ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY A NĚKTERÉ TYPY KVADRATICKÝCH DIOFANTICKÝCH ROVNIC

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Diana Vondrovicová

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky a fyziky pro základní školy

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2021

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 30. června 2021

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za cenné odborné rady, trpělivost a čas, který mi věnoval při psaní této bakalářské práci. Dále bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za veškerou podporu nejen ve studiu, ale i v každodenním životě.

Obsah

Úvod

Téma diplomové práce *Řetězové zlomky a některé typy kvadratických diofantických rovnic* jsem si zvolila s vizí možnosti prohloubení mých dosavadních znalostí v oblasti diofantických rovnic. Jde o rovnice, které řešíme pouze v oboru celých čísel.

S termínem diofantické rovnice jsem se seznámila v průběhu mého bakalářského studia na pedagogické fakultě Západočeské univerzity v rámci předmětu Elementární algebra, v zimním semestru akademického roku 2017/2018. Tehdy jsme se zabývali lineárními diofantickými rovnicemi o dvou neznámých ve tvaru $ax + by = c$.

Při zadání rovnice či slovní úlohy, která vedla na řešení diofantické rovnice, jsme vždy nejprve řešili otázku, zda je zadaná rovnice řešitelná, tedy zda je splněna nutná a zároveň postačující podmínka řešitelnosti rovnice. Daná podmínka konstatuje, že největší společný dělitel D koeficientů a, b musí dělit i celé číslo c. Pokud rovnice řešení měla, nabízela se nám pro stanovení hledaných uspořádaných celočíselných dvojic $[x, y]$ řada metod: experimentální metoda „pokus – omyl“, grafické řešení, metoda s užitím Euklidova algoritmu nebo kongruence a metoda vyjádření členu s nejmenším koeficientem.

Ačkoliv jsem se však s termínem diofantické rovnice poprvé setkala až během studia vysokoškolské matematiky, samotné rovnice jsem řešila bez mého vědomí po celý život. Řeší ji totiž nevědomky po celém světě dennodenně miliardy lidí v rámci platby v hotovosti, při hledání vhodných mincí a bankovek pro zaplacení dané částky.

S jednou diofantickou rovnicí jsme se také setkali již na druhém stupni základní školy. S kvadratickou rovnicí o třech neznámých, která se mnoha lidem zapsala do paměti na celý život. A o které rovnici tedy vlastně mluvíme? Řeč je o rovnici ve tvaru $a^2 + b^2 = c^2$, jež je uváděna v učebnicích matematiky pro osmé ročníky v rámci Pythagorovy věty. S řešením jiných diofantických rovnic kromě řešitelů matematických olympiád běžní žáci základních a středních škol do styku nepřichází.

Napadá mě tak otázka, zda tomu tak bylo vždy, nebo zda se někdy třeba jen na krátkou dobu vyskytla v průběhu historie školství éra, za níž se s danou problematikou žáci běžně potýkali mnohem více. Já osobně jsem se s řešením jiné kvadratické diofantické rovnice kromě již zmíněné Pythagorovy rovnice nikdy nesetkala. Pokud však tedy dovedeme poměrně snadno vyřešit lineární diofantické rovnice, je v našich silách vyřešit i další diofantické rovnice druhého stupně? Existují matematické věty, s jejichž znalostí bychom je dovedli vyřešit, aniž bychom nevyužili matematických programů? Existují vůbec programy, které dovedou tyto rovnice řešit? A kdy se vlastně diofantické rovnice v myslích matematiků zrodily a obohatily tak oceán definic, vět a rovnic? Kdo byl onen muž, jehož jméno nesou? Cílem mé diplomové práce je nalézt odpovědi na dané otázky a s jejich znalostí tak proniknout do námi prozatím neprobádané oblasti matematiky.

1 Řetězové zlomky

1.1 Základní terminologie

Definice 1.1.1 (racionální číslo)

Každé číslo, které lze zapsat jako podíl dvou čísel a, b, kde a je dělencem z oboru celých čísel a b je dělitelem z oboru čísel přirozených, je **číslo racionální**.

Z výše uvedené definice je zjevné, že každé desetinné číslo či číslo s nekonečným periodickým rozvojem lze zapsat ve tvaru zlomku. Se zlomky i s desetinnými čísly se poprvé seznamují žáci již během prvního stupně základních škol.

Definice 1.1.2 (řetězový zlomek)

Mějme výraz ve tvaru

$$u_1 + \cfrac{v_1}{u_2 + \cfrac{v_2}{u_3 + \cfrac{v_3}{u_4 + \cfrac{v_4}{u_5 + \dots}}}}, \tag{1}$$

kde u_j a v_j pro $j \in 1, 2, \dots, n$ náleží oboru reálných či komplexních čísel, nebo jsou funkcemi jedné či více proměnných. Daný výraz s prvky u_j a v_j nazýváme **řetězový zlomek**. [9, s. 60] Čísly u_1,u_2...u_n rozumíme neúplné podíly nebo prvky řetězového zlomku. [46, s. 6]

V literatuře se převážně zapisují řetězové zlomky výpisem n-prvků v hranaté závorce, přičemž první prvek nese index nula, tj. $[u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]$. My je však budeme zapisovat pomocí kulaté závorky a prvky dle definice 1.1.2 budeme indexovat množinou kladných celých čísel neboli čísly náležející $\mathbb{N}$, tedy oboru přirozených čísel neobsahující nulu. Tudíž je budeme zapisovat jako uspořádanou n-tici čísel $(u_1, u_2, u_3 \dots, u_n)$. [46, s. 10]

Pro vytvoření přehledu celistvé terminologie řetězových zlomků si uveďme odborné pojmosloví v rámci jejich rozřazení. V závislosti na počtu neúplných podílů rozlišujeme řetězové zlomky na *konečné* a *nekonečné*. *Konečné řetězové zlomky* mají konečný počet neúplných podílů, *nekonečné řetězové zlomky* mají neúplných podílů nekonečně mnoho. [9, s. 60-61]

Definice 1.1.3 (konečný pravidelný řetězový zlomek)

Konečný řetězový zlomek ve tvaru

$$u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \cfrac{1}{u_4 + \cfrac{1}{u_5 + \ldots + \cfrac{1}{u_n}}}}}, \tag{2}$$

kde je každý čitatel roven jedné a každý jmenovatel náleží oboru přirozených čísel, nazýváme **pravidelným**.
Píšeme: řetězový zlomek je pravidelný $\Leftrightarrow u_1 \in \mathbb{N}_0, u(1+j) \in \mathbb{N} \wedge v_j = 1, j \in 1, 2, \ldots, n$. [46, s. 6]

Dle definic v literatuře není neúplný podíl u_1 pravidelného řetězového zlomku striktně vymezen určitou spočetnou množinou. Pavel Vít ve své knize [46] zmiňuje, že v definici pravidelného řetězového zlomku často dochází k předpokladu náležitosti neúplného podílu u_1 množině celých čísel. Nicméně pro naše účely se zřetelem k náplni této diplomové práce jsme si jej v definici 1.1.3 mohli dovolit omezit na užší spočetnou množinu. Nechť tedy dle definice 1.1.3 neúplným podílem u_1 rozumíme prvek řetězového zlomku náležející oboru přirozených čísel včetně nuly, tzn. $u_1 \in \mathbb{N}_0$.

Přibližme si nyní nově nabytý pojem *konečný pravidelný řetězový zlomek* v konkrétních příkladech.

Příklad 1.1.1

Převeďte řetězový zlomek do základního tvaru:

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

Řešení

1. Dle definice 1.1.3 má daný řetězový zlomek čtyři neúplné podíly (u_1, u_2, u_3, u_4): $u_1 = 3$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$, $u_4 = 2$. Úpravu řetězového zlomku započneme součtem neúplného podílu u_3 se zlomkem $1/u_4$, tzv. se tedy zaměříme na výraz $3 + \frac{1}{2}$. Načež

se ekvivalentní úpravou zbavíme složeného zlomku ve jmenovateli.

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}$$

2. Upravíme jmenovatel $1+\frac{2}{7}$.

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}}$$

3. Složený zlomek ekvivalentní úpravou převedeme do základního tvaru a posléze již dané sčítance sečteme.

$$3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}}=3+\frac{7}{9}=\frac{27}{9}+\frac{7}{9}=\frac{34}{9}$$

V následujících příkladech upravíme řetězové zlomky obdobnými kroky.

Příklad 1.1.2

Převeďte řetězový zlomek do základního tvaru:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

Řešení:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{21}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{21}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{26}{21}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{26}}=\cfrac{1}{\cfrac{73}{26}}=\frac{26}{73}$$

Příklad 1.1.3

Převeďte řetězový zlomek do základního tvaru:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

Řešení:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{6}{5}}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{5}{6}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{11}{6}}}=2+\cfrac{1}{2+\frac{6}{11}}=$$
$$=2+\cfrac{1}{\frac{28}{11}}=2+\frac{11}{28}=\frac{56}{28}+\frac{11}{28}=\frac{67}{28}$$

Úvodní příklady by jistě mohli zvládnout v rámci učiva základních matematických operací se zlomky i žáci základních škol, pro které není matematika jen jedním z řady povinných předmětů, nýbrž je pro ně jistou zálibou či jakýmsi rébusem, v němž je nutno dopátrat se kýženého výsledku. Pozorní čtenáři si jistě všimli, že jsme postupnou úpravou všech výše řešených konečných pravidelných řetězových zlomků vždy dovedli dospět ke splnění zadání příkladů, tzn. k jejich převedení na zlomky v základním tvaru, kdy jsou čitatel s jmenovatelem nesoudělnými čísly. Tento poznatek však není platný pro jakýkoliv řetězový zlomek, poněvadž zlomek v základním tvaru lze získat pouze převodem konečného řetězového zlomku. Nekonečný řetězový zlomek bychom nikdy ani přes sebevětší úsilí do základního tvaru převést nedokázali.

Věta 1.1.1

Úpravami konečného pravidelného řetězového zlomku získáme zlomek v základním tvaru. Důkaz věty 1.1.1 je proveden v druhé podkapitole Chinčinovy knihy [25].

Po uvedení terminologie řetězových zlomků plynule přejděme do druhé podkapitoly, v níž se seznámíme s dalším matematickým termínem, jež nás bude provázet v průběhu řešení příkladů páté a šesté kapitoly.

1.2 Sblížené zlomky řetězových zlomků

Jak je již z názvu druhé podkapitoly patrné, budeme se nyní zabývat tzv. *sblíženými zlomky*. Sblížené zlomky jsou nedílnou součástí řešení kvadratické diofantické rovnice nesoucí název Pellova rovnice, jež je stěžejním bodem této diplomové práce. Jak najít ony nám prozatím neznámé sblížené zlomky řetězových zlomků si prozradíme v nadcházejícím příkladu.

Příklad 1.2.1

Navraťme se k řetězovému zlomku (3, 1, 3, 2) z příkladu 1.1.1:

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

Nejprve si jednotlivé části zlomku opět označíme indexovanou proměnnou u (u_1, u_2, u_3, u_4), tzv. si vypíšeme neúplné podíly:

$$u_1 = 3;\ u_2 = 1;\ u_3 = 3;\ u_4 = 2$$

Poté přepíšeme neúplný podíl u_1 do zlomku, který posléze označíme jako podíl proměnných A_1/B_1 :

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

Následně získáme ekvivalentními úpravami druhý podíl proměnných A_2/B_2 sečtením sčítanců řetězového zlomku $u_1 + 1/u_2$. Posléze získáme podíl A_3/B_3 z řetězového zlomku obsahující první tři prvky řetězového zlomku, tj. u_1, u_2, u_3 a nakonec zlomek A_4/B_4 obsahující všechny prvky, tj. u_1, u_2, u_3, u_4.

Pro nalezení zlomků $A_2/B_2, A_3/B_3, A_4/B_4$ využijeme kromě běžné metody, na niž jsme zvyklí, také algoritmus užitý na sedmé straně Vítovy knihy [46]. Nám známá běžná metoda pro nás bude zpětnou kontrolou.

1. Získání zlomku A_2/B_2.

   a) Užití algoritmu:

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$3+\frac{1}{1}=\frac{3\cdot 1+1}{1}=\frac{4}{1}=\frac{A_2}{B_2}$$

b) Užití běžné metody:

$$3+\frac{1}{1}=3+1=4=\frac{4}{1}=\frac{A_2}{B_2}$$

2. Získání zlomku A_3/B_3.

   (a) Užití algoritmu:

$$u_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{u_3}}=\frac{u_1u_2u_3+u_1+u_3}{u_2u_3+1}=\frac{A_3}{B_3}$$

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}=\frac{3\cdot 1\cdot 3+3+3}{1\cdot 3+1}=\frac{9+6}{3+1}=\frac{15}{4}=\frac{A_3}{B_3}$$

   (b) Užití běžné metody:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=\frac{A_3}{B_3}$$

3. Získání zlomku A_4/B_4.

   (a) Užití algoritmu:

$$u_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{u_3+\cfrac{1}{u_4}}}=\frac{u_1u_2u_3u_4+u_1u_2+u_1u_4+u_3u_4+1}{u_2u_3u_4+u_2+u_4}=\frac{A_4}{B_4}$$

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 2+3\cdot 1+3\cdot 2+1}{1\cdot 3\cdot 2+1+2}=\frac{18+3+6+6+1}{6+1+2}=\frac{34}{9}=\frac{A_4}{B_4}$$

   (b) Užití běžné metody:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}}=3+\frac{7}{9}=\frac{34}{9}=\frac{A_4}{B_4}$$

Získané zlomky ve tvaru $A_1/B_1, A_2/B_2, A_3/B_3, A_4/B_4$ jsou námi hledané sblížené zlomky.

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{A_2}{B_2} = 3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{A_3}{B_3} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{A_4}{B_4} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{34}{9}$$

Pro nalezení čitatelů a jmenovatelů sblížených zlomků A_j/B_j , kde $j > 3 \wedge j \in \mathbb{N}$, tzn. pro nalezení sblížených zlomků řetězového zlomku o třech a více prvcích, můžeme rovněž využít vztahy vyplývající z nadcházející věty, jejíž důkaz je uveden ve třetí kapitole první části zvané *Racionální čísla* Vítovy knihy [46].

Věta 1.2.1

Nechť jsou dány sblížené zlomky A_j/B_j , kde $j > 3 \wedge j \in \mathbb{N}$, řetězového zlomku $(u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n)$. Potom platí:

$$A_j = u_j A_{j-1} + A_{j-2} \tag{3}$$

$$B_j = u_j B_{j-1} + B_{j-2} \tag{4}$$

[46, s. 24]

Užitím vztahů uvedených ve větě 1.2.1 si nalezení třetího a čtvrtého sblíženého zlomku z příkladu 1.2.1 znatelně usnadníme.

$$\left.\begin{aligned} A_3 = u_3 \,.\, A_2 + A_1 \to A_3 = 3 \,.\, 4 + 3 = 15 \\ B_3 = u_3 \,.\, B_2 + B_1 \to B_3 = 3 \,.\, 1 + 1 = 4 \end{aligned}\right\} \frac{A_3}{B_3} = \frac{15}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} A_4 = u_4 \,.\, A_3 + A_2 \to A_4 = 2 \,.\, 15 + 4 = 34 \\ B_4 = u_4 \,.\, B_3 + B_2 \to B_4 = 2 \,.\, 4 + 1 = 9 \end{aligned}\right\} \frac{A_4}{B_4} = \frac{34}{9}$$

V této chvíli nás již matematici vyslovením pojmu *řetězový zlomek* z míry jistě nevyvedou. Nejenže se nám vmžiku zobrazí v hlavě představa onoho zlomku, ale dokážeme jej i převést do základního tvaru, a dokonce k němu nalézt i náležející *sblížené zlomky*.

Abychom ovšem neusnuli na vavřínech, navraťme se ve svých vzpomínkách do školních lavic. Existencí možnosti navzájem ekvivalentního převodu mezi zlomkem a desetinným číslem jsme již obeznámeni z výukových hodin matematiky povinné školní docházky. Nabízí se tedy otázka, zda bychom mohli převádět na desetinná čísla i *konečné pravidelné řetězové zlomky*, jimiž jsme se doposud zabývali, či nikoliv. Pro odpověď nahlédněme do druhé kapitoly.

2 Zápis kladných racionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku

2.1 Celá část čísla

Abychom dokázali zapsat kladné racionální číslo ve tvaru řetězového zlomku, je nutné zavést pojem *celá část čísla*. S tímto pojmem se mnozí z nás jistě seznámili v úvodu problematiky matematické analýzy či algebry. Ti, kterým se daný pojem nevybavuje, nebo se s ním dosud nesetkali, si však rozhodně nemusí zoufat, neboť se jedná o velmi banální záležitost. Vždyť se souslovím „celá část“ přicházejí do styku dennodenně i malé děti, např. když zbude poslední kus dortu a rodiče jim sdělí, že se přece musí rozdělit a nesníst jej celý samy. Nebo když se vás zeptám: „Kolik koloběžek mohu mít, když mám k dispozici 21 koleček?“, bleskurychle odpovíte: „Samozřejmě jen 10 koloběžek a jedno kolečko zbude.“ Neboť pro ježdění potřebujeme celou koloběžku, s jedním kolečkem bychom daleko nedojeli...

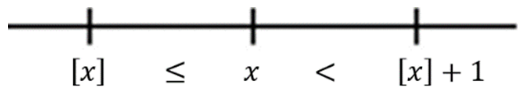
Pokud tedy budeme chtít celou část kladného reálného čísla, nebudou nás zajímat čísla za desetinnou čárkou. Neboli pro celou část kladného reálného čísla bude platit nerovnost $[x] \leq x$, kde $[x]$ je celá část čísla x. Například celou částí čísla 1,125 je 1 a celou částí iracionálního čísla π je 3. Pro celou část záporného reálného čísla platí též nerovnost $[x] \leq x$, z čehož však plyne, že na rozdíl od celé části čísel kladných nestačí pouze odstranit čísla za desetinnou čárkou, nýbrž bude rovna zápornému celému číslu, které bude menší nebo rovno reálnému číslu x.

Pojem *celá část čísla* ovšem nesmíme zaměnit s pojmy *dolní celá část čísla* a *horní celá část čísla*, s nimiž se mohli mnozí z vás setkat během studia matematiky či informatiky v rámci oboru programování. Dolní celou částí reálného čísla je největší celé číslo, jenž je menší nebo rovno x, tzn. platí nerovnost $\lfloor x \rfloor \leq x$. Horní celou částí čísla x je nejmenší celé číslo, jež je větší nebo rovno x, tzn. platí nerovnost $\lceil x \rceil \geq x$. V programovacím jazyku se pro jejich zápis užívají příkazy obsahující slova floor a ceil. [24, 26, 37] Kupříkladu v programovém systému LaTeX zapisujeme dolní celou část čísla příkazem \floor{<argument>} a horní celou část příkazem \ceil{<argument>}. [16, s. 98] V příkazech (tj. tagy) značkovacího jazyka HTML pro tvorbu webových stránek užíváme znak & (tzn. &ceil a &floor). [18, s. 865] Samozřejmě se též nabízí možnost běžného aritmetického zaokrouhlení, pro které se v programovacím jazyku uplatňuje příkaz obsahující slovo round. [26, 37, 24] Avšak daný případ je omezen z hlediska pravidla aritmetického zaokrouhlování, tj. například při řešení čísla 1,3 bude příkaz obsahující slovo round k užitku pouze v případě potřeby nalezení jeho celé části či dolní celé části, nikoliv však horní celé části.

Definice 2.1.1 (celá část čísla)

„Největší celé číslo nepřevyšující reálné číslo x se nazývá **celá část čísla** x a značí se $[x]$. Znamená to, že $[x]$ je to (jediné) celé číslo splňující nerovnosti $[x] \leq x < [x]+1$.“ [21, s. 229]

Pro lepší představu si nerovnost z definice zobrazme na číselné ose.



Obrázek 2.1: Definice celé části čísla

Příklad 2.1.1

Nalezněte a zobrazte na číselné ose celou část čísla:

a) $x = 1,6$

b) $x = -1,4$

Řešení:

a) Pro celou část čísla $x = 1,6$ musí dle definice 2.1.1 platit nerovnosti:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

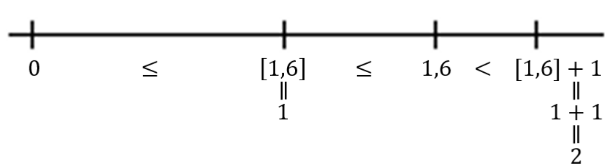
a zároveň platí: $[x] \in \mathbb{Z}$. Musíme odstranit číslo za desetinnou čárkou, tzn. číslo 6, které je na místě desetin. Celá část čísla $x = 1,6$ je tedy číslo 1, píšeme: $[x] = 1$. Pro kontrolu dosaďme do rovnice:

$$[1,6] \leq 1,6 < [1,6] + 1$$

$$1 \leq 1,6 < 1 + 1$$

$$1 \leq 1,6 < 2$$

Dosazením $[x] = 1$ a následnými ekvivalentními úpravami jsme získali platné nerovnosti a splnili tak nutnou podmínku pro $[x]$. Řešení si nyní můžeme zobrazit na číselné ose.



Obrázek 2.2: Řešení příkladu 2.1.1 a)

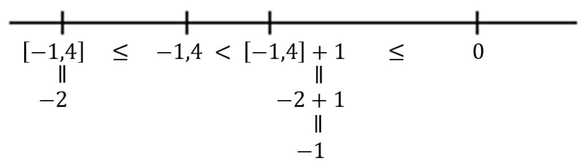
b) Pro celou část čísla $x = -1,4$ musí dle definice 2.1.1 platit nerovnosti: $[x] \leq x < [x]+1$ a zároveň platí: $[x] \in \mathbb{Z}$. Opět musíme odstranit číslo za desetinnou čárkou, tzn. číslo 4, které je na místě desetin. S ohledem na nutnou podmínku z definice však celá část čísla $x = -1,4$ nebude číslo -1, nýbrž číslo -2, píšeme: $[x] = -2$. Pro kontrolu dosaďme do rovnice:

$$[-1,4] \leq -1,4 < [-1,4] + 1$$

$$-2 \leq -1,4 < -2 + 1$$

$$-2 \leq -1,4 < -1$$

Dosazením $[x] = -2$ a následnými ekvivalentními úpravami jsme získali platné nerovnosti, a splnili tak nutnou podmínku pro $[x]$. Řešení si nyní můžeme zobrazit na číselné ose.



Obrázek 2.3: Řešení příkladu 2.1.1 b)

V zájmu nabytí dostatečných vědomostí nezbytně nutných pro zapsání kladných racionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku je pro nás nezbytnou nutností definovat pojem *lomená část čísla*.

Definice 2.1.2 (lomená část čísla)

Číslo, jehož sečtením s celou částí čísla $[x]$ vyjádříme reálné číslo x, se nazývá **lomená část čísla** x. Lomenou část čísla x budeme značit x. Píšeme:$x = [x] + x$. [46, s. 11]

2.2 Vyjádření pomocí neúplných podílů

Definicí 2.1.2 jsme dospěli k dosažení znalosti potřebného zbývajícího pojmu, čímž jsme zdolali poslední překážku bránící k poznání způsobu zapsání kladných racionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku. K onomu kýženému rozvoji našich matematických schopností nám může pomoci docílit například Pavel Vít zcela dostačujícím podrobným popisem ve své knize [46], v němž jsou uplatněny tři základní pojmy z již výše uvedených definic, tj. **neúplné podíly** (definice 1.1.2), **celá část čísla** (definice 2.1.1) a **lomená část čísla** (definice 2.1.2).

„Buď dáno kladné racionální číslo $x, x \notin \mathbb{N}$. Položme $u_1 = [x], x_1 = 1/x$. Zřejmě pak platí

$$x = u_1 + \frac{1}{x_1}, \tag{5}$$

kde $x_1 > 1, x_1 \in \mathbb{Q}$. Odtud plyne

$$x_1 = \frac{1}{x - u_1}. \tag{6}$$

Pro x_1 celý postup opakujeme. Definujeme tedy číslo

$$u_2 = [x_1] = \left[\frac{1}{x - u_1}\right] \tag{7}$$

a číslo

$$x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}. \tag{8}$$

Pak platí

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}, \tag{9}$$

kde $x_2 > 1$,$x_2 \in \mathbb{Q}$. Z posledního vztahu dostáváme:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - u_2}. \tag{10}$$

a opět definujeme podobným způsobem čísla $u_3, x_3, u_4, x_4, \ldots$

Postup se zastaví, jakmile je některé x_{n-1} celé číslo; pak je $u_n = [x_{n-1}]$ poslední prvek řetězového zlomku racionálního čísla x." [46, s. 12-13]

Vítův postup nyní aplikujme v následujícím příkladu.

Příklad 2.2.1

Vyjádřete racionální číslo 34/9 ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení:

1. Nejprve si vyjádříme první neúplný podíl u_1:

$$u_1 = [x] = \left[\frac{34}{9}\right] = 3$$

2. Pro získání čísla x_1 dosadíme u_1 do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, viz následující úpravy:

$$\frac{34}{9} = 3 + \frac{1}{x_1} \quad |\cdot(-3)$$

$$\frac{34}{9} - 3 = \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{34}{9} - \frac{27}{9} = \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{1}{x_1} \quad \left|\cdot\frac{x_1}{\frac{7}{9}}\right.$$

$$x_1 = \frac{9}{7}$$

3. Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2:

$$u_2 = [x_1] = \left[\frac{9}{7}\right] = 1$$

4. Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2, viz následující úpravy:

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad |\cdot(-1)$$

$$\frac{9}{7} - 1 = \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{9}{7} - \frac{7}{7} = \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{x_2} \quad \left|\cdot\frac{x_2}{\frac{2}{7}}\right.$$

$$x_2 = \frac{7}{2}$$

5. Vyjádříme třetí neúplný podíl u_3:

$$u_3 = [x_2] = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$$

6. Pro získání čísla x_3 postupujeme obdobně jako v druhém a čtvrtém kroku, viz následující úpravy:

$$\begin{aligned} x_2 &= u_3 + \frac{1}{x_3} \\ \frac{7}{2} &= 3 + \frac{1}{x_3} \quad |\cdot(-3) \\ \frac{7}{2} - 3 &= \frac{1}{x_3} \\ \frac{7}{2} - \frac{6}{2} &= \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{x_3} \quad \left| \cdot \frac{x_3}{\frac{1}{2}} \right. \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7. Jelikož číslo x_3 náleží oboru celých čísel, u_4 bude posledním neúplným podílem racionálního čísla $\frac{34}{9}$, tedy platí:

$$u_4 = [x_3] = [2] = 2$$

Nyní jen stačí dosadit získané neúplné podíly do výrazu (u_1, u_2, u_3, u_4) nebo do tvaru řetězovému zlomku.

$$\frac{34}{9} = (3, 1, 3, 2) = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

Pozorným čtenářům jistě neuniklo, že jsme racionální číslo 34/9 získali úpravou řetězového zlomku již v úvodním příkladu podkapitoly 1.1. Výsledný řetězový zlomek se shoduje se zadáním tohoto příkladu, čímž jsme ověřili, že jsme se v průběhu řešení nedopustili chyby.

2.3 Vyjádření pomocí Euklidova algoritmu

Další možnou alternativou zjištění prvků řetězového zlomku je uplatnění Euklidova algoritmu, jehož nejčastěji užívanou nejelementárnější a nejznámější funkcí je nalezení největšího společného dělitele dvou čísel. S danou problematikou jsou studenti obeznámeni v elementární algebře.

Přestože rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání Euklidův algoritmus nezahrnuje, mohl by být zařazen pro nadané žáky se speciálními vzdělávacími potřebami jako prohloubení učiva dělitelnosti přirozených čísel v rámci očekávaného výstupu *hledání největšího společného dělitele*.

Věta 2.3.1

„Ke každé uspořádané dvojici celých čísel (a, b), kde $b \neq 0$, existuje právě jedna taková uspořádaná dvojice celých čísel (u_1, r_1), že platí

$$a = bu_1 + r_1, \;\; 0 \leq r_1 < |b|.$$

Číslu u_1 říkáme neúplný podíl (pro $r_1 = 0$ je to „úplný" podíl), číslu r_1 zbytek." [46, s. 17];

Při čtení uvedené věty by se jistě řada jedinců chtěla zeptat, jak najít dle tohoto algoritmu všechny neúplné podíly. Odpověď na jejich otázku není nikterak složitá. Pokud bude zbytek r_1 různý od nuly, aplikujeme daný algoritmus na čísla (b, r_1), tzn. bude platit rovnost $b = ru_2 + r_2$, přičemž platí $0 \leq r_2 < |r_1|$. Jestliže bude zbytek r_2 též různý od nuly, užijeme algoritmus na dvojici čísel (r_1, r_2). Výpočet dokončíme ve chvíli, kdy bude zbytek r_n nulový.

Než přejdeme k vyjádření kladného racionálního čísla ve tvaru řetězového zlomku, připomeňme si vyřešením jednoho příkladu, jak najít největšího společného dělitele dvou čísel právě pomocí Euklidova algoritmu.

Příklad 2.3.1

Nalezněte největšího společného dělitele D(738,558).

Řešení:

Příklad vyřešíme užitím Euklidova algoritmu dle věty 2.3.1.

$$a = bu_1 + r_1 \rightarrow 738 = 558 \cdot 1 + 180$$

$$b = r_1u_2 + r_2 \rightarrow 558 = 180 \cdot 3 + 18$$

$$r_1 = r_2u_3 + r_3 \rightarrow 180 = 18 \cdot 10 + 0$$

Číslo 18 je největším společným dělitelem čísel 738 a 558, píšeme $D(738, 558) = 18$.

Příklad 2.3.2

Vyjádřete racionální číslo 34/9 ve tvaru řetězového zlomku pomocí Euklidova algoritmu.

Řešení:

1. Ačkoliv nemáme dle zadání najít největšího společného dělitele D(34,9), budeme postupovat analogicky. V řešeném algoritmu si všechna u a k nim příslušná čísla vyznačíme modrou barvou.

$$a = bu_1 + r_1 \rightarrow 34 = 9 \cdot 3 + 7$$

$$b = r_1u_2 + r_2 \rightarrow 9 = 7 \cdot 1 + 2$$

$$r_1 = r_2u_3 + r_3 \rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$r_2 = r_3u_4 + r_4 \rightarrow 2 = 1 \cdot 2 + 0$$

2. Největším společným dělitelem $D(34, 9)$ je tedy číslo 1. Vypišme nyní všechny rovnosti pro barevně vyznačené u vycházející z 1):

$$u_1 = 3; u_2 = 1; u_3 = 3; u_4 = 2.$$

Vypsaná čísla jsou námi hledanými neúplnými podíly:

$$\frac{34}{9} = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (3, 1, 3, 2) = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

Vysvětlení:

Z Euklidova algoritmu lze vypsat tyto rovnosti:

$$34 \div 9 = 3\,(\text{zb.}\,7)$$

$$9 \div 9 = 1\,(\text{zb.}\,2)$$

$$7 \div 2 = 3\,(\text{zb.}\,1)$$

$$2 \div 1 = 2\,(\text{zb.}\,0)$$

Všimněme si, že všechna u jsou algoritmem postupně získané podíly.

3 Zápis druhých odmocnin ve tvaru řetězového zlomku

3.1 Historie

Až dosud jsme plachtili v klidných vodách oboru racionálních čísel. Nastala chvíle prozkoumat námi prozatím neprobádané oblasti čísel iracionálních, konkrétně druhých odmocnin, na které se v této diplomové práci zaměříme, neboť budou v následujících kapitolách nedílnou součástí diofantických rovnic, a zodpovědět si tak několik otázek. Kupříkladu kdy byly prvky z daného číselného oboru člověkem poprvé využity či jak dlouho poté lidé prozřeli a objevili existenci nekonečného desetinného neperiodického rozvoje. Pro zodpovězení těchto otázek musíme proplout řekou času do dávné minulosti, do dob, z nichž se dochovaly záznamy dokazující užívání druhých odmocnin spadajících do oboru iracionálních čísel již před tisíci lety.

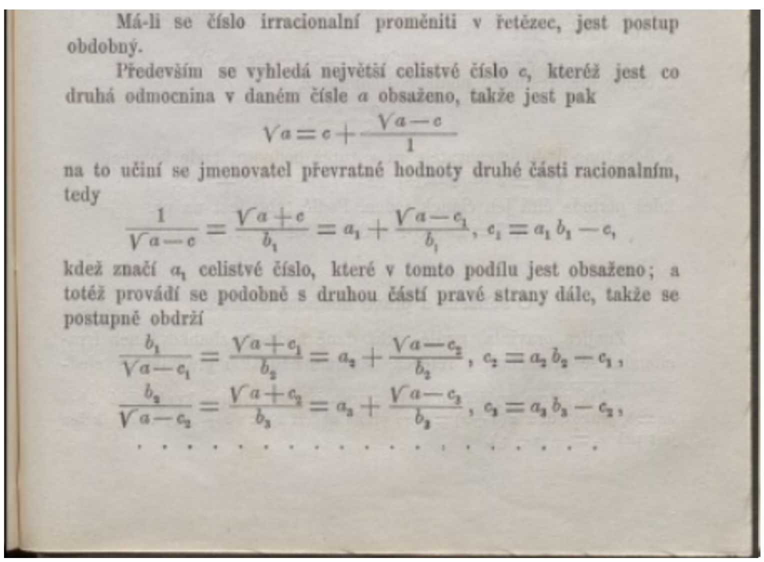
Nacházíme se v třetím tisíciletí před Kristem ve Starověkém Egyptě, v období zvaném Stará říše za vlády Džosera, panovníka třetí dynastie, jenž nechal postavit první pyramidu na světě. [13] Zdejším stavitelům slouží k vyměřování tyčky, jejichž délky jsou v poměru $1 : \sqrt{5}$. [28, s. 21] Ačkoliv matematika není samostatným vědním oborem, pro výstavbu pyramid jsou složité matematické formule nezbytností. I v jednadvacátém století po Kristu zůstává existence těchto staveb záhadou.

Nyní se posuneme po časové ose na jih Mezopotámie, do první poloviny osmnáctého století před Kristem, tedy do období vlády Chammurapiho, nejvýznamnějšího panovníka Starobabylonské říše. Kdekomu z nás je známý onen Chammurapiho zákoník, jehož nejproslulejším zákonem je zákon odplaty „oko za oko, zub za zub“. Avšak vědomí o rozsahu matematických znalostí zdejších obyvatel mají převážně jen lidé, kteří se rozhodli věnovat studiu vysokoškolské matematiky. Rozhodně nesmíme opomíjet jejich výpočty opírající se o Pythagorovu větu. Větu, jež je pojmenována po člověku, který se narodí za více než 1100 let. Větu, s níž lze též získat druhé odmocniny přirozených čísel, jako tomu bylo v Egyptě. [28, s. 27]

Před návratem do jednadvacátého století našeho letopočtu ještě na chvíli zakotvěme v antickém Řecku, zhruba na přelomu šestého a pátého století před Kristem. Do dnešního dne zdejší myslitelé pokládali všechny libovolné úsečky za souměřitelné, což znamená, že délky každé dvojice úseček lze vyjádřit v poměru dvou přirozených čísel. Pythagorejci dnes poprvé objevili existenci nesouměřitelnosti, čímž nastává první krize matematiky a objev iracionálních čísel. [4, s. 13-16] Čísel, která již nelze vyjádřit jako podíl proměnných a/b, kde a náleží oboru celých čísel a b oboru čísel přirozených. Druhé odmocniny přirozených čísel, které nelze zcela vyčíslit a nalézt tak jejich konečnou periodicitu. Řečtí matematici se objevem nesouměřitelnosti najednou ocitají v novém neznámém světě, v němž všechny jejich dosavadní matematické znalosti ztratily znenadání hodnotu. Jistě si většina z nich přijde bezradně a bezmocně, neboť veškeré jejich vědomosti spadají pouze do vod oboru kladných racionálních čísel.

Nechme nyní Řeky lámat si hlavy nad řešením svízelného hlavolamu a vraťme se do jednadvacátého století, prozkoumejme nynější možnosti vyjádření druhých odmocnin řadících se mezi čísla iracionální. Kdybychom měli nutkání dopočítat se posledního čísla jejich desetinného rozvoje či nalézt jakoukoliv periodu, bylo by to stejně prospěšné, jako bylo bájné Sisyfovo valení balvanu do kopce. Stále bychom čekali na okamžik vítězství, který by však nepřišel ani s posledním tlukotem srdce. Jistě všichni budete souhlasit, že život lze promarnit mnohem lépe. Jak tedy ale lidé počítali s těmito čísly před rozmachem početních strojů, tzv. kalkulátorů? Vycházely jim nepřesné výsledky vlivem zaokrouhlování v průběhu výpočtu, nebo se odmocniny staly pomyslnými konstantami? Neboli lze říct, že se spokojili, řekněme například s výsledkem $50\sqrt{3} - 17\sqrt{7}\sqrt{13}$?

Možná vás překvapí skutečnost vypovídající o znalostech žáků středních škol, kteří již v devatenáctém století s pomocí tzv. *periodických pravidelných řetězových zlomků* dokázali tyto odmocniny „obelstít“. Důkazem tohoto tvrzení je učebnice [43], která byla vydána roku 1879.



Má-li se číslo irracionalní proměniti v řetězec, jest postup obdobný.

Především se vyhledá největší celistvé číslo c, kteréž jest co druhá odmocnina v daném čísle a obsaženo, takže jest pak

$$\sqrt{a} = c + \frac{\sqrt{a} - c}{1}$$

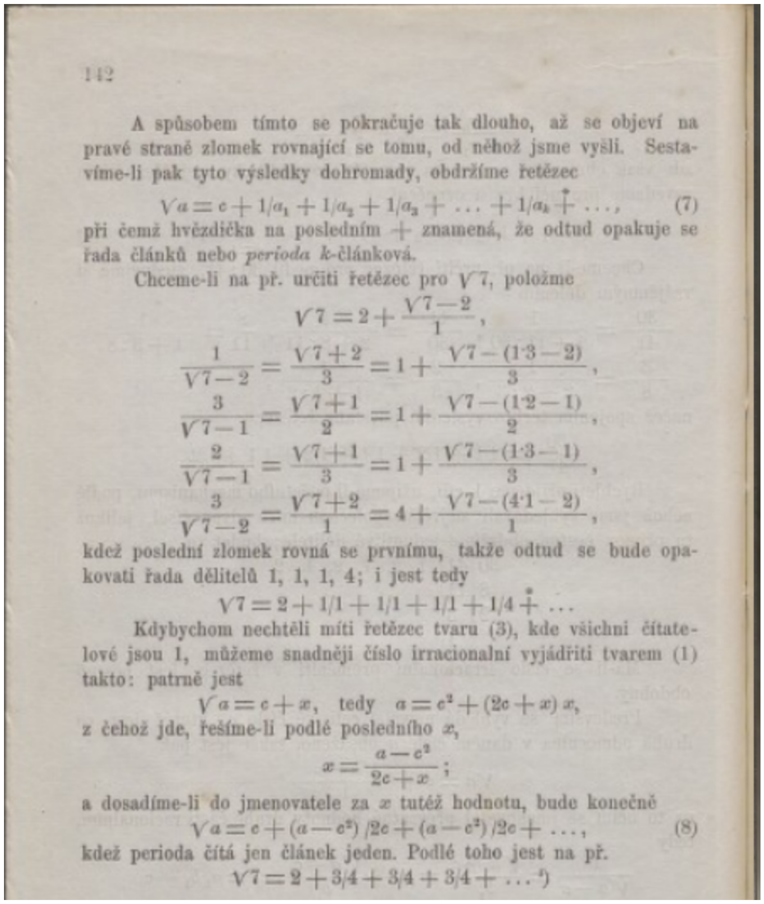
na to učiní se jmenovatel převratné hodnoty druhé části racionalním, tedy

$$\frac{1}{\sqrt{a} - c} = \frac{\sqrt{a} + c}{b_1} = a_1 + \frac{\sqrt{a} - c_1}{b_1},\ c_1 = a_1 b_1 - c,$$

kdež značí a_1 celistvé číslo, které v tomto podílu jest obsaženo; a totéž provádí se podobně s druhou částí pravé strany dále, takže se postupně obdrží

$$\frac{b_1}{\sqrt{a} - c_1} = \frac{\sqrt{a} + c_1}{b_2} = a_2 + \frac{\sqrt{a} - c_2}{b_2},\ c_2 = a_2 b_2 - c_1,$$
$$\frac{b_2}{\sqrt{a} - c_2} = \frac{\sqrt{a} + c_2}{b_3} = a_3 + \frac{\sqrt{a} - c_3}{b_3},\ c_3 = a_3 b_3 - c_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Obrázek 3.1: Učebnice z roku 1879 [18, s. 141]



142

A spůsobem tímto se pokračuje tak dlouho, až se objeví na pravé straně zlomek rovnající se tomu, od něhož jsme vyšli. Sestavíme-li pak tyto výsledky dohromady, obdržíme řetězec

$$\sqrt{a} = c + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots + 1/a_k \overset{*}{+} \ldots, \tag{7}$$

při čemž hvězdička na posledním $+$ znamená, že odtud opakuje se řada článků nebo *perioda k*-článková.

Chceme-li na př. určiti řetězec pro $\sqrt{7}$, položme

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{\sqrt{7}-2}{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-(1\cdot3-2)}{3},$$

$$\frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{7}-(1\cdot2-1)}{2},$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-(1\cdot3-1)}{3},$$

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{1} = 4 + \frac{\sqrt{7}-(4\cdot1-2)}{1},$$

kdež poslední zlomek rovná se prvnímu, takže odtud se bude opakovati řada dělitelů 1, 1, 1, 4; i jest tedy

$$\sqrt{7} = 2 + 1/1 + 1/1 + 1/1 + 1/4 \overset{*}{+} \ldots$$

Kdybychom nechtěli míti řetězec tvaru (3), kde všichni čitatelové jsou 1, můžeme snadněji číslo irracionalní vyjádřiti tvarem (1) takto: patrně jest

$$\sqrt{a} = c + x, \quad \text{tedy} \quad a = c^2 + (2c + x)\,x,$$

z čehož jde, řešíme-li podlé posledního x,

$$x = \frac{a - c^2}{2c + x};$$

a dosadíme-li do jmenovatele za x tutéž hodnotu, bude konečně

$$\sqrt{a} = c + (a - c^2)\,/2c + (a - c^2)\,/2c + \ldots, \tag{8}$$

kdež perioda čítá jen článek jeden. Podlé toho jest na př.

$$\sqrt{7} = 2 + 3/4 + 3/4 + 3/4 + \ldots ^{*})$$

Obrázek 3.2: Učebnice z roku 1879 [18, s. 142]

3.2 Základní terminologie

Definice 3.2.1 (iracionální číslo)

Každé reálné číslo, které nenáleží oboru racionálních čísel, je číslo *iracionální*.

Jak již bylo řečeno, druhé odmocniny lze vyjádřit pomocí tzv. periodických pravidelných řetězových zlomků. S ohledem na pojem periodické je dozajista patrné, že se jedná o zlomky nekonečné, neboť mají vzhledem k existenci periody nekonečně mnoho prvků. V matematice rozlišujeme periodické pravidelné řetězové zlomky na *ryze periodické* a *neryze periodické*. 25, s. 93] U ryze periodických začíná zpravidla perioda již od prvního prvku u_1, kdežto u neryze periodických začíná od libovolného n-tého prvku u_n pro $n \geq 2$.

V literatuře se též můžeme setkat s obdobným rozdělením i u desetinných zlomků, tj. *ryze periodické* a *neryze periodické desetinné zlomky.* [41, s. 53]

Druhé odmocniny jsou vždy vyjádřeny zlomky neryze periodickými. Přesto si však s ohledem na ucelení terminologie definujme oba termíny.

Definice 3.2.2 (ryze periodický pravidelný řetězový zlomek)

Pravidelný řetězový zlomek s k-prvkovou periodou ve tvaru

$$u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{u_{k-1} + \cfrac{1}{u_k + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \dots}}}}}},$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a prvky řetězového zlomku $u_1, \dots, u_{k-1}, u_k$_k tvoří periodu, nazýváme *ryze periodickým.* Píšeme: pravidelný řetězový zlomek je ryze periodický.

$\Leftrightarrow (\overline{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k})$, kde $u_1 \in \mathbb{N}_0$, $u_{1+j} \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in 1, 2, \dots, k-1, k$. [14, s. 33; 46, s. 88-89]

Definice 3.2.3 (neryze periodický pravidelný řetězový zlomek)

Pravidelný řetězový zlomek s $(n-k)$-prvkovou periodou ve tvaru

$$u_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{u_k + \cfrac{1}{u_{k+1} + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{u_n + \cfrac{1}{u_{k+1} + \dots}}}}}},$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a prvky řetězového zlomku $u_{k+1} \dots, u_n$ tvoří periodu, nazýváme *neryze periodickým.*

Píšeme: pravidelný řetězový zlomek je neryze periodický

$$\Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k, \overline{u_{k+1}, \dots u_n}),$$

kde $u_1 \in \mathbb{N}_0$, $u_{1+j} \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}, k+1 \leq n$, $j \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, n\}$. [25, s. 93]

Uspořádanou skupinou k prvků $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ rozumíme tzv. předperiodu a skupinou $(n-k)$ prvků $(u_{k+1}, ..., u_n)$ rozumíme periodu neryze periodického řetězového zlomku. [46, s. 107]

Pomocí takto definovaného řetězového zlomku je možné vyjádřit například druhou odmocninu rovností

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}},$$

tzn. platí rovnost $\sqrt{2} = (1, \bar{2})$. [46, s. 69]

3.3 Algoritmus řešení

V následujících příkladech si vyjádříme několik druhých odmocnin. Postupovat budeme analogicky jako u příkladu 2.2.1 v podkapitole 2.2.

Příklad 3.3.1

Vyjádři iracionální číslo $\sqrt{5}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení

1. První neúplný podíl u_1 je roven celé části $\sqrt{5}$:

$$u_1 = [x] = [\sqrt{5}] = 2$$

2. Neúplný podíl u_1 dosadíme do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, z níž získáme x_1, viz následující úpravy:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x_1} \quad |\cdot(-2)$$

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{x_1} \quad \left|\cdot \frac{x_1}{\sqrt{5} - 2}\right.$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \quad \left|\cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5} + 2}\right.$$

$$x_1 = \sqrt{5} + 2$$

3. Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2:

$$u_2 = [x_1] = [\sqrt{5} + 2] = 4$$

4. Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2, viz následující úpravy:

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{x_2} \,|-4$$

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{x_2} \quad \Big| \cdot \frac{x_2}{\sqrt{5}-2}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}$$

$$x_2 = \sqrt{5} + 2$$

Jelikož platí rovnost $x_1 = x_2 = \sqrt{5} + 2$, další neúplné podíly budou rovny u_2. Hledaným zlomkem je tedy zlomek $(2, \bar{4})$ s jednoprvkovou periodou, tzn. platí rovnost $\sqrt{5} = (2, \bar{4})$.

Příklad 3.3.2

Vyjádři iracionální číslo $\sqrt{10}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení:

1. První neúplný podíl u_1 je roven celé části $\sqrt{10}$:

$$u_1 = [x] = [\sqrt{10}] = 3$$

2. Neúplný podíl $u_1$dosadíme do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, z níž získáme x_1, viz následující úpravy:

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{x_1} \quad |-3$$

$$\sqrt{10} - 3 = \frac{1}{x_1} \quad \Big| \cdot \frac{x_1}{\sqrt{10}-3}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}-3} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3}$$

$$x_1 = \sqrt{10} + 3$$

3. Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2:

$$u_2 = [x_1] = [\sqrt{10} + 3] = 6$$

4. Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2, viz následující úpravy:

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{10} + 3 = 6 + \frac{1}{x_2} \quad |-6$$

$$\sqrt{10} - 3 = \frac{1}{x_2} \quad \left| \cdot \frac{x_2}{\sqrt{10} - 3} \right.$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{10} + 3} \right.$$

$$x_2 = \sqrt{10} + 3$$

Jelikož opět platí rovnost $x_1 = x_2 = \sqrt{10} + 3$, periodu jsme již našli. Hledaným zlomkem je tedy zlomek $(3, \bar{6})$ s jednoprvkovou periodou, tzn. platí rovnost $\sqrt{10} = (3, \bar{6})$.

Příklad 3.3.3

Vyjádři iracionální číslo $\sqrt{7}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení:

1. První neúplný podíl u_1 je roven celé části $\sqrt{7}$:

$$u_1 = [x] = [\sqrt{7}] = 2$$

2. Neúplný podíl u_1 dosadíme do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, z níž získáme x_1, viz následující úpravy:

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x_1} \quad |-2$$

$$\sqrt{7} - 2 = \frac{1}{x_1} \quad \left| \cdot \frac{x_1}{\sqrt{7} - 2} \right.$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2} \right.$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

3. Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2:

$$u_2 = [x] = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1$$

4. Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2, viz následující úpravy:

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad \Big| -1$$

$$\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1 = \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3} = \frac{1}{x_2} \quad \Big| \cdot \frac{3x_2}{\sqrt{7}-1}$$

$$x_2 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}$$

$$x_2 = \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

5. Jelikož $x_1 \neq x_2$, nebude se tentokrát jednat o zlomek s jednoprvkovou periodou. Jsme tak nuceni vyjádřit třetí neúplný podíl u_3, tj.:

$$u_3 = [x_2] = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right] = 1$$

6. Pro získání čísla x_3 postupujeme obdobně jako v druhém a čtvrtém kroku, viz následující úpravy:

$$x_2 = u_3 + \frac{1}{x_3}$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_3} \quad \Big| -1$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 = \frac{1}{x_3} \quad \Big| \cdot \frac{2x_3}{\sqrt{7}-1}$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}$$

$$x_3 = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$$

7. Vyjádříme čtvrtý neúplný podíl u_4:

$$u_4 = [x_3] = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right] = 1$$

8. Analogicky dle předchozích kroků nalezneme číslo x_4, viz následující úpravy:

$$x_3 = u_4 + \frac{1}{x_4}$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{x_4} \quad |-1$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1 = \frac{1}{x_4}$$

$$\frac{\sqrt{7}-2}{3} = \frac{1}{x_4} \quad \Big| \cdot \frac{3x_4}{\sqrt{7}-2}$$

$$x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$$

$$x_4 = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$$

$$x_4 = \sqrt{7}+2$$

9. Vyjádříme pátý neúplný podíl u_5:

$$u_5 = [x_4] = [\sqrt{7}+2] = 4$$

10. Analogicky dle předchozích kroků nalezneme číslo x_5:

$$x_4 = u_5 + \frac{1}{u_5}$$

$$\sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{x_5} \quad |-4$$

$$\sqrt{7} - 2 = \frac{1}{x_5} \quad \left| \cdot \frac{x_5}{\sqrt{7}-2} \right.$$

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} \right.$$

$$x_5 = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

Číslo x_5 je rovno číslu x_1, tzn. periodu tvoří čtyři neúplné podíly u_2, u_3, u_4, u_5. Druhou odmocninu ze sedmi je tedy možné vyjádřit pravidelným řetězovým zlomek s čtyřprvkovou periodou, tzn. platí rovnost $\sqrt{7} = (2, \overline{1114})$.

Pokud se podíváme na výsledný řetězový zlomek prozatím posledního příkladu, snadno postřehneme vztah mezi prvky u_1 a u_5. Neboli je platné tvrzení, že je poslední prvek periody dvojnásobkem prvního prvku u_1, čímž jsme objevili novou vlastnost daných řetězových zlomků.

Dále si zpětně prohlédněme všechny dosud vyjádřené druhé odmocniny:

$$\sqrt{5} = (2, \bar{4}),\ \sqrt{10} = (3, \bar{6}),\ \sqrt{7} = (2, \overline{1114}).$$

Jejich porovnáním zjistíme, že perioda všech získaných zlomků vždy počínala prvkem u_2. Zvídaví čtenáři by mohli nahlédnutím do Vítovy knihy Řetězové zlomky [19], v níž je uvedena tabulka 43 řetězových zlomků pro $N \leq 50$, zjistit, že i periody všech těchto periodických řetězových zlomů počíná též prvkem u_2. Je nutné podotknout, že daná vlastnost se vztahuje na všechny periodické řetězové zlomky vyjadřující druhé odmocniny přirozených čísel.

Definice 3.3.1 (kvadratické iracionality)

Všechna iracionální čísla ve tvaru $\frac{C \pm \sqrt{\mathcal{H}}}{D}$, kde $C,\ D \in \mathbb{Z} \wedge \sqrt{\mathcal{H}} \in \mathbb{I}$ (tzn. $\mathcal{H}$ není kvadrátem přirozeného čísla) nazýváme **kvadratické iracionality**. [14, s. 35; 46, s. 91]

Věta 3.3.1

Pro řetězový zlomek kvadratické iracionality $\sqrt{\mathcal{H}}$, kde $\mathcal{H} \in \mathbb{N} \wedge \mathcal{H}$ není kvadrátem přirozeného čísla, platí rovnost

$$\sqrt{\mathcal{H}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_3, u_2, 2u_1).$$

[46, s. 98]

Důkaz věty 3.3.1 je uveden ve dvanácté kapitole Vítovy knihy Řetězové zlomky [46, s. 99-102].

3.4 Lagrangeova věta

Nadešel čas vrátit se zpět do antického Řecka a zodpovědět si, jak se zdejší Pythagorejci s první krizí matematiky vypořádali. Nesouměřitelnost zapříčinila rozvrácení jejich přesvědčení o vzájemném vztahu mezi čísly a geometrickými veličinami. Theodoros z Kyrény (asi 460 až 399 př.n.l.) [4, s. 8] našel způsob, jak zkonstruovat druhé odmocniny přirozených čísel od $\sqrt{2}$ až po $\sqrt{17}$. [36, s. 27] Jistý Archytás z Tarentu (asi 428 až 365 př.n.l.) [4, s. 8] zjistil, že jsou iracionální všechny číselné výrazy ve tvaru $\sqrt{n(n+1)}$ [36, s. 28], poté přišel jeho žák Eudoxos z Knidu (asi 408 až 355 př.n.l.) [4, s. 8] s teorií proporcí. [36, s. 28] Postupem času došlo k rozvoji řecké geometrie, k rozmachu eukleidovských úloh a též ke vzniku úloh, které Eukleidovými konstrukcemi vyřešit nelze.

V průběhu historie matematiky bylo vymyšleno mnoho způsobů, jak se k numerickým hodnotám kvadratických iracionalit co s nejpřesnější aproximací přiblížit, kupříkladu lze užít metodu tečen či Newtonovu metodu. Přelom v problematice vyjádření kvadratických iracionalit však nastal až s velmi významnou Lagrangeovou větou. Daná věta konstatuje, že pro všechny druhé odmocniny z oboru iracionalit lze nalézt periodický pravidelný řetězový zlomek. Čili nám již nebude činit problém vyjádřit nezávisle na kalkulátoru jakoukoliv druhou odmocninu v konečném tvaru s velmi přesným racionálním přiblížením. Důkaz Lagrangerovy věty je proveden v třinácté kapitole Vítovy knihy [46] nebo v desáté podkapitole Chinčinovy knihy [25].

Věta 3.4.1 (Lagrangeova věta)

„Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz tvaru $\dfrac{C \pm \sqrt{\mathcal{H}}}{D}$ (kde C, D jsou celá čísla, $\mathcal{H}$ nenulové přirozené číslo takové, že $\sqrt{\mathcal{H}}$ je iracionální číslo) lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. Každý periodický zlomek je hodnota nějaké kvadratické iracionality.“ [14, s. 35]

Příklad 3.4.1

Uprav iracionální číslo $\sqrt{47}$ do tvaru řetězového zlomku.

Řešení:

1. První neúplný podíl u_1 je roven celé části $\sqrt{47}$:

$$u_1 = [x] = [\sqrt{47}] = 6$$

2. Neúplný podíl $u_1$dosadíme do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, z níž získáme x_1, viz následující úpravy:

$$\begin{aligned}
\sqrt{47} &= 6 + \frac{1}{x_1} \quad \Big| -6 \\
\sqrt{47} - 6 &= \frac{1}{x_1} \quad \Big| \cdot \frac{x_1}{\sqrt{47}-6} \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{47}-6} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{47}+6}{\sqrt{47}+6} \\
x_1 &= \frac{\sqrt{47}+6}{11}
\end{aligned}$$

3. Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2:

$$u_2 = [x_1] = \left[\frac{\sqrt{47}+6}{11}\right] = 1$$

4. Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2, viz následující úpravy:

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{47}+6}{11} &= 1 + \frac{1}{x_2} \quad \Big| -1 \\
\frac{\sqrt{47}+6}{11} - 1 &= \frac{1}{x_2} \\
\frac{\sqrt{47}-5}{11} &= \frac{1}{x_2} \quad \Big| \cdot \frac{11x_2}{\sqrt{47}-5}
\end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{11}{\sqrt{47}-5)} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{47}+5}{\sqrt{47}+5}$$

$$x_2 = \frac{11(\sqrt{47}+5)}{22}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{47}+5}{2}$$

5. Vyjádříme třetí neúplný podíl u_3:

$$u_3 = [x_2] = \left[\frac{\sqrt{47}+5}{2}\right] = 5$$

6. Pro učení čísla x_3 postupujeme obdobně jako v druhém a čtvrtém kroku, viz následující úpravy:

$$x_2 = u_3 + \frac{1}{x_3}$$

$$\frac{\sqrt{47}+5}{2} = 5 + \frac{1}{x_3} \quad |-5$$

$$\frac{\sqrt{47}+5}{2} - 5 = \frac{1}{x_3}$$

$$\frac{\sqrt{47}-5}{2} = \frac{1}{x_3} \quad \Big| \cdot \frac{2x_3}{\sqrt{47}-5}$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{47}-5} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{47}+5}{\sqrt{47}+5}$$

$$x_3 = \frac{2(\sqrt{47}+5)}{22}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{47}+5}{11}$$

7. Vyjádříme čtvrtý neúplný podíl u_4:

$$u_4 = [x_3] = \left[\frac{\sqrt{47}+5}{11}\right] = 1$$

8. Analogicky dle předchozích kroků nalezneme číslo x_4, viz následující úpravy:

$$x_3 = u_4 + \frac{1}{x_4}$$

$$\frac{\sqrt{47}+5}{11} = 1 + \frac{1}{x_4} \quad \Big| -1$$

$$\frac{\sqrt{47}+5}{11} - 1 = \frac{1}{x_4}$$

$$\frac{\sqrt{47}-6}{11} = \frac{1}{x_4} \quad \Bigg| \cdot \frac{11x_4}{\sqrt{47}-6}$$

$$x_4 = \frac{11}{\sqrt{47}-6} \quad \Bigg| \cdot \frac{\sqrt{47}+6}{\sqrt{47}+6}$$

$$x_4 = \frac{11(\sqrt{47}+6)}{11}$$

$$x_4 = \sqrt{47}+6$$

9. Vyjádříme pátý neúplný podíl u_5:

$$u_5 = [x_4] = [\sqrt{47}+6] = 12$$

Stejně jako v předchozím příkladu má hledaný prvek čtyřprvkovou periodu. Dle věty 3.3.1 číslo x_5 již vyjadřovat nemusíme, neboť je prvek u_5 roven dvojnásobku u_1, tzn. platí rovnost $u_5 = 2u_1$. Zároveň se potvrdila očekávaná symetričnost, kterou jsme zaznamenali rovností $u_4 = u_2$ (viz 3. a 7. krok řešení). Řešením tohoto příkladu je tedy rovnost $\sqrt{47} = (u_1, \overline{u_2, u_3, u_2, 2u_1})= (6, \overline{1, 5, 1, 12})= (6, \overline{15112})$.

V nadcházející kapitole si nejprve nadefinujeme matematický pojem kongruence spadající do elementární algebry. Cílem je pochopení toho, co nám chtějí matematici sdělit o vztahu dvou čísel, nazvou-li je kongruentními. Čtvrtou kapitolu této diplomové práce poté následně završíme lineární kongruencí, při jejímž řešení dospějeme k dalšímu možnému užití řetězových zlomků.

4 Kongruence

4.1 Uvedení do problematiky

Definice 4.1.1 (kongruence)

Je dáno přirozené číslo m, které má minimálně dva různé dělitele. Pro každou dvojici celých čísel a, b, jejichž rozdíl je dělitelný daným číslem m, tj. $m|(a-b)$, platí tvrzení, že a je *kongruentní* s b podle modulo m.

Píšeme:$\forall a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2 : a \equiv b (\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow m|(a-b)$. [10, s. 29]

Pro přiblížení nově definovaného pojmu budeme v následujícím příkladu pracovat místo proměnných a, b s numerickými hodnotami.

Příklad 4.1.1

Nalezněte nejmenší možné modulo m:

a) pro $a = 7$ a $b = 2$

b) pro $a = 11$ a $b = 9$

c) pro $a = -10$ a $b = -3$

Řešení:

a) Pokud je $a = 7$ a $b = 2$, modulo m získáme dosazením do definice 4.1.1:

$$a = 7, b = 2, m \in N \wedge m \geq 2 : 7 \equiv 2 (\operatorname{mod} m) \Longleftrightarrow m|(7-2)$$

Pro přehlednost si z definice ekvivalenci přepišme:

$$7 \equiv 2 (\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow m|5.$$

Dle pravé strany ekvivalence je hledané modulo m dělitelné pěti. Řešením je proto

$$m = 5.$$

b) Pokud je $a = 11$ a $b = 9$, modulo m získáme dosazením do definice 4.1.1:

$$a = 11, b = 9, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2 : 11 \equiv 9 (\operatorname{mod} m) \Longleftrightarrow m|(11-9)$$

Pro přehlednost si z definice ekvivalenci přepišme:

$$11 \equiv 9 (\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow m|2.$$

Dle pravé strany ekvivalence je hledané modulo m dělitelné dvěma. Řešením je proto

$$m = 2.$$

c) Pokud je $a = -10$ a $b = -3$, modulo m získáme dosazením do definice 4.1.1:

$$a = -10, b = -3, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2 : -10 \equiv -3 (\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow m|[-10 - (-3)].$$

Pro přehlednost si z definice přepišme ekvivalenci:

$$-10 \equiv -3(\text{mod} m) \Longleftrightarrow m|(-7).$$

Dle pravé strany ekvivalence je hledané modulo m dělitelné minus sedmi. Ačkoliv je dělitel záporný, modulo m bude vzhledem k definici opět kladné. Řešením je proto

$$m = 7.$$

Přestože si již dovedeme pomocí definice najít modulo m, stále jsme prozatím nenalezli k pojmu kongruence slovo, které by vystihlo hlavní myšlenku této matematické operace. Abychom jej objevili, musíme v získaných řešeních najít jejich kontinuitu. Pro usnadnění si je všechna vypišme.

a) $a = 7, b = 2 :$

$$7 \equiv 2(\text{mod} m) \Leftrightarrow m|5$$

$$m = 5$$

b) $a = 11, b = 9 :$

$$11 \equiv 9(\text{mod} m) \Leftrightarrow m|2$$

$$m = 2$$

c) $a = -10, b = -3 :$

$$-10 \equiv -3(\text{mod} m) \Leftrightarrow m|(-7)$$

$$m = 7$$

V zadání a) bylo modulo m rovno pěti, všimněme si, že vyjde jak po dělení 7/5, tak i po dělení 2/5 neúplný podíl se zbytkem rovným dvěma. V zadání b) bylo modulo m rovno dvěma, pokud opět vydělíme proměnné a, b, tzn. vypočteme 11/2 a 9/2, oba neúplné podíly budou se zbytkem jedna. Stejný zbytek po dělení vyjde i v zadání c). Objevili jsme tak toužebnou kontinuitu a tím i význam kongruence. Pokud je zbytek po dělení modulo m u dvou různých čísel stejný, řekneme, že jsou tato čísla kongruentní.

Příklad 4.1.2

Nalezněte zbytek po dělení 15^{112} číslem 26.

Řešení:

$$15^2 = 225$$

$$15^2 \equiv 17 \pmod{26} \ \ |^2$$

$$15^4 \equiv 17^2 \pmod{26}$$

$$15^4 \equiv 3 \pmod{26} \ \ |^4$$

$$15^{16} \equiv 3^4 \pmod{26}$$

$$15^{16} \equiv 3 \pmod{26} \ \ |^7$$

$$15^{112} \equiv 3^7 \pmod{26}$$

$$15^{112} \equiv 3 \pmod{26}$$

Zbytkem po dělení 15^{112} číslem 26 je číslo 3.

4.2 Řešení lineární kongruence užitím řetězových zlomků

Definice 4.2.1 (lineární kongruence o jedné neznámé)

Je dána dvojice celých čísel a, b a přirozené číslo m, které má minimálně dva různé dělitele.

Lineární kongruencí o jedné neznámé x je kongruence $ax \equiv b(\bmod m)$, kde dané číslem m není dělitelem celého čísla a, tj. $m \nmid a$.

Píšeme: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2 \wedge m \nmid a : ax \equiv b(\bmod m)$. [21, s. 188]

Všimněme si, že již nebudeme řešit vztah dvou čísel nýbrž rovnici s neznámou x, což je klíčový rozdíl mezi matematickými pojmy kongruence (definice 4.1.1) a lineární kongruence. Navažme na předchozí podkapitolu a uvědomme si, že matematický zápis $ax \equiv b(\bmod m)$ čte korektně každý matematik jako ax je kongruentní s b podle modulo m. Přičemž po dělení ax a b modulo m získáme stejný zbytek.

Dříve než začneme řešit konkrétní příklady lineární kongruence, popišme si postupné kroky, díky nimž se prodereme k hledané numerické hodnotě neznámé x. Nejprve potřebujeme vyjádřit sblížené zlomky podílu m/a, k čemuž využijeme znalosti získané v podkapitole 2.3. Poté si všechny jmenovatele spolu s čitateli sblížených zlomků včetně všech neúplných podílů zapíšeme do přehledné tabulky.

Tabulka 4.1: Tabulka proměnných u_j,A_j,B_j

u_1	u_2	u_3	...
A_1	A_2	A_3	...
B_1	B_2	B_3	...

Následně užijeme větu 4.2.1, již uvádí včetně důkazu Pavel Vít ve své knize [46, s. 32-33, s. 129-130]

Věta 4.2.1

Řešení kongruence ve tvaru $ax \equiv b(\bmod m)$ je rovno

a) pro $x \in 0, 1, \ldots, m-1$ výrazu $x \equiv (-1)^{n-1} A_{n-1} (\bmod m)$,

b) pro $x \notin 0, 1, \ldots, m-1$ výrazu $x_0 = x + mt$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Z uvedené věty je zjevné, že z vyjádřených sblížených zlomků budeme potřebovat jmenovatel A_{n-1}, kde hodnota n uvádí počet neúplných podílů spolu se zmiňovanými sblíženými zlomky. I přesto si však vyjadřme skutečně všechny sblížené zlomky, abychom tak pracovali s větším přehledem a neudělali zbytečnou chybu. Po vyřešení lineární kongruence si své výpočty ověříme zkouškou.

Příklad 4.2.1

Vyřešte kongruenci $21x \equiv 13 (\mathrm{mod}\, 83)$.

Řešení:

1) Užitím Euklidova algoritmu získáme neúplné podíly zlomku 83/21.

$$m = au_1 + r_1 \rightarrow 83 = 21 \cdot 3 + 20$$

$$a = r_1 u_2 + r_2 \rightarrow 21 = 20 \cdot 1 + 1$$

$$r_1 = r_2 u_3 + r_3 \rightarrow 20 = 1 \cdot 20 + 0$$

Námi hledané neúplné podíly zlomku 83/21 jsou tedy: $u_1 = 3, u_2 = 1, u_3 = 20$.

$$\frac{83}{21} = (3, 1, 20)$$

2) Ze získaných neúplných podílů vyjádříme tři sblížené zlomky.

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1} \rightarrow 3 = \frac{3}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2} \rightarrow 3 + \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{4}{1} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_3 = u_3 A_2 + A_1 \rightarrow A_3 = 20 \cdot 4 + 3 = 83 \\ B_3 = u_3 B_2 + B_1 \rightarrow B_3 = 20 \cdot 1 + 1 = 21 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_3}{B_3} = \frac{83}{21}$$

3) Jmenovatele spolu s čitateli sblížených zlomků včetně neúplných podílů zapíšeme do tabulky 4.1.

Tabulka 4.2: Tabulka proměnných u_j,A_j,B_j zlomku 83/21

3	1	20	...
3	4	83	...
1	1	21	...

4) Nyní užijeme větu 4.2.1, tzn. vyjádříme x z výrazu $x \equiv (-1)^{n-1} A_{n-1} (\bmod m)$.

$$x \equiv (-1)^2 A_2 b \,(\bmod m)$$

$$x \equiv 4 \cdot 13 \,(\bmod 83)$$

$$x \equiv 52 \,(\bmod 83)$$

Dle věty 4.2.1 je $x = 52$ řešením kongruence $21x \equiv 13(\bmod 83)$, tzn. $x \in 0, 1, \ldots, 82$.
5) Správnost našeho postupu ověříme podílem vycházejícím z definice kongruence (definice 4.1.1).

$$\frac{ax - b}{m} = \frac{(21 \cdot 52) - 13}{83}$$

$$\frac{ax - b}{m} = \frac{1\,092 - 13}{83}$$

$$\frac{ax - b}{m} = \frac{1\,079}{83}$$

$$\frac{ax - b}{m} = 13$$

Příklad 4.2.2

Vyřešte kongruenci $32x \equiv 7(\bmod 105)$.

Řešení:

1) Užitím Euklidova algoritmu získáme neúplné podíly zlomku 105/32.

$$m = au_1 + r_1 \rightarrow 105 = 32 \cdot 3 + 9$$

$$a = r_1 u_2 + r_2 \rightarrow 32 = 9 \cdot 3 + 5$$

$$r_1 = r_2 u_3 + r_3 \rightarrow 9 = 5 \cdot 1 + 4$$

$$r_2 = r_3 u_4 + r_4 \rightarrow 5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$r_3 = r_4 u_5 + r_5 \rightarrow 4 = 1 \cdot 4 + 0$$

Námi hledané neúplné podíly zlomku 105/32 jsou tedy: $u_1 = 3, u_2 = 3, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 4$.

$$105/32 = (3, 3, 1, 1, 4)$$

2) Ze získaných neúplných podílů vyjádříme pět sblížených zlomků.

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1} \rightarrow 3 = \frac{3}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2} \rightarrow 3 + \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{10}{3} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_3 = u_3 A_2 + A_1 \rightarrow A_3 = 1 \cdot 10 + 3 = 13 \\ B_3 = u_3 B_2 + B_1 \rightarrow B_3 = 1 \cdot 3 + 1 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_3}{B_3} = \frac{13}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_4 = u_4 A_3 + A_2 \rightarrow A_4 = 1 \cdot 13 + 10 = 23 \\ B_4 = u_4 B_3 + B_2 \rightarrow B_4 = 1 \cdot 4 + 3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_4}{B_4} = \frac{23}{7}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_5 = u_5 A_4 + A_3 \rightarrow A_5 = 4 \cdot 23 + 13 = 105 \\ B_5 = u_5 B_4 + B_3 \rightarrow B_5 = 4 \cdot 7 + 4 = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_5}{B_5} = \frac{105}{32}$$

3) Jmenovatele s čitateli sblížených zlomků včetně neúplných podílů zapíšeme do tabulky 4.1.

Tabulka 4.3: Tabulka proměnných u_j,A_j,B_j zlomku 105/32

3	3	1	1	4	...
3	10	13	23	105	...
1	3	4	7	32	...

4) Nyní užijeme větu 4.2.1, tzn. vyjádříme x z výrazu $x \equiv (-1)^{n-1} A_{n-1} (\mathrm{mod}\, m)$.

$$x \equiv (-1)^4 A_4 b \,(\mathrm{mod}\, m)$$

$$x \equiv 23 \cdot 7 \,(\mathrm{mod}\, 105)$$

$$x \equiv 161 \pmod{105}$$

5) Vzhledem ke skutečnosti, že nalezené x nenáleží množině$0, 1, \ldots, m-1$, řešením bude x_0, které obdržíme z výrazu $x_0 = x + mt$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

$$x_0 = 161 + 105 \cdot (-1)$$

$$x_0 = 56$$

6) Správnost našeho postupu ověříme podílem vycházejícím z definice kongruence (definice 4.1.1).

$$\frac{ax-b}{m} = \frac{(32 \cdot 56) - 7}{105}$$

$$\frac{ax-b}{m} = \frac{1\,792 - 7}{105}$$

$$\frac{ax-b}{m} = \frac{1\,785}{105}$$

$$\frac{ax-b}{m} = 17$$

5 Pellova rovnice

5.1 Diofantické rovnice

Pellova rovnice, o níž druhá kapitola pojednává, je speciálním typem tzv. *kvadratické diofantické rovnice.*

Definice 5.1.1 (diofantická rovnice)

„Diofantickou rovnicí o n neznámých se rozumí algebraická rovnice s celočíselnými koeficienty s n neznámými, které mohou nabývat pouze celočíselných hodnot." [7, s. 42]

Definice 5.1.2 (kvadratická diofantická rovnice o dvou neznámých)

„Kvadratickou diofantickou rovnicí o dvou neznámých x, y rozumíme rovnici

$$ax^2 + bx + cxy + dy + ey^2 = f,$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$
Řešením rovnice je každá uspořádaná dvojice $[x, y] \in \mathbb{Z}^2$." [15, s. 81]

Diofantos, po němž jsou rovnice nazvány, žil v třetím století našeho letopočtu v Alexandrii ve starověkém Egyptě. [11, 13, 32, 40] Diofantos se navždy zapsal do dějin jako Otec algebry. [11, 12, 32] Položil základy algebry, významně přispěl k teorii čísel [32, 40] a dle dochovaných zdrojů byl prvním, kdo zavedl symboly pro matematické operace a proměnné. [12, 32] Stále mu však chyběly symboly pro obecné metody, např. pro operaci násobení. [12] V nejstarších dochovaných kopiích jeho nejslavnějšího a současně nejvýznamnějšího díla Aritmetika je symbolem neznámých řecké písmeno sigma s přízvukem ς'. [11] Z původních 13 knih Aritmetiky se v Evropě dochovalo pouhých šest, teprve roku 1968 byly objeveny další 4 knihy v arabském překladu matematika Qusṭā ibn Lūqā z devátého století. [40]

V Aritmetice je sepsáno mnoho nových ojedinělých myšlenek a pozoruhodných úloh včetně značného počtu záhad dodnes nerozřešených. [28, s. 53] Pojednává o numerických řešeních determinovaných i neurčitých rovnic. Neurčité rovnice jsou polynomiální rovnice, v nichž počet proměnných převyšuje počet zadaných rovnic. [11, 12, 32] Diofantos v úlohách nevyužíval žádné obecné komplexní metody řešení a zároveň neuvedl postupné kroky, jimiž se k výsledku dopracoval. [12] Ačkoliv se sám Diofantos zabýval výhradně pouze kladnými racionálními čísly, dnes definujeme diofantickou rovnici jako neurčitou, jejímž řešením jsou čísla celá. [11, 12, 40]

Diofantos řešil jak rovnice prvního a druhého stupně (tj. lineární a kvadratické), tak i stupňů vyšších. [40] My svou pozornost zaměříme především na dva typy kvadratických diofantických rovnic, tj. na Pellovu rovnici a její zobecnění.

5.2 Historie Pellovy rovnice

Definice 5.2.1 (Pellova rovnice)

$$x^2 - \mathcal{H}y^2 = 1,$$

kde x, y náleží oboru celých čísel a $\mathcal{H}$ oboru čísel přirozených, přičemž není druhou mocninou.
Píšeme: $\mathcal{H} \in \mathbb{N} \wedge \mathcal{H} \neq n^2, \text{kde}\, n \in \mathbb{N}$. [5, s. 194]

Pellova rovnice... již víme, že jde o jistou kvadratickou diofantickou rovnici. Ale netušíme nic o metodě jejího řešení ani o počtu možných řešení. Má Pellova rovnice vždy jen jedno řešení, nebo nastávají případy, kdy má řešení více? Či naopak existují i takové Pellovy rovnice, které nemají řešení žádné? Kdo byl onen muž, po němž je rovnice pojmenována? A zasloužil se daný muž svými pracemi o tu čest, aby rovnice nesla jeho jméno?

Opět nastaly otázky, které nás navádějí k navrácení se na palubu lodi, s níž jsme pluli řekou času. Jak už to tak v oceánu definic, vět a rovnic občas bývá, Pell nikdy nebyl mužem, který by se jakkoliv zasloužil o přivlastnění rovnice svým jménem o nic více než jiní. Kvadratickou diofantickou rovnici $x^2 - \mathcal{H}y^2 = 1$ (kde $\mathcal{H}$ není kvadrátem a náleží oboru celých čísel) nazval Pellovou Leonard Euler. [47, s. 1] Metodu řešení však tehdy popsal matematik lord Brouncker. Pellovi Euler rovnici mylně připsal na základě studia *Wallisovy algebry*, k níž přispěli oba jmenovaní. Pell se sice rovnicí zabýval, ale nebyl tím, kdo by uvedl metody řešení. [47, s. 2]

Nejčastěji zmiňovanou úlohou pracující s Pellovou rovnicí je proslulá Archimédova úloha o býcích, která se zabírá otázkou počtu býků a krav čtyř barev ve stádu. „*Úloha se převádí na hledání celočíselných řešení rovnice* $t^2 - 4\,729\,494n^2 = 1$.“ [28, s. 52-53] Považuji za nezbytné zmínit velmi pozoruhodnou skutečnost vypovídající o relativně krátkém časovém úseku mezi Diofantovým odchodem z našeho světa a příchodem Archiméda. Archimédes ze Syrakus, autor zmiňované úlohy, se dle dostupných zdrojů narodil zřejmě jen pár let po Diofantově smrti. [28, s. 52]

S tvrzením konstatujícím, že řešení rovnice $x^2 - \mathcal{H}y^2 = 1$ jsou celočíselná a je jich nekonečně mnoho, přišel jako první Pierre de Fermat (1601-1665) [42, s. 105, 244], francouzský právník z Toulouse [42, s. 98]. Jeho tvrzení však bylo dokázáno až v druhé polovině sedmdesátých letech 18. století matematikem italsko-francouzského původu, Josephem Louisem Lagrangem (1736-1813) [42, s. 118, 134; 48, s. 90].

Kdo byl však prvním řešitelem naší obecné rovnice? Pro odpověď musíme proplout čtrnáct století, čímž tak směřujeme do sedmého století po Kristu. Za kým? Za astronomem a ortodoxním hinduistou [20], který se nejvíce proslavil sepsáním textu zvaném *Brāhma-sphuta-siddhānta*. [31; 44, s. 36] Jak je již z názvu tohoto velkolepého díla více než patrné, jeho autorem je ctihodný Brahmagupta. Ve zmiňované práci věnoval matematice několik kapitol. [20] Byl to právě on, kdo zavedl nulu a kdo sepsal pravidla pro aplikaci aritmetických operací v rámci vztahu mezi kladnými a zápornými čísly (tj. mezi „majetkem“ a „dluhem“). [20; 28, s. 80; 31] V oblasti geometrie nejvíce přispěl v trigonometrii [20, 31, 45], dále například zavedl vzorec pro výpočet obsahu tětivového čtyřúhelníku, tj. $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d))}$, kde je proměnná s rovna polovině jeho obvodu, tj. $s = (a+b+c+d)/2 = o/2$. [19, s. 5; 28, s. 82] Ukázal, jak lze nalézt řešení Pellovy rovnici ve tvaru $ax^2+1=y^2$ pomocí rovnice $ax^2+b=y^2$. Brahmagupta však vždy nalezl pouze jedno celočíselné řešení. Pozdější řešitelé, tj. Śrīpati, Bhāskara II. a Nārāyaṇa ale objevili, že rovnice má řešení nekonečně mnoho. [44, s. 37]

Podrobněji se již historií Pellovy rovnice zabývat nebudeme. Zvídaví čtenáři se mohou o osudu Pellovy rovnice v myslích ctihodných indických matematiků dočíst v článku [44].

My se nyní navraťme zpět do současného století. Zatímco tehdejší matematici museli vše pracně vypočítat, dnes v 21. století jsou pro nás samotná řešení mnoha rovnic díky rozmachu vývoje v oblasti matematických programů v rámci informační technologie pouhou banalitou. Ovšem matematickým programům se budeme věnovat až v poslední kapitole. Nyní se zaměřme na pochopení postupu, s ním řešení Pellovy rovnice získáme bez sebemenší pomoci jakéhokoliv programu. Pro zpětnou kontrolu našich řešení se mohou čtenáři prozatím obrátit k výčtu celočíselných řešení, která jsou vypsána v mnoha textech. Velkou oporou se může stát např. kniha [29], v níž jsou v tabulce *TABLE X.* vypsána celočíselná řešení pro $\mathcal{H} = 2$ až po $\mathcal{H} = 1003$ [29, s. 437-444].

5.3 Algoritmus řešení

Dříve než se začneme zabývat obecným řešením Pellovy rovnice, uvědomme si, co lze o rovnici říci už nyní. Na první pohled je zřejmé, že se jedná o popis hyperboly v kartézské soustavě souřadnic se středem $S = [0,0]$ a hlavními vrcholy $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, které jsou zároveň triviálními řešeními této diofantické rovnice. Jestliže nalezneme alespoň jednu dvojici $[x,y]$, kdy $x, y \in \mathbb{N}$ jsou řešením rovnice, pak dalšími řešeními jsou uspořádané dvojice $[x,-y], [-x,y], [-x,-y]$.

Tabulka 5.1: Tabulka proměnných u_j, A_{j_0}, B_{j_0}

	u_1	u_2	u_3	...
A_0	A_1	A_2	A_3	...
B_0	A_1	B_2	B_3	...

Dále lze mnohočlen na levé straně rovnice rozložit podle vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$x^2 - \mathcal{H}y^2 = (x - y\sqrt{\mathcal{H}})(x + y\sqrt{\mathcal{H}})$$

Jelikož budeme hledat pouze kladné dvojice $[x, y]$ vyhovující dané rovnici, z námi rozloženého mnohočlenu je patrné, že všechna hledaná řešení zapíšeme jako součet souřadnice x a součinu souřadnice y s kvadratickou iracionalitou $\sqrt{\mathcal{H}}$ (definice 1.4.4), tj. $x + y\sqrt{\mathcal{H}}$. [5, s. 194]

Prvním krokem k nalezení řešení Pellovy rovnice bude vyjádření kvadratické iracionality $\sqrt{\mathcal{H}}$ řetězovým zlomkem. Poté užijeme znalost nabytou již v úvodu diplomové práce (viz podkapitola 1.2) ohledně výpočtu sblížených zlomků A_{j_0}/B_{j_0} , kde $j_0 \in \mathbb{N}_0$. Následně si vytvoříme tabulku, jež bude obsahovat všechny jmenovatele a čitatela sblížených zlomků, kde $A_0 = 1$ a $B_0 = 0$ a neúplné podíly $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

K zjištění nejmenšího kladného řešení nám pak již postačí znalost věty uvedené v nacházející podkapitole, již cituji z Bicanova článku [2, s. 195].

5.4 Nejmenší kladné řešení

Věta 5.4.1

Nechť existuje nekonečný řetězový zlomek s periodou k příslušný kvadratické iracionalitě $\sqrt{\mathcal{H}}$. Potom je nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice ve tvaru:

a) $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}} = A_k + B_k\sqrt{\mathcal{H}}$, pro k sudé,

b) $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}} = A_{2k} + B_{2k}\sqrt{\mathcal{H}}$, pro k liché.

Příklad 5.4.1

Nalezněte nejmenší kladné řešení rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$.

Řešení:

1) K řetězovému zlomku příslušnému číslu $\sqrt{10}$ jsme již dospěli ve čtvrté kapitole v příkladu 3.3.2. Lze proto přímo napsat rovnost $\sqrt{10} = (3, \overline{6})$, tzn. do tabulky 4 později zapíšeme dva neúplné podíly: $u_1 = 3, u_2 = 6$.

2) Nalezneme první dva sblížené zlomky.

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1} \to 3 = \frac{3}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2} \to 3 + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 1}{6} = \frac{19}{6} = \frac{A_2}{B_2}$$

3) Jmenovatele s čitateli sblížených zlomků včetně neúplných podílů zapíšeme do tabulky 5.1.

Tabulka 5.2: Tabulka proměnných u_j, A_{j_0}, B_{j_0} čísla $\sqrt{10}$

	3	6	...
1	3	19	...
0	1	6	...

4) Nejmenší kladné řešení nalezneme pomocí věty 5.4.1 Řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{10}$ má jednoprvkovou periodou, tj. $k = 1$. Z uvedené věty tedy užijeme výraz určený pro lichou periodu.

$$j = A_2 k + B_{2k}\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = A_2 + B_2\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = 19 + 6\sqrt{10}$$

Nejmenším kladným řešením rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$ je tedy $j = 19 + 6\sqrt{10}$, odkud $[\overline{x}, \overline{y}] = [19, 6]$.

Příklad 5.4.2

Nalezněte nejmenší kladné řešení rovnice $x^2 - 7y^2 = 1$.

Řešení:

1) K řetězovému zlomku příslušnému k číslu $\sqrt{7}$ jsme již též dospěli ve čtvrté kapitole, a to v příkladu 3.3.3 (viz str. 26). Lze tedy přímo napsat rovnost $\sqrt{7}$=$(2,\overline{1114})$, tzn. do tabulky 4 zapíšeme tentokrát pět neúplných podílů: $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 4$.

2) Nalezneme pět sblížených zlomků.

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1} \to 2 = \frac{2}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2} \to 2 + \frac{1}{1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{3}{1} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_3 = u_3 A_2 + A_1 \to A_3 = 1 \cdot 3 + 2 = 5 \\ B_3 = u_3 B_2 + B_1 \to B_3 = 1 \cdot 1 + 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_3}{B_3} = \frac{5}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_4 = u_4 A_3 + A_2 \to A_4 = 1 \cdot 5 + 3 = 8 \\ B_4 = u_4 B_3 + B_2 \to B_4 = 1 \cdot 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_4}{B_4} = \frac{8}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_5 = u_5 A_4 + A_3 \to A_5 = 4 \cdot 8 + 5 = 37 \\ B_5 = u_5 B_4 + B_3 \to B_5 = 4 \cdot 3 + 2 = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_5}{B_5} = \frac{37}{14}$$

3) Jmenovatele s čitateli sblížených zlomků včetně neúplných podílů zapíšeme do tabulky 5.1.

Tabulka 5.3: Tabulka proměnných u_j, A_{j_0}, B_{j_0} čísla $\sqrt{7}$

	2	1	1	1	4	...
1	2	3	5	8	37	...
0	1	1	2	3	14	...

4) Nejmenší kladné řešení nalezneme pomocí věty 5.4.1. Řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{7}$ má čtyřprvkovou periodou, tj. $k = 4$. Z uvedené věty tedy užijeme výraz určený pro sudou periodu.

$$j = A_k + B_k\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = A_4 + B_4\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = 8 + 3\sqrt{7}$$

Nejmenším kladným řešením rovnice $x^2 - 7y^2 = 1$ je tedy $j = 8 + 3\sqrt{7}$, odkud $[\overline{x}, \overline{y}] = [8, 3]$.

5.5 Všechna kladná řešení

V této chvíli se ještě zaměřme na poslední úskalí Pellovy rovnice, tj. zjištění všech dalších kladných řešení. Pro pokoření tohoto úskalí nám budou nápomocny další dvě věty, s nimiž lze dospět k výsledku dvěma způsoby. Obě metody řešení vychází z Bicanových vět (věta 5.5.1 a věta 5.5.2) [5, s. 195]. Obě metody vzápětí užijeme pro již řešené rovnice (5.4.1, 5.4.2).

Věta 5.5.1

Nechť $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$ je nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice, pak j^n, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou právě všechna kladná řešení této rovnice.

Věta 5.5.2

Nechť $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$je nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice, pak platí rovnost:

$$j^{(n+2)} = 2\overline{x}j^{(n+1)} - j^n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Do vzorce věty 5.5.2 budeme za proměnnou $\overline{x}$ dosazovat A_k či A_{2k}, tedy celé číslo z nejmenšího kladného řešení (viz věta 5.4.1). Všechna získaná řešení dosadíme pro přehlednost do tabulky, kde $x_0 = A_0 = 1$,$y_0 = B_0 = 0$.

Tabulka 5.4: Tabulka uspořádaných dvojic řešení $[x_{j_0}, y_{j_0}]$

x_0	x_1	x_2	x_3	...
y_0	y_1	y_2	y_3	...

Při řešení následujících příkladů rozdělíme třetí a čtvrtý krok na dvě části a) a b), kdy v a) užijeme větu 5.5.1 a v b) větu 5.5.2.

Příklad 5.5.1

Nalezněte čtyři nejmenší kladná řešení rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$.

Řešení:

1) Nejmenší kladné řešení jsme již nalezli v příkladu 5.4.1.

$$j = 19 + 6\sqrt{10}$$

2) Pro další krok vyjádříme j^0. K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 19 + 6\sqrt{10}$.

$$j^0 = \left(19 + 6\sqrt{10}\right)^0$$

$$j^0 = 1$$

3) Vyjádříme j^2. Pro metodu b) je proměnná x rovna A_1, tj. $x = A_1 = 19$.

a) K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 19 + 6\sqrt{10}$.

$$j^2 = (19 + 6\sqrt{10})^2$$

$$j^2 = 361 + 228\sqrt{10} + 360$$

$$j^2 = 721 + 228\sqrt{10}$$

b) Užijeme větu 5.5.2.

$$j^2 = 2x_1 j - j^0$$

$$j^2 = 2 \cdot 19 \cdot (19 + 6\sqrt{10}) - 1$$

$$j^2 = 722 + 228\sqrt{10} - 1$$

$$j^2 = 721 + 228\sqrt{10}$$

4) Další dvě řešení najdeme opět umocněním či dosazením do vzorce.

a) Dle věty 5.5.1 opět umocníme nejmenší kladné řešení.

$$j^3 = (19 + 6\sqrt{10})^3$$

$$j^3 = (19 + 6\sqrt{10}) \cdot (19 + 6\sqrt{10})$$

$$j^3 = (721 + 228\sqrt{10}) \cdot (19 + 6\sqrt{10})$$

$$j^3 = 13\,699 + 4\,326\sqrt{10} + 4\,332\sqrt{10} + 13\,680$$

$$j^3 = 27\,379 + 8\,658\sqrt{10}$$

$$j^4 = (19 + 6\sqrt{10})^4$$

$$j^4 = (19 + 6\sqrt{10})^3 \cdot (19 + 6\sqrt{10})$$

$$j^4 = (27\,379 + 8\,658\sqrt{}10) \cdot (19 + 6\sqrt{10})$$

$$j^4 = 520\,201 + 164\,274\sqrt{10} + 164\,502\sqrt{10} + 519\,480$$

$$j^4 = 1\,039\,681 + 328\,776\sqrt{10}$$

b) Dle věty 5.5.2 najdeme další dvě řešení opět dosazením do vzorce $j^{(n+2)} = 2\overline{x}j^{(n+1)} - j^n$, přičemž proměnná $\overline{x}$ je stále rovna čitateli sblíženého zlomkuA_1.

$$j^3 = 2\overline{x}_1 j^2 - j$$

$$j^3 = 2 \cdot 19 \cdot (721 + 228\sqrt{10}) - (19 + 6\sqrt{10})$$

$$j^3 = 27\,398 + 8\,664\sqrt{10} - 19 - 6\sqrt{10}$$

$$j^3 = 27\,379 + 8\,658\sqrt{10}$$

$$j^4 = 2\overline{x}_1 j^3 - j^2$$

$$j^4 = 2 \cdot 19 \cdot (27\,379 + 8\,658\sqrt{10}) - (721 + 228\sqrt{10})$$

$$j^4 = 1\,040\,402 + 329\,004\sqrt{10} - 721 - 228\sqrt{10}$$

$$j^4 = 1\,039\,681 + 328\,776\sqrt{10}$$

5) Nyní již všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ přepíšeme do tabulky 5.4.

Tabulka 5.5: Tabulka uspořádaných dvojic řešení $[x_{j_0}, y_{j_0}]$rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$

1	19	721	27 379	1 039 681
0	6	228	8 675	328 776

Příklad 5.5.2

Nalezněte čtyři nejmenší kladná řešení rovnice $x^2 - 7y^2 = 1$.

Řešení:

1) Nejmenší kladné řešení jsme již nalezli v příkladu 5.4.2.

$$j = 8 + 3\sqrt{7}$$

2) Pro další krok vyjádříme j^0. K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 8 + 3\sqrt{7}$.

$$j = 8 + 3\sqrt{7}$$

$$j^0 = 1$$

3) Vyjádřímejj^2. Pro metodu b) je proměnná x rovna A_4, tj. $x = A_4 = 8$.

a) K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 8 + 3\sqrt{7}$.

$$j^2 = (8 + 3\sqrt{7})^2$$

$$j^2 = 64 + 48\sqrt{7} + 63$$

$$j^2 = 127 + 48\sqrt{7}$$

b) Užijeme větu 5.5.2.

$$j^2 = 2\overline{x}_1 j - j^0$$

$$j^2 = 2 \cdot 8 \cdot (8 + 3\sqrt{7}) - 1$$

$$j^2 = 128 + 48\sqrt{7} - 1$$

$$j^2 = 127 + 48\sqrt{7}$$

4) Další dvě řešení najdeme opět umocněním či dosazením do vzorce.

a) Dle věty 5.5.1 opět umocníme nejmenší kladné řešení.

$$j^3 = (8 + 3\sqrt{7})^3$$

$$j^3 = (8 + 3\sqrt{7})^2 \cdot (8 + 3\sqrt{7})$$

$$j^3 = (127 + 48\sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7})$$

$$j^3 = 1\,016 + 381\sqrt{7} + 384\sqrt{7} + 1\,008$$

$$j^3 = 2\,024 + 765\sqrt{7}$$

$$j^4 = (8 + 3\sqrt{7})^4$$

$$j^4 = (8 + 3\sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7})$$

$$j^4 = (2\,024 + 765\sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7})$$

$$j^4 = 16\,192 + 6\,072\sqrt{7} + 6\,120\sqrt{7} + 16\,065$$

$$j^4 = 32\,257 + 12\,192\sqrt{7}$$

b) Dle věty 5.5.2 najdeme další dvě řešení opět dosazením do vzorce $j^{n+2} = 2\overline{x}j^{n+1} - j^n$, přičemž proměnná x je stále rovna čitateli sblíženého zlomku A_1.

$$j^3 = 2\overline{x}_1 j^2 - j$$

$$j^3 = 2 \cdot 8 \cdot (127 + 48\sqrt{7}) - (8 + 3\sqrt{7})$$

$$j^3 = 2\,032 + 768\sqrt{7} - 8 - 3\sqrt{7}$$

$$j^3 = 2\,024 + 765\sqrt{7}$$

$$j^4 = 2\overline{x}_1 j^3 - j^2$$

$$j^4 = 2 \cdot 8 \cdot (2\,024 + 765\sqrt{7}) - (127 + 48\sqrt{7})$$

$$j^4 = 32\,384 + 12\,240\sqrt{7} - 127 - 48\sqrt{7}$$

$$j^4 = 32\,257 + 12\,192\sqrt{7}$$

5) Nyní již všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ přepíšeme do tabulky 5.4.

Tabulka 5.6: Tabulka uspořádaných dvojic řešení $[x_{j_0}, y_{j_0}]$rovnice$x^2 - 7y^2 = 1$

1	8	127	2 024	32 257
0	3	48	765	12 192

Doposud jsme si řešení Pellovy rovnice rozčlenili do po sobě jdoucích příkladů. Pojďme si proto nyní jednu Pellovu rovnici vyřešit celistvě, tzn. od samotného hledání řetězového zlomku příslušného k $\sqrt{\mathcal{H}}$, až po nalezení více kladných řešení.

Příklad 5.5.3

Nalezněte šest nejmenších kladných řešení rovnice $x^2 - 24y^2 = 1$.

Řešení:

1) Vyjádříme $\sqrt{24}$ ve tvaru řetězového zlomku.

a) První neúplný podíl u_1 je roven celé části $\sqrt{24}$.

$$u_1 = [x] = [\sqrt{24}] = 4$$

b) Neúplný podíl dosadíme do rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$, z níž získáme x_1.

$$\sqrt{24} = (4 + \frac{1}{x_1}) \quad |-4$$

$$\sqrt{24} - 4 = \frac{1}{x_1} \quad \Big| \cdot \frac{x_1}{\sqrt{24} - 4}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{24} - 4} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{24} + 4}{\sqrt{24} + 4}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{24} + 4}{8}$$

c) Vyjádříme druhý neúplný podíl u_2.

$$u_2 = [x_1] = \left[\frac{\sqrt{24} + 4}{8}\right] = 1$$

d) Přepíšeme indexy v rovnosti $x = u_1 + \dfrac{1}{x_1}$ a nalezneme číslo x_2.

$$x_1 = u_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\sqrt{24}+4}{8} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad |-1$$

$$\frac{\sqrt{24}+4}{8} - 1 = \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{\sqrt{24}-4}{8} = \frac{1}{x_2} \quad \Big| \cdot \frac{8x_2}{\sqrt{24}-4}$$

$$x_2 = \frac{8}{\sqrt{24}-4} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{24}+4}{\sqrt{24}+4}$$

$$x_2 = \frac{8(\sqrt{24}+4)}{8}$$

$$x_2 = \sqrt{24}+4$$

e) Vyjádříme třetí neúplný podíl u_3.

$$u_3 = [x_2] = [\sqrt{24}+4] = 8$$

S ohlédnutím na větu 3.3.1 již nemusíme dále počítat, neboť víme, že pro všechny kvadratické iracionality platí rovnost $\sqrt{\mathcal{H}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_3, u_2, 2u_1)$. Hledaným zlomkem je tedy zlomek $(4, \overline{18})$ s dvouprvkovou periodou, tj. $\sqrt{24} = (4, \overline{18})$. Do tabulky tedy později zapíšeme tři neúplné podíly: $u_1 = 4, u_2 = 1, u_3 = 8$.

2) Nalezneme tři sblížené zlomky.

$$u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{A_1}{B_1} \to 4 = \frac{4}{1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$u_1 + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1u_2+1}{u_2} = \frac{A_2}{B_2} \to 4 + \frac{1}{1} = \frac{4\cdot 1+1}{1} = \frac{5}{1} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$\left.\begin{aligned} A_3 = u_3A_2 + A_1 \to A_3 = 8\cdot 5 + 4 = 44 \\ B_3 = u_3B_2 + B_1 \to B_3 = 8\cdot 1 + 1 = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_3}{B_3} = \frac{44}{9}$$

3) Jmenovatele s čitateli sblížených zlomků včetně neúplných podílů zapíšeme do tabulky 5.1.

Tabulka 5.7: Tabulka proměnných u_j, A_{j_0}, B_{j_0} čísla $\sqrt{24}$

	4	1	8	...
1	4	5	44	...
0	1	1	9	...

4) Nejmenší kladné řešení nalezneme pomocí věty 5.4.1. Řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{24}$ má dvouprvkovou periodou, tj. $k = 2$. Z uvedené věty tedy užijeme výraz určený pro sudou periodu.

$$j = A_k + B_k\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = A_2 + B_2\sqrt{\mathcal{H}}$$

$$j = 5 + 1\sqrt{24}$$

$$j = 5 + \sqrt{24}$$

Nejmenším kladným řešením rovnice $x^2-24y^2 = 1$ je tedy $j = 5+\sqrt{24}$, odkud $[\overline{x}, \overline{y}] = [5, 1]$.

5) Pro další krok vyjádříme j^0.

K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 8 + 3\sqrt{7}$.

$$j^0 = (8 + 3\sqrt{7})^0$$

$$j^0 = 1$$

6) Vyjádříme j^2. Pro metodu b) je proměnná x rovna A_2, tj. $x = A_2 = 5$.

a) K užití věty 5.5.1 postačí nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $j = 5 + \sqrt{24}$.

$$j^2 = (5 + \sqrt{24})^2$$

$$j^2 = 25 + 10\sqrt{24} + 24$$

$$j^2 = 49 + 10\sqrt{24}$$

b) Užijeme větu 5.5.2.

$$j^2 = 2\overline{x}_1 j - j^0$$

$$j^2 = 2 \cdot 5 \cdot (5 + \sqrt{24}) - 1$$

$$j^2 = 50 + 10\sqrt{24} - 1$$

$$j^2 = 49 + 10\sqrt{24}$$

7) Další řešení najdeme opět umocněním či dosazením do vzorce.

a) Dle věty 5.5.1 opět umocníme nejmenší kladné řešení.

$$j^3 = (5 + \sqrt{24})^3$$
$$j^3 = (5 + \sqrt{24})^3(5 + \sqrt{24})$$
$$j^3 = (49 + 10\sqrt{24})(5 + \sqrt{24})$$
$$j^3 = 245 + 49\sqrt{24} + 50\sqrt{24} + 240$$

$$j^3 = 485 + 99\sqrt{24}$$

$$j^4 = (5 + \sqrt{24})^4$$
$$j^4 = (5 + \sqrt{24})^3(5 + \sqrt{24})$$
$$j^4 = (485 + 99\sqrt{24})(5 + \sqrt{24})$$
$$j^4 = 2\,425 + 485\sqrt{24} + 495\sqrt{24} + 2\,376$$
$$j^4 = 4\,801 + 980\sqrt{24}$$

$$j^5 = (5 + \sqrt{24})^5$$

$$j^5 = (5 + \sqrt{24})^4(5 + \sqrt{24})$$

$$j^5 = (4\,801 + 980\sqrt{24})(5 + \sqrt{24})$$

$$j^5 = 24\,005 + 4\,801\sqrt{24} + 4\,900\sqrt{24} + 23\,520$$
$$j^5 = 47\,525 + 9\,701\sqrt{24}$$

$$j^6 = (5+\sqrt{24})^6$$

$$j^6 = (5+\sqrt{24})^5(5+\sqrt{24})$$

$$j^6 = (47\,525 + 9\,701\sqrt{24}) \cdot (5+\sqrt{24})$$

$$j^6 = 237\,625 + 47\,525\sqrt{24} + 48\,505\sqrt{24} + 232\,824$$

$$j^6 = 470\,449 + 96\,030\sqrt{24}$$

b) Dle věty 5.5.2 najdeme další dvě řešení opět dosazením do vzorce $j^{n+2} = 2xj^{n+1} - j^n$, přičemž proměnná x je stále rovna čitateli sblíženého zlomku A_1.

$$j^3 = 2\overline{x}_1 j^2 - j$$
$$j^3 = 2 \cdot 5 \cdot (49 + 10\sqrt{24}) - (5+\sqrt{24})$$
$$j^3 = 490 + 100\sqrt{24} - 5 - \sqrt{24}$$

$$j^3 = 485 + 99\sqrt{24}$$

$$j^4 = 2\overline{x}_1 j^3 - j^2$$

$$j^4 = 2 \cdot 5 \cdot (485 + 99\sqrt{24}) - (49 + 10\sqrt{24})$$

$$j^4 = 4\,850 + 990\sqrt{24} - 49 - 10\sqrt{24}$$

$$j^4 = 4\,801 + 980\sqrt{24}$$

$$j^5 = 2\overline{x}_1 j^4 - j^3$$

$$j^5 = 2 \cdot 5 \cdot (4\,801 + 980\sqrt{24}) - (485 + 99\sqrt{24})$$

$$j^5 = 48\,010 + 9\,800\sqrt{24} - 485 - 99\sqrt{24}$$

$$j^5 = 47\,525 + 9\,701\sqrt{24}$$

$$j^6 = 2\overline{x}_1 j^5 - j^4$$

$$j^6 = 2 \cdot 5 \cdot (47\,525 + 9\,701\sqrt{24}) - (4\,801 + 980\sqrt{24})$$

$$j^6 = 475\,250 + 97\,010\sqrt{24} - 4\,801 - 980\sqrt{24}$$

$$j^6 = 470\,449 + 96\,030\sqrt{24}$$

8) Nyní si již všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ dosadíme do tabulky 5.4.

Tabulka 5.8: Tabulka uspořádaných dvojic řešení $[x_{j_0}, y_{j_0}]$rovnice $x^2 - 24y^2 = 1$

1	5	49	485	4 801	47 525	470 449
0	1	10	99	980	9 701	96 030

6 Zobecněná Pellova rovnice

6.1 Úvodní terminologie

Definice 6.1.1 (zobecněná Pellova rovnice)

Zobecněná Pellova rovnice je neurčitá (diofantická) rovnice ve tvaru

$$x^2 - \mathcal{H}y^2 = C,$$

kde $\mathcal{H}$ náleží oboru přirozených čísel, přičemž není druhou mocninou, a kde C náleží oboru celých čísel. Píšeme: $\mathcal{H} \in N \wedge \mathcal{H} \neq n^2 \wedge C \in \mathbb{Z}$, kde $n \in \mathbb{N}$. [6, s. 258-259]

Zatímco námi již známá Pellova rovnice $x^2 - \mathcal{H}y^2 = 1$ má vždy nekonečně mnoho řešení, zobecněná Pellova rovnice $x^2 - \mathcal{H}y^2 = C$ má někdy nekonečně mnoho řešení, ale pro některé hodnoty C může nastat situace, kdy u dané zobecněné Pellovy rovnice nebude existovat řešení žádné. Dále samozřejmě nesmíme opomenout skutečnost, že se jedná o diofantickou rovnici, což opět vymezuje řešení pouze na obor celých čísel jako tomu bylo u Pellovy rovnice. Abychom problematice zobecněné Pellovy rovnice co nejvíce porozuměli, vypišme si nyní jednotlivá značení, která musíme pro řešení této rovnice bezpodmínečně znát. [6, s. 258-259]

Poznámka 1 – značení užitá v průběhu řešení zobecněné Pellovy rovnice

- nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice: $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$
- inverzní nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice: $j^{-1} = \overline{x} - \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$
- libovolné řešení zobecněné Pellovy rovnice: $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$
- absolutní hodnota řešení α: $|\alpha| = |x| + |y|\sqrt{\mathcal{H}}$
- levé řešení $\alpha : \alpha j^{-1}$
- pravé řešení $\alpha : \alpha j$
- série řešení rovnice: $\{\alpha, |\alpha j^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ nebo $\{aj^n\}_{n=0}^{\infty}$ (viz Poznámka 2)

Jak již bylo poznamenáno, zobecněná Pellova rovnice může mít nekonečně mnoho řešení nebo nemá řešení žádné. Pojďme si proto obecně projít všechny situace, která mohou u řešení dané rovnice nastat. [6, s. 258]

Poznámka 2 – druhy řešení zobecněné Pellovy rovnice

Konečné řešení zobecněné Pellovy rovnice se odvíjí v závislosti na řešení α. Jestliže je řešení $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$

1. nezáporné, pak posloupností řešení rozumíme posloupnost $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$,
2. kladné a levé řešení αj^{j-1} je záporné, pak dvojicí posloupností řešení $\{\alpha, |\alpha j^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ rozumíme sérii řešení rovnice,
3. nezáporné a zároveň není kladné, tzv. je alespoň jedna souřadnice z dvojice celých čísel (x, y) rovna nule, a levé řešení αj^{-1} je záporné, pak je sérií řešení posloupnost $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$.

6.2 Algoritmus řešení

V této chvíli, kdy jsme již obeznámeni dostatečným kvantem pojmosloví a všemi situacemi, které mohou v průběhu řešení nastat, plynule přejděme k celistvému řešení libovolné zobecněné Pellovy rovnice. Prvním krokem řešení zobecněné Pellovy rovnice bude nalezení nejmenšího kladného řešení Pellovy rovnice (viz věta 5.4.1), čímž využijeme námi nabyté znalosti v předchozí kapitole této diplomové práce. V druhém kroku nám bude nápomocná následující věta 6.2.1, jež byla uvedená Ladislavem Bicanem v článku [6].

Věta 6.2.1

Nechť jsou dány nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice ve tvaru$j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$ a nejmenší nezáporné řešení zobecněné Pellovy rovnice $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$. Potom platí:

a) $y \leq \sqrt{\dfrac{\mathcal{C}(\overline{x}-1)}{2\mathcal{H}}}$, pro $C > 0$,

b) $\sqrt{-\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{H}}} \leq y \leq \sqrt{\dfrac{-C(\overline{x}+1)}{2\mathcal{H}}}$, pro $C < 0$.

Dle věty 6.2.1 tedy v druhém kroku nalezneme pro souřadnici y konečnou množinu celých čísel. Pracovat budeme s numerickými hodnotami $\mathcal{H}$ a C, které vyčteme ze zadané zobecněné Pellovy rovnice, včetně souřadnice x vyjádřené v nejmenším řešením Pellovy rovnice, tj. $j = \overline{x} + \overline{y}\sqrt{\mathcal{H}}$.

V následujícím kroku všechna celá čísla ze získané spočetné množiny náležející souřadnici y postupně dosadíme do rovnice $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$, přičemž ovšem musí i proměnná x náležet oboru čísel celých. Pokud nebude žádné x naši podmínku splňovat, daná zobecněná Pellova rovnice nebude mít samozřejmě řešení žádné. Jestliže budou existovat uspořádané dvojice celočíselných řešení $[x, y]$, ke každému řešení utvoříme sérii $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}_{n=0}^{\infty}$, čímž získáme všechna nezáporná řešení.

Příklad 6.2.1

Vyřešte rovnici $x^2 - 10y^2 = 27$.

Řešení:

1. Nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$ jsme již získali v druhé kapitole v příkladu 5.4.1:
$$j = 19 + 6\sqrt{10}, \text{ odkud } [\overline{x}, \overline{y}] = [19, 6].$$

2. Dle věty 6.2.1 najdeme množinu celých čísel pro souřadnici y z nerovnosti a), pro $C > 0$.
$$y \leq \sqrt{\frac{C(\overline{x} - 1)}{2\mathcal{H}}}$$
$$y \leq \sqrt{\frac{27 \cdot (19 - 1)}{2 \cdot 10}}$$
$$y \leq \sqrt{\frac{486}{20}}$$
$$y \leq \sqrt{24,3} < 5$$

3. Pro všechna $y \in 1, 2, 3, 4$ vyjádříme x z výrazu $\alpha = x + y\sqrt{H}$.
$$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{27 + 10{y_1}^2}$$
$$x_1 = \sqrt{27 + 10 \cdot 1^2}$$
$$x_1 = \sqrt{37}$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{27 + 10{y_2}^2}$$
$$x_2 = \sqrt{27 + 10 \cdot 2^2}$$
$$x_2 = \sqrt{67}$$

$$y_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{27 + 10{y_3}^2}$$
$$x_3 = \sqrt{27 + 10 \cdot 3^2}$$
$$x_3 = \sqrt{117}$$

$$y_4 = 4 \Rightarrow x_4 = \sqrt{27 + 10{y_4}^2}$$

$$x_4 = \sqrt{27 + 10 \cdot 4^2}$$

$$x_4 = \sqrt{187}$$

Žádné námi vyjádřené x nenáleží oboru celých čísel, z čehož vyplývá, že uvedená zobecněná Pellova rovnice $x^2 - 10y^2 = 27$ nemá řešení žádné.

Příklad 6.2.2

Vyřešte rovnici $x^2 - 10y^2 = 81$.

Řešení

1. Nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$ jsme již získali v druhé kapitole v příkladu 5.4.1:$j = 19 + 6\sqrt{10}$, odkud $[\overline{x}, \overline{y}] = [19, 6]$.

2. Dle věty 6.2.1 najdeme množinu celých čísel pro y z nerovnosti a), pro $C > 0$.

$$y \leq \sqrt{\frac{C(\overline{x} - 1)}{2\mathcal{H}}}$$

$$y \leq \sqrt{\frac{81 \cdot (19 - 1)}{2 \cdot 10}}$$

$$y \leq \sqrt{\frac{1\,458}{20}} < 9$$

$$y \leq \sqrt{72,9} < 9$$

3. Pro všechna $y \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ vyjádříme x z rovnice $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$.

$$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{81 + 10y_1^2}$$

$$x_1 = \sqrt{81 + 10 \cdot 1^2}$$

$$x_1 = \sqrt{91}$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{81 + 10y_2^2}$$

$$x_2 = \sqrt{81 + 10 \cdot 2^2}$$

$$x_2 = \sqrt{121}$$

$$x_2 = 11$$

$$y_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{81 + 10y_3^2}$$

$$x_3 = \sqrt{81 + 10 \cdot 3^2}$$

$$x_3 = \sqrt{171}$$

$$y_4 = 4 \Rightarrow x_4 = \sqrt{81 + 10y_4^2}$$

$$x_4 = \sqrt{81 + 10 \cdot 4^2}$$

$$x_4 = \sqrt{241}$$

$$y_5 = 5 \Rightarrow x_5 = \sqrt{81 + 10y_5^2}$$

$$x_5 = \sqrt{81 + 10 \cdot 5^2}$$

$$x_5 = \sqrt{331}$$

$$y_6 = 6 \Rightarrow x_6 = \sqrt{81 + 10y_6^2}$$

$$x_6 = \sqrt{81 + 10 \cdot 6^2}$$

$$x_6 = \sqrt{441}$$

$$x_6 = 21$$

$$y_7 = 7 \Rightarrow x_7 = \sqrt{81 + 10y_7^2}$$

$$x_7 = \sqrt{81 + 10 \cdot 7^2}$$

$$x_7 = \sqrt{571}$$

$$y_8 = 7 \Rightarrow x_8 = \sqrt{81 + 10y_8^2}$$
$$x_8 = \sqrt{81 + 10 \cdot 8^2}$$
$$x_8 = \sqrt{721}$$

Souřadnice x_2a x_6 náleží oboru celých čísel, tudíž jsme nalezli dvě uspořádané dvojice celých čísel $[x_2, y_2] = [11, 2]$ a $[x_6, y_6] = [21, 6]$. Řešením zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = 81$ jsou tedy proto výrazy: $\alpha_1 = 11 + 2\sqrt{10}$ a $\alpha_2 = 21 + 6\sqrt{10}$.

4. Utvoříme dvě série $\{\alpha, |\alpha j^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\alpha_1 = 11 + 2\sqrt{10}$, $\alpha_2 = 21 + 6\sqrt{10}$ a inverzní nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice je výraz $j^{-1} = 19 - 6\sqrt{10}$.

$$\alpha_1 j^{-1} = (11 + 2\sqrt{10})(19 - 6\sqrt{10})$$
$$\alpha_1 j^{-1} = 209 - 66\sqrt{10} + 38\sqrt{10} - 120$$
$$\alpha_1 j^{-1} = 89 - 28\sqrt{10}$$

$$\alpha_2 j^{-1} = (21 + 6\sqrt{10})(19 - 6\sqrt{10})$$
$$\alpha_2 j^{-1} = 399 - 126\sqrt{10} + 114\sqrt{10} - 360$$
$$\alpha_2 j^{-1} = 339 - 12\sqrt{41}$$

Vyjádřením obou sérií řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = 81$ jsme dosáhli všech kýžených nezáporných řešení:

$$\left\{\alpha_1, |\alpha_1 j^{-1}|\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{11 + 2\sqrt{10}, 89 - 28\sqrt{10}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\left\{\alpha_2, |\alpha_2 j^{-1}|\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{21 + 6\sqrt{10}, 339 - 12\sqrt{41}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Abychom si uvědomili, jak moc podstatné je v závislosti na větě 3.3.1 uvědomění si v druhém kroku řešení, zda je C kladné či záporné, pojďme si teď vyřešit rovnici $x^2 - 10y^2 = C$, kde bude celé číslo C opačným číslem k $C = 81$, tj. rovnici $x^2 - 10y^2 = -81$.

Příklad 6.2.3

Vyřešte rovnici $x^2 - 10y^2 = -81$.

Řešení:

Zkonstatujme si již námi vypočtené hodnoty, potřebné k získání touženého řešení. Nejmenším řešením Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = 1$ je výraz $j = 19 + 6\sqrt{10}$. Celé číslo C je záporné, tj. $C < 0$. Pro nalezení množiny celých čísel, které náleží souřadnice y, tedy proto užijeme z věty 6.2.1 nerovnost b).

$$\sqrt{-\frac{C}{\mathcal{H}}} \leq y \leq \sqrt{-\frac{C(\overline{x}+1)}{2\mathcal{H}}}$$

$$\sqrt{-\frac{81}{10}} \leq y \leq \sqrt{-\frac{-(-81)(19-1)}{2 \cdot 10}}$$

$$\sqrt{-\frac{81}{10}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1\,458}{20}}$$

$$\sqrt{-8{,}1} < 3 \leq y \leq \sqrt{72{,}9} < 9$$

Novou množinu celých čísel, které náleží souřadnice y, je tedy množina $3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Podíváme-li se tak nyní výše na předchozí příklad, zjistíme, že pro vyjádření všech řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - 10y^2 = -81$ postačí pouze jedna série řešení $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}_{n=0}^{\infty}$: $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}_{n=0}^{\infty} = \left\{21 + 6\sqrt{10},\ 339 - 12\sqrt{41}\right\}_{n=0}^{\infty}$

Příklad 6.2.4

Vyřešte rovnici $x^2 - 7y^2 = 37$.

Řešení:

1. Nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 7y^2 = 1$ jsme již získali v páté kapitole v příkladu 5.4.2:
$$j = 8 + 3\sqrt{7}, \text{ odkud } [\overline{x}, \overline{y}] = [8, 3].$$

2. Dle věty 6.2.1 najdeme množinu celých čísel pro y z nerovnosti a), pro $C > 0$.

$$y \leq \sqrt{\frac{C(\overline{x}-1)}{2\mathcal{H}}}$$

$$y \leq \sqrt{\frac{37(8-1)}{2 \cdot 1}}$$

$$y \leq \sqrt{\frac{259}{14}}$$

$$y \leq \sqrt{18,5} < 5$$

3. Pro všechna $y \in 1, 2, 3, 4$ vyjádříme x z rovnice $\alpha = x + y\sqrt{\mathcal{H}}$.

$$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{37 + 7y_1^2}$$

$$x_1 = \sqrt{44}$$

$$y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{37 + 7y_2^2}$$

$$x_2 = \sqrt{65}$$

$$y_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{37 + 7y_3^2}$$

$$x_3 = \sqrt{100}$$

$$x_3 = 10$$

$$y_4 = 4 \Rightarrow x_4 = \sqrt{37 + 7y_4^2}$$

$$x_4 = \sqrt{149}$$

Souřadnice x_3 náleží oboru celých čísel, tudíž jsme nalezli uspořádanou dvojici celých čísel $[x_3, y_3] = [10, 3]$ a řešením zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - 7y^2 = 37$ je tedy proto výraz $\alpha = 10 + 3\sqrt{7}$.

4. Utvoříme sérii $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}$, kde $\alpha = 10 + 3\sqrt{7}$ a $j^{-1} = 8 - 3\sqrt{7}$.

$$\alpha j^{-1} = (10 + 3\sqrt{7})(8 + 3\sqrt{7})$$

$$\alpha j^{-1} = 80 - 30\sqrt{7} + 24\sqrt{7} - 63$$

$$\alpha j^{-1} = 17 - 6\sqrt{7}$$

Vyjádřením dané série řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - 7y^2 = 37$ jsme dosáhli všech kýžených nezáporných řešení:

$$\left\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\right\} = 10 + 3\sqrt{7}, 17 - 6\sqrt{7}.$$

7 Více o diofantických rovnicích

7.1 Pythagorejská rovnice

V oceánu definic, vět a rovnic se proudem nese samozřejmě nekonečně mnoho kvadratických diofantických rovnic. V rámci speciálních kvadratických diofantických rovnic si ještě nesmíme dovolit opomenout homogenní rovnici druhého stupně (tzn. všechny členy rovnice mají druhý stupeň), se kterou pracují i běžní žáci ve výukových hodinách matematiky v rámci povinné školní docházky. O zmiňované rovnici se poprvé dozvídáme v učebnicích matematiky pro osmé ročníky základních škol při studiu tzv. *Pythagorovy věty.* V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání je daná věta uvedena v učivu zvaném *metrické vlastnosti v rovině.*

Stejný tvar jako uvedená Pythagorova věta o pravoúhlém trojúhelníku má diofantická rovnice zvaná *pythagorejská.* Výčet jejích řešení uvádí následující věta. Zvídaví čtenáři se mohou prodrat jejím odvozením v knize [49, s. 48-51].

Věta 7.1.1

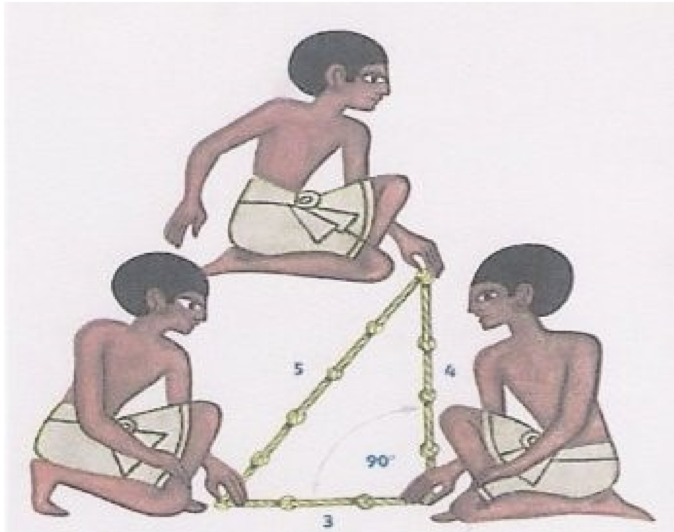
Rovnice $a^2 + b^2 = c^2$ má právě tato celočíselná řešení:

$$a = t(u^2 - v^2),\ b = 2tuv,\ c = t(u^2 + v^2),$$

kde $t, u, v \in \mathbb{N}$ a čísla u, v jsou nesoudělná s opačnou paritou a zároveň $u > v$. [49, s. 49, 51]

Někteří se možná při čtení věty pozastavili nad souslovím „různá parita“. Abychom mohli o dvou číslech říci, že mají různou paritu, musí být jedno z daných čísel sudé a druhé liché. Nejznámějším řešením rovnice $a^2 + b^2 = c^2$ je trojice čísel $\{3, 4, 5\}$. Pro dané řešení je $u = 2$ a $v = 1$. Danou trojici řešení již znali haperdonapté (tzv. napínači lan) žijící ve starověkém Egyptě. Užívali ji prostřednictvím svázaného lana, které bylo rozděleno 12 uzly na 12 stejných úseků, k vytyčování pravých úhlů při stavbě pyramid a chrámů. [39, 50]

My se však nyní navraťme ke kvadratickým diofantickým rovnicím o dvou neznámých. Seznámili jsme se s Pellovou rovnicí a jejím zobecněním. Pro další typy kvadratických diofantických rovnic existují různé algoritmy, které však již nevyužívají pouze řetězové zlomky, ale i různé substituce a jiné matematické operace.



Obrázek 7.1: Hyperdonapté [50]

7.2 Evoluce diofantických rovnic

V současnosti rámcový vzdělávací program další typy kvadratických diofantických rovnic neobsahuje. Do počátku 20. století se běžně vyučovaly ve vyšších reálných školách a gymnáziích. Poté nastala v letech 1908-1910 reforma školství, po níž zbyly v učebnicích matematiky pouze lineární diofantické rovnice. Od druhé poloviny 20. století se však už ani lineární diofantické rovnice v učebnicích nevyskytují. [15, s. 81]

V učebnici [30] se objevuje v příkladech diofantická rovnice ve tvaru $ky = a + bx + cx^2$. Daná rovnice je autorem řešena pomocí kvadratických zbytků modulo m (tj. zbytek po dělení čísla m kvadrátem celého čísla). [15, s. 84] V učebnici jsou dále řešeny i diofantické rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + cxy + dy + e = f$. Rovnice se také objevují v učebnici [34]. Podrobný postup jejich řešení je v daných učebnicích uveden. [15, s. 86-87]

Dnes se žáci základních a středních škol s diofantickými rovnicemi mohou setkat jen v rámci úloh matematické olympiády. Některé úlohy vedoucí k řešení diofantických úloh jsou spolu s řešením uvedeny v článku [15, s. 87-92].

7.3 Desátý Hilbertův problém

23. ledna roku 1862 se v pruském Königsbergu, dnešním Kaliningradu náležejícímu Rusku, u Baltského moře soudci Ottu Hilbertovi a Marii Therese Erdtmann narodil syn. [27, 35] Chlapec, který své vlohy a nadšení pro matematiku projevil na gymnáziu, kam nastoupil roku 1879 do posledního ročníku. Zdejší učitelé podporovali jeho originalitu způsobu myšlení. [35] Zřejmě tak právě díky nim našel David Hilbert sám sebe. Zanícením pro

matematiku se současně podobal své matce, kterou fascinovala astronomie, prvočísla a filosofie. [8, 35]

Matematika jej provázela od onoho posledního ročníku gymnázia celým životem. Věnoval se teorii invariantů, algebraické teorii čísel, geometrii, problémům integrálních rovnic a část svého života věnoval též aplikaci matematiky pro druhý velmi vážený přírodovědný obor, fyziku. [27, 35] 8. srpna roku 1900 přednášel na světovém matematickém kongresu v Paříži. Prezentoval zde tzv. *dvacet tři Hilbertových problémů*, kterými pokryl všechny významné oblasti matematiky. [8, 23, 27, 35] Desátý problém se zabýval otázkou ohledně řešitelnosti našich diofantických rovnic. [18, 23]

K řešení lineárních a kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých dospět dovedeme. Na lineární diofantické rovnice postačí najít největšího společného dělitele, a pokud má daná rovnice řešení, je jich nekonečně mnoho. Speciální kvadratická diofantická rovnice zvaná Pellova rovnice má řešení vždy nekonečně mnoho. Zobecněná Pellova rovnice má buď nekonečný počet řešení, anebo žádné. Pro dané rovnice se uplatňují nám již dobře známé algoritmy. Stačí ale malá změna znaménka a ze zobecněné Pellovy rovnice vznikne rovnice eliptického typu $x^2 + \mathcal{H}y^2 = 1$, kde $\mathcal{H}$ je přirozené číslo nedělitelné čtvercem a c je číslo přirozené. Takováto rovnice již zřejmě nemůže mít nekonečně mnoho řešení, ale k jejich nalezení (pokud vůbec existují) je nutné užít jiné algoritmy než ty využívající řetězové zlomky.

David Hilbert předpokládal, že univerzální postup pro řešení všech diofantických rovnic existovat nebude. Uvedením desátého problému se tudíž zabýval nalezením postupu, který by umožnil zjistit pro každou diofantickou rovnici s libovolným počtem proměnných, zda řešení má, či nikoliv. [18, 23]

Zpočátku se sice zdálo, že by se mohl nalézt postup uplatňující se alespoň pro nižší stupně rovnic. Na počátku 20. let však ještě matematici neměli dostatečné množství znalostí a prostředků, aby mohli existenci daného postupu potvrdit, či naopak vyvrátit. [18, 23] Teprve ve třicátých letech začali matematici vytvářet pojem algoritmus s jakousi předzvěstí vzniku počítačů. Vytvořili teorii algoritmů a postupem času se pak začali od myšlenky možné existence hledaného algoritmu desátého Hilbertova problému odvracet. [18, 23] K řešení problému přispěli nejvíce matematici z Ameriky. [18] Úlohu však dořešil roku 1970 matematik z Leningradu, nejlepší řešitel mezinárodní matematické olympiády z roku 1964, Jurij Vladimirovič Matijasevič. Dokázal, že řešení desátého Hilbertova problému skutečně neexistuje. Tedy neexistuje algoritmus, s jehož pomocí bychom mohli zjistit, zda je předložená diofantická rovnice řešitelná. [18, 23]

Ačkoliv byl Hilbertův desátý problém pro matematiky svízelný po mnoho desetiletí, přišel Matijasevič s poměrně snadným důkazem a využil především vlastnosti Fibonacciových čísel. [18, 23] David Hilbert však bohužel zemřel ve svých 81 letech s vědomím nedořešeného problému a nikdy se tak o jeho vyřešení ruským matematikem nedozvěděl. [8, 27, 35]

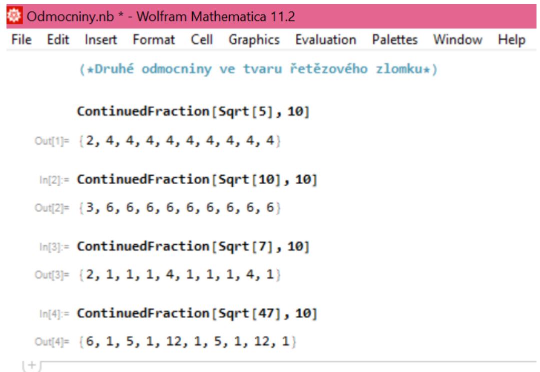
7.4 Řešení diofantických rovnic v současnosti

Poslední podkapitolou této diplomové práce si splňme slib vyřčený v řádcích podkapitoly 5.2. Tedy nahlédněme do oblasti matematických programů a kalkulátorů, které nám mohou být v současnosti nápomocny k řešení mnoha úloh.

Velmi dobrým nástrojem nám může být například program *Wolfram Mathematica*, který se vyvíjí ve firmě Wolfram Research. Zakladatelem firmy je jednašedesátiletý Brit Stephen Wolfram, jak uvedeno na webu http://www.scinet.cz/, si už jako malý chlapec vysloužil od okolí přezdívku „malý Einstein“. Před rozmachem počítačů byl jeho čas zasycen zájmem o fyziku. Počítače začal využívat roku 1973 a za pouhých pět let začal pracovat na vývoji algebraického systému *SMP* (*Symbolic Manipulation Program*), který byl uveden na trh roku 1981.

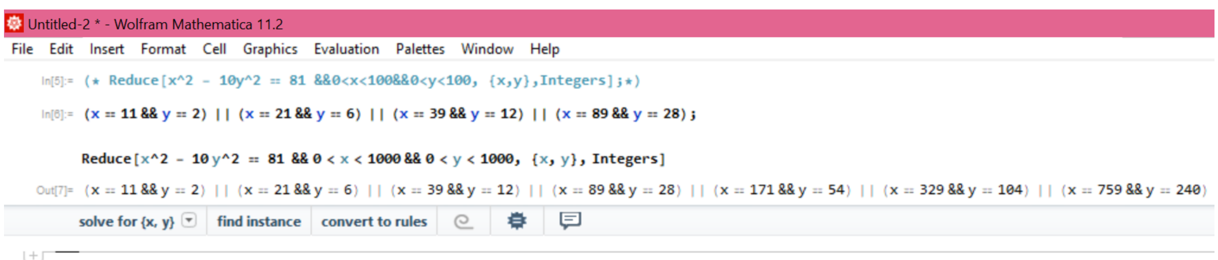
Od roku 1980 se Stephen Wolfram zabývá programy, které se samy vyvíjejí. Pomocí těchto programů by mohl vzniknout matematický model objektu jakkoliv složitého. Firma Wolfram Mathematica byla založena roku 1987 a kromě zmiňovaného programu vyvíjí pro vědu i jiné aplikace. My si teď pomocí daného programu nejprve vygenerujeme druhé odmocniny. Poté zaměříme svou pozornost na řešení kvadratických diofantických rovnic a zobrazení jejich grafů.

Pro vygenerování druhých odmocnin ve tvaru řetězového zlomku zvolíme příkaz ContinuedFraction. V daném příkazu je nutné zadat přesný počet prvků, které chceme zobrazit. Hledanou periodu tedy musíme vyčíst ze zobrazeného výčtu prvků. V obrázku 7.2 byl vždy požadován výčet 10 prvků. S ohledem na větu 3.3.1 nalezneme poslední prvek periody bez větších obtíží.



Obrázek 7.2: Druhé odmocniny ve Wolfram Mathematice

Pro nalezení řešení kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých zvolíme příkaz Reduce, v kterém budeme nuceni omezit proměnné x,y na uzavřené intervaly. Zkusme si např. vyřešit zobecněnou rocnici $x^2 - 10y^2 = 81$,kterou jsme již řešili v příkladu 6.2.2.



Obrázek 7.3: Řešení rovnice $x^2 - 10y^2 = 81$ v programu Wolfram Mathematica

Na daném screenshotu můžeme vidět, že s desetinásobným rozšířením intervalu jsme získali pouze o tři uspořádané dvojice$[x, y]$ více. Nabízí se tedy otázka, jak moc velký interval bychom museli zadat, abychom získali výrazně větší počet řešení. Seznamme se proto s dalším výpočetním programem, u něhož nejsme limitováni nutnou podmínkou zadání určitého intervalu.

Velmi nápomocným kalkulátorem pro řešení kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých je také kalkulátor zvaný Alpertron, který je narozdíl od Wolframu volně dostupný na webové stránce [1].

Zakladatelem tohoto kalkulátoru je dvaapadesátiletý inženýr Argentinec Dario Alejandro Alpern, který programuje od roku 1983. Na webové stránce je volně přístupný program pracující s prvočísly a také programy, které vygenerují na určitý počet desetinných míst číslo π, log2 a Eulerovo číslo e. Také je na webu kupříkladu mnoho procesorů, videí a aplikací včetně her.

Webové stránky jsou vskutku velmi osobité. Jsou na nich dokonce vyobrazeny dvě fotografie, na nichž je autor a jeho nejbližší, tj. milovaná žena a syn. Zároveň je lze možnost autorovi napsat a také mu dobrovolně přispět. Všechny programy a informace jsou volně dostupné bez jakéhokoliv poplatku, což je velmi obdivuhodné a srdečné. Čtenářům vřele doporučuji, aby na webovou stránku alespoň nahlédli a obohatili tak své dny.

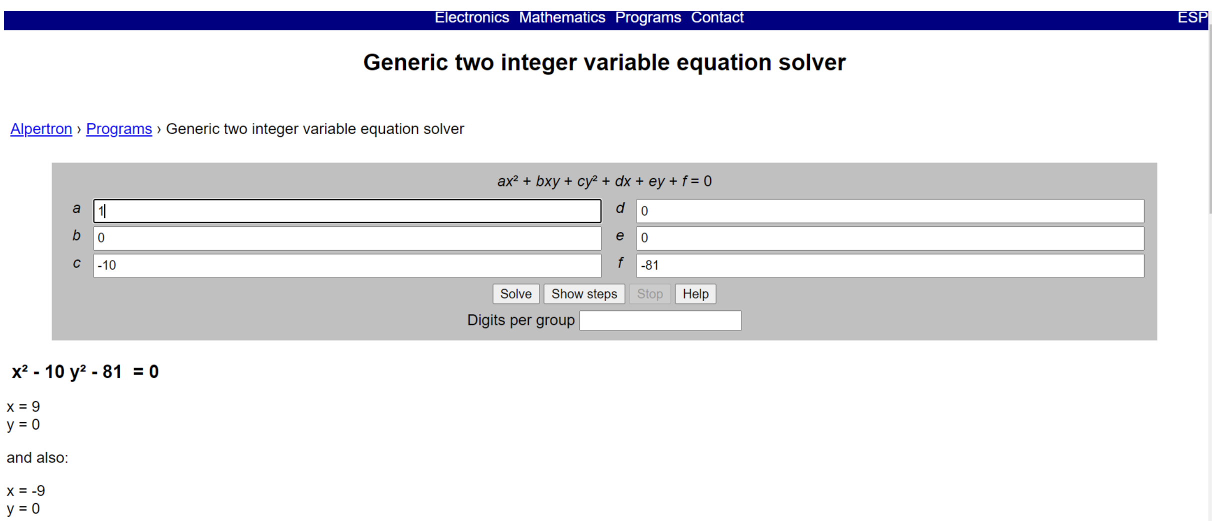
My se samozřejmě v tuto chvíli zaměříme na využití kalkulátoru (tj. calculadoras) nazvaném jako *Řešení kvadratické rovnice ve dvou celočíselných proměnných* (tj. *Resolución de ecuaciones cuadráticas en dos variables enteras*). Abychom mohli daný kalkulátor porovnat s Wolframem, vyřešme v něm stejnou zobecněnou Pellovu rovnici, tj.$x^2-10y^2 = 81$.

Kalkulátor kromě řešení zobrazených v nadcházejícím obrázku vygeneroval další uspořádané celočíselné dvojice řešení $[x, y]$:

$$[-21, 6], [21, -6], [21, 6], [-21, -6], [-11, 2], [11, -2], [11, 2], [-11, -2].$$

Dále také vygenereloval 4 rekurentní řešení:

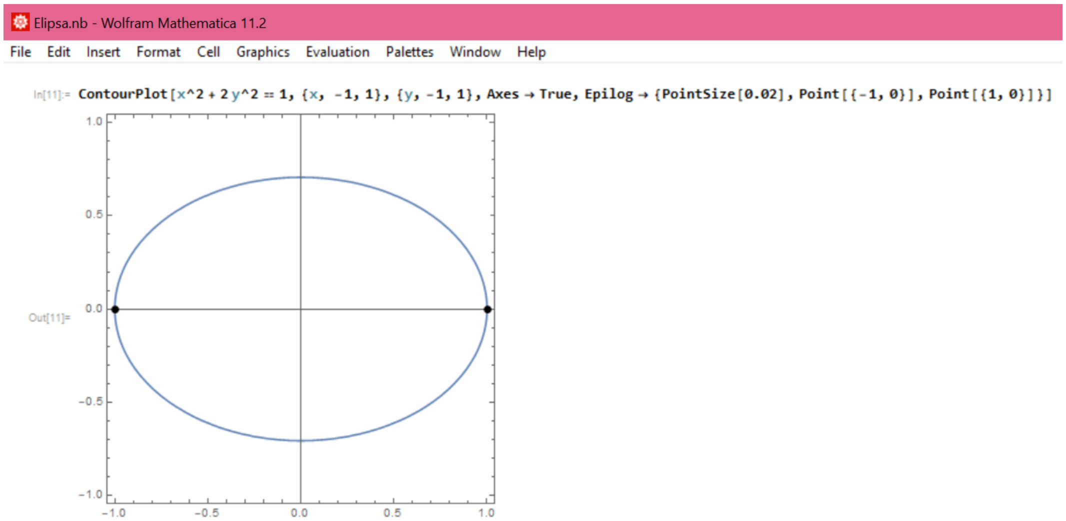
$$x_{n+1} = 19x_n + 60y_n,\ y_{n+1} = 6x_n + 19y_n,\ x_{n+1} = 19x_n - 60y_n \text{ a } y_{n+1} = -6x_n + 19y_n.$$



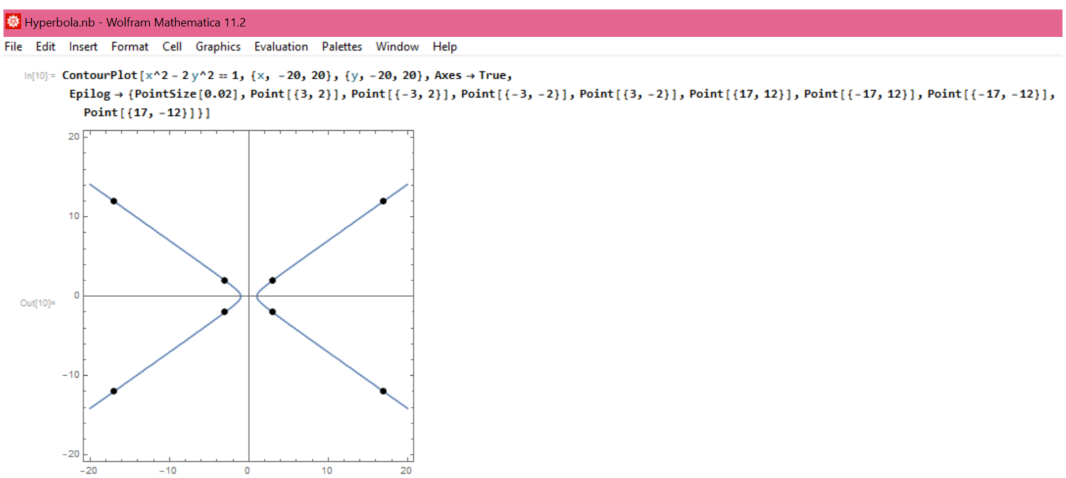
Obrázek 7.4: Řešení rovnice $x^2 - 10y^2 = 81$ v programu Alpertron

Lze tedy říci, že je oproti Wolframu, nám kalkulátor snáze vygeneruje více řešení, aniž bychom museli zvolit metodu „pokus-omyl“.

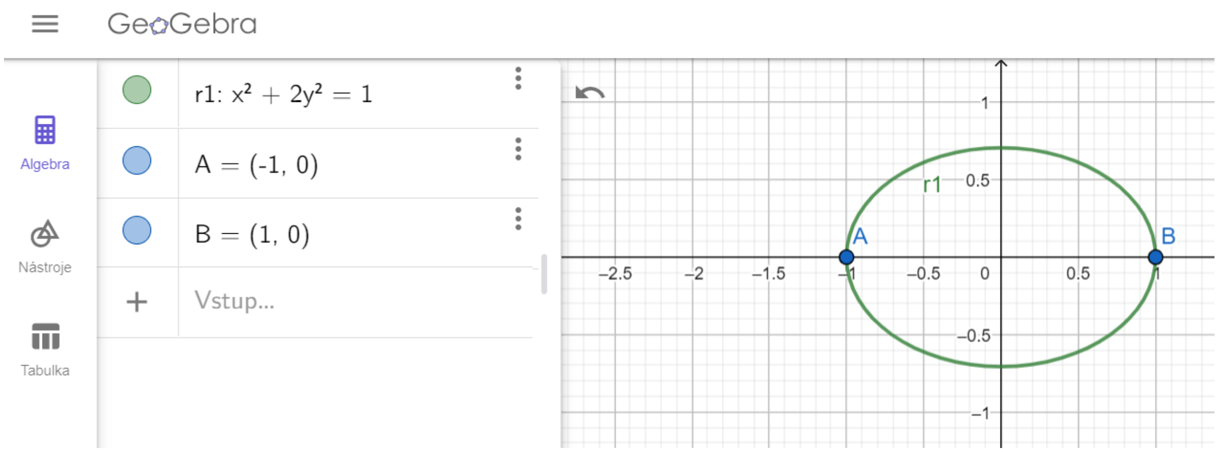
Námi dosud řešené kvadratické diofantické rovnice měly buď nekonečně mnoho řešení, nebo žádné. Ucelenou problematiku kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých samozřejmě řešit již v tuto chvíli nebudeme, neboť bychom ji museli věnovat samostatnou odbornou práci. Nahlédněme však alespoň na jeden další typ kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých. Konkrétně na rovnici eliptického typu ve tvaru $x^2 + 2y^2 = 1$ a porovnejme ji s rovnicí hyperboly ve tvaru $x^2 - 2y^2 = 1$. Obě rovnice si proto graficky znázorněme. Opět budeme pracovat s programem Wolfram Mathematica, avšak z důvodu jeho nedostupnosti široké veřejnosti si zkusme vyjádřit grafy také v Geogebře, jež je stejně jako Alpertron volně dostupná na webové stránce [22].



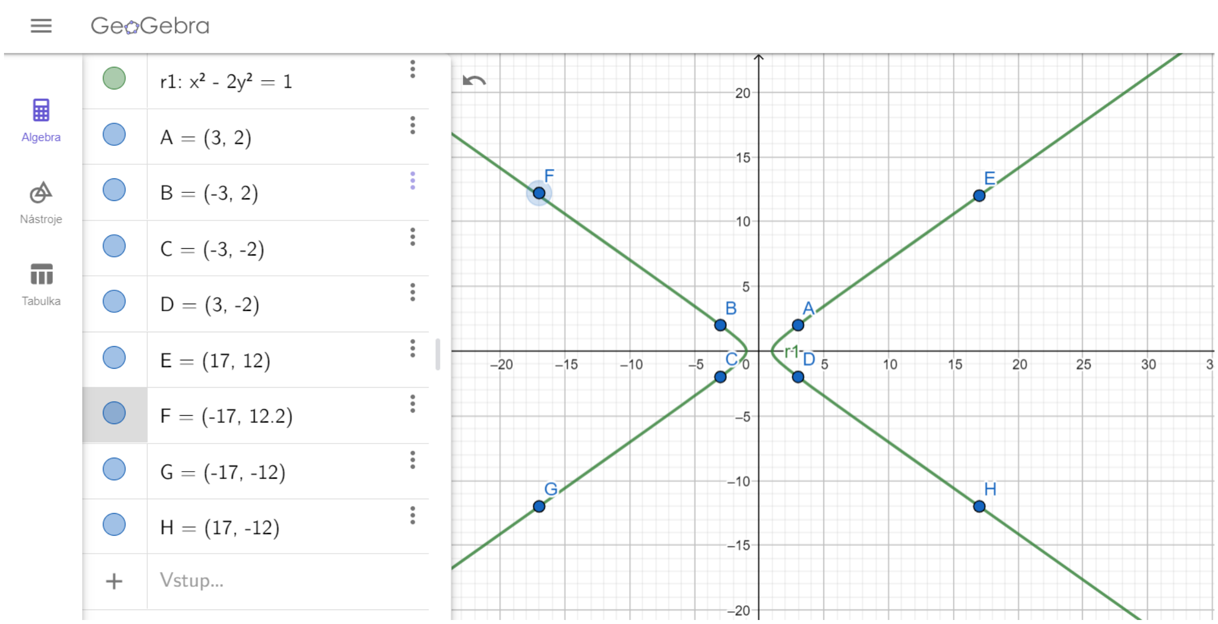
Obrázek 7.5: Grafické řešení rovnice $x^2 + 2y^2 = 1$ v programu Wolfram Mathematica



Obrázek 7.6: Grafické řešení rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ v programu Wolfram Mathematica



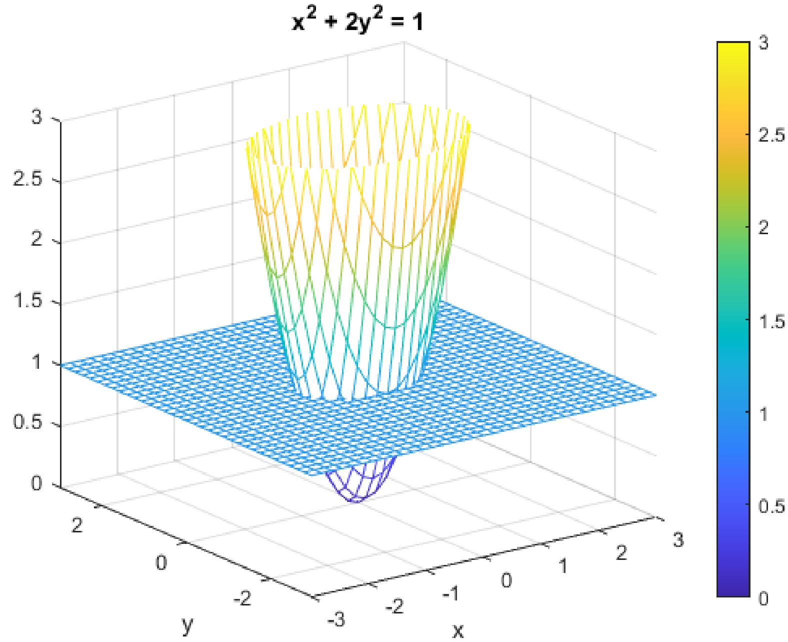
Obrázek 7.7: Grafické řešení rovnice $x^2 + 2y^2 = 1$ v programu Geogebra



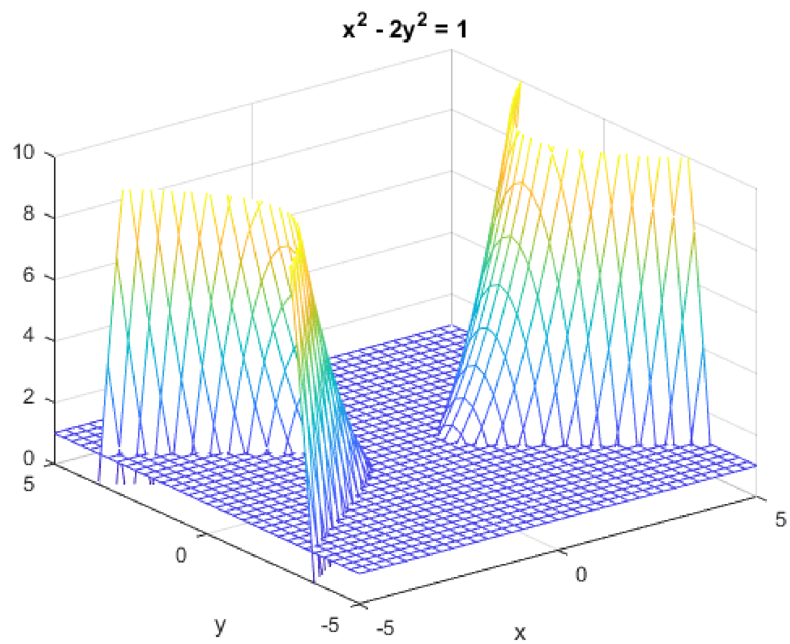
Obrázek 7.8: Grafické řešení rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ v programu Geogebra

Všimněme si, že elipsa je uzavřená kuželosečka. Tedy na uzavřené křivce musí nutně existovat konečný počet uspořádaných dvojic řešení. Zatímco hyperbola může mít řešení nekonečně mnoho. V závěru práce jsme se tak tedy ještě seznámili s kvadratickou diofantickou rovnicí o dvou neznámých, která oproti Pellově rovnici a jejímu zoběcnění, nikdy nekonečně mnoho řešení mít nebude.

ro zajímavost si ještě dané řešené rovnice zobrazme v programu Matlab ve 3D prostoru. V grafickém řešení rovnic bude průnik roviny o rovnici s elipsoidem či hyperboloidem.



Obrázek 7.9: Grafické řešení rovnice $x^2 + 2y^2 = 1$ v programu Matlab



Obrázek 7.10: Grafické řešení rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ v programu Matlab

8 Závěr

Diplomová práce si kladla za cíl prozkoumat problematiku kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých.

V práci jsme se zmínili o matematikovi, po kterém jsou tyto rovnice pojmenovány. Diofantos, zvaný též otec algebry, významně přispěl k teorii čísel a dalších oblastí matematiky. Jako důkaz může posloužit jeho dílo *Aritmetika.* V rámci kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých jsme se zabývali Pellovou rovnicí a zobecněnou Pellovou rovnicí, čímž jsme se dostali k rozboru historie zkoumaného tématu, kdy bylo konstatováno, že obecné řešení Pellovy rovnice bylo poprvé provedeno Brahmaguptou v sedmém století po Kristu.

Naučili jsme se algoritmy řešení obou zmíněných typů speciálních rovnic, a to pomocí příslušných matematických vět a řetězových zlomků. Zlomků, díky nimž byla v jistém slova smyslu zdolána první krize matematiky, neboť jimi lze vyjádřit druhé odmocniny spadající do oboru čísel iracionálních, a to v konečném tvaru, neboť zde jde o zlomky periodické. Řetězové zlomky jsme též využili k řešení lineární diofantické rovnice o dvou neznámých a rovněž i k řešení lineární kongruence.

Dále jsme dospěli k zjištění, že se kvadratické diofantické rovnice dříve objevovaly v učebnicích matematiky pro střední reálné školy a gymnázia až do reformy školství, která proběhla v letech 1908-1910. Oproti tomu se pouze jedna jediná kvadratická diofantická rovnice zvaná pythagorejská vyučuje v nepřímé formě dodnes s tím, že žáci postřehnou některá běžná řešení, jako např. pythagorejské trojice $\{3, 4, 5\}$ či $\{5, 12, 13\}$.

K závěru práce byl zmíněn desátý Hilbertův problém, zaobírající se otázkou existence jednotného postupu pro zjištění, zda existuje řešení u všech diofantických rovnic o libovolném stupni s libovolným počtem proměnných. Vzápětí jsme zjistili, že řešení daného problému neexistuje. Tudíž u každé diofantické rovnice je nutné k objasnění možné existence řešení využít odlišné algoritmy. U některých diofantických rovnic ani nemusíme být schopni říci, zda řešení existuje.

Poslední podkapitola této diplomové práce byla věnována matematickým programům a aplikacím, s jejichž pomocí dovedeme snadno vyjádřit druhé odmocniny spadající do oboru iracionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku. Zároveň jsme dospěli k faktu, že díky rozmachu těchto aplikací a programů může získat řešení kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých, které byly stěžejním tématem předkládané práce, prakticky kdokoliv nehledě na rozsah jeho matematických dovedností.

S ohledem postupného naplňování cíle, kdy jsme pluli řekou času napříč dějinami, jsme potkali mnoho zajímavých osobností, které významně přispěly k rozvoji matematiky. Životu Diofanta z Alexandrie, který ve svém díle zanechal odkaz neurčitých rovnic, některých dodnes nedořešených, jsme se ale nevěnovali. O jeho životě se mnoho záznamů nedochovalo a jediným výchozím zdrojem jeho zásadních milníků je Diofantem sepsaný epitaf vedoucí k lineární diofantické rovnici. Řešení rovnice nám poskytuje výčet nejvýznamnějších okamžiků napříč jeho 84letou cestou životem.

V tuto chvíli se proto navraťme na palubu lodi, která nás naposledy odnese zpět do třetího století po Kristu, do starověké Alexandrie, a věnujme poslední řádky diplomové práce právě slovům tohoto muže.

„*Bůh mu dopřál, aby byl hochem šestinu svého života a přidav k této době další dvanáctinu, ozdobil jeho líce vousem. Po další sedmině prozářil jeho život světlem manželství, po dalších pěti letech pak daroval mu syna. Však běda! Sotva ubohé dítě dosáhlo poloviny délky otcova života, neúprosné sudičky vzaly si jej zpět. Když Bůh utěšil jeho hoře učením o číslech, po dalších čtyřech letech ukončil dobu jeho žití.*“ [38]

Resumé

Diplomová práce se zabývá odmocninami a způsoby usměrňování zlomků s iracionálními jmenovateli. Text je členěn do sedmi kapitol. V první kapitole se seznámíme se základní terminologií řetězových zlomků a se sblíženými zlomky řetězových zlomků.

V druhé kapitole si definujeme základní pojem celá část čísla, bez jehož znalosti bychom nedokázali vyřešit naprostou většinu uvedených příkladů. Dále je zde řešena problematika vyjádření kladného racionálního čísla pomocí Euklidova algoritmu a neúplných podílů.

V třetí kapitole se dozvídáme, jak lidé v průběhu evoluce matematiky napříč historií pracovali s druhými odmocninami. Dále jsou zde definovány ryze periodické a neryze periodické pravidelné řetězové zlomky, načež jimi vyjadřujeme kvadratické iracionality.

Čtvrtá kapitola je věnována základní definici kongruence a využití řetězových zlomků při řešení lineární kongruence o jedné neznámé.

V páté a šesté kapitole se seznamujeme s termínem diofantické rovnice a opět nahlédneme do historie, abychom zjistili, kdo byl onen Diofantos. Poté postupně pracujeme se dvěma speciálními typy kvadratických diofantických rovnic o dvou neznámých – Pellovou rovnicí a zobecněnou Pellovou rovnicí. Zjistíme, jací matematici napříč historií dané rovnice řešili a jakými algoritmy lze získat uspořádané celočíselné dvojice [x,y], které jsou hledaným řešením.

V poslední kapitole se dozvídáme o další kvadratické diofantické rovnici, o historii diofantických rovnic v rámci školství a o řešení daných rovnic v současnosti pomocí matematických aplikací a programů.

Resume

This thesis deals with square roots and methods of expressing fractions with surd denominators. The text is divided into 7 chapters. In the first chapter, we introduce the basic terminology of continued fractions and their convergents.

The second chapter defines the whole part of the number as a term which is a requisite for solving the majority of the proposed problems. Moreover, the chapter deals with the determination of positive rational numbers using the Euclidean algorithm and incomplete quotients.

The third chapter describes how people have been working with the square root during the evolution of mathematics, defines purely periodic and purely non-periodic regular continued fractions, and formulates its quadratic irrationality.

The fourth chapter outlines the definition of congruence and utilization of continued fractions for solving the linear congruence of one unknown.

The two chapters introduce the term of the Diophantine equation and explains who Diophantus was. Afterwards, we work with two special types of quadratic Diophantine equations with two unknowns - the Pell equation and the generalized Pell equation. Then this work goes through the history of the equation, which mathematicians were solving it and which algorithms they were applied for finding its solutions.

The last chapter presents another quadratic Diophantine equation, including its history in education, and current solutions of given equations utilizing mathematical programs and applications.

Reference

[1] ALPERN, Dario Alejandro. Generic two integer variable equation solver [online]. [cit. 2021-4-29]. Dostupné z: https://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM

[2] ANDREESCU, T., ANDRICA, D., CUCUREZEANU I. An introduction to Diophantine equations: A problem-based approach. Birkhauser, 2010.

[3] ANDREESCU, T., ANDRICA, D. Quadratic Diophantine Equations. Springer, Developments in Mathematics, vol. 40, 2015.

[4] BEČVÁŘ, Jindřich a BEČVÁŘOVÁ Martina. Vývoj matematiky jako popularizující stimul: vzdělávací modul matematika: výukový a metodický text: Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA. Vyd. 1. Praha: P3K, 2012. 59 s. ISBN 978-80-87186-77-0.

[5] BICAN, L. O řešení Pellovy rovnice. Rozhledy matematicko-fyzikální. 1977-1978, roč. 56, č. 5, s. 193-198.BICAN, L. Zobecněná Pellova rovnice. Rozhledy matematicko-fyzikální. 1977-1978, roč. 56, č. 6, s. 257-261.

[6] BICAN, L. Zobecněná Pellova rovnice. Rozhledy matematicko-fyzikální. 1977-1978, roč. 56, č. 6, s. 257-261.

[7] CALDA, Emil. Rovnice ve škole neřešené. Praha: Prometheus, 1995. Edice metodických příruček pro učitele a studenty učitelství. ISBN 80-85849-88-7.

[8] David Hilbert. GYMNÁZIUM VÁCLAVA HLAVATÉHO, LOUNY [online]. [cit. 2021-5-18]. Dostupné z: https://www.glouny.cz/matematika/mat_sem/priklady/hilbert.htm

[9] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič a MARON, Isaak Abramovič. Základy numerické matematiky. Vyd. 1. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. 721 s. Teoretická knižnice inženýra.

[10] DEMLOVÁ, Marie. Diskrétní matematika a logika. Přednáška 10 [online]. Praha: ČVUT v Praze, 5. prosince 2005. [cit. 2020-05-10] Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/demlova/teaching/dml/pred10.pdf?fbclid=IwAR3eiPB7dPPnGxvMTVtj

[11] Diophantus. Famous scientists [online]. Web, 8 Jul. 2018 [cit. 2020-6-10]. Dostupné z: https://www.famousscientists.org/diophantus/

[12] Diophantus. New world encyclopedia [online]. 23 Jul 2020 [cit. 2020-6-10]. Dostupné z: https://www.newworldencyclopedia.org/entry/diophantus

[13] FELGR, Pavel. Období Staré říše – Starověký Egypt. Starověký Egypt a jeho historie – Starověký Egypt [online]. Copyright © [cit. 2020-02-28]. Dostupné z: <https://www.starovekyegypt.net/faraoni-stare-rise/index.php>

[14] FRANCOVÁ, Ladislava et al. Fibonacciova čísla. Vyd. 1. Hradec Králové: Gaudeamus, 1999. 85 s. ISBN 80-7041-626-2.

[15] FRANCOVÁ, Ladislava a KÜHNOVÁ, Jitka. Diofantovské rovnice 2. stupně. Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách, 2013, 22(2), s. 81-91. ISSN 1210-1761. Dostupné také z: http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/download/23/35.

[16] HAHN, Jane. LATEX for everyone: a reference guide and tutorial for typesetting documents using a computer. New Jersey: Prentice-Hall, 1993. xi, 346 s. ISBN 0-13-605908-2.

[17] HAUSER, Marianne, HAUSER, Tobias a WENZ, Christian. HTML a CSS: velká kniha řešení. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2006. 912 s. ISBN 80-251-1117-2.

[18] HAVEL, Ivan M. O desátém Hilbertově problému. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 18, 1973, no.4, s. 185-192. Dostupné také z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/138822

[19] HAVÍŘOVÁ, Barbora. Co možná nevíte o čtyřúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální, 2010, 85(1), s. 1-12. ISSN 0035-9343. Dostupné také z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/146340.

[20] HAYASHI, Takao Brahmagupta. Encyclopedia Britannica [online]. 1. Jan. 2021: [cit. 2021-3-18]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Brahmagupta

[21] HERMAN, Jiří, KUČERA, Radan a ŠIMŠA, Jaromír. Metody řešení matematických úloh I. Vyd. 3. Brno: Masarykova univerzita, 2011. 278 s. ISBN 978-80-210-5636-7.

[22] HOHENWARTER, Markus. GeoGebra [online]. [cit. 2021-6-20]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/?lang=cs

[23] HORA, Jaroslav. Algebra I. Vyd. 1. Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1991. 111 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-7043-030-3.

[24] HUDSON, Paul. Rounding: ceil(), floor (), and round() – Hacking with PHP - Practical PHP. Table of Contents – Hacking with PHP - Practical PHP [online]. Copyright ©2015 [cit. 2020-07-16].

[25] CHINČIN, Aleksandr Jakovlevič. Řetězové zlomky. Překlad Karel Rychlík. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s. Kruh; sv. 37

[26] Java Math Abs() Round () Ceil() Floor () Min() Methods with Example. Meet Guru99 - Free Training Tutorials & Video for IT Courses [online]. Copyright © Copyright [cit. 2020-07-16]. Dostupné z: https://www.guru99.com/math-java.html

[27] KAPLANSKY, Irving. David Hilbert. Encyclopedia Britannica [online]. 10 Feb. 2021, [cit. 2021-3-18] Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/David-Hilbert.

[28] KONFOROVYČ, Andrej Grigorjevic. Významné matematické úlohy. Překlad Jaroslav Šedivý. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 208 s. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-21848-2.

[29] LEGENDRE, Adrien Marie. Théorie des nombres [online]. Troisième édition. Paris: Firmin Didot frères, 1830 [cit. 2021-6-10]. Dostupné z: https://play.google.com/store/books/details?id=oPZRAAAAcAAJ

[30] MACHOVEC, F.: Algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1886.

[31] MASTIN, Luke. BRAHMAGUPTA: MATHEMATICIAN AND ASTRONOMER. The story of mathematics [online]. ©2020 [cit. 2021-6-10]. Dostupné z: https://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html

[32] MASTIN, Luke. DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA. The story of mathematics [online]. ©2020 [cit 2021-6-10]. Dostupné z: https://www.storyofmathematics.com/hellenistic_diophantus.html

[33] MATLAB [online]. MathWorks [cit. 2021-6-22]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/products/matlab.html

[34] MOČNÍK, F.: Arithmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1875 (přeložené podle 14. vydání F. A. Horou).

[35] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. David Hilbert. MacTutor History of Mathematics Archive [online]. November 2014 [cit. 2021-6-15]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert

[36] Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity - Pedagogická fakulta JU [online]. Copyright © [cit. 2020-04-23]. Dostupné z: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf

[37] Precision of floating point numbers in C++ (floor(), ceil(), trunc(), round() and setprecision()) - GeeksforGeeks. GeeksforGeeks / A computer science portal for geeks [online]. [cit. 2020-07-16]. Dostupné z: https://www.geeksforgeeks.org/precision-of-floating-point-numbers-in-c-floor-ceil-trunc-round-and-setprecision/?ref=rp

[38] REICHL, Jaroslav, VŠETIČKA, Martin. Diofantos z Alexandrie. Encyklopedie fyziky [online]. © 2006 - 2021 [cit. 2021-6-10]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1436-diofantos-z-alexandrie Dostupné z: http://www.hackingwithphp.com/4/6/1/rounding

[39] REICHL, Jaroslav, VŠETIČKA, Martin. Pythagorejské trojice. Encyklopedie fyziky [online]. © 2006 - 2021 [cit. 2021-6-29]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1452-pythagorejske-trojice

[40] SESIANO, Jacques. Diophantus: Greek mathematician. Encyclopedia Britannica [online]. 6 Jun. 2019 [cit. 2021-6-10]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Diophantus

[41] STARÝ, Václav. Arithmetika pro první, druhou a třetí třídu škol reálných. 6. opr. vyd. V Praze: F. Tempský, 1893. vi, 284 s.

[42] STRUIK, Dirk Jan. Dějiny matematiky. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963. 250, [3] s. Malá moderní encyklopedie; Sv. 43.

[43] STUDNIČKA, František Josef. Algebra pro vyšší třídy škol středních. 2., skoro nezměn. vyd. V Praze: F.J. Studnička, 1879. 172 s.

[44] SÝKOROVÁ, Irena. Pellova rovnice v indické matematice. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 2011, 56(1), s. 35-44. ISSN 0032-2423. Dostupné také z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/140123.

[45] TRIGONOMETRIE. Slavní matematici, fyzici a vynálezci [online]. [cit. 2021-1-10]. Dostupné z: http://vedci.wz.cz/historie/16.htm

[46] VÍT, Pavel. Řetězové zlomky. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1982. 158 s. Škola mladých matematiků; Sv. 49

[47] WHITFORD, Edward Everett. The Pell equation [online]. New York, 1912 [cit. 2020-5-10]. Dostupné z: https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABV2773.0001.001/4?rgn=full+text;view=pdf

[48] WIDŽ, Jiří. Výpočtové problémy elementární teorie čísel. Praha, 2013. [cit. 2021-4-10]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/58778 Rigorózní práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Prof. RNDr. Štefan Porubský, DrSc.

[49] ZNÁM, Štefan. Teória čísel. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1977. 205 s. Epsilon; zv. 3.

[50] ZŠ Dobřichovice – Pythagorova věta, Pythagorejský trojúhelník, Pythagorejská čísla a jejich výpočet, Haperdonapté – napínači lan ve starověkém Egyptě. ZŠ Dobřichovice webová prezentace, výukové programy, testy [online]. Dostupné z: https://old.zsdobrichovice.cz/programy/matika/pyth_triangle.htm

Seznam obrázků

Seznam tabulek