po překročení bifurkačního bodu. I tento typ bifurkace lze demostrovat na příkladu vzpěru prutu. Mějme ideální prut zatížený ve vzpěru v čase neproměnou silou. Necht' je na prutu také jiné např. harmonické zatížení, působící příčně (dochází k ohybu prutu). Situace na Obr. 2.9, pak může odpovídat dosažení kritické hodnoty vzpěrné síly (v čase neproměnná). Bude-li prut vzhledem k vzpěrné síle v podkritickém stavu, pak se ustálí do jediného limitního cyklu. Překročil-li tato síla kritickou hodnotu, pak dojde k vybočení prutu s tím, že prut může nadále kmitat na jedné či na druhé straně (rovinný případ) vlivem stále působícího dostatečně malého příčného harmonického zatížení.

Limitní množiny dynamických systémů mohou vznikat či zanikat při změnách parametrů. Příčiny a průběh těchto změn mohou být různé. To, co je spojuje, bývá dramatický nástup a průběh takového děje. Dostává-li se systém k takovému bodu, ztrácí svou stabilitu. Vznik či zánik limitní množiny je často doprovázen *hystézní smyčkou*. Jde o situaci, kdy v systému existují pro jisté hodnoty řídicího parametru zároveň dvě limitní množiny. Při zvyšování hodnoty parametru



Obrázek 2.9: Znáornění superkritické bifurkace ve dvojrozměrném fázovém prostoru

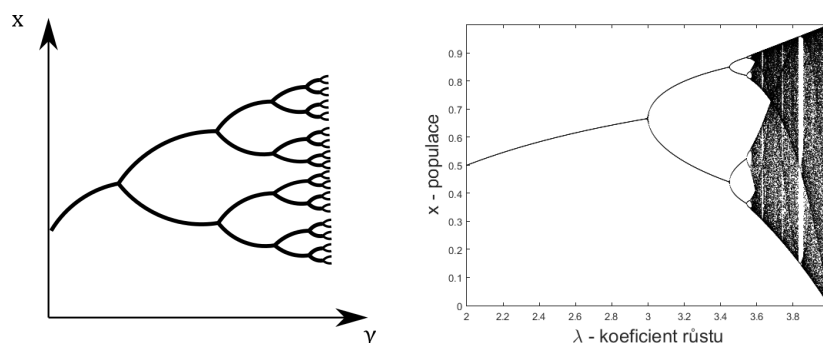
systému je možné zmapovat přechod první množiny na druhou a naopak snižováním parametru zmapujeme přechod druhé množiny na první. Jelikož pro určitý interval řídicího parametru existují obě množiny zároveň, dostáváme hysterézní smyčku. Na Obr. 2.10 (vlevo) ukazuje obecný scénář hystereze při přechodu mezi dvěma limitními množinami. Na témže obrázku vpravo je znázorněn tvar hysterézní smyčky, který je typickým například pro tlumený oscilátor s progresivní tuhostní charakteristikou.



Obrázek 2.10: Znáornění hystereze při přechodech mezi dvěma limitními množinami

*Kaskáda bifurkací* reprezentuje jednu z možností přechodu periodického řešení nelineárního systému do chaotického stavu. Lze ji popsat jako posloupnost bifurkací jednoduché limitní množiny při změně parametru systému, jak je schématicky uvedeno na Obr. 2.11 (vlevo). V zahraniční literatuře [6] je tento děj

označován jako vývoj systému zdvojnásobováním period. Limitní množina opakovanou bifurkací zdvojnásobuje svoji periodu a může přejít v kvaziperiodickou limitní množinu a posléze v chaotický atraktor.



Obrázek 2.11: Kaskáda bifurkací (vlevo) a průběh populace logistické rovnice v závislosti na koeficientu růstu (vpravo)

Navíc pro celou třídu nelineárních systémů, v jejichž chování se objevuje dvojení periody popřípadě kaskáda bifurkací, se ukazuje, že délka intervalu mezi po sobě jdoucími bifurkačními body kaskády bifurkací tvoří konvergující posloupnost. Podíl délek dvou následujících intervalů je roven Feigenbaumovu číslu, které má přibližně hodnotu  $\delta = 4.66292$ . Na Obr. 2.11 (vpravo) je možné vidět zobrazení vývoje stabilních řešení iterační populační rovnice

$$x_{k+1} = \lambda x_k(x_k - 1) \quad (2.3)$$

v závislosti na koeficientu růstu  $\lambda$ . Jedná se o diskrétní systém ve kterém je kaskáda bifurkací také přítomná. Mitchell Feigenbaum začal své kroky ke konstantě nesoucí jeho jméno právě na tomto modelu.

*Chaotické chování* deterministického dynamického systému může vzniknout u spojitéch dynamických systémů pouze v případě, obsahuje-li jeho stavový prostor tři a více proměnných a je charakterizováno zvláštními vlastnostmi. Zkoumáním chaotických atraktorů, tzv. podivných limitních množin, lze ovšem zjistit, že vykazují jistou formu uspořádanosti. Pročež je chaotické chování nestabilní, tak nelze jednoduchým způsobem rozhodovat o stabilitě numerických metod pro řešení odpovídajícího dynamického systému. Libovolně malá změna jakéhokoliv vstupu (počáteční podmínky, metoda řešení, způsobu reprezentace čísel, atd.) nevyhnutelně vede k odlišným výsledkům. Pokud chceme posoudit stabilitu řešení

při chaotickém pohybu, je třeba sledovat strukturu samotného atraktoru. Nemění-li se jeho struktura při změně vstupů, pak lze usuzovat na stabilitu řešení. Skutečnost praktické neopakovatelnosti a nepředvídatelnosti trajektorií při pohybu na chaotickém atraktoru vede k algoritmickým obtížím s jeho identifikací. Při analýze konkrétního systému je účelné zaměřit se na dílčí části tohoto procesu. Z hlediska typu získaných informací o systému je možné provést podle náročnosti úlohy následující klasifikaci:

- sledování systému pro jeho jedinou konfiguraci - závislost chování systému na počátečních podmínkách,
- vývoj ustálených stavů systému při změně parametrů - hledání bifurkací, chaotického chování atd.,
- sledování přechodových dějů - ustalování systému, stabilita ustálených stavů, apod.

Většina metod pro sledování systému využívá prostor všech možných stavů systému, kde se jeho vývoj zobrazuje jako spojitá a parametrická křivka - trajektorie. Výhoda tohoto přístupu spočívá v tom, že pro sledování systému ve fázovém prostoru lze využít zkušenosti ze zkoumání chování systému s jedním stupněm volnosti. Metody zobrazování, které budou dále popsány, lze rozdělit na:

- metody, které dovolují snížit dimenzi zobrazované trajektorie.
- metody, které slouží pro identifikaci změn chování dynamického systému.

*Projekce trajektorie* představuje základní zobrazovací prostředek, který dovoluje snížit dimenzi zobrazované trajektorie. Necht' je dán  $2n$ -dimenzionální dynamický systém, jehož trajektorii  $\mathbf{x}(t)$  chceme zobrazit na dvou dimenzionální plochu. Pak stačí vybrat dvě stavové proměnné např.  $x_r(t)$  a  $x_s(t)$ , které budou reprezentovány dvěma osami zobrazovací plochy. Lze definovat projekci  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  trajektorie  $\mathbf{x}(t)$

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}, \quad \text{kde } r, s \in 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.4)$$

kteřou vyneseme do zobrazovací plochy. Zpravidla jsou voleny takové stavové proměnné, které mají největší vypovídající hodnotu o chování systému.

*Poincarého zobrazení* je nástrojem umožňujícím jistým způsobem zobrazovat pohyb dynamického systému, určovat stabilitu periodických řešení, případně analyzovat chaotický pohyb.

*Poincarého řez* je definován jako nadrovina ve stavovém prostoru, který přísluší dynamickému systému (2.1). Orientace této nadroviny je volena tak, aby vždy protínala celý svazek trajektorií systému. V kontextu s definicí neautonomního dynamického systému (2.1) lze podmínku řezu formulovat skalárním součinem

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \gamma) \neq 0, \quad (2.5)$$

kde  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}(t))$  je normálový vektor řezu  $S$  umístěný v bodě  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \gamma)$  je vektorové pole posisující tok. Vývoj pohybu dynamického systému je pak možné sledovat na základě těchto řezů s vhodně zvolenou nadrovinou.

Nechť je dán autonomní dynamický systém, tedy systém, který nezávisí explicitně na čase. Dále jsou respektovány pouze ty Poincarého řezy, pro něž má skalární součin (2.5) stejné znaménko. Vyvíjí-li se trajektorie v  $2n$ -rozměrném prostoru, Poincarého řez je pak definován  $(2n - 1)$ -rozměrnou nadrovinou a každý řez je určen  $2n - 1$  souřadnicemi.

Transformaci zobrazující stávající průsečík na následujícím Poincarého řezu se nazývá *Poincarého zobrazení*. Toto  $(2n - 1)$ -rozměrné zobrazení lze popsat soustavou rovnic

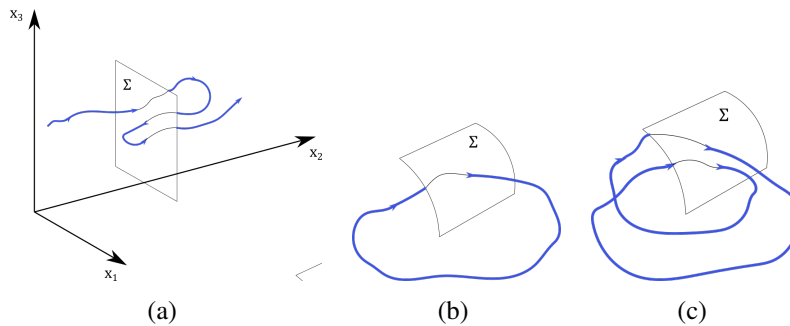
$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_m), \quad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Pro  $2n$ -rozměrný neautonomní systém je Poincarého řezem  $2n$ -rozměrná rovina a příslušné zobrazení  $\mathbf{P}$  je rovněž  $2n - 1$ -dimenzionální.

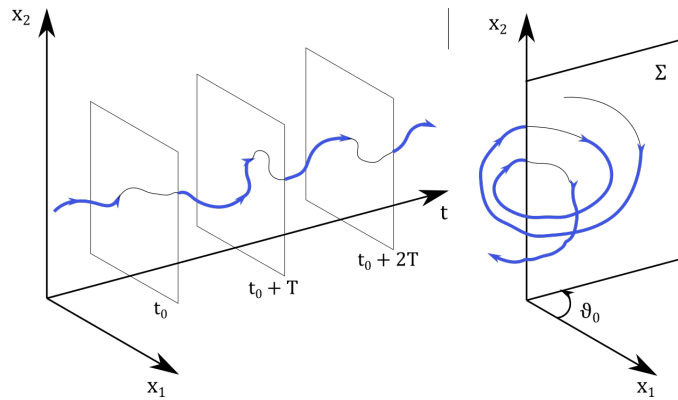
Na Obr. 2.12 jsou uvedeny ukázky konstrukce Poincarého řezu pro autonomní systém. Případ (a) zobrazuje Poincarého řez trajektorií v trojrozměrném stavovém prostoru. Zbylé dvě situace představují řezy periodických fázových trajektorií s jedním (b) nebo dvěma (c) průsečíky. Pro neautonomní periodicky buzené systémy je perioda odpovídající periodické fázové trajektorii většinou explicitně dána. Předpokládejme, že vektorové pole  $\mathbf{f}$  v (2.1) je periodické v čase s periodou  $T$ , pak řešení modelu (2.1) je periodické a jeho perioda je buď celočíselným násobkem nebo celočíselným podílem základní periody  $T$ , kterou můžeme použít ke konstrukci Poincarého řezu, jak uvádí Obr. 2.13. Poincarého řez pak není dán pouze jednou nadrovinou ale nekonečnou řadou nadrovin, jejichž normály mají stejný směr.

Neautonomní systém lze zavedením další nové stavové proměnné  $\eta = \frac{2\pi}{T}t \pmod{2\pi}$ , tedy vyloučením explicitního vyjádření času, převést na systém autonomní. Poincarého řez je pak definován úhlem natočeni  $\eta_0$  kolem zvolené osy, jak ilustruje Obr. 2.13 (vpravo).

Pro vizualizaci Poincarého řezu mnohodimenzionálního dynamického systému lze s výhodou užít projektivní zobrazení, které nazveme *Poincarého mapou*



Obrázek 2.12: Konstrukce Poincarého řezu autonomního systému



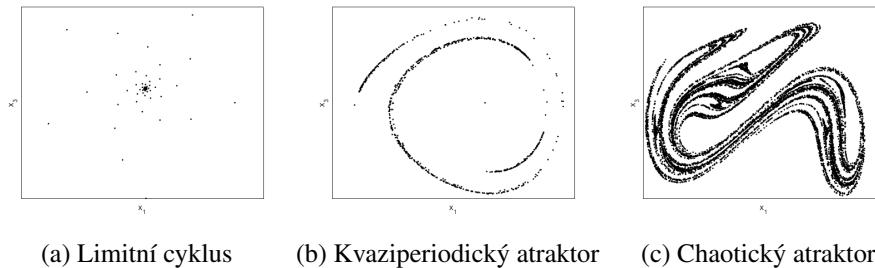
Obrázek 2.13: Konstrukce Poincarého řezu neautonomního systému

a které lze s výhodou využít k identifikaci limitní množiny systému. Na Obr. 2.14 jsou zobrazeny charakteristické Poincarého mapy vybraných limitních množin.

*Bifurkační diagram* slouží jako nástroj pro zobrazení a identifikaci změn chování dynamického systému při změně navrhovaných nebo provozních parametrů. Pro jeho konstrukci se často využívá Poincarého zobrazení. Bifurkační diagram je geometricky uspořádaná množina (graf) Poincarého řezů pro různé spojitě se měnící parametry systému.

Při numerické simulaci může nastat situace, kdy je konstrukce Poincarého řezů v přesně daných časových okamžicích numericky obtížně proveditelná. Pak je možné bifurkace řešení identifikovat sledováním extrémů fázových trajektorií ustáleného řešení. Touto cestou lze spolehlivě odhalit změnu periody řešení, tedy i zdvojení periody a kaskádu bifurkací spolu s chaotickým chováním systému. Nevýhoda spočívá v nemožnosti identifikace chaotického atraktoru. Bifurkační diagram lze konstruovat za různých podmínek:





Obrázek 2.14: Poincarého mapy fázových trajektorií získané numerickým řešením modelu von Missesova vzpěradla, detaily uvedeny v kapitole 3

- Pro každou změnu paramterů startuje nový systém se stále stejnými počátečními podmínkami.
- Pohybující se systém je podroben malé změně parametru, aniž by byl znovu spouštěn - provedení změn "za chodu".
- Systém je pro každou změnu parametru spuštěn mnohokrát s různými (zpravidla náhodně generovanými) počátečními podmínkami.

Použití výše uvedených přístupů pro generování bifurkačního diagramu pro celou trajektorii je značně nepřehledné. Proto nejčastěji používaným je bifurkační digram ustáleného chování systému. Zaměříme-li se na konstrukci bifurkačního diagramu pouze pro ustálený stav, můžeme daleko přehledněji sledovat bifurkace limitních cyklů, kaskády bifurkací, náhlé změny stavu či vznik a rozvoj chaotického chování. Při použití numerické simulace pro řešení kmitání disktrétních mechanických nelineárních soustav lze problém ustálení řešení kompenzovat dostatečně dlouhou simulační dobou, během které se systém ustaluje. Slovním spojením "dostatečně dlouhá doba" je myšlen takový časový interval, jehož zkrácení významně neovlivní tvar bifurkačního diagramu. Jedná se tedy o ověření konvergence. V některých případech můžeme dosáhnout lepších výsledků a snížení časové náročnosti užitím vhodného ukazatele ustálení nebo jiných parametrů, které umožňují vhodně srovnávat a klasifikovat chaotické atraktory. Druhy nelinearity, které jsou přítomné v matematických modelech lze rozdělit na *slabé nelinearity*, mezi něž můžeme zařadit materiálové tuhostní a tlumící charakteristiky s malou odchylkou od lineární charakteristiky dané Hookovým zákonem a *silné nelinearity*, které reprezentují např. tuhostní a tlumící charakteristiky vazeb s vůlemi a suchým třením.

# Kapitola 3

## Vybrané modely bistabilních soustav

Jak již bylo patrné z úvodu, modelů bistabilních mechanických soustav je nespočet. Zde bude pozornost zúžena na vybrané modely bistabilních mechanických soustav. Prvotním krokem k analýze těchto modelů je návrh vhodného matematického modelu. Takový model by měl spolehlivě popisovat vývoj soustavy v čase a její charakter. V případě modelování disktrétních mechanických soustav je model určen příslušnými obyčejnými diferenciálními rovnicemi. V této kapitole budou tyto obyčejné diferenciální rovnice odvozeny pro všechny vybrané soustavy. Vzhledem k tomu, že mají všechny vybrané modely jeden stupeň volnosti, bude jim náležet pouze jedna diferenciální rovnice.

### 3.1 Metody sestavování pohybových rovnic

Pro sestavení pohybových rovnic existuje řada metod např. přímé užití Newtonova pohybového zákona, D'Alembertův princip, metoda redukce, princip virtuálních prací, Lagrangeovy rovnice obyčejného typu atd. Zde budou použity výhradně dvě metody a to Lagrangeovy rovnice obyčejného typu a D'Alembertův princip.

První jmenovaná metoda spadá do oblasti analytické mechaniky. Ta narozdíl od vektorové mechaniky pracuje pouze se skalárními veličiny. Jak bude patrné užití této metody je velmi výhodné k nalezení pohybové rovnice vybraného modelu. Lagrangeovy rovnice obyčejného typu budeme uvažovat ve tvaru pro modelování disktrétních mechanických soustav [7]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (3.1)$$

kde  $E_k$  a  $E_p$  značí kinetickou a potenciální energii tělesa,  $R$  je Rayleighova disipační funkce,  $\mathbf{q}(t) = [q_i(t)] \in \mathbb{R}^n$  je vektorem zobecněných souřadnic a  $\mathbf{Q}(t) = [Q_i(t)] \in \mathbb{R}^n$  je vektorem zobecněných vnějších sil.

Druhý způsob sestavení pohybových rovnic bude užití D'Alembertova principu. Hlavní myšlenka D'Alembertova principu je zavedení tzv. setrvačného účinku. Jelikož následující modely budeme uvažovat jako tělesa v rovině budou principy pro určení jednotlivých setrvačných účinků objasněny přímo v aplikacích.

## 3.2 von Misesovo vzpěradlo

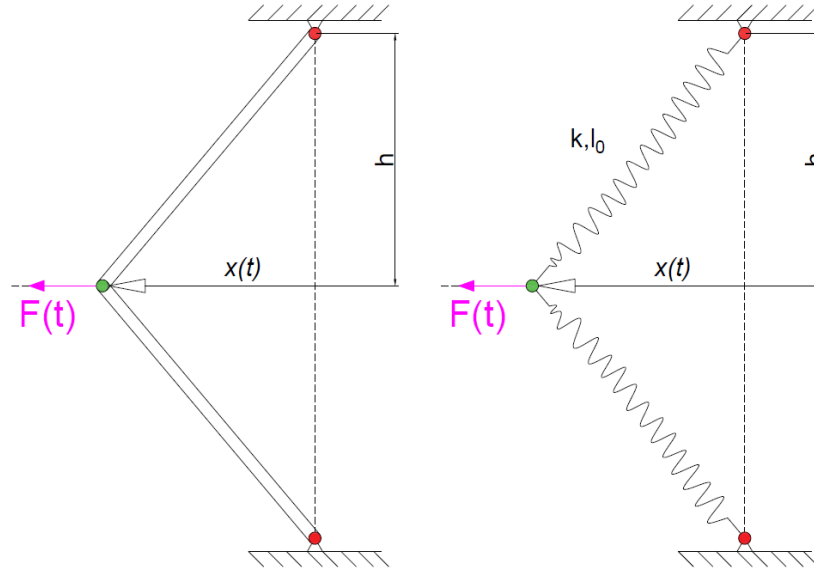
Von Misesovo zpěradlo na Obr. 3.1 (vlevo) je složené ze dvou rotačně spojených tuhých nosníků vázaných rotačně k rámu. Tyto tuhé nosníky budou nahrazeny lineárními pružinami a do spojnicového bodu pružin bude přidána hmota. Touto náhradou přejde von Misesovo vzpěradlo v bistabilní mechanický model s geometrickou nelinearitou (vpravo). Původ bistability je skryt ve spojení obou volných konců pružin. Při uvažování modulu předepnutí  $\frac{l_0}{h} > 1$  jsou pružiny předem stlačené a to způsobí, že vznikne v pružinách tzv. kladná vratná síla. Tato síla zapříčiní vychýlení hmotného bodu z nestabilní rovnovážné polohy do jedné ze stabilních rovnovážných poloh. Díky tomuto vychýlení se můžeme v zahraniční literatuře setkat také s termínem "snap-through" mechanismus [8]. Model je pak schopen zaujmout buď jednu stabilní rovnovážnou polohu nebo druhou. Pokud bychom uvažovali modulu předepnutí  $\frac{l_0}{h} \leq 1$  soustava by byla monostabilní.

Uvažujeme též pohyb hmotného bodu ve vodorovném vedení. Díky tomu je kompenzována vlastní tíha soustavy a ta tak získá jeden stupeň volnosti. Pohyb soustavy bude tak popsán pouze jednou diferenciální rovnicí. K odvození pohybových rovnic budou použity Lagrangeovy rovnice obyčejného typu popsány vztahem (3.1). Jako zobecněná souřadnice bude zvolena výchylka z rovnovážné polohy  $x$ .

Kinetická energie soustavy má tvar

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (3.2)$$

kde  $m$  je hmotnost hmotného bodu. Dále se předpokládá, že soustava obsahuje lineární viskózní tlumení, které je úměrné rychlosti spojnicového hmotného bodu. Toto tlumení respektuje např. vliv okolního prostředí. Lze zavést Rayleighovu



Obrázek 3.1: Schéma von Misesova vzpěradla (vlevo) s příslušným náhradním poddajným bistabilním modelem (vpravo)

disipační funkci ve tvaru

$$R = \frac{1}{2}b\dot{x}^2, \quad (3.3)$$

kde  $b$  je koeficient tlumení. Potenciální energie soustavy je dána součtem deformační energie pružin ve tvaru

$$E_p = k(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0)^2, \quad (3.4)$$

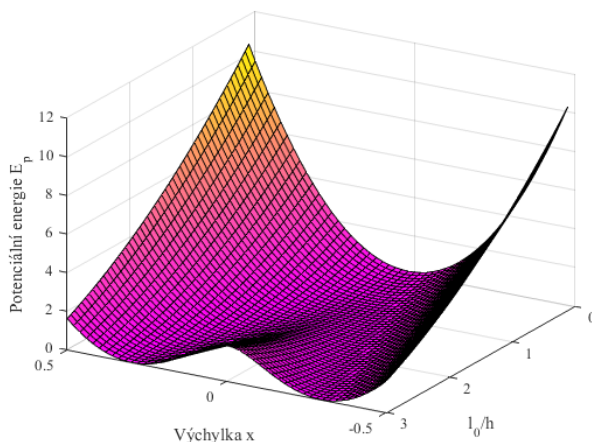
kde  $k$  je tuhost pružin,  $h$  značí vzdálenost vazeb a  $l_0$  je volná délka pružin. Zde budou uvažovány identické tuhosti obou pružin  $k$  a vzdálenost obou pružin od vazeb  $h$  též identické. Použitím Lagrangeových rovnic obyčejného typu (3.1) získáme pohybovou rovnici ve tvaru

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - \frac{kxl_0}{\sqrt{x^2 + h^2}} = F_0 \sin(\omega t), \quad (3.5)$$

kde uvažujeme harmonickou budící sílu ve tvaru  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ . Zvolením bezrozměrných konstant  $\frac{b}{m} = 2D\Omega$ ,  $\frac{k}{m} = 2\Omega^2$  a  $\frac{F_0}{m} = f_0$ , kde  $D$  je poměrný útlum a  $F_0$  je amplituda buzení. Přejde rovnice do tvaru

$$\ddot{x} + 2D\Omega\dot{x} + 2\Omega^2x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = f_0 \sin(\omega t), \quad (3.6)$$

Rovnice (3.6) je výslednou pohybovou rovnicí von Misesova vzpěradla. Se znalostí rovnice (3.4) je možné zobrazit závislost potenciální energie  $E_p$  na modulu předepnutí  $\frac{l_0}{h}$  a na výchylce  $x$ .



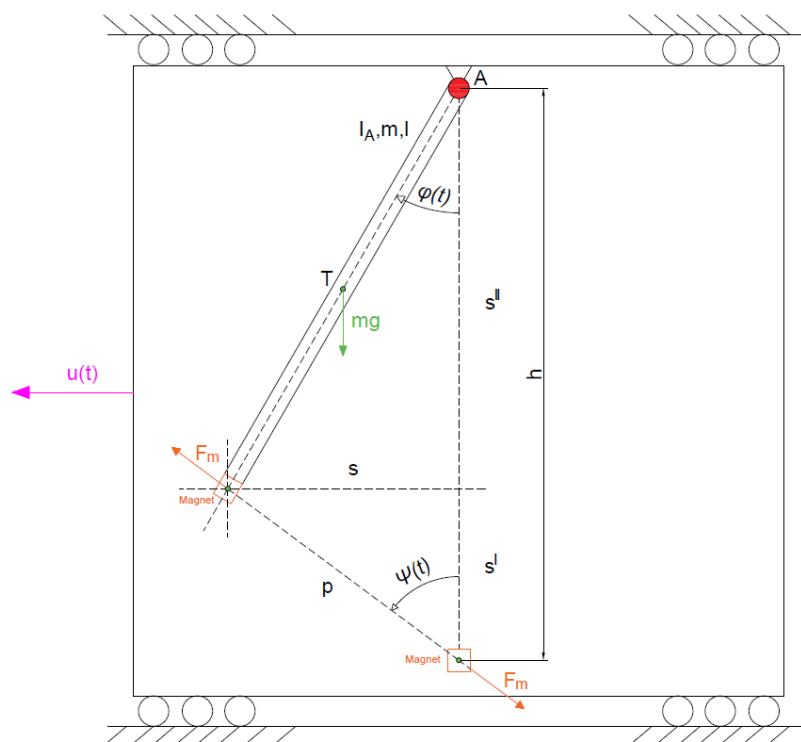
Obrázek 3.2: Závislost potenciální energie  $E_p$  na modulu předepnutí  $\frac{l_0}{h}$  a na výchylce  $x$

Tím je získáno zobrazení viz Obr. 3.2 na kterém je vidět charakteristický znak bistabilních soustav.

### 3.3 Model kyvadla se dvěma magnety

Následující model bistabilní mechanické soustavy obsahuje magnetické síly permanentních magnetů. Jedná o matematický model fyzikálního kyvadla s vzájemným působením mezi póly permanentních magnetů. Kyvadlo modelujeme jako homogenní tyčku s připevněným permanentním magnetem na jeho konci. Bistabilita této soustavy je podmíněná vzájemným působením mezi póly permanentních magnetů v rámu a na konci kyvadla. Pro tuto soustavu byl sestrojen fyzický protějšek a tak byly některé parametry stanoveny experimentálně. V tomto modelu se dvěma permanentními magnety jsou póly magnetů nastavené tak, aby se vzájemně odpuzovaly. Díky tomu je fyzikální kyvadlo vždy vychýleno do jedné ze stabilních rovnovážných poloh. V modelu jsou obecně přítomny tři rovnovážné polohy. Dvě stabilní a jedna nestabilní, která leží mezi nimi. Nestabilní rovno-

vážné polohy lze dosáhnout pouze teoreticky. Díky výrobním nepřesnostem se praktické realizaci této polohy nepodařilo dosáhnout.



Obrázek 3.3: Schéma modelu kyvadla se dvěma permanentními magnety

V modelu je uvažováno vzájemné působení magnetických sil. Tyto síly je nutné tyto stanovit na základě geometrických a magnetických vlastností permanentních magnetů a jejich vzájemné polohy. Magnetickou sílu budeme uvažovat podle Gilbertova modelu [9], která určena vztahem

$$F_m = \frac{2}{\pi\mu_0} B_0^2 S^2 \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+2d)^2} - \frac{2}{(p+d)^2} \right), \quad (3.7)$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} M, \quad (3.8)$$

kde  $p$  značí vzdálenost mezi póly magnetů,  $S$  je plocha průřezu magnetu,  $d$  je délka magnetu,  $\mu_0$  je permeabilita vakua,  $B_0$  vyjadřuje magnetickou indukci na koncích magnetů a  $M$  je magnetizace magnetů. Tento model magnetických sil je

spolehlivý pouze pro větší vzdálenosti vzhledem k délce strany magnetu. To je v našem případě splněno jelikož uvažujeme magnety malých rozměrů.

Přídáním permanentního magnetu na konec kyvadla byl změněn moment setrvačnosti kyvadla k ose rotace procházející bodem  $A$ . Tato skutečnosti se projeví ve výsledném momentu setrvačnosti kyvadla k ose rotace. Tato skutečnost lze popsat následujícím vztahem

$$I_A = I_{A_{kyv.}} + I_{A_{mag.}} = \frac{1}{3}m_{kyv.}l^2 + m_{mag.}l^2. \quad (3.9)$$

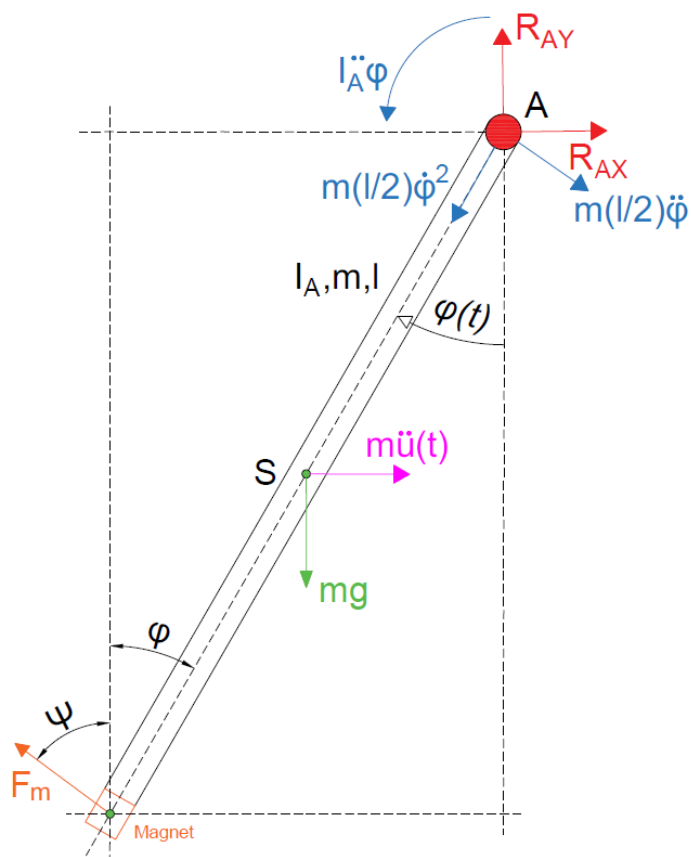
kde  $m_{kyv.}$  a  $m_{mag.}$  značí hmotnost kyvadla a hmotnost magnetu a  $l$  je délka kyvadla.

K sestavení pohybové rovnice soustavy bude použita metoda uvolňování spolu s D'Alembertovým principem. Pomocí metody uvolňování myšleně uvolníme kyvadlo od rámu a zakreslíme na něj všechny akční, reakční a setrvačné působící účinky. Jak již bylo zmíněno soustava je schopna konat pouze rotační pohyb okolo osy procházející bodem  $A$  a tak má pouze jeden stupeň volnosti. Kyvadlo je k rámu připojeno rotační vazbou, která odebírá dva stupně volnosti, takže můžeme očekávat reakce  $R_{Ax}$  a  $R_{Ay}$ . Směr těchto reakcí můžeme libovolně zvolit. Jejich reálný směr vyjde z vyřešení rovnic. Při rotačním pobytu okolo hlavní osy setrvačnosti budou přítomné tři setrvačné účinky působící na těleso. Jedná se o setrvačný dvojitý moment, tečnou složku setrvačné síly a normálovou složku setrvačné síly (odstředivá síla). Tečnou a odstředivou setrvačnou sílu přemístíme do středu rotace tedy do bodu  $A$ . Tímto přemístěním podle základní věty statiky musíme přidat příslušný dvojitý setrvačný moment. Bude uvažováno kinematické buzení, které je dané předepsaným pohybem rámu, k němuž je kyvadlo vázané rotační vazbou. Kinematické buzení je uvažována ve tvaru

$$u(t) = U \cos \omega t, \quad (3.10)$$

Unášivý posuvný pohyb vyvolá příslušný setrvačný účinek působící ve středu hmotnosti kyvadla spolu s vlastní tíhou kyvadla  $mg$ .

Po zakreslení všech působících sil bude přikročeno k samotnému sestavení pohybové rovnice. Těleso v rovině má obecně 3 stupně volnosti a jsou tedy nutné tři podmínky dynamické rovnováhy. Vzhledem k tomu, že se jedná o soustavu s jedním stupněm volnosti je vlastní pohyboví rovnice soustavy určena pouze momentovou podmínkou rovnováhy. V našem případě není nutné vypočítat reakce ve vazbách, takže složkové podmínky dynamické rovnováhy budou zanedbány. Užitím D'Alembertova principu bude sestavena momentová podmínka dynamické



Obrázek 3.4: Uvolněné kyvadlo od rámu

rovnováhyk bodu  $A$

$$I_A \ddot{\varphi} + mg \frac{l}{2} \sin \varphi - F_m l \cos \psi \sin \varphi - m \omega^2 U \frac{l}{2} \cos \omega t \sin \varphi = 0, \quad (3.11)$$

osamocněním členu  $\ddot{\varphi}$  přejde rovnice do tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2I_A} \sin \varphi = \frac{F_m l}{I_A} \cos \psi \sin \varphi + \frac{ml}{2I_A} \omega^2 U \cos \omega t \sin \varphi, \quad (3.12)$$

volbou  $\frac{mgl}{2I_A} = \Omega^2$ ,  $\frac{F_m l}{I_A} = f_m$ ,  $U \cos \omega t = u(t)$  a přidáním členu, který odpovídá viskóznímu tlumení  $2D\dot{\varphi}$ , kde  $D$  je poměrný útlum. Nabude rovnice výsledný tvar



$$\ddot{\varphi} + 2D\Omega + \Omega^2 \sin \varphi = f_m l \cos \psi \sin \varphi + u(t) \frac{\Omega^2}{g} \omega^2 \sin \varphi. \quad (3.13)$$

V rovnici (3.13) se vyskytuje člen  $\cos \psi$ , který zajišťuje průmět magnetické síly do tečného směru ke trajektorii pohybu kyvadla. K vyjádření tohoto členu je nutné určit kinematické závislosti mezi úhlem  $\varphi$  a  $\psi$ . Úhel  $\psi$  nebude vyjádřen explicitně, nýbrž v kosínovém tvaru pro snadnější manipulaci

$$\cos \psi = \frac{s^I}{p} = \frac{h - \sqrt{l^2 - (l \sin \varphi)^2}}{\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl \cos \varphi}}, \quad (3.14)$$

kde  $h$  je vzdálenost vazeb a  $l$  je délka kyvadla s magnetem.

Stojí za povšimnutí, že ve výsledné vlastní pohybové rovnici (3.13) roste amplituda buzení s kvadrátem budící frekvence. Tento poznatek bude hrát významnou roli ve vlastním experimentu.

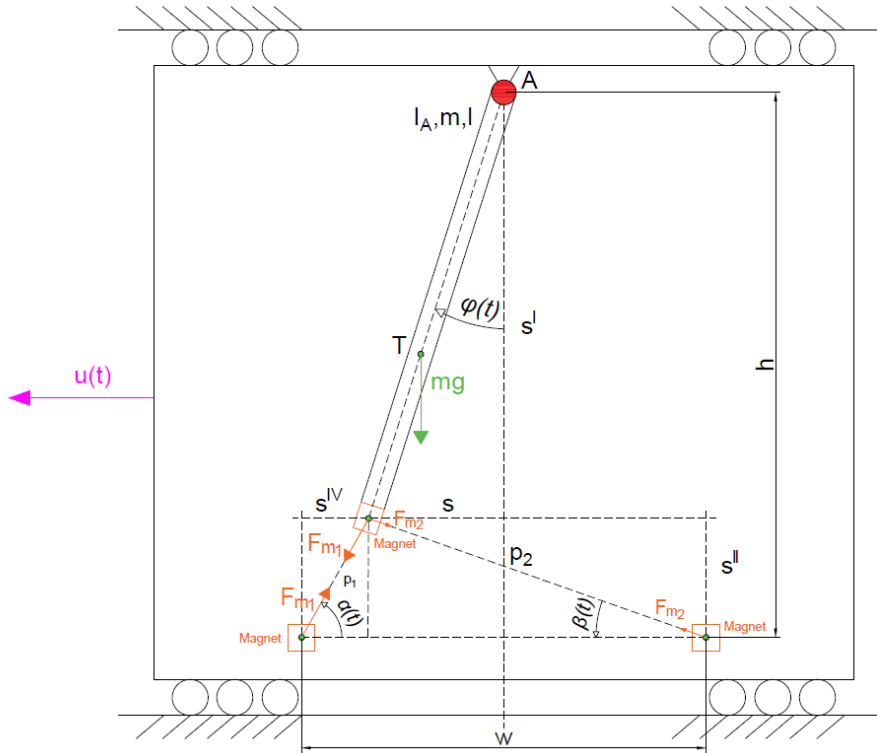
### 3.4 Model kyvadla se třemi magnety

Tento model je charakterem obdobný předešlému modelu. Hlavní rozdíl mezi těmito modely je v konfiguraci magnetů. Zde uvažujeme tři permanentní magnety. Bistabilita soustavy je též způsobena vzájemným působením magnetů mezi rámem a kyvadlem, ale zde bude uvažováno, že se magnety vzájemně přitahují. Snadno si lze představit, že tímto způsobem lze vytvořit libovolně krát stabilní magnetickou soustavu. Přidáním dalších magnetů přímo úměrně zvýšíme počet stabilních poloh kyvadla. I pro tento model vznikl fyzický protějšek. Jako v předešlém modelu i v této soustavě existuje třetí rovnovážná poloha nestabilního charakteru mezi dvěma vázanými magnety. Zde se, ale podařilo tuto polohu realizovat na svém fyzickém protějšku.

Magnetická síla mezi magnety bude uvažována ve stejném tvaru jako v předchozím případě (3.7). Moment setrvačnosti kyvadla k ose procházející bodem  $A$  též zůstává nezměněn.

K sestavení pohybové rovnice soustavy bude opět použita metoda uvolňování spolu s D'Alembertovým principem. Postup sestavení pohybové rovnice je identický s předchozím příkladem. Kinematického buzení uvažujeme ve stejném tvaru jako předešlém případě (3.10).

Po zakreslení všech působících sil bude přikročeno k samotnému sestavení



Obrázek 3.5: Schéma modelu se třemi permanentními magnety

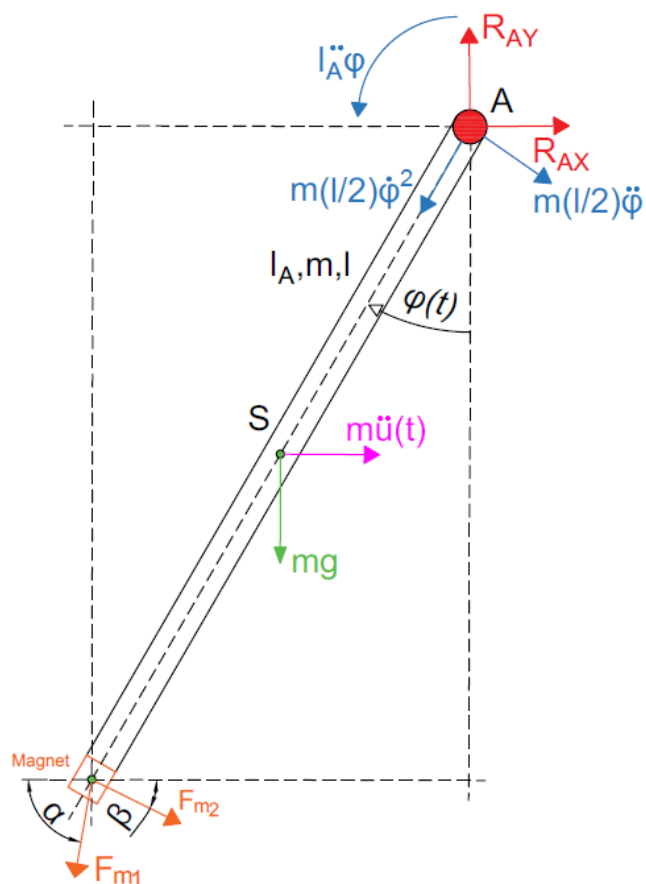
pohybové rovnice

$$\begin{aligned}
 I_A \ddot{\varphi} + mg \frac{l}{2} \sin \varphi + F_{m_1} l \cos \alpha \sin \varphi \\
 + F_{m_2} l \cos \beta \sin \varphi - m \frac{l}{2} \omega^2 U \cos \omega t \sin \varphi = 0,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

osamocení členů  $\ddot{\varphi}$  přejde rovnice do tvaru

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2I_A} \sin \varphi = -\frac{F_{m_1} l}{I_A} \cos \alpha \sin \varphi \\
 - \frac{F_{m_2} l}{I_A} \cos \beta \sin \varphi + \frac{ml}{2I_A} \omega^2 U \cos \omega t \sin \varphi,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

volbou  $\frac{mgl}{2I_A} = \Omega^2$ ,  $f_{m_1} = \frac{F_{m_1}}{I_A}$ ,  $f_{m_2} = \frac{F_{m_2}}{I_A}$  a přidáním členu, který představuje viskózní tlumení  $2D\Omega$  nabude rovnice výsledný tvar



Obrázek 3.6: Uvolněné kyvadlo od rámu

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + 2D\Omega + \Omega^2 \sin \varphi &= -f_{m_1} l \cos \alpha \sin \varphi \\ &- f_{m_2} l \cos \beta \sin \varphi + \frac{\Omega^2}{g} \omega^2 U \cos \omega t \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Vztah lze přepsat do přehlednější formy zvolením  $(f_{m_1} + f_{m_2})l \sin \varphi = M_m$  jako moment magnetických sil a buzení  $u(t) = U \cos \omega t$

$$\ddot{\varphi} + 2D\Omega + \Omega^2 \sin \varphi = -M_m (\cos \alpha + \cos \beta) + u(t) \frac{\Omega^2}{g} \omega^2 \sin \varphi. \quad (3.18)$$

Ve výsledné vlastní pohybové rovnici (3.18) se opět setkáváme s průměty magnetických sil do tečného směru k trajektorii pohybu kyvadla. Určíme jednotlivé kinematické závislosti mezi třemi úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\varphi$ . Opět bude s výhodou použit kosínový tvar

$$\cos \alpha = \frac{s^{IV}}{p_1} = \frac{\frac{w}{2} - l \cos \varphi}{\sqrt{(h - l \cos \varphi)^2 + (l \sin \varphi - \frac{w}{2})^2}}, \quad (3.19)$$

$$\cos \beta = \frac{s^{III}}{p_2} = \frac{\frac{w}{2} + l \cos \varphi}{\sqrt{(h - l \cos \varphi)^2 + (l \sin \varphi + \frac{w}{2})^2}}, \quad (3.20)$$

kde  $w$  je vzájemná vzdálenost pólů obou magnetů,  $l$  je délka kyvadla s magnetem a  $h$  značí vzdálenost vazeb. Pro sestavení (3.19) a (3.20) a spolehlivost výsledné pohybové rovnice (3.18) musí platit

$$l \sin \phi < \frac{w}{2}. \quad (3.21)$$

I v tomto modelu roste amplituda buzení s kvadrátem budící frekvence.

## Kapitola 4

# Dynamická analýza vybraných modelů

Tato kapitola je zaměřena na analýzu dynamických projevů vybraných modelů bistabilních soustav. Na základě těchto projevů lze soustavy různě klasifikovat. Pohybové rovnice sestavené pro jednotlivé modely z předešlé kapitoly budou řešeny numericky pomocí výpočtového programu MATLAB. Jedná se o řešení nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. V softwaru je poté použit MATLAB řešič ode45, který pracuje na metodě Runge-Kutta. Jedná se o jednokrokový řešič, který pro vyčíslení  $x(t_n)$  potřebuje pouze řešení předcházejícího kroku  $x(t_{n-1})$ .

V první řadě bude zkoumáno volné kmitání jednotlivých modelů. Provedením numerické simulace řešení bude získán pro zvolený časový interval vektor výchylek a rychlostí  $\mathbf{x}(t)$  pro dané počáteční podmínky. Zobrazením výchylek a rychlostí do fázové roviny lze posoudit kvalitu řešení. V této fázové rovině lze identifikovat o jaký druh kmitání se jedná a lze např. posoudit stabilitu rovnovážných poloh pro dané počáteční podmínky.

Následně bude uvažována nenulová amplituda a kruhová (úhlová) frekvence buzení, tím bude zkoumáno vynucené kmitání. Pro toho kmitání budou sestrojeny bifurkační diagramy. Tyto diagramy budou získány na základě sledování extrémů výchylek v ustálené časové oblasti. Zobrazením těchto extrémů v závislosti na proměnné kruhové frekvence buzení budou získány následovně bifurkační diagramy. Ty lze použít k identifikaci oblastí s nelineárními projevy a je možné je poté klasifikovat. Pro tyto oblasti bude opět využita fázová rovina k názornému zobrazení charakteru kmitání. Bifurkační diagramy mohou odkrýt i oblasti, kde je přítomná chaotická odezva. Tato odezva je velmi složitá na posouzení vzhledem ke své nepředvídatelnosti. Aby bylo možné tyto oblasti analyzovat, budou využity

tzv. Poincarého řezu aplikované na chaotické odezvy soustavy. Tyto řezu budou sestrojeny podle postupu popsaného v kapitole 2. Díky tomu lze získat zobrazení, které vypovídá o charakteru chaotické odezvy a jak se tato odezva mění v závislosti na kruhové frekvenci buzení.

## 4.1 Analýza von Misesova vzpěradla

Tento model obsahuje geometrickou nelinearitu. Parametry modelu byly postupně voleny takovým způsobem, aby byl model rozměrově podobný modelům kyvadel s permanentními magnety. Modul předepnutí  $\frac{l_0}{h}$  byl volen tak, aby hodnota výchylky v rovnovážné poloze byla v okolí výchylek rovnovážných poloh modelů kyvadel s permanentními magnety. Jelikož se jedná o zcela rozdílný model není přímé srovnání modelů možné.

Tabulka 4.1: Zvolené parametry pro model von Misesova vzpěradla

Veličina	Značení	Hodnota	Jednotky
Hmotnost hmotného bodu	$m$	0,1	[kg]
Volná délka pružin	$l_0$	0,107	[m]
Vzdálenost vazeb	$h$	0,105	[m]
Tuhost pružin	$k$	42	[Nm <sup>-1</sup> ]
Poměrný útlum	$D$	0,01	[-]
Tíhové zrychlení	$g$	9,81	[ms <sup>-2</sup> ]
Amplituda buzení	$f_0$	1	[-]

### 4.1.1 Rovnovážné polohy

V první řadě bude určena rovnovážná poloha systému. V rovnovážné poloze platí, že rychlost hmotného bodu spojujícího obě pružiny je nulová. Tedy i zrychlení tohoto bodu musí být nulové. Z rovnice (3.6) proto dostaneme

$$2\Omega^2 x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0. \quad (4.1)$$

Tato rovnice je splněná pro dva případy,  $x = 0$  nebo  $\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right) = 0$ . Z prvního případu je vidět, že získáváme první rovnovážnou polohu  $x_{p1} = 0$ .

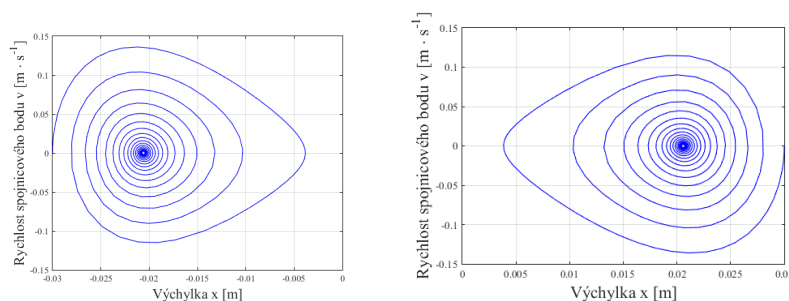
Z druhého případu dostaneme zbylé dvě rovnovážné polohy. Po úpravě získáme

$$x^2 = \sqrt{l_0^2 - h^2}. \quad (4.2)$$

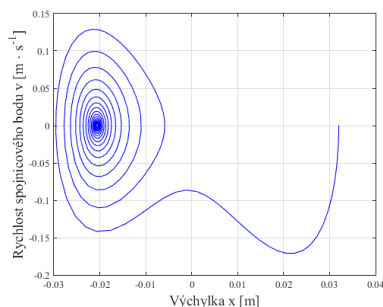
Zbylé dvě rovnovážné polohy mají po vyčíslení hodnotu  $x_{p_2} = 0.0206 \text{ m}$  a  $x_{p_3} = -0.0206 \text{ m}$ . Byly získány tři rovnovážné polohy, z nichž dvě jsou symetrické podle osy procházející vazbami pružin k rámu.

### 4.1.2 Volné kmitání

Volným kmitáním je rozuměna analýza matematického modelu bez pravé strany, tedy bez vnějšího buzení. V modelu bude uvažován poměrným útlum a budou provedeny následné simulace.



Obrázek 4.1: Zobrazení trajektorií von Misesova vzpěradla ve fázové rovině pro počáteční výchylky  $x_0 = -0.03 \text{ m}$  (vlevo) a  $x_0 = 0.03 \text{ m}$  (vpravo).

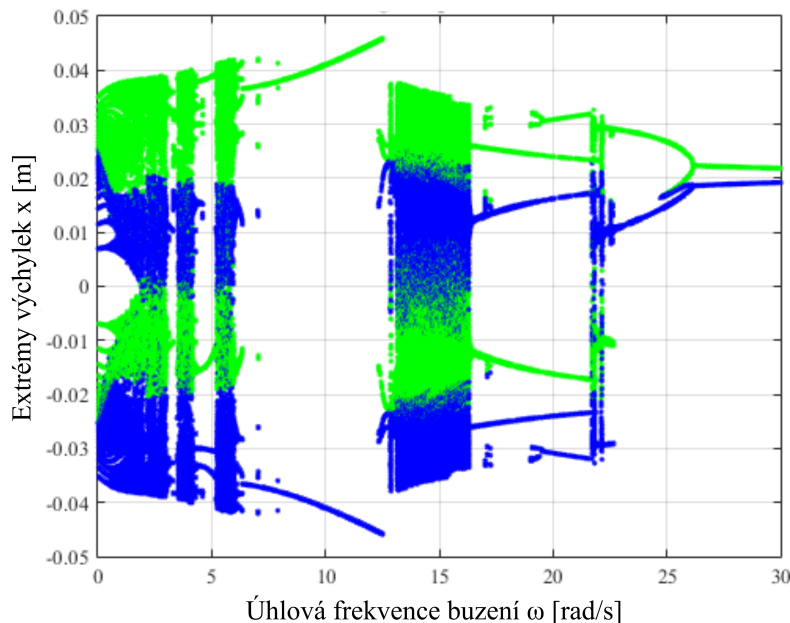


Obrázek 4.2: Zobrazení trajektorie von Misesova vzpěradla ve fázové rovině pro počáteční výchylku  $x_0 = \pm 0.032 \text{ m}$ .

Chování soustavy ve fázové rovině při počátečních podmínkách  $x_0 = \pm 0.03$  m lze vidět na Obr. 4.1. Z tohoto chování lze usuzovat, že výchylka soustavy se při těchto podmínkách ustaluje na hodnotách  $x_{p2}$  a  $x_{p3}$ . Při malém zvýšení počáteční výchylky hmotný bod překmitne a výchylka soustavy se ustálí na hodnotě  $x_{p3}$  jak lze vidět na Obr. 4.2. Lze tedy usuzovat, že obě rovnovážné polohy  $x_{p2}$ ,  $x_{p3}$  jsou stabilní. Soustavu je tedy možné nazývat bistabilní soustavou.

### 4.1.3 Vynucené kmitání

Uvažováním nenulové amplitudy  $f_0$  a  $\omega$  kruhové (úhlové) frekvence kinematického buzení přejde soustava z volného kmitání okolo rovnovážných poloh do soustavy s vynuceným kmitáním. Řídicím parametrem vynuceného kmitání je kruhová frekvence buzení  $\omega$ .



Obrázek 4.3: Bifurkační digram výchylky von Misesova vzpěradla pro amplitudu  $f_0 = 1$  m.

Pro identifikaci nelineárních projevů modelu von Misesova vzpěradla bude s výhodou využít bifurkační diagram. V tomto diagramu na Obr. 4.3 je znázorněna

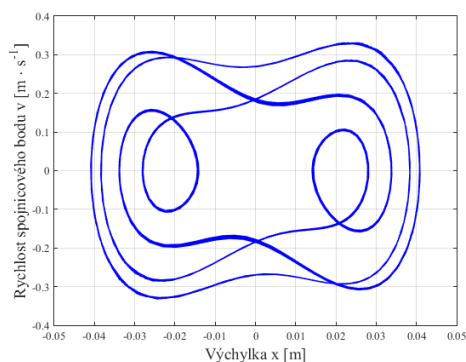


závislost extrémů výchylek hmotného bodu v ustáleném stavu na kruhové frekvenci buzení. Jednotlivé extrémy jsou barevně odlišeny. Modrá barva náleží minimu výchylky a zelená barva náleží maximu výchylky. Tento bifurkační diagram byl vykreslen pro celé spektrum kruhových frekvencí buzení. Přes četné simulace pro různě dlouhé spektrum bylo zjištěno, že pro  $\omega > 30$  rad/s je soustava schopná konat pouze periodický kmitavý pohyb okolo nestabilní rovnovážné polohy. Nejsilnější nelineární projevy byly nalezeny právě v tomto vybraném spektru  $\omega \in \langle 0; 30 \rangle$  rad/s. Díky vhodné volbě parametrů je toto spektrum frekvencí použito i v následujících modelech.

V bifurkačním diagramu na Obr. 4.3 jsou obsaženy oblasti

- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo jedné rovnovážné polohy,
- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo více rovnovážných poloh,
- chaotické odezvy, kde je kmitání popsáno chaotickým atraktorem.

Pozornost bude nejprve zaměřena na oblast periodické odezvy pro  $\omega \in \langle 6; 12 \rangle$  rad/s. V této oblasti je možné pozorovat periodickou odezvu na harmonické buzení. Jedná se o kmitání okolo rovnovážné polohy, kdy výchylka ustálené odezvy postupně roste až do hodnoty rezonance, která nastává okolo hodnoty  $\omega = 12.5$  rad/s. Kmitání v této oblasti je znázorněno na Obr. 4.4.

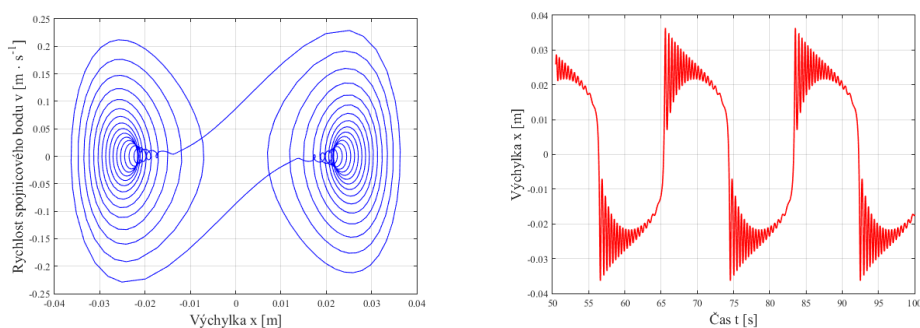


Obrázek 4.4: Zobrazení trajektorie von Misesova vzpěradla ve fázové rovině (vlevo) pro amplitudu  $f_0 = 1$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 6,2$  rad/s.

Další nápadnou oblastí periodické odezvy je pro  $\omega \in \langle 16,5; 21,5 \rangle$  rad/s. V této oblasti si lze všimnout kmitání okolo dvou rovnovážných poloh následované krátkým zdvojením periody. Po tomto zdvojení začne soustava kmitat v šesti

extrémech. Poslední oblastí periodické odezvy je oblast pro  $\omega \in \langle 23; 30 \rangle$  rad/s. V této oblasti nastává kmitání okolo jedné rovnovážné s postupně se snižující výchylkou následované zdvojením periody. Po oblasti zdvojení periody následuje oblast kdy soustava kmitá pouze kolem jedné rovnovážné polohy s konstantní výchylkou. Při dalším zvyšování  $\omega$  by tato výchylka zůstala nadále konstantní.

Dále lze v bifurkačním diagramu na Obr. 4.3 spatřit pět významných chaotických oblastí. Ty se od sebe liší svou šířkou a hodnotou maximální výchylky. V první takové oblasti pro  $\omega \in \langle 0, 3 \rangle$  rad/s lze spatřit periodickou oblasti, která postupně přechází do kvaziperiodické a následně do chaotické oblasti. Z této oblasti bude vybrán následující příklad.

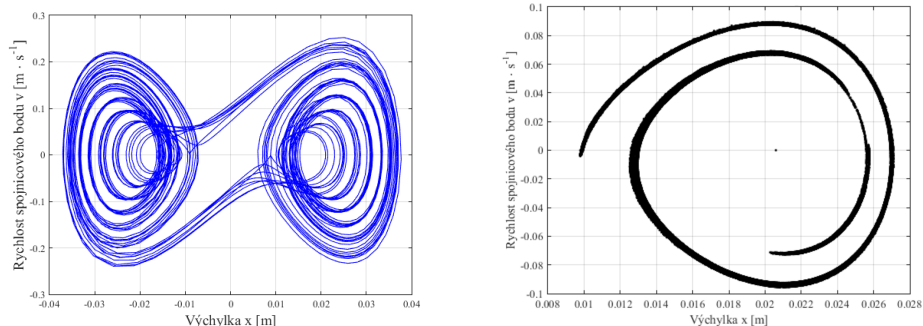


Obrázek 4.5: Zobrazení trajektorie von Missesova vzpěradla ve fázové rovině (vlevo) s příslušnou časovou trajektorií (vpravo) pro amplitudu  $f_0 = 1$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 0,35$  rad/s.

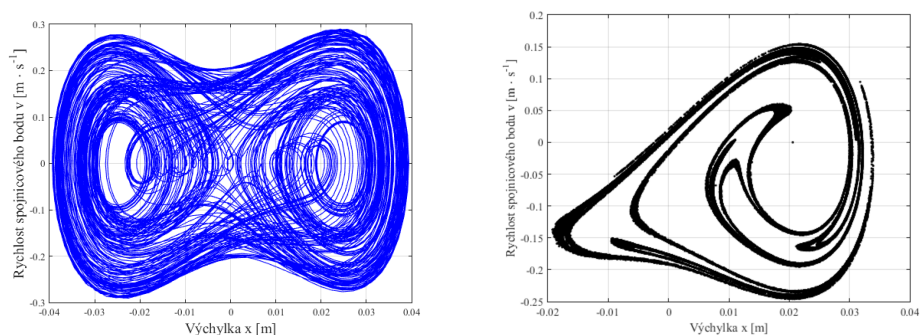
Zde na Obr. 4.5 můžeme vidět jev, který se v zahraniční literatuře nazývá "bursting oscillations"[10]. Jedná se o druh kmitání, při kterém dochází ke kmitání okolo jedné rovnovážné polohy s postupně se snižující výchylkou. Toto snížení však není následováno ustálením v rovnovážné poloze nýbrž překmitem a následným kmitáním okolo druhé rovnovážné polohy. Tento cyklus se periodicky opakuje.

Malým zvýšením  $\omega$  se odezva změní na kvaziperiodickou. Charakter zůstává stejný, ale děj se stává méně předvídatelným. Na Obr. 4.6 lze vidět stejný charakter odezvy ve fázové rovině jako na Obr. 4.5. K této odezvě je připojen příslušný Poincarého řez, který je ve formě uzavřeného obrazce.

Pokud budeme nadále zvyšovat  $\omega$  dostaneme se do čistě chaotické oblasti, kde odezva pozbývá předvídatelnosti a příslušným Poincarého řezem je chaotický atraktor. Tato struktura zůstává neměnná až do  $\omega = 6$  rad/s. Po této oblasti nastává již zmíněná rezonanční oblast. Na Obr. 4.4 je zobrazeno kmitání v této oblasti.

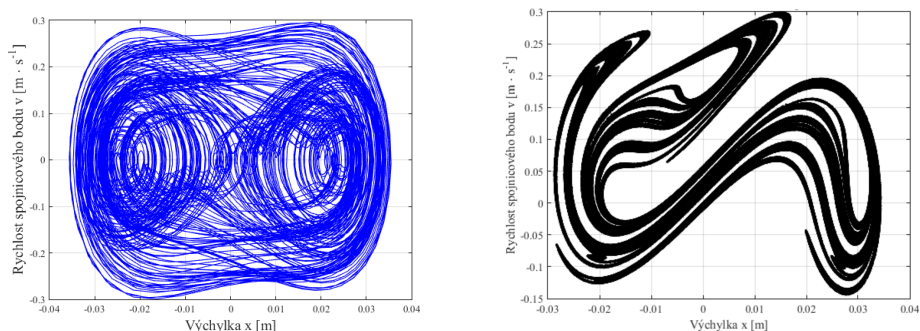


Obrázek 4.6: Zobrazení trajektorie von Missesova kyvadla ve fázové rovině (vlevo) s příslušným Poincarého řezem (vpravo) pro amplitudu  $f_0 = 1$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 1$  rad/s.



Obrázek 4.7: Zobrazení trajektorie von Missesova vzpěradla ve fázové rovině (vlevo) s příslušným Poincarého řezem (vpravo) pro amplitudu  $f_0 = 1$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 3,7$  rad/s.

Poslední významnou oblastí je chaotická oblast okolo  $\omega = 15$  rad/s. Kde příslušná trajektorie ve fázové rovině je zobrazena na Obr. 4.8 (vpravo) a příslušný Poincarého řez na Obr. 4.8 (vlevo). Jak již bylo zmíněno při dalším zvyšování parametru  $\omega$  začne model von Misesova vzpěradlo kmitat kolem své nestabilní rovnovážné polohy. Charakter tohoto kmitání tak zůstane pro vyšší hodnoty  $\omega$  neměnný.



Obrázek 4.8: Zobrazení trajektorie von Missesova vzpěradla ve fázové rovině (vlevo) s příslušným Poincarého řezem (vpravo) pro amplitudu  $f_0 = 1$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 15$  rad/s.

## 4.2 Analýza kyvadla se dvěma magnety

Nelinearita tohoto modelu je způsobená jak samotným kyvadlem ( $\sin \varphi$  v pohybové rovnici (3.13)) tak nelinearitou působících magnetických sil (pravá strana pohybové rovnice (3.13)). Parametry tohoto modelu byly voleny v souvislosti s parametry reálného modelu. Mnohé parametry tak byly přímo naměřeny na reálném modelu. V kapitole 5 je představen způsob jakým byla např. zjištěna hodnota magnetizace permanentního magnetu.

Tabulka 4.2: Zvolené parametry pro model kyvadla se dvěma magnety

Veličina	Značení	Hodnota	Jednotky
Hmotnost kyvadla	$m_{kyv}$	0,00589	[kg]
Délka kyv. a mag.	$l$	0,082	[m]
Vzdálenost vazeb	$h$	0,105	[m]
Poměrný útlum	$D$	0,078	[-]
Tíhové zrychlení	$g$	9,81	[ $m \cdot s^{-2}$ ]
Amplituda buzení	$U$	0,015	[m]
Hmotnost magnetu	$m_{mag}$	0,001	[kg]
Plocha průřezu mag.	$S$	0,000025	[ $m^2$ ]
Délka hrany mag.	$d$	0,005	[m]
Permeabilita vakua	$\mu_0$	$1,256637 \cdot 10^{-6}$	[ $Hm^{-1}$ ]
Magnetizace mag.	$M$	$2,22121 \cdot 10^6$	[ $Am^{-1}$ ]

## 4.2.1 Rovnovážné polohy

V prvé řadě bude určena rovnovážná poloha soustavy. V rovnovážné poloze platí že rychlost spojnicového bodu je nulová. Tedy i zrychlení tohoto bodu musí být nulové. Z rovnice (3.13) proto dostaneme

$$2D\Omega + \Omega^2 \sin \varphi = f_m l \cos \psi \sin \varphi, \quad (4.3)$$

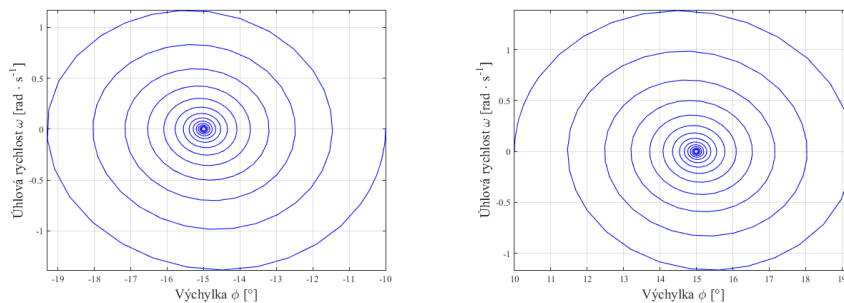
po dosazení za  $\cos \psi$  rovnice přejde v tvar

$$2D\Omega + \Omega^2 \sin \varphi = f_m l \frac{h - \sqrt{l^2 - (l \sin \varphi)^2}}{\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl \cos \varphi}} \sin \varphi. \quad (4.4)$$

Místo řešení rovnice (4.4) pro hodnotu  $\varphi$  se zde můžeme odkázat na reálný model. Pro obecnost je nutné podotknout, že existuje ještě rovnovážná poloha pro  $\varphi_{p1} = 0^\circ$ , která je v reálném modelu nedosažitelná. Hodnota dalších dvou výchylek reálného modelu byla přímo zvolena jako  $\varphi_{p2} = 15^\circ$  a  $\varphi_{p3} = -15^\circ$ . Zde se ukazuje výhodnost reálného modelu. Pokud zajistíme na tomto modelu kýžené chování je možné parametry jako např. výchylka v rovnovážné poloze libovolně měnit.

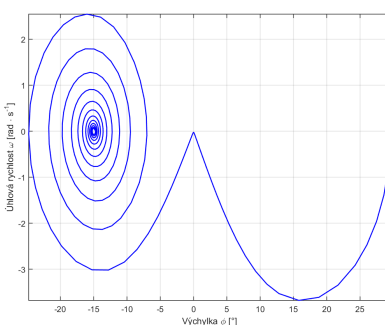
## 4.2.2 Volné kmitání

Analýzou volného kmitání bude zjištěno, zda změřené výchylky v rovnovážné poloze reálného modelu odpovídají výchylkám matematického modelu. Uvažujeme matematický model bez buzení se zavedeným poměrným útlumem.

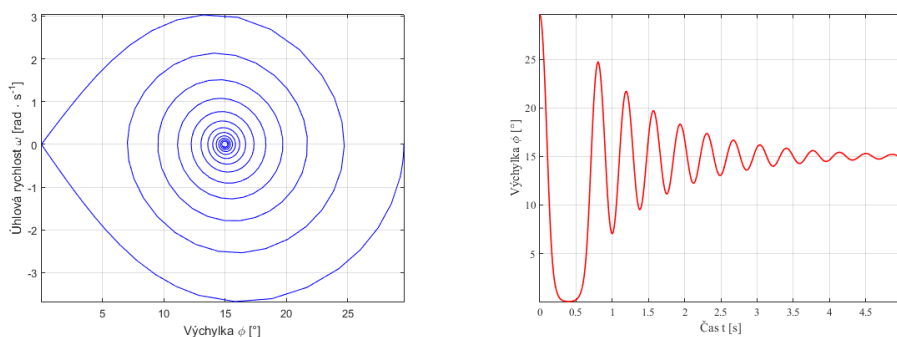


Obrázek 4.9: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině pro počáteční výchylky  $\varphi_0 = -10^\circ$  (vlevo) a  $\varphi_0 = 10^\circ$  (vpravo).

Chování soustavy ve fázové rovině při počátečních podmínkách  $\varphi_0 = \pm 10^\circ$  lze vidět na Obr. 4.9. Z tohoto chování lze usuzovat, že výchylka soustavy se při těchto podmínkách ustaluje na hodnotách  $\varphi_{p2}$  tak  $\varphi_{p3}$ . Při malém zvýšení počáteční výchylky koncový bod kyvadla překmitne a výchylka soustavy se ustálí na hodnotě  $x_{p3}$  jak lze vidět na Obr. 4.10. Lze tedy usuzovat, že obě rovnovážné polohy  $\varphi_{p2}$ ,  $\varphi_{p3}$  jsou stabilní. Soustavu je tedy možné nazývat bistabilní soustavou.



Obrázek 4.10: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině při překmitu pro počáteční výchylku  $\varphi_0 = 29,595^\circ$ .



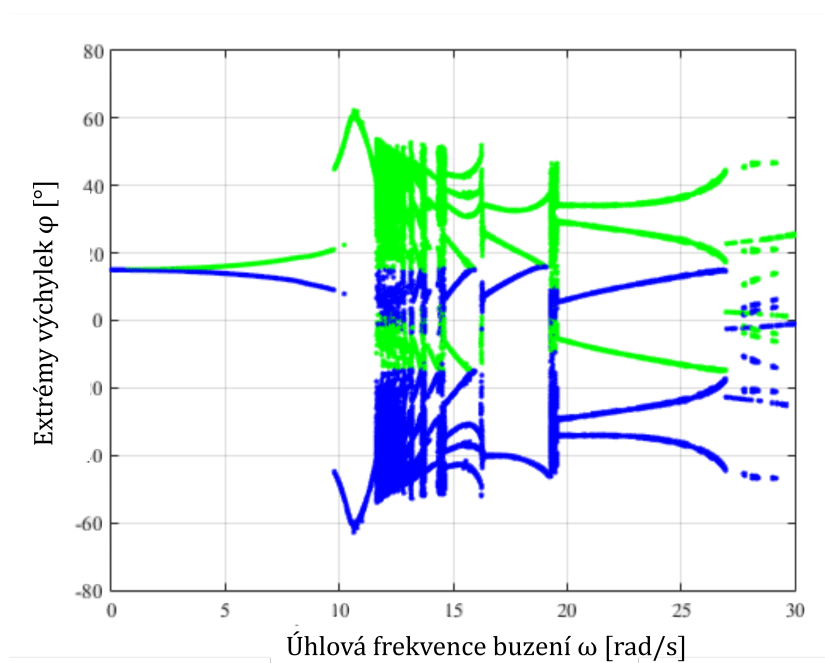
Obrázek 4.11: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině při jevu "pozdržení" kyvadla (vpravo) s příslušnou trajektorií (vlevo) pro počáteční výchylku  $\varphi_0 = 29,59^\circ$ .

V chování modelu kyvadla se dvěma magnety je možné spatřit velmi zajímavý děj. Jedná se tzv. "pozdržení" výchylky kyvadla. Vzájemným působením magnetů může nastat při správných podmínkách situace, kdy se magnety velmi těsně přiblíží. Tato situace může vyústit ve dva závěry. První nastane, když má kyvadlo dostatečnou energii na překmit a po těsném přiblížení magnety odpudí koncový bod

kyvadla přes nestabilní rovnovážnou polohu, jak je patrné na Obr. 4.10. V druhém případě dojde ke zmíněnému jevu pozdržení. Kyvadlo nemá dostatečnou energii na překmit a tak se na okamžik "pozdrží" v těsné blízkosti nestabilní rovnovážné polohy a poté se vrátí na zpět. Tento jev je zobrazen na Obr. 4.11.

### 4.2.3 Vynucené kmitání

Uvažováním nenulové amplitudy  $U$  a kruhové frekvence  $\omega$  buzení přejdeme k případu vynuceného kmitání. Řídicím parametrem zůstává kruhová frekvence buzení  $\omega$ . I zde bude s velkou výhodou použit bifurkační diagram pro identifikaci nelineárních projevů modelu kyvadla se dvěma magnety. Tento diagram budeme zobrazovat pro spektrum budících frekvencí  $\omega$  shodných s předešlým příkladem. Toto spektrum bylo voleno ze stejného důvodu jako u případu modelu von Misesova vzpěradla. Vzhledem k existenci reálného modelu bylo třeba volit takové spektrum frekvencí, které by dokázal vyvinout reálný motor. Bifurkační diagram byl sestaven identickým způsobem jako v předešlém případě.

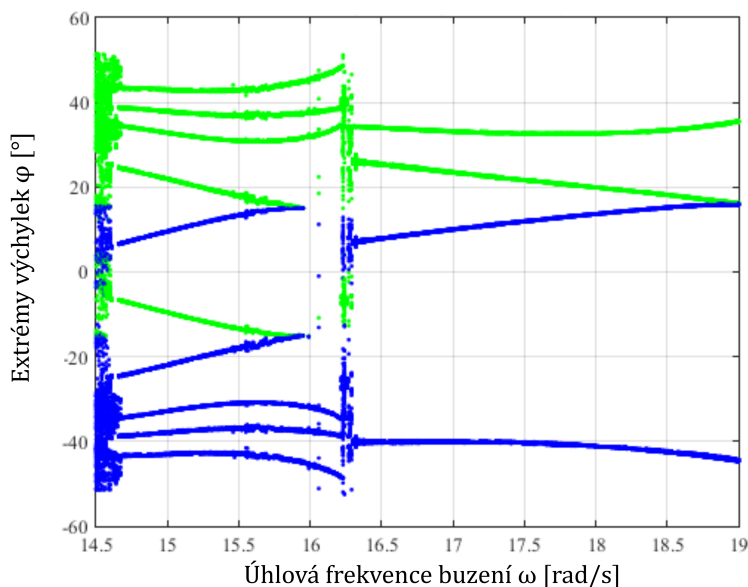


Obrázek 4.12: Bifurkační digram výchylek kyvadla s dvěma magnety pro amplitudu buzení  $U = 0,015$  m.

V bifurkačním diagramu na Obr. 4.12 jsou obsaženy oblasti

- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo jedné rovnovážné polohy,
- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo více rovnovážných poloh,
- chaotické odezvy, kde je kmitání popsáno chaotickým atraktorem.

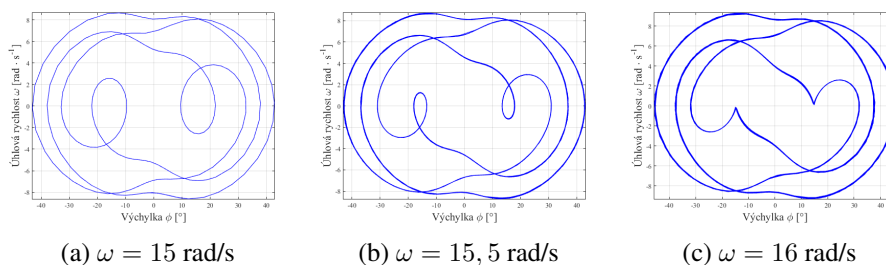
Nejprve se zaměříme na oblasti s periodickou odezvou. První nastává pro  $\omega \in \langle 0; 10 \rangle$  rad/s. Můžeme zde pozorovat kmitání okolo jedné rovnovážné polohy. Po této oblasti je patrná kvalitativní změna. Kmitání je stále periodické, ale probíhá okolo nestabilní rovnovážné polohy. Se zvyšujícím se  $\omega$  rostou i výchylky koncového bodu kyvadla až do hodnoty rezonance. Ta nastává pro odpovídající linearizovaný model soustavy při hodnotě  $\omega = 11,79$  rad/s. Další oblast s periodickou odezvou nastává pro  $\omega \in \langle 15; 19 \rangle$  rad/s. Zde si můžeme všimnout dvou případů. Na Obr. 4.13 je zobrazeno přiblížení této oblasti.



Obrázek 4.13: Bifurkační digram výchylek kyvadla se dvěma magenty pro  $U = 0,015$  m v oblasti  $\omega \in \langle 14,5; 19 \rangle$  rad/s.

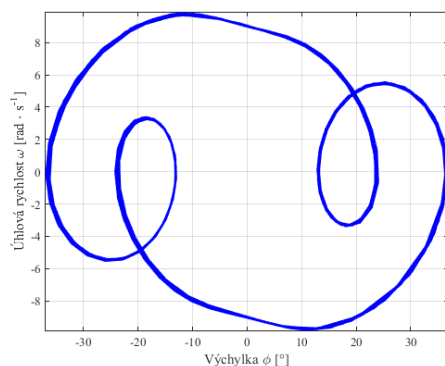
V této oblasti lze detailněji vysledovat mechanismus zániku "smyček", resp. zobrazit změnu, která vede k bifurkaci (snížení počtu extrémů odezvy v rámci jedné periody). Na Obr. 4.14 je tento děj zobrazen.





Obrázek 4.14: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015 \text{ m}$  pro echanismus zániku "smyček".

Za touto oblastí se nachází další oblast periodické odezvy, kde kmitání probíhá okolo jedné rovnovážné polohy s překmitnutím do druhé rovnovážné polohy. Tyto dvě oblasti jsou od sebe oděleny krátkou chaotickou oblastí. Pokud zvýšíme  $\omega$ , dostaneme se do oblasti pro  $\omega \in \langle 20; 27 \rangle$ , která je též oddělena krátkou chaotickou oblastí. V této oblasti periodické odezvy nastává případ kmitání zobrazení na Obr. 4.15

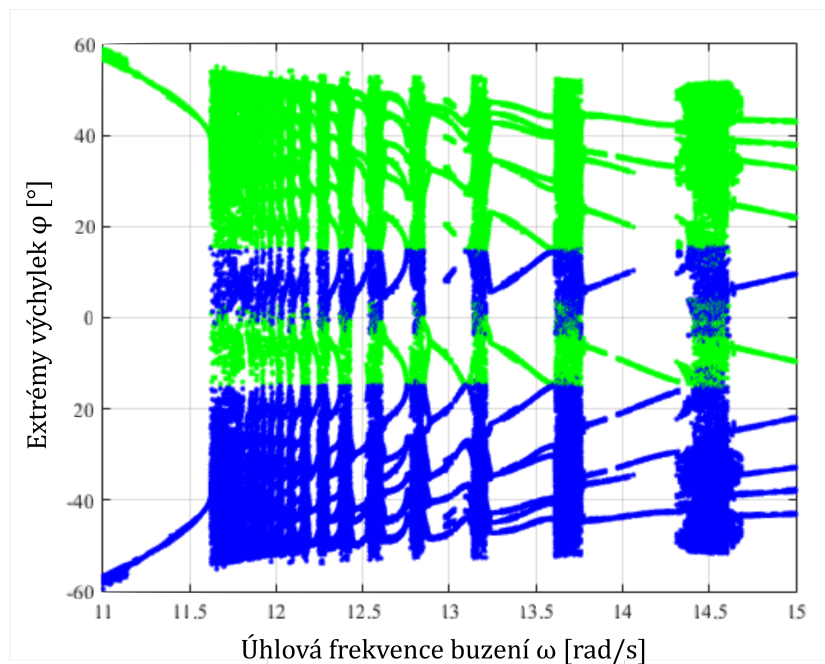


Obrázek 4.15: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015 \text{ m}$  a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 25 \text{ rad/s}$ .

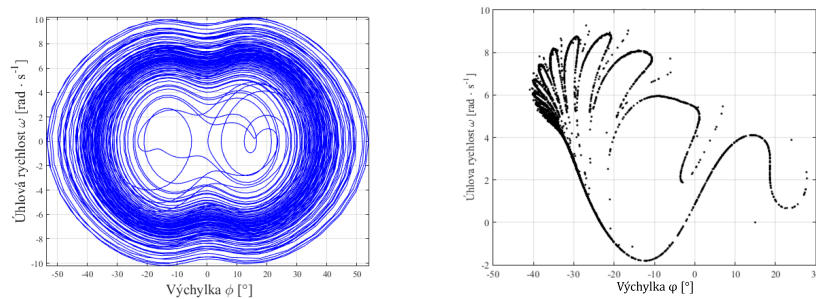
Nyní se zaměříme na oblasti chaotické odezvy. Konkrétně na nadrezonanční oblast zobrazenou na Obr. 4.16.

V této oblasti bude představena trajektorie ve fázové rovině hned za periodickou oblastí. Jedná se o kvaziperiodickou odezvu zobrazenou na Obr. 4.17.

V bifurkačním diagramu této oblasti si je možné všimnout dominantní kaskády bifurkací. Pokud bychom procházeli diagram zleva doprava, tedy snižovali hod-



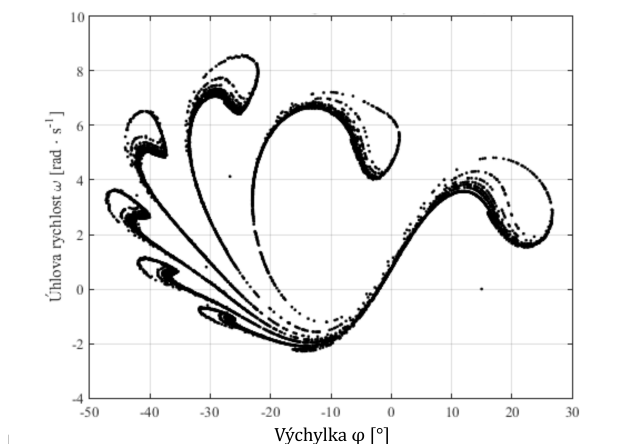
Obrázek 4.16: Bifurkační digram výchylky kyvadla se dvěma magnety pro  $U = 0,015$  m v nadrezonanční oblasti.



Obrázek 4.17: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině (vlevo) pro amplitudu  $U = 0,015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 11,7$  rad/s s příslušným Poincarého zobrazením (vpravo).

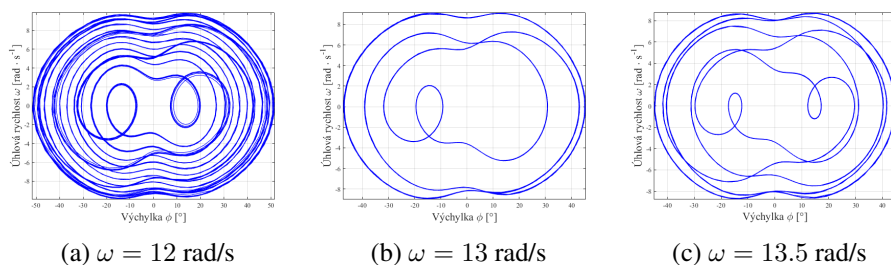
notu  $\omega$ . Odezva by zdvojovala svou periodu, dokud by nepřešla v chaotickou odezvu a poté by znovu přešla v periodickou odezvu. Jak je patrné, jednotlivé periodické odezvy zkracují svou šíři a od  $\omega = 12$  rad/s můžeme mluvit o chaotickém režimu. V tomto režimu, který nastává mezi periodickými odezvami, můžeme

identifikovat stejný tvar Poincarého řezu na Obr. 4.18.



Obrázek 4.18: V chaotických oblastech se zachovává tento atraktor, v tomto případě pro  $\omega = 13,7$  rad/s.

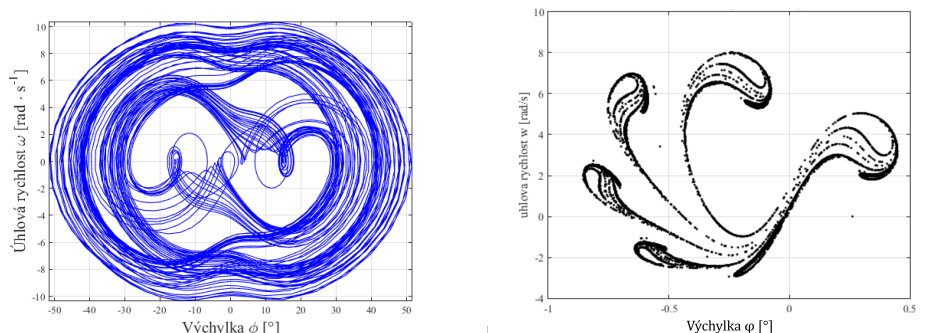
Mezi těmito chaotickými odezvy můžeme pozorovat odezvu s periodickou strukturou (periodicitu lze klasifikovat z ohledem na počet cyklů v rámci jedné periody odezvy, to lze identifikovat z počtu extrémů v bifurkačním diagramu). Charakterově jsou si mezi sebou podobné. Na Obr. 4.19 jsou tyto periodické odezvy zobrazeny.



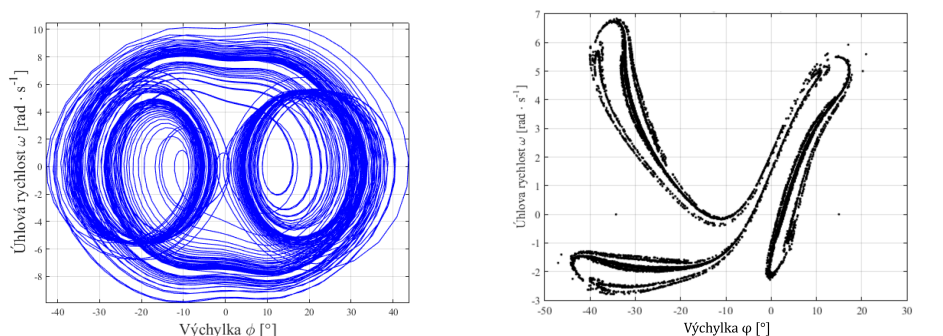
Obrázek 4.19: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015$  m pro nadrezonanční oblast s periodickou odezvou.

Nejjasnější chaotickou odezvou se jeví odezva při  $\omega = 14,5$  rad/s která je zobrazena na Obr. 4.20.

Posledním příkladem bude velmi malá chaotická oblast okolo  $\omega = 19,28$  rad/s.



Obrázek 4.20: Zobrazení trajektorie kyvadla se dvěma magnety ve fázové rovině (vlevo) pro amplitudu  $U = 0,015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 14,5$  rad/s s příslušným Poincarého řezem (vpravo).



Obrázek 4.21: Zobrazení trajektorie magnetického kyvadla ve fázové rovině pro amplitudu  $A = 0.015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 19.28$  rad/s s příslušným Poincarého zobrazením.

### 4.3 Analýza kyvadla se třemi magnety

Tento model je druhým vybraným modelem kyvadla s permanentními magnety. Bude zde použito mnoho závěrů z předešlého modelu.

Tento model slouží jako alternativa k předešlému modelu a bude s ním porovnáván. I v tomto modelu je nelinearita dvojího druhu. Nelinearita od samotného kyvadla ( $\sin \varphi$  v pohybové rovnici (3.18)) a nelinearita působících magnetických sil (pravá strana pohybové rovnice (3.18)). Pro tento model byly zvoleny parametry stejným způsobem jak v předešlém případě.

Tabulka 4.3: Zvolené parametry pro model kyvadla se třemi magnety

Veličina	Značení	Hodnota	Jednotky
Hmotnost kyvadla	$m_{kyv}$	0,00589	[kg]
Délka kyv. a mag.	$l$	0,082	[m]
Vzdálenost vazeb	$h$	0,105	[m]
Vzdálenost pólů mag	$w$	0,066	[m]
Poměrný útlum	$D$	0,078	[-]
Tíhové zrychlení	$g$	9,81	[ms <sup>-2</sup> ]
Amplituda buzení	$U$	0,015	[m]
Hmotnost magnetu	$m_{mag}$	0,001	[kg]
Plocha průřezu mag.	$S$	0,000025	[m]
Délka hrany mag.	$d$	0,005	[m]
Permeabilita vakua	$\mu_0$	$1,256637 \cdot 10^{-6}$	[Hm <sup>-1</sup> ]
Magnetizace mag.	$M$	$2,12421 \cdot 10^6$	[Am <sup>-1</sup> ]

### 4.3.1 Rovnovážné polohy

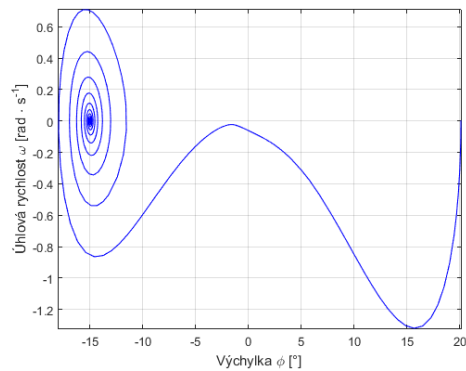
Jako v předchozích příkladech bude nejprve určena rovnovážná poloha systému. I zde bude využito existence fyzického protějšku. Měřením získáme výchylku v rovnovážné poloze. V tomto modelu je též přítomná nestabilní rovnovážná poloha  $\varphi_{p1} = 0^\circ$ . Té je oproti předešlému modelu možné dosáhnout v reálném modelu. Ostatní změřené výchylky jsou ve shodě s hodnotami pro předchozí model, tedy  $\varphi_{p2} = 15^\circ$  a  $\varphi_{p3} = -15^\circ$ . Tato shoda není nahodilá, konfigurace magnetů byla záměrně zvolena pro shodu. Díky tomu lze oba modely lépe porovnat.

### 4.3.2 Volné kmitání

Pro případ volného kmitání se odkážeme na předchozí model. Ustálení výchylky ve fázové rovině je charakterem obdobné a můžeme tvrdit, že i zde jsou obě rovnovážné polohy  $\varphi_{p2}$  a  $\varphi_{p3}$  stabilní. Změna nastává pro charakter překmitu kyvadla. Na Obr. 4.22 je zobrazen překmit koncového bodu kyvadla.

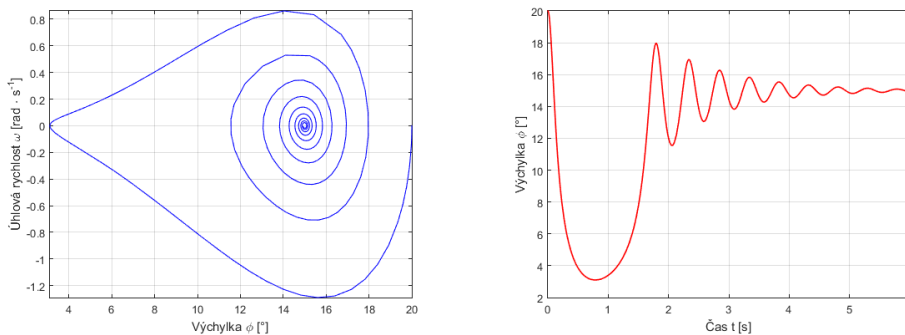
Lze si všimnout, že oproti předchozímu modelu je charakter rozdílný. Koncový bod kyvadla překonává nestabilní polohu mnohem snáze a nenastává zde ostrý bod s nulovou rychlostí. Tento překmit také nastává pro mnohem menší výchylku  $\varphi_0 = 20^\circ$ . Lze tedy tvrdit, že kyvadlo potřebuje k překmitu méně energie.

Jev popsáný v modelu kyvadla se dvěma magnety, tedy "pozdržení kyvadla" je i v tomto modelu přítomné. Na Obr. 4.23 lze vidět tento jev. Oproti předchozímu



Obrázek 4.22: Zobrazení trajektorie kyvadla se třemi magnety při překmitu pro počáteční výchylku  $\varphi_0 = 20^\circ$ .

modelu je vidět ostřejší bod "pozdržení" značící delší trvání tohoto jevu.

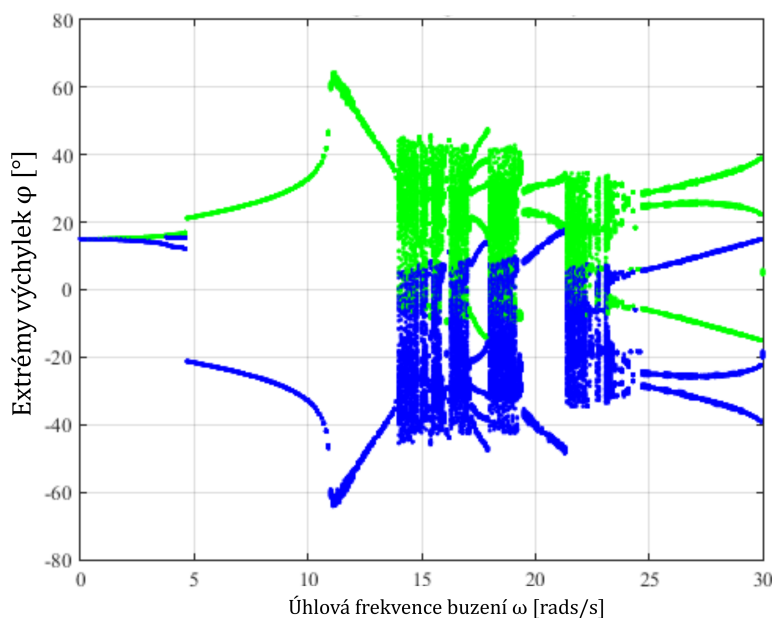


Obrázek 4.23: Zobrazení trajektorie kyvadla se třemi magnety ve fázové rovině při jevu "pozdržení" kyvadla (vpravo) s příslušnou časovou trajektorií (vlevo) pro počáteční výchylku  $\varphi_0 = 19,5^\circ$ .

### 4.3.3 Vynucené kmitání

Uvažováním nenulové amplitudy  $U$  a kruhové frekvence  $\omega$  buzení přejdeme k případu vynuceného kmitání. Řídicím parametrem zůstává kruhová (úhlová) frekvence buzení  $\omega$ . I zde bude s velkou výhodou použit bifurkační diagram pro identifikaci nelineárních projevů modelu kyvadla se třemi magnety. Tento diagram budeme zobrazovat pro spektrum budících frekvencí  $\omega$  shodných s předešlými pří-

klady. Bifurkační diagram byl sestaven identickým způsobem jako v předešlých případech.



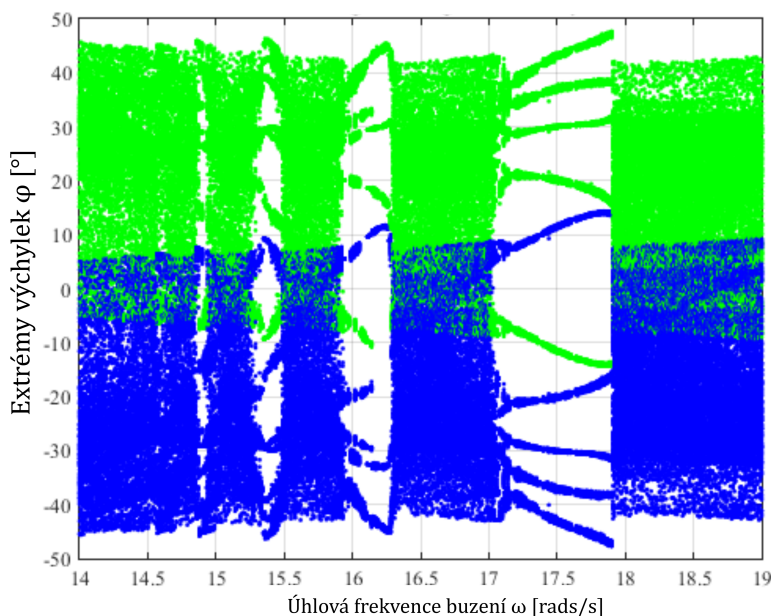
Obrázek 4.24: Bifurkační digram výchylky kyvadla se třemi magnety pro amplitudu buzení  $U = 0,015$  m

V tomto bifurkačním diagramu na Obr. 4.24 jsou obsaženy oblasti

- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo jedné rovnovážné polohy,
- periodické odezvy, kde je přítomné kmitání okolo více rovnovážných poloh,
- chaotické odezvy, kde je kmitání popsáno chaotickým atraktorem.

Na první pohled je zřejmé, že tento bifurkační diagram je velmi podobný případu kyvadla se dvěma magnety. Lze si všimnout, že v tomto diagramu došlo k rozšíření širě chaotických oblastí. Oblasti periodické odezvy také nezůstaly beze změny. Můžeme pozorovat menší zastoupení oblasti od  $\omega \in \langle 0, 5 \rangle$  rad/s, tedy kmitání okolo rovnovážné polohy. To je následované kvalitativní změnou pro  $\omega = 5$  rad/s. Po této změně je patrný prudký nárůst výchylky až do bodu rezonance.

Odpovídající linearizovaný model soustavy má vlastní frekvenci shodnou s předešlým modelem  $\omega = 11,79$  rad/s. Nadrezonanční chaotická oblast se posunula k vyšším hodnotám  $\omega$ . Zaměříme se nyní na tuto chaotickou oblast.



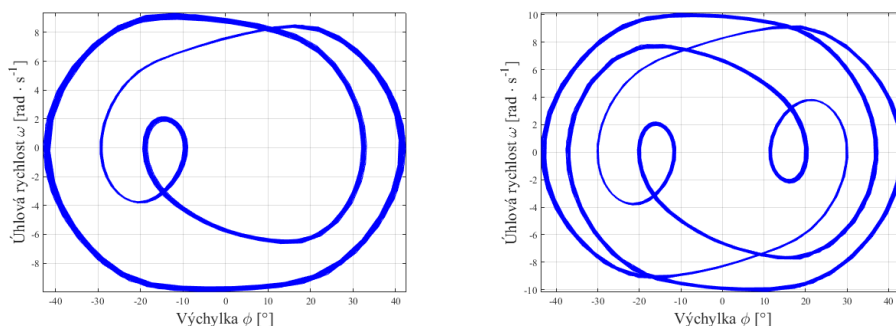
Obrázek 4.25: Bifurkační digram magnetického kyvadla se třemi magnety pro  $U = 0,015$  m a  $\omega \in \langle 14; 19 \rangle$  rad/s

Předešlá kaskáda bifurkační skoro vymizela a je zastoupena silným chaotickým režimem. Oblasti periodické odezvy mezi těmito režimy mají však stejný charakter jako v předešlém případě. Na Obr. 4.26 lze vidět tyto odezvy ve fázové rovině.

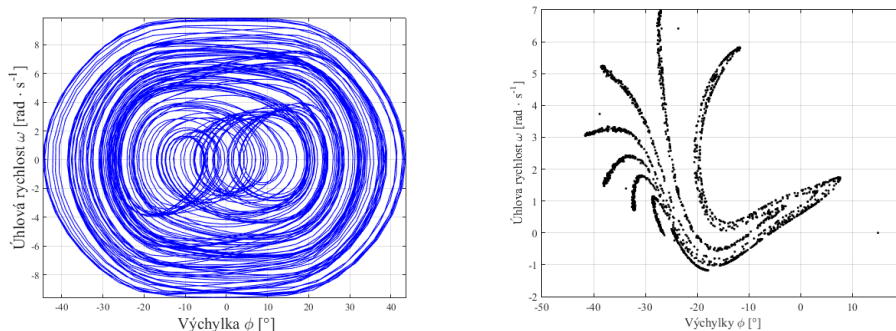
Zaměříme se zde na význačnou frekvenci  $\omega = 14,5$  rad/s, kde jsme pro předchozí případ dostali kvaziperiodickou odezvu. Na Obr. 4.27 je vidět trajektorie ve fázové rovině pro dané  $\omega$  s příslušným Poincarého řezem. Kvaziperiodická odezva byla nahrazena plně chaotickou odezvou a příslušný Poincarého řez je zcela odlišný od předešlého případu.

Jednotlivé chaotické oblasti na Obr. 4.25 sdílejí velmi podobný chaotický atraktor. Na Obr. 4.28 lze vidět vývoj tohoto chaotického atraktoru. Charakterově jsou si velmi podobné, ale se zvyšujícím  $\omega$  postupně zanikají "ramena" těchto atraktorů.





Obrázek 4.26: Zobrazení trajektorie kyvadla se třemi magnety ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 16,1$  rad/s (vlevo) a  $\omega = 17,5$  rad/s (vpravo).

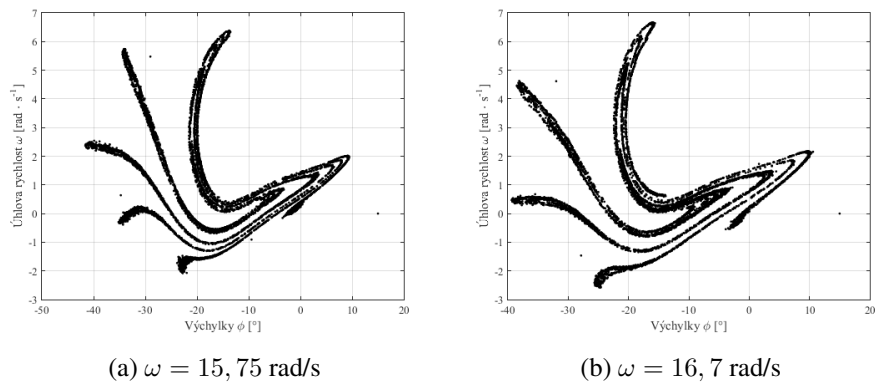


Obrázek 4.27: Zobrazení trajektorie magnetického kyvadla ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 14,5$  rad/s (vlevo) a příslušného Poincarého řezu (vpravo).

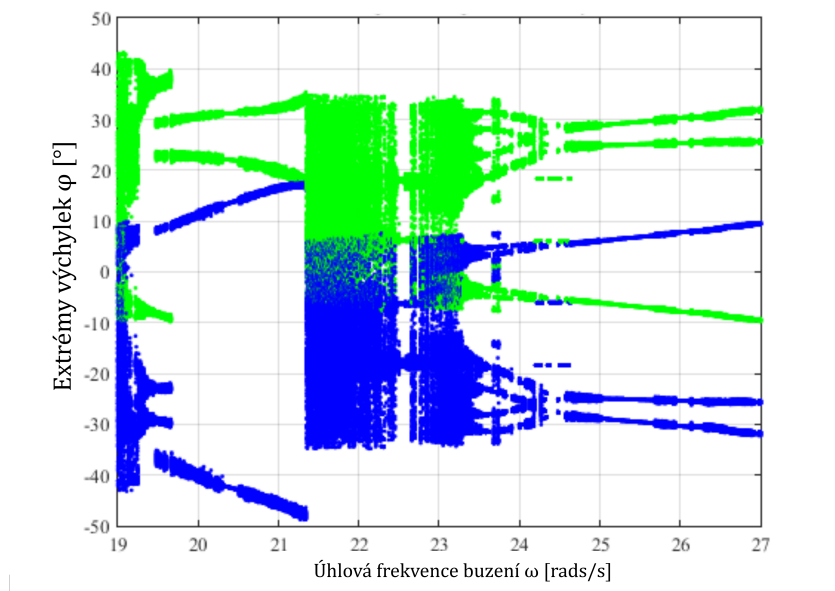
Zaměříme-li se na oblast pro  $\omega \in \langle 21,5; 23,5 \rangle$  lze spatřit poslední význačnou chaotickou oblast zobrazenou na Obr. 4.15.

Poincarého řez této chaotické oblasti je dalším pokračování předchozích chaotických oblastí. Zanikne tak další "rameno" a odezva získá následovný tvar

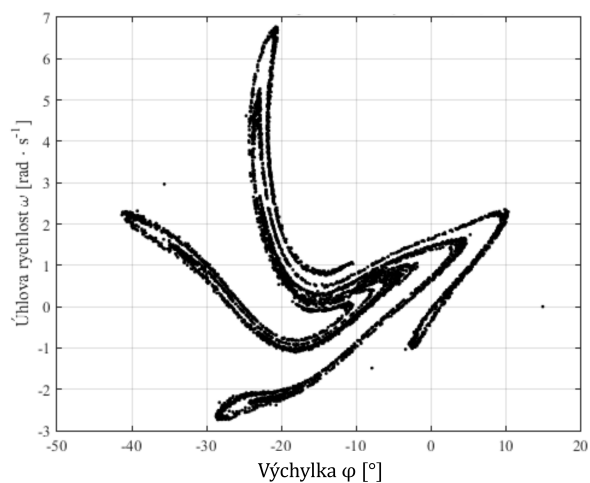
Při dalším zvyšování  $\omega$  překročíme chaotickou oblast a dostaneme se do oblasti periodické odezvy kde je patrné zdvojování periody. Trajektorie ve fázové rovině na Obr. 4.31 z pohledu kmitání shodná s trajektorií předešlého modelu na Obr. 4.15. V tomto případě nastává o 3 rad/s později.



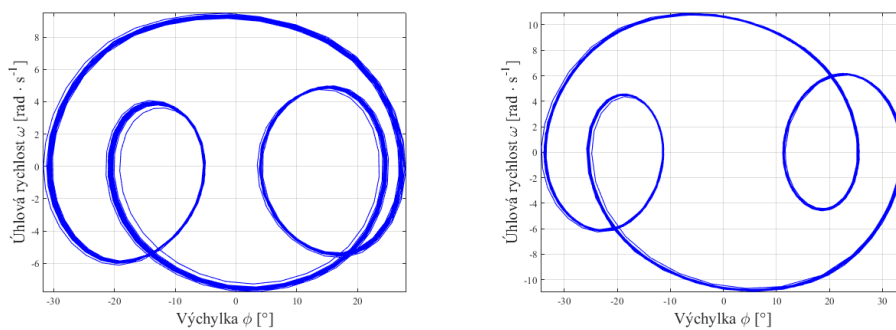
Obrázek 4.28: Zobrazení Poincarého řezů při amplitudě  $U = 0,015$  m pro různé hodnoty  $\omega$ .



Obrázek 4.29: Bifurkační diagram výchylky kyvadla se třemi magenty pro  $U = 0,015$  m pro  $\omega \in \langle 21,5; 23,5 \rangle$ .



Obrázek 4.30: Poincarého řez pro  $U = 0,015$  m při  $\omega = 22$  rad/s.



Obrázek 4.31: Zobrazení trajektorie magnetického kyvadla ve fázové rovině pro amplitudu  $U = 0,015$  m a kruhovou frekvenci buzení  $\omega = 23,9$  rad/s (vlevo) a  $\omega = 28$  rad/s (vpravo).

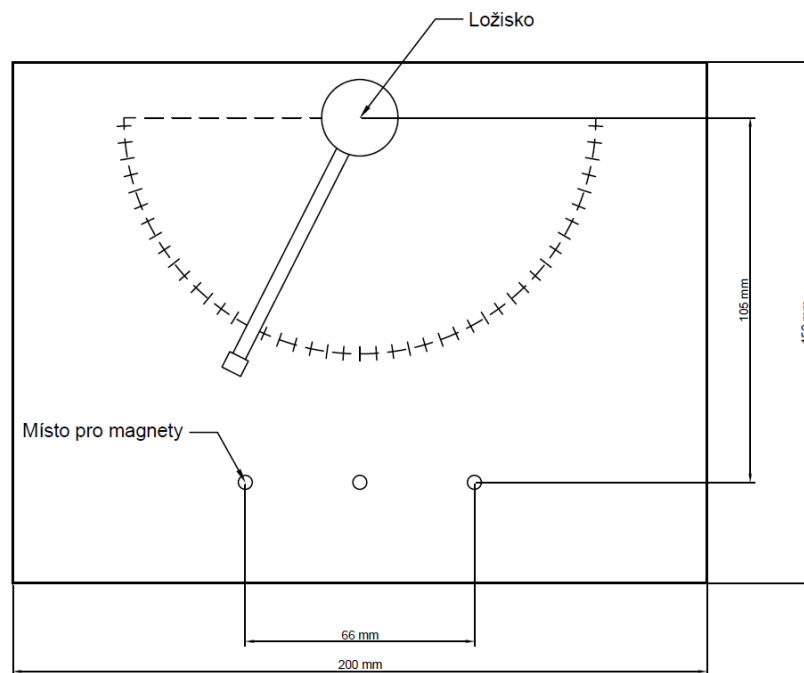
# Kapitola 5

## Experiment

Výskyt chaotické odezvy u nelineárních mechanických systémů dokáže velmi znesnadnit práci s těmito systémy. Může být proto velmi výhodné mít možnost porovnání matematického modelu s reálným objektem. Díky tomuto porovnání je možné se velmi efektivně přibližovat spolehlivým parametrům zkoumaného modelu. Matematický model nejprve navrhne s libovolně zvolenými parametry, při kterých model vykazuje kýžené jevy. Tyto parametry poté porovnáme s reálným modelem a zjišťujeme, které z nich jsou v reálném modelu spolehlivé. Tímto obousměrným porovnáváním a laděním lze dojít k velmi spolehlivým parametrům pro které víme, že jak matematický tak reálný model bude vykazovat kýžené jevy. Nad rámec této bakalářské práce vznikl výše zmiňovaný reálný model kyvadla s permanentními magnety v obou konfiguracích. Při návrhu tohoto modelu bylo dbáno na snadné ovládání a zároveň zajištění prostoru pro budoucí vývoj. Tento model umožňuje měnit amplitudu buzení, měnit konfiguraci permanentních magnetů a regulovat frekvenci buzení.

### 5.1 Návrh reálného modelu

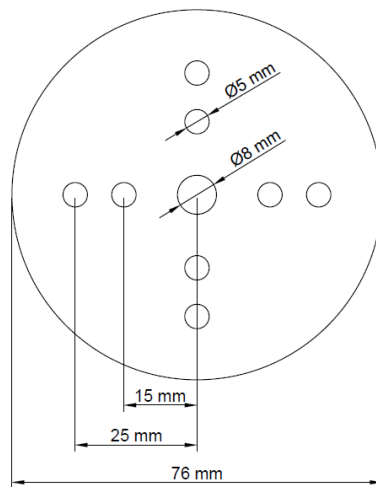
Prvním krokem bylo navržení desky s připevněným pohyblivým kyvadlem. To je pevně přilepené k ložisku, které je s deskou spojeno dřevěným kolíkem zatlačeným v díře desky. Neodymové magnety jsou volně připojeny na desce pomocí hlaviček hřebíků v desce, na kterých díky své magnetizaci drží. Na konci kyvadla je též volně připojen magnet. Na desku byla přidána stupnice úhlových výchylek pro rychlé odečtení úhlů roznovázných poloh a analýzu pohybů při různých počátečních podmínkách. Na Obr. 5.1 lze vidět rozměry desky a umístění magnetů.



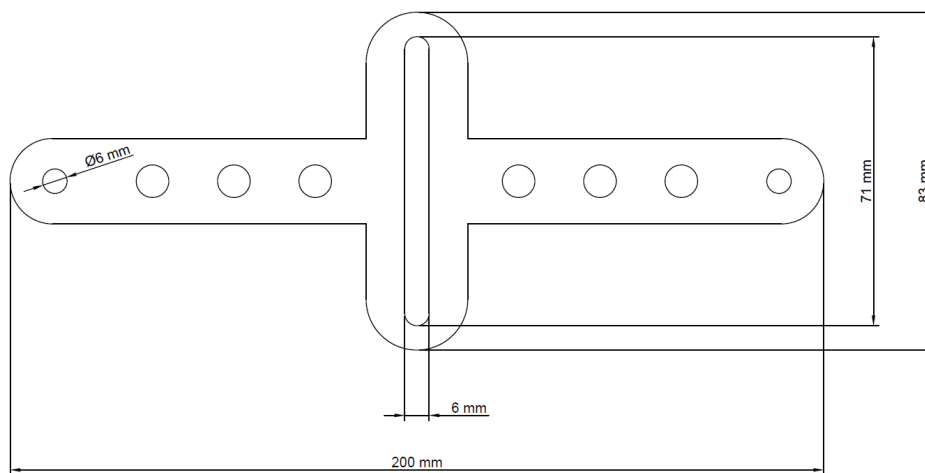
Obrázek 5.1: Schéma rámu s kyvadlem

Po návržení základní desky s kyvadlem bylo nutné tuto desku uvést do pohybu. Jelikož bylo uvažováno kinematické buzení, bylo nutné vyvinout vratný posuvný pohyb desky. Optimální řešení poskytoval kulisový mechanismus, který transformuje rotační pohyb na pohyb vratný posuvný. Na Obr. 5.2 a 5.3 je vidět návrh částí mechanismu s příslušnými rozměry.

Disk na Obr. 5.2 je připojený k motoru, který žene posuvník mechanismu. K disku je přišroubován čep o délce 15 mm, který spojuje disk s posuvníkem. Vzhledem k velké hmotnosti desky i mechanismus je třeba počítat s velkým odporem proti pohybu hnacího motoru. Pro tento motor bylo nutné navrhnout robustní držák, který poskytne dostatečnou oporu při uvedení soustavy do pohybu. Tento držák byl navržen v softwaru pro tvorbu výkresů a byl posléze realizován pomocí technologie 3D tisku.



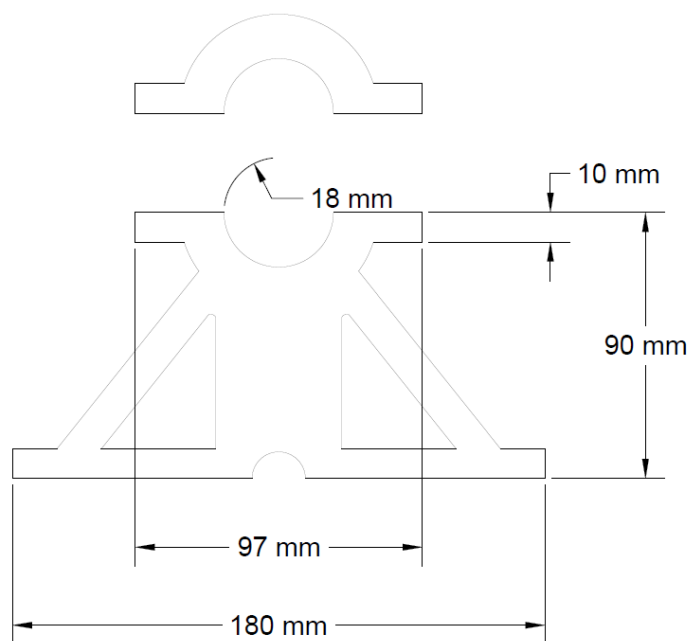
Obrázek 5.2: Schéma disku kulisového mechanismu



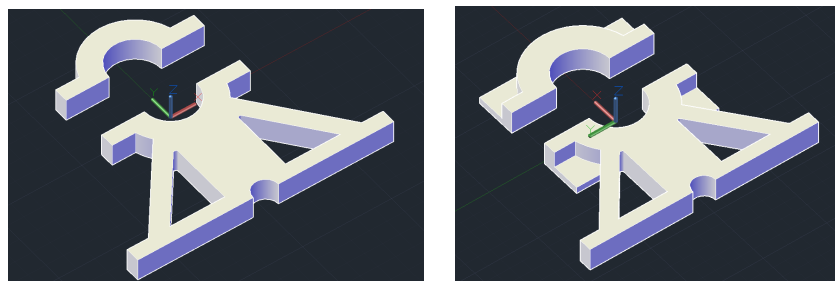
Obrázek 5.3: Schéma posuvníku kulisového mechanismu

## 5.2 Realizace

K realizace kulisového mechanismu byla použita hliníková deska z níž byly jednotlivé části vyříznuty. Hliník byl vybrán na základě malé hmotnosti a vysoké tvrdosti. Díky vysoké tvrdosti se při provozu minimalizovalo riziko deformace



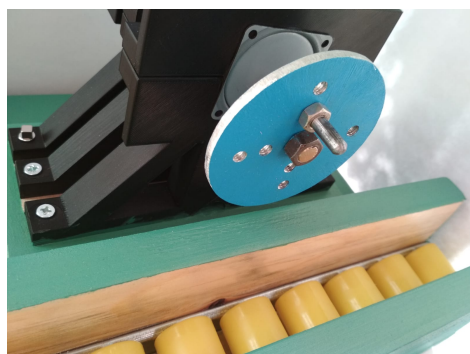
Obrázek 5.4: Schéma držáku



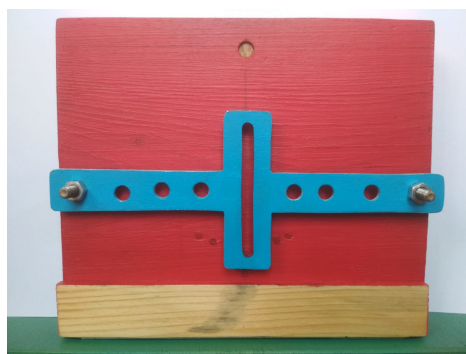
Obrázek 5.5: Ukázka navrženého držáku na motor připraveného na 3D tisk

mechanismu. Na Obr. 5.6a a 5.6b lze vidět výslednou realizaci mechanismu.

Disk je obohacen ekvidistantně rozmístěnými děrami se závitem ve dvou vzdálenostech od středu otáčení. To dovoluje měnit amplitudu buzení mezi  $U_1 = 0.015$  m a  $U_2 = 0.02$  m. Posuvník je též doplněn děrami, ale v tomto případě slouží pouze k odlehčení části. K desce je posuvník připevněn šroubovou vazbou. Díky této vazbě odpadá potřeba posuvník podepírat. Přidáním hmoty na jedné straně desky došlo ke statickému nevyvážení a deska se stala nestabilní. Při zkušebních chodech soustavy bylo zjištěno, že při vyšších otáčkách koná deska kývavý po-



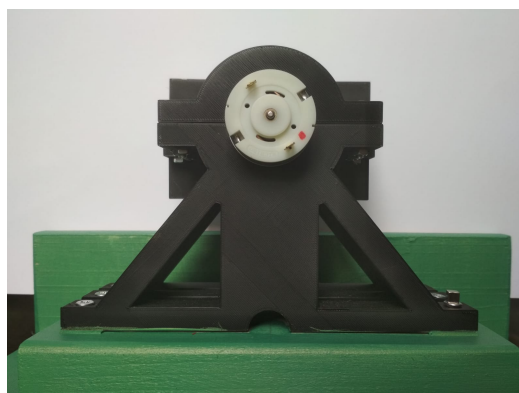
(a) Disk



(b) Posuvník

Obrázek 5.6: Výsledná realizace posuvníku a disku kulisového mechanismu

hyb, který roste se zvyšujícími otáčkami. Tento problém byl vyřešen přidáním širší základny na desku, díky níž se hmota lépe rozprostřela a deska se stala staticky stabilní. Deska se posouvá na válcové liště jak je vidět na Obr. 5.6a. Pro zajištění plynulého pohybu byl na spodní část základny přidán železný plát, který minimalizuje kontakt s válcovou lištou. Na Obr. 5.6a jsou vidět zarážky, které musely být přidány po stranách válcové lišty k zamezení vybočení desky. Držák motoru byl po 3D tisku připevněn k desce pevnou vrutovou vazbou.



Obrázek 5.7: Pohled ze zadní strany

Samotný motor byl vybrán na základě potřeby vysokého nominálního krouťového momentu k hnaní soustavy. Jelikož bylo v dynamické analýze uvažováno buzení do  $\omega = 30 \text{ rad/s}$  bylo nutné vybrat takový motor, který dosáhne na požadované nominální otáčky. Zvyšováním nominálních otáček motoru se snižuje jeho



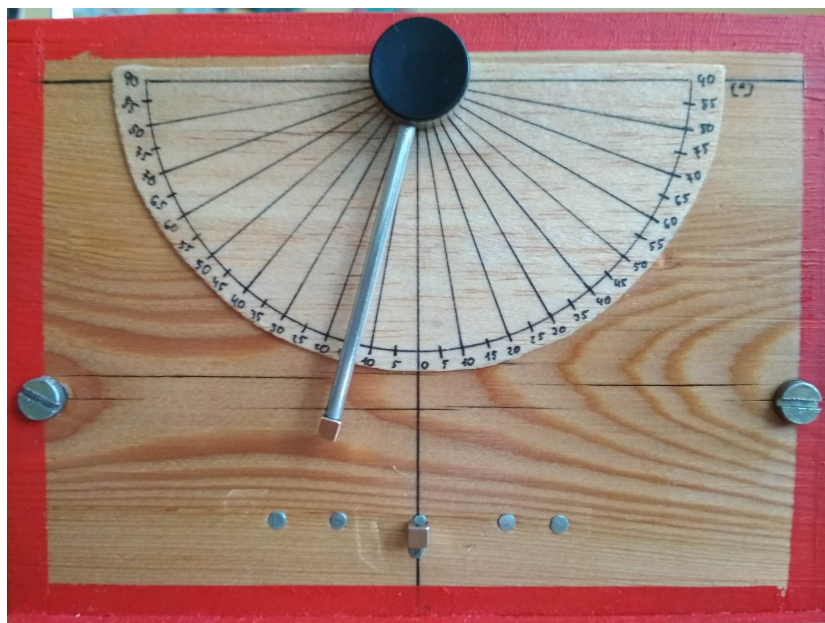
nominální kroutivý moment. Bylo tedy nutné najít správné optimum mezi otáčky a kroutivým momentem. Vyhovujícím motorem se stal stejnosměrný elektromotor, který je uveden na Obr. 5.8 spolu s technickými parametry. Jedná se o motor s převodem 15:1. K chodu tohoto motoru je použitý stabilizovaný stejnosměrný zdroj.



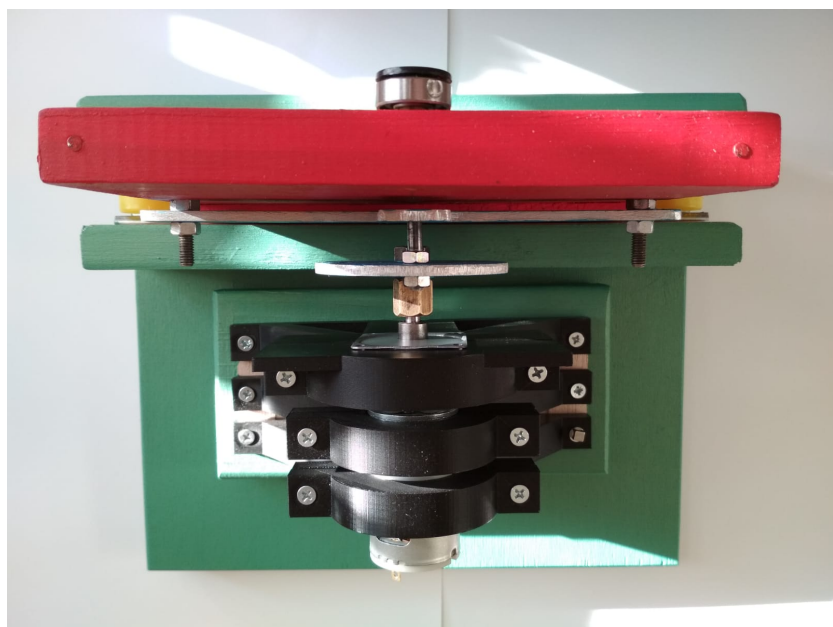
Převodový poměr		10:1	15:1
12 V	Jm. moment [kg-cm]	1,0	2,7
	Jm. rychlost [ot/min]	519	321
24 V	Jm. moment [kg-cm]	1,0	2,6
	Jm. rychlost [ot/min]	530	340
Váha [g]		330	336

Obrázek 5.8: DC motor série SGS430 s čelní převodovkou

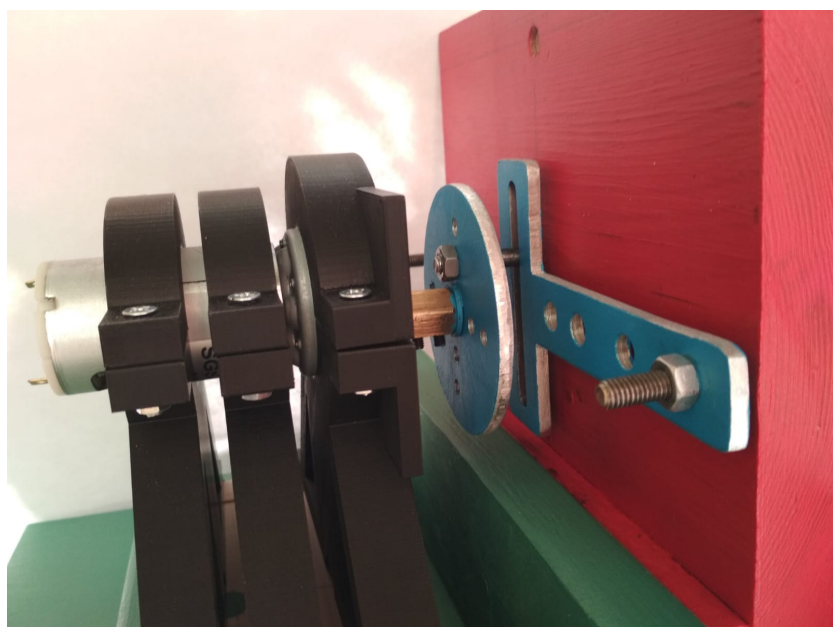
Na fotografiích 5.9, 5.10, 5.11 lze vidět celkovou soustavu.



Obrázek 5.9: Čelní pohled



Obrázek 5.10: Pohled shora



Obrázek 5.11: Pohled na realizaci kulisového mechanismu

## 5.3 Měření

Vzhledem k velmi malé periodě kyvu kyvadla s permanentními magnety je kmitání kyvadla velmi rychlým dějem. Snaha o přesné měření bez použití sofistikované techniky je neplodná. Na základě měření deseti period kyvu byl stanoven hrubý odhad poměrného útlumu. Tento odhad je však pouze prvotním přiblížením, které bude následováno v budoucnu přesnějším měřením. Toto měření bude uskutečněno v budoucím vývoji reálného modelu. K měření výchylky kyvadla budou použity fotografické metody zpracování obrazu se kterými chyba měření výrazně klesne. Díky získané relativní výchylce bude možné reálný model číselně porovnat s výpočtovým modelem. Reálný model bude též obohacen o otáčkoměr, který bude sledovat a zaznamenávat otáčky elektromotoru. V současné verzi reálného modelu mohlo být provedeno pouze jedno přesné měření a to měření velikosti magnetické síly. Velikost výchylky kyvadla v rovnovážné poloze je známa. Vyjdeme ze vztahu pro model s dvěma magnety

$$\frac{mgl}{2I_A} \sin \varphi = \frac{F_m l}{I_A} \cos \psi \sin \varphi, \quad (5.1)$$

úpravou přejde rovnice do tvaru

$$F_m = \frac{1}{2} mg \frac{1}{\cos \psi}, \quad (5.2)$$

po dosazení parametrů z kapitoly 3 získáme velikost magnetické síly modelu s dvěma magnety

$$F_m = 0,03741N. \quad (5.3)$$

Vzhledem k použití shodných magnetů pro oba modely předpokládáme stejnou velikost magnetické síly pro oba modely. Poté lze vypočítat velikost magnetizace použitých neodymových magnetů ze vztahu pro velikost magnetické síly (3.7) a následného vyjádření

$$M \approx 2,05334 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-1}, \quad (5.4)$$

vzhledem k složitosti použitých vztahů a chybám v měření se po dosazení této hodnoty matematický model neustálý na přesné hodnotě  $\varphi$ . Bylo proto nutné velikost magnetizace ručně upravit, aby byla výsledná výchylka v souladu s měřením. Výsledná velikost magnetizace bylo stanovena na

$$M_{2M} \approx 2,22121 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-1} \text{ pro model s dvěma magnety,} \quad (5.5)$$

$$M_{3M} \approx 2,12421 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-1} \text{ pro model s třemi magnety.} \quad (5.6)$$

Díky existenci reálného modelu představeného v této kapitole je možné simulovat pohyb pro různé budící frekvence v reálném čase. To je výhodné zejména pro svou názornost a možnost pozorovat tyto nelineární projevy pouhým okem.

# Kapitola 6

## Závěr

Předložená bakalářská práce je věnovaná tématu bistabilních soustav, jejichž dynamické vlastnosti jsou v současné době předmětem výzkumu a to jak v oblasti s energy harvestingu, tak a v oblasti tlumení vibrací.

Práce je obsahující tři části. První část (kapitoly 1 a 2) představuje základní principy bistabilních soustav a dále se věnuje problematice spojené s analýzou nelineárních soustav. Jsou představeny základní metody pro identifikaci nelineárních projevů, včetně sestavení chaotických atraktorů.

V druhé, teoretické, části jsou sestaveny matematické modely vybraných bistabilních soustav. Na základě těchto modelů jsou pak vytvořeny výpočtové modely v systému MATLAB. Tyto modely jsou využity pro výpočtovou analýzu dynamického chování, které je odezvou na vnější kinematické buzení. Z výpočtových analýz je patrné, že přítomnost bistability významně ovlivňuje dynamickou odezvu. Podařilo se identifikovat řadu nelineárních jevů, zejména skokové změny v odezvě, bifurkace zdvojením periody přecházející do režimu chaotické odezvy. S využitím odpovídajících nástrojů byly identifikovány (zobrazeny) chaotické atraktory ve vybraných režimech kmitání.

Součástí práce je návrh a sestavení tzv. demonstrátoru bistabilní soustavy, což je popsáno v poslední, třetí části práce. Jedná se o fyzikální kyvadlo, kde je bistabilita zajištěna přítomností permanentních magnetů ve dvou základních konfiguracích. Vnější kinematické buzení je zajištěno externím elektrickým pohonem. Tato soustava dovoluje demonstrovat různé nelineární typy kmitání v závislosti na frekvenci buzení. Parametry výpočtových modelů jsou voleny na základě reálných parametrů demonstrátoru.

V následujících krocích autor plánuje provést sérii detailních experimentů s cílem přesné identifikace jak parametrů, tak dynamické odezvy.

# Literatura

- [1] Duffing, G.: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1918
- [2] Chiacchiari, S.; Romeo, F.; McFarland, D.M.; Bergman, L.A.; Alexander, F.: Vibration energy harvesting from impulsive excitations via a bistable nonlinear attachment—Experimental study, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 125, Issue 9, 2019, pp. 185-201.
- [3] Nayfeh, A. H.; Mook, D. T.: *Nonlinear Oscillation*. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004.
- [4] Thompson, J. M.; Stewart, H. B.: *Nonlinear dynamics and chaos*. Chichester: John Wiley and Sons, 2002.
- [5] Mandelbrot, B.B.: *Fractals: form, chance and dimension*. San Francisco: W.H. Freeman, 1977.
- [6] Zhang, L.; Tang, J.; Ouyang, K.: Anti-control of period doubling bifurcation for a variable substitution model of Logistic map, *Optik*, Volume 130, 2017, Pages 1327-1332.
- [7] Slavík, J.; Stejskal, V.; Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*. 1997.
- [8] Chen, LQ., Li, K. Equilibriums and their stabilities of the snap-through mechanism. *Arch Appl Mech* 86, 403–410 (2016).
- [9] Vokoun, David; Beleggia, Marco; Heller, Ludek; Sittner, Petr (2009). "Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets". *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 321
- [10] Chen Jufeng, Li Xianghong, Hou Jingyu, Zuo Dawei Bursting oscillation and bifurcation mechanism in fractional-order Brusselator with two different

time scales. *Journal of Vibroengineering*, Vol. 19, Issue 2, 2017, p. 1453-1464.