ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

SYMETRICKÉ MATICE - NĚKTERÉ VLASTNOSTI A UŽITÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Mouleová

Přírodovědná studia, obor Matematika

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová Ph.D.

Plzeň 2021

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 22. června 2021

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Moc ráda bych poděkovala Mgr. Martině Kašparové Ph.D., vedoucí mé bakalářské práce, za cenné rady a pomoc při tvorbě bakalářské práce.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

X	množina
$A, B, C, F, G, I, J, O, P, Q$	matice
D	diagonální matice
E	jednotková matice
N	nulová matice
A^{-1}	inverzní matice k matici A
A^T	transponovaná matice k matici A
T	těleso
R	těleso reálných čísel
K	komutativní okruh
S	množina symetrických matic
S_R	množina regulárních symetrických matic
$\det A$	determinant matice A
X, Y, Z	náhodný vektor
$E(X), E(Y)$	střední hodnota
$VAR(X), VAR(Y)$	rozptyl
$\sigma(X), \sigma(Y)$	směrodatná odchylka
$cov(X, Y)$	kovariance
$\rho(X, Y)$	korelace
$f(x, y)$	sdružená hustota
$f(x), f(y)$	marginální hustota
x, x^T	vektor
λ	vlastní číslo
u, v	vlastní vektor

ÚVOD

Jako téma své bakalářské práce jsem zvolila symetrické matice. Myslím si, že pro většinu veřejnosti je toto téma spíše neznámé. Většina studentů se setká s maticemi až na vysoké škole. Práce s maticemi je velmi důležitá pro další matematické disciplíny.

V této práci se budu zabývat symetrickými maticemi, jejich užitím a některými vlastnostmi.

V první a druhé kapitole se seznámíme s tím, co vlastně matice jsou. Ukážeme některé vlastnosti symetrických matic a operace s nimi.

Ve třetí kapitole se zaměříme na speciální typy symetrických matic. Uvedeme, v čem jsou tyto matice specifické a jaké je jejich využití.

Ve čtvrté kapitole se seznámíme s úpravou na diagonální tvar elementárními úpravami. Tato kapitola je úvod do další, páté kapitoly.

V páté kapitole si ukážeme úpravu na diagonální tvar symetrickými úpravami. Seznámíme se s tím, jak se pomocí symetrických úprav zjistí typ matice. Uvedeme také jaké má získaná diagonální matice využití.

V šesté kapitole se zaměříme na diagonalizovatelnost. Ukážeme výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů, jejichž pomocí zjišťujeme, zda je matice diagonalizovatelná či není. Uvedeme také příklad na diagonalizovatelnost.

V sedmé, poslední kapitole se seznámíme se spektrálním rozkladem symetrických matic. Spektrální rozklad se využívá při umocňování matic. Toto umocňování ukážeme na příkladu.

Všechny kapitoly se budu snažit podložit příklady. Pokud nebude řečeno jinak, tak všechny příklady budou nad tělesem reálných čísel, tj. prvky matic budou reálná čísla.

1 POJEM SYMETRICKÉ MATICE

Připomeňme následující definicí, co je matice.

Definice 1.1

Nechť X je neprázdná množina a m, n přirozená čísla. Maticí typu $m \times n$ nad množinou X budeme rozumět obdélníkové schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in X$ pro každé $i = 1, \ldots, m$ a každé $j = 1, \ldots, n$; tuto matici budeme značit též $(a_{ij})_{m \times n}$ nebo jednodušeji (a_{ij}). Jestliže $m \neq n$, pak hovoříme o obdélníkové matici typu $m \times n$; jestliže je $m = n$, hovoříme o čtvercové matici řádu n. Dále říkáme, že prvek a_{ij} stojí v matici na místě ij. (2, s. 32)

Příklad 1.1

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou po řadě typu 2 x 4, 3 x 2, 3 x 3.

Zvláštním případem matic jsou čtvercové matice. Existuje několik druhů čtvercových matic. My se budeme zabývat symetrickými čtvercovými maticemi. Symetrická matice je čtvercová matice, která je „zrcadlově stejná“ podle hlavní diagonály. Všimněme si, že tuto vlastnost má matice C. Přesná definice je uvedena v následujícím textu.

Důležité je vědět, z jaké množiny X jsou prvky a_{ij}. Nejčastěji je množina X nějaký číselný obor, např. množina celých čísel, množina racionálních čísel. Obecněji hovoříme o maticích nad tělesem, oborem integrity nebo komutativním okruhem.

Definice 1.2

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je

i. horní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \ldots, n, i > j$, je $a_{ij} = 0$;
ii. dolní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, \ldots, n, i < j$, je $a_{ij} = 0$;
iii. symetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \ldots, n$, je $a_{ij} = a_{ji}$;
iv. antisymetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, \ldots, n$, je $a_{ij} = -a_{ji}$. (2, s. 41)

Všechny symetrické matice musí být nutně čtvercové. Symetrické matice nemohou být obdélníkové, protože pro symetrické matice platí $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny prvky matice a tuto podmínku obdélníkové matice nemohou splnit.

Příklad 1.2

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

je symetrická. Pro její prvky platí:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 4, a_{13} = 7, a_{21} = 4, a_{22} = 2, a_{23} = 3, a_{31} = 7, a_{32} = 3, a_{33} = 5$$

Porovnejme, zda se rovnají prvky podle definice 1.2 (iii):

$$a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$$

Pro prvky a_{11}, a_{22}, a_{33} je zřejmé, že rovnost $a_{ij} = a_{ji}$ platí.

Čtvercová matice odpovídá této definici a jedná se tedy o symetrickou matici.

Pro symetrickou matici A platí, že transponovaná matice se rovná matici původní ($A^T = A$), symetrická matice je podle hlavní diagonály souměrná. Pro antisymetrickou matici A platí, že k ní transponovaná matice se rovná původní matici s opačnými znaménky ($A^T = -A$). V antisymetrických maticích platí pro prvky na hlavní diagonále, že $a_{ii} = -a_{ii}$, a tedy $a_{ii} = 0$. Prvky na hlavní diagonále jsou rovny 0.

Příklad 1.3

Uvažujme čtvercové matice A ,B a C řádu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Tyto tři matice budeme transponovat a vzniknou matice A^T, B^T a C^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \neq C$$

Na příkladu je ukázáno, že matice A je symetrická, protože je rovna matici transponované. Matice B je antisymetrická a matice C není ani symetrická, ani antisymetrická.

Označme O libovolnou čtvercovou matici řádu n, nechť P, resp. Q je matice řádu n, pro kterou platí $P = \frac{1}{2}.(O + O^T)$, resp. $Q = \frac{1}{2}.(O - O^T)$ je matice řádu n. Pak matice P je symetrická, matice Q je antisymetrická a jejich součtem je matice O. Tuto vlastnost lze zapsat následující větou.

Věta 1.1

Každou čtvercovou matici řádu n nad tělesem T jehož charakteristika není 2, tj. nejmenší počet jednotkových prvků, které musíme sečíst, abychom dostali nulový prvek, není dva, lze vyjádřit jako součet symetrické a antisymetrické matice řádu n. (2, s. 95; 14, s. 10)

2 OPERACE SE SYMETRICKÝMI MATICEMI A JEJICH VLASTNOSTI

Všechny matice stejného typu lze sčítat, odčítat a násobit skalárem. Pokud jsou matice čtvercové, můžeme je mezi sebou násobit, a tedy umocňovat přirozeným exponentem. Zabýváme se symetrickými maticemi a ty jsou čtvercové.

V následující větě jsou vypsány vlastnosti symetrických matic vzhledem k daným úkonům. Dále v textu jsou uvedeny i příklady těchto úkonů a jejich vlastností.

Věta 2.1

Pokud matice A a B jsou symetrické matice řádu n nad tělesem T a $k \in T$, platí:

i. A^T je symetrická matice,

ii. $A + B$ a $A - B$ jsou symetrické matice,

iii. $k.A$ je symetrická matice,

iv. $A.B$ je symetrická matice, pokud jsou A a B komutující matice ($A.B = B.A$). (1, s. 71)

Příklad 2.1

Uvažujme symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

nad tělesem reálných čísel a reálné číslo $k = 4$. Ověřme vlastnosti (i) - (iii) věty 2.1, tj. že transponovaná matice k symetrické matici je symetrická matice, součet a rozdíl symetrických matic je symetrická matice a násobení symetrické matice reálným číslem je symetrická matice.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 13 \\ 4 & 9 & 5 \\ 13 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$k.A = 4.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 28 \\ 16 & 8 & 12 \\ 28 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Násobením symetrických matic nevznikne vždy symetrická matice. Na příkladu máme uvedené násobení dvou symetrických matic C a D, které nejsou komutující, a nevznikne tedy násobením symetrická matice.

$$C.F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 7 \\ 8 & 20 & 5 \\ 37 & 52 & 16 \end{pmatrix}$$

$$F.C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 37 \\ 21 & 20 & 52 \\ 7 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Jako další příklad máme uvedené dvě symetrické komutující matice E a F. Násobením těchto matic vznikne symetrická matice.

$$G.H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 23 & 55 \\ 23 & 12 & 42 \\ 55 & 42 & 90 \end{pmatrix}$$

$$H.G = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 23 & 55 \\ 23 & 12 & 42 \\ 55 & 42 & 90 \end{pmatrix}$$

Dvě stejné symetrické matice A můžeme mezi sebou násobit. Tedy vlastně matici A umocňovat přirozeným exponentem. Když umocníme symetrickou matici A přirozeným exponentem vznikne opět symetrická matice. Tato vlastnost je shrnuta v následující větě.

Pokud bude symetrická matice A regulární, tak ji můžeme umocňovat i celými zápornými čísly. U regulární symetrické matice A můžeme spočítat inverzní matici, ale pokud symetrická matice A není regulární, nemůžeme spočítat inverzní matici ani symetrickou matici A umocňovat celými zápornými čísly. Tuto vlastnost shrnuje věta 2.3.

Věta 2.2

Pokud A je symetrická matice a k je přirozené číslo, pak matice A^k je také symetrická matice.

Věta 2.3

Pokud je matice A symetrická, a navíc ještě regulární a k je přirozené číslo, pak matice A^{-k} je také symetrická matice.

Podle předchozí věty speciálně platí, že inverzní matice k symetrické matici je také symetrická.

Vlastnosti shrnuté ve větě 2.2 a větě 2.3 si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.2

Uvažujme matice A a B nad reálnými čísly a číslo $k = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Určeme, jestli matice $A^k, B^k, A^{-k}, B^{-k}, A^{-1}, B^{-1}$ existují a pokud existují, zjistěme, zda jsou symetrické.

Matice A^k, B^k existují vždy, když je k přirozené číslo. Abychom zjistili, zda existují i matice $A^{-k}, B^{-k}, A^{-1}, B^{-1}$, musíme ověřit, zda jsou matice A a B regulární. Proto spočítáme jejich determinant.

$$detA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1.(-1).(-2) + 0.(-3).(-2) + (-2).0.(3) - (-2).(-1).(-2) - (-3).(-3).1 - (-2).0.0 = -3$$

$$detB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0.0.0 + 1.(-2).0 + 0.1.(-2) - 0.0.0 - (-2).(-2).0 - 0.1.1 = 0$$

Matice A má nenulový determinant, a proto je regulární. Matice B má determinant roven nule, a proto není regulární. Matice A^{-k} a A^{-1} existují a matice B^{-k} a B^{-1} neexistují.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 65 & 108 & 98 \\ 108 & 217 & 255 \\ 98 & 255 & 374 \end{pmatrix}$$

$$A^{-4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-4} = \begin{pmatrix} \frac{16133}{81} & \frac{-5134}{24} & \frac{6274}{81} \\ \frac{-5134}{24} & \frac{1634}{9} & \frac{-1997}{27} \\ \frac{6274}{81} & \frac{-1997}{27} & \frac{2441}{81} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ -2 & 2 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 25 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Ověřili jsme, že matice $A^k, B^k, A^{-k}, B^{-k}, A^{-1}, B^{-1}$ jsou pro $k = 4$ symetrické.

Příklad 2.3

Zjistíme, jakou algebraickou strukturu tvoří symetrické matice. Vypíšeme axiomy, které se týkají sčítání matic, násobení matic číslem a násobení matic maticí. Matice A, B, C jsou z množiny S všech symetrických matic řádu n nad tělesem reálných čísel a x, y jsou prvky tělesa reálných čísel R.

i.	$\forall A, B, C \in S$	$(A + B) + C = A + (B + C)$,
ii.	$\forall A, B \in S$	$A + B = B + A$,
iii.	$\exists N \in S \;\; \forall A \in S$	$A + N = A$,
iv.	$\forall A \in S \; \exists -A \in S$	$A + (-A) = N$,
v.	$\forall A, B, C \in S$	$(A.B).C = A.(B.C)$,
vi.	$\exists E \in S \;\; \forall A \in S$	$E.A = A.E = A$,
vii.	$\forall A \in S, A \neq N \; \exists A^{-1} \in S$	$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$,
viii.	$\forall A, B, C \in S$	$A.(B + C) = A.B + A.C$,
ix.	$\forall A, B, C \in S$	$(A + B).C = A.C + B.C$,
x.	$\forall A, B \in S$	$A.B = B.A$,
xi.	$\forall A \in S \; 1 \in R$	$1.A = A$
xii.	$\forall A, B \in S \; \forall x \in R$	$x.(A + B) = x.A + x.B$,
xiii.	$\forall A \in S \; \forall x, y \in R$	$(x + y).A = x.A + y.A$,
xiv.	$\forall A \in S \; \forall x, y \in R$	$(x.y).A = x.(y.A)$.

Nyní budeme prověřovat, jestli množina S symetrických matic splňuje jednotlivé axiomy. Budeme dokazovat jednotlivé vlastnosti pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci.

i. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci, kde jsou matice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ stejného řádu.

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

Z tohoto zápisu je evidentní, že sčítání symetrických matic je asociativní, protože je sčítání reálných čísel asociativní.

ii. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci, kde jsou matice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ stejného řádu.

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

Z tohoto zápisu je vidět, že sčítání matic je komutativní, neboť je sčítání reálných čísel komutativní.

Asociativitu a komutativitu sčítání symetrických matic jsme mohli zdůvodnit i s odvoláním na obecnější výsledek, podle něhož platí, že sčítání jakýchkoli matic stejného typu, tj. i těch, které nejsou symetrické, je asociativní a komutativní. K tomu je nezbytné připomenout, že součtem symetrických matic je symetrická matice, viz větu 2.1.

iii. Označme a_{ij} prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A, n_{ij} prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice N stejného řádu. Má-li platit axiom iii, pak

$$a_{ij} + n_{ij} = a_{ij},$$

tedy $n_{ij} = 0$, tj. každý prvek matice N musí být roven 0. Neutrálním prvkem pro sčítání symetrických matic je nulová matice. Protože nulová matice je symetrickou maticí, existuje v množině S neutrální prvek vzhledem ke sčítání symetrických matic.

iv. Pro prvky $-a_{ij}$ matice $-A$ platí:

$$a_{ij} + \left(-a_{ij}\right) = 0,$$

tj. inverzním prvkem pro sčítání symetrických matic je matice opačná k matici A. Je-li matice symetrická, je i k ní opačná matice symetrická. Snadno to zdůvodníme tvrzením ii věty 2.1, když místo A vezmeme nulovou matici. V množině S tedy ke každému prvku existuje prvek opačný.

v. Při násobení dvou symetrických matic nevznikne vždy symetrická matice, jak jsme ukázali v příkladu 2.1. Množina S není uzavřená pro násobení symetrických matic, proto násobení symetrických matic není v množině S asociativní.

vi. Při vynásobení jakékoli matice jednotkovou maticí se matice nezmění. Jednotková matice patří mezi symetrické matice, tj. do množiny S. V této množině existuje tedy jednotkový prvek, který je neutrálním prvkem vůči násobení matic množiny S. Tímto jsme dokázali, že v množině S je splněn axiom vi.

vii. Vlastnost popsaná axiomem platí pouze v případě, kdy je symetrická matice A regulární. V množině S tedy neexistuje inverzní prvek ke každému nenulovému prvku.

viii. Množina S není uzavřená pro násobení symetrických matic. Proto násobení vůči sčítání není v množině S zleva distributivní.

ix. Množina S není uzavřená pro násobení symetrických matic. Proto násobení vůči sčítání není v množině S ani zprava distributivní.

x. V příkladu 2.1 jsme uvedli dvě symetrické matice C, D, které nejsou komutující. Existují tedy dvě symetrické matice A, B, kde součin $A.B$ je jiný, než součin $B.A$. Násobení symetrických matic tedy není komutativní.

xi. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci.

$$1. a_{ij} = a_{ij}$$

Z tohoto zápisu je vidět, že při násobení matice skalárem 1 se matice nezmění, protože reálné číslo 1 je v množině reálných čísel neutrálním prvkem operace násobení.

xii. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci, kde jsou matice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ stejného řádu.

$$x(a_{ij} + b_{ij}) = xa_{ij} + xb_{ij}$$

Výraz na levé straně je součinem reálných čísel pro jakékoli i, j. V tělese reálných čísel je násobení vůči sčítání distributivní, proto je násobení součtu symetrických matic skalárem „distributivní".

xiii. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci.

$$(x + y)a_{ij} = xa_{ij} + ya_{ij}$$

Zápis na předchozím řádku vyjadřuje identitu v množině reálných čísel. Proto je násobení matice součtem skalárů „distributivní".

xiv. Axiom napíšeme pro prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci.

$$(xy)a_{ij} = x(ya_{ij})$$

Protože je násobení reálných čísel asociativní, platí „asociativita" násobení matice skaláry.

Rozmysleme, jakou algebraickou strukturou bude struktura s nosičem S všech symetrických matic řádu n, případně její podmnožina S_R – symetrické matice řádu n, které jsou navíc regulární. Budeme uvažovat nejprve struktury s jednou operací a následně se dvěma operacemi.

Sčítání symetrických matic v množině S splňuje axiomy i-iv, proto je (S, +) komutativní grupa. V množině S_R je sčítání také komutativní a asociativní. Opačná matice k regulární symetrické matici je také regulární symetrická matice, ale jejich součet, nulová matice, regulární není. (S_R, +) je proto jen komutativní pologrupa.

Násobení symetrických matic v množině S splňuje pouze axiom vi. Struktura (S, ·) není ani grupoid, protože součin dvou symetrických matic není obecně symetrická matice. Totéž platí i pro symetrické regulární matice.

Struktura (S, +, ·), kde „·" představuje násobení matic, není žádnou zvláštní strukturou vzhledem k tomu, že násobení symetrických matic není na S uzavřená operace. Ze stejného důvodu nemá smysl se zabývat strukturou, kde by nosičem byly symetrické regulární matice.

Struktura (S, +, ·), kde „·" je násobení symetrické matice prvkem tělesa, je vektorovým prostorem nad příslušným tělesem, protože (S, +) je komutativní grupa a zobrazení „·" má vlastnosti popsané v axiomech xi – xiv. Struktura (S_R, +, ·) vektorový prostor není, neboť (S_R, +) je jen komutativní pologrupa.

Zjištění, že $(S, +, \cdot)$ je vektorový prostor, umožňuje uplatnit vše, co známe z lineární algebry. Především má tento prostor konečnou bázi. Každá symetrická matice je určena prvky, které leží na hlavní diagonále a nad ní (nebo pod ní). Takových prvků je v matici řádu n právě $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$, to je zároveň dimenze vektorového prostoru $(S, +, \cdot)$.

Vektorové podprostory prostoru $(S, +, \cdot)$ tvoří speciální symetrické matice, kterým se budeme věnovat ve třetí kapitole. V následujícím textu přiblížíme vektorový podprostor, který nesouvisí s nějakým speciálním druhem symetrických matic, jsou to symetrické matice, které komutují s nějakou předem danou symetrickou maticí.

Věta 2.4

Množina všech komutujících symetrických matic s danou symetrickou maticí A řádu n tvoří vektorový podprostor lineárního prostoru všech symetrických matic řádu n.

Větu si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.4

Uvažujme symetrickou matici A. Najděme množinu všech komutujících matic se symetrickou maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli hledat symetrické komutující matice s maticí A, měli bychom si uvědomit, že hledané matice musí být stejného řádu. V našem případě musí mít hledané matice řád 3. Hledané symetrické matice C mají tvar

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Nyní uděláme součiny $A.C$ a $C.A$.

$$A.C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & b+2d & c+2e \\ 2a+3b-c & 2b+3d-e & 2c-f+3e \\ -b+4c & -d+4e & -e+4f \end{pmatrix}$$

$$C.A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+3b-c & -b+4c \\ b+2d & 2b+3d-e & -d+4e \\ c+2e & 2c-f+3e & -e+4f \end{pmatrix}$$

Součiny, které vyšly, se musí rovnat jednotlivým prvkům ve vzniklých maticích.

Vytvoříme z nich 9 rovnic o šesti neznámých.

$$a + 2b = a + 2b$$

$$2a + 3b - c = b + 2d$$

$$-b + 4c = c + 2e$$

$$b + 2d = 2a + 3b - c$$
$$2b + 3d - e = 2b + 3d - e$$
$$-d + 4e = 2c - f + 3e$$
$$c + 2e = -b + 4c$$
$$2c - f + 3e = -d + 4e$$
$$-e + 4f = -e + 4f$$

První, pátá a devátá rovnice jsou identity, druhá a čtvrtá rovnice se liší jen záměnou stran, podobně třetí a sedmá a také šestá a osmá. Soustavu rovnic lze proto upravit na soustavu tří rovnic o šesti neznámých:

$$2a + 2b - c - 2d = 0$$
$$-b + 3c - 2e = 0$$
$$2c + d - e - f = 0$$

Zapíšeme ji maticí:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Z této matice dopočteme prvky matice C. Prvky d, e a f mohou být libovolné a zbylé prvky dopočítáme. Prvky a, b, c vyšly takto:

$$a = \frac{9}{4}.d + \frac{3}{4}.e - \frac{5}{4}.f$$
$$b = -\frac{3}{2}.d - \frac{1}{2}.e + \frac{3}{2}.f$$
$$c = -\frac{1}{2}.d + \frac{1}{2}.e + \frac{1}{2}.f$$

A již snadno zapíšeme všechny matice, které komutují s maticí A.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}.d + \frac{3}{4}.e - \frac{5}{4}.f & -\frac{3}{2}.d - \frac{1}{2}.e + \frac{3}{2}.f & -\frac{1}{2}.d + \frac{1}{2}.e + \frac{1}{2}.f \\ -\frac{3}{2}.d - \frac{1}{2}.e + \frac{3}{2}.f & d & e \\ -\frac{1}{2}.d + \frac{1}{2}.e + \frac{1}{2}.f & e & f \end{pmatrix}$$

$$C = d.\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} + f.\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix};\ d, e, f \in R$$

Pomocí lineárního obalu zapíšeme, že lineární podprostor matic C komutujících s maticí A je vyjádřen jako množina všech lineárních kombinací tří matic.

$$M = \left[\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Každý lineární obal je vektorovým podprostorem, a tedy lineární obal M tvoří podprostor všech symetrických matic komutujících se symetrickou maticí A.

3 SPECIÁLNÍ SYMETRICKÉ MATICE

Symetrické matice mají určité specifické vlastnosti, které jiné „obyčejné“ matice nemají. Existuje několik druhů symetrických matic. Těmito speciálními symetrickými maticemi se budeme zabývat v této kapitole.

3.1 DIAGONÁLNÍ MATICE

Jde o čtvercovou matici, která může mít nenulové prvky jen na hlavní diagonále. Diagonální matice je vždy zároveň horní i dolní trojúhelníková a symetrická. Někdy může být tento termín použit i pro obdélníkové matice, pak to ale není symetrická matice.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Definice 3.1.1

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je diagonální, jestliže platí pro každé $i, j = 1, \dots, n, i \neq j,\ a_{ij} = 0$ a $a_{ii} = c \in R$.

Diagonální matice řádu *n* je určena *n* prvky. Diagonální matice řádu *n* tvoří podprostor vektorového prostoru symetrických matic řádu *n*, pokud je uvažujeme nad nějakým komutativním tělesem. Dimenze podprostoru všech diagonálních matic je *n*.

Protože součinem dvou diagonálních matic stejného řádu je opět diagonální matice téhož řádu, má smysl věnovat pozornost struktuře (*D*, ·), tj. množině všech diagonálních matic s operací násobení matic. Z uzavřenosti operace násobení v množině *D* plyne, že jde o grupoid. Násobení diagonálních matic stejného řádu je navíc komutativní a asociativní, proto je (*D*, ·) komutativní pologrupa. Protože jednotková matice je diagonální, je (*D*, ·) monoid.

Struktura (*D*, +, ·) s operacemi sčítání a násobení diagonálních matic je komutativní okruh. Je-li řád matic aspoň 2, existují v takovém okruhu netriviální dělitelé nuly, takže nejde o obor integrity.

Zaměříme-li se pouze na množinu D_R diagonálních matic nad komutativním tělesem, které jsou regulární, pak lze ke každé z matic určit inverzní diagonální regulární matici. Struktura (D_R, ·) je komutativní grupa. Dvojice (D_R, +) je jen komutativní pologrupa, protože nulová matice je diagonální matice, která není regulární, takže v množině D_R není.

Každou symetrickou matici můžeme elementárními nebo symetrickými úpravami převést na diagonální matici. Převáděním na diagonální matici elementárními a symetrickými úpravami se budeme zabývat v další kapitole.

3.2 BISYMETRICKÁ MATICE

Jedná se o čtvercovou matici, která je souměrná podle hlavní i vedlejší diagonály. Součtem dvou bisymetrických matic získáme opět bisymetrickou matici. Při násobení dvou bisymetrických matic dostaneme bisymetrickou matici právě tehdy, když je násobení obou matic komutativní. Pokud je bisymetrická matice regulární, pak existuje její inverzní matice, která je také bisymetrická. Bisymetrické matice tvoří vektorový podprostor prostoru symetrických matic, pokud jsou uvažovány nad komutativním tělesem.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Definice 3.2.1

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je bisymetrická, jestliže platí pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{ij} = a_{ji} = a_{n-i+1,n-j+1} =$

$= a_{n-j+1,n-i+1}$.

Počet prvků, jimiž je bisymetrická matice určena, je odlišný pro matice sudého a lichého řádu. V matici řádu 1, 3, 5, …, $2n - 1$ postačuje k určení bisymetrické matice 1, 4, 9, …, n^2 prvků, zatímco v maticích sudých řádů 2, 4, 6, …, $2n$ je jich potřeba 2, 6, 12, …, $n^2 + n$. Příslušné výrazy udávají zároveň dimenzi vektorového prostoru bisymetrických matic, pokud jsou uvažovány nad nějakým komutativním tělesem.

Bisymetrické matice jsou důležité v analýze dat získaných ze symetrických a pravidelných struktur. Svůj význam mají také v teorii grafů – zjednodušují výpočet spektrálního rozkladu matice sousednosti zkoumaného grafu.

3.3 HANKELOVA MATICE

Matice je pojmenovaná po německém matematikovi Hermannu Hankelovi (14. února 1839 - 29. srpna 1873). Jedná se o speciální druh matice, ve které jsou na všech diagonálách vedoucích shora zprava doleva dolů konstantní hodnoty. Hankelova matice je vždy symetrická. Hankelovy matice řádu n tvoří vektorový podprostor prostoru $(S, +, \cdot\,)$, jsou-li uvažovány nad nějakým komutativním tělesem.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Definice 3.3.1

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je Hankelova, jestliže platí pro každé $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ je $a_{i,j} = a_{i+1,j-1}$.

Hankelovu matici lze zapsat, pokud známe např. prvky v prvním řádku a posledním sloupci. Pro jednoznačné určení Hankelovy matice řádu n stačí znát $2n - 1$ prvků, což je zároveň dimenze vektorového podprostoru všech Hankelových matic řádu n, pokud jsou jejími prvky prvky nějakého tělesa.

Hankelova matice se využívá při metodě SID (subsapce identification method) v teorii řízení. Jedná se o metodu identifikace lineárních časově invariantních stavových modelů ze vstupně-výstupních dat. Využívá se pro získání odhadů posloupnosti stavů a systémových matic. Pro použití algoritmů této metody jsou naměřená vstupně-výstupní data vložena do Hankelových matic. (15, s. 1-25)

3.4 KOVARIANČNÍ A KORELAČNÍ MATICE

Kovariance a korelace se využívá při vyjadřování závislosti náhodných veličin. Tuto závislost náhodných veličin píšeme do kovarianční a korelační matice.

Definice 3.4.1

Nechť $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor, $VAR(X_1), VAR(X_2), \dots, VAR(X_n)$ jsou rozptyly náhodných veličin X_i kde $i = 1,2, \dots, n$ a $cov(X_i, X_j)$ jsou kovariance náhodných velčin X_i, X_j, kde $i \neq j;\ i, j = 1,2, \dots, n$. Symetrickou matici

$$C = \begin{pmatrix} VAR(X_1) & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_1, X_2) & VAR(X_2) & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_1, X_n) & cov(X_2, X_n) & \cdots & VAR(X_n) \end{pmatrix}$$

nazveme kovarianční maticí.

Definice 3.4.2

Nechť $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor, $VAR(X_1), VAR(X_2), \dots, VAR(X_n)$ jsou rozptyly náhodných veličinX_i, kde $i = 1,2, \dots, n$, $\sqrt{VAR(X_1)} = \sigma_1, \sqrt{VAR(X_2)} = \sigma_2, \dots$, $\sqrt{VAR(X_n)} = \sigma_n$ jsou směrodatné odchylky náhodných veličin X_i, kde $i = 1,2, \dots, n$ a $\rho(X_i, X_j)$ jsou korelační koeficienty náhodných veličin X_i, X_j, kde $i \neq j;\ i, j = 1,2, \dots, n$. Symetrickou matici

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \rho(X_1, X_2) & 1 & \cdots & \rho(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_1, X_n) & \rho(X_2, X_n) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nazveme korelační maticí.

Příklad 3.4.1

Sdružená hustota náhodného vektoru $Z = (X, Y)$ je definována takto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}.(x+y); 0 < x < 2 \ \wedge 0 < y < 2 \\ 0; jinak \end{cases}.$$

Určete kovarianční a korelační matici náhodného vektoru $Z = (X, Y)$.

Nejprve musíme určit marginální hustoty X a Y.

$$f(x) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(x+y)dy = \frac{1}{4}.(x+1)$$

$$f(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(x+y)dy = \frac{1}{4}.(y+1)$$

Pomocí marginálních hustot spočítáme střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X a Y.

$$E(X) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(2x^2 + 2.x)dx = \frac{7}{6}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(2x^3 + 2.x^2)dx = \frac{5}{3}$$

$$VAR(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{\frac{11}{36}}$$

$$E(Y) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(2y^2 + 2.y)dy = \frac{7}{6}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 \frac{1}{8}.(2y^3 + 2.y^2)dy = \frac{5}{3}$$

$$VAR(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{VAR(Y)} = \sqrt{\frac{11}{36}}$$

Abychom mohli spočítat kovarianci, musíme ještě spočítat střední hodnotu součinu náhodných veličin X a Y.

$$E(X.Y) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{8}.x.y.(x+y)dxdy = \frac{4}{3}$$

Z těchto spočtených hodnot již snadno spočteme kovarianci a určíme kovarianční matici.

$$cov(X,Y) = cov(Y,X) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = \frac{4}{3} - \frac{7}{6}.\frac{7}{6} = -\frac{1}{36}$$

$$C = \begin{pmatrix} VAR(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & VAR(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$$

Nyní spočteme korelaci a určíme korelační matici.

$$\rho(X,Y) = \rho(Y,X) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}.\sqrt{\frac{11}{36}}} = -\frac{1}{11}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočtem kovarianční a korelační matice jsme zjistili, že náhodné veličiny X a Y jsou závislé.

Kovarianční a korelační matice se mohou využívat na akciovém trhu při zkoumání závislostí jednotlivých akcií mezi sebou. Nebo můžeme zjišťovat závislosti koncentrace ozonu na různých podmínkách. Kovarianční a korelační matice lze využívat v jakémkoli oboru, kde se potřebuje zjistit závislost mezi různými veličinami.

Uvedli jsme několik speciálních symetrických matic, které vyhovují definici 1.2. Ale existují i speciální matice, které tuto definici nesplňují a jsou symetrické jiným způsobem. Uvedeme dva typy těchto speciálních symetrických matic. Uvedeme Toeplitzovu matici, která je symetrická podle vedlejší diagonály, a středově symetrickou matici, která je symetrická podle středu.

3.5 TOEPLITZOVA MATICE

Matice je pojmenovaná po německém matematikovi Ottu Toeplitzovi (1. srpna 1881 – 15. února 1940). Otto Toeplitz zkoumal funkční analytické a algebraické vlastnosti těchto matic v článku Zur Threorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen[1] z roku 1911. Jedná se o speciální druh matice, ve které jsou na všech diagonálách vedoucích shora zleva doprava dolů konstantní hodnoty.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

[1] Český překlad: O teorii kvadratických a bilineárních forem nekonečně mnoha proměnných

Definice 3.5.1

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je Toeplitzova, jestliže platí pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$.

Podobně jako Hankelova matice je jednoznačně určena $2n - 1$ prvky, když má řád n. Známe-li prvky v prvním řádku a prvním sloupci, pak už je Toeplitzova matice určena. Sečtením dvou Toeplitzových matic nad komutativním tělesem je opět Toeplitzova matice. Toto sčítání je komutativní a asociativní. Nulová matice je Toeplitzova a také opačná matice k dané Toeplitzově matici je Toeplitzova. Snadno lze ověřit axiomy vektorového prostoru, které se týkají zobrazení „·“. Pokud jsou prvky Toeplitzovy matice řádu n z nějakého komutativního tělesa, pak tedy tvoří vektorový podprostor vektorového prostoru všech matic řádu n.

Toeplitzovy matice se využívají pro řešení určitých diferenciálních a integrálních rovnic. Toeplitzovy matice se rovněž používají k výpočtu spline[2] křivek. Při analýze časových řad se mohou využívat Toeplitzovy matice. Využívají se i ke zpracování signálu a obrazu, Markových řetězců a teorii řazení.

3.6 STŘEDOVĚ (CENTRÁLNĚ) SYMETRICKÁ MATICE

Tato čtvercová matice je souměrná podle středu. Součtem dvou středově symetrických matic získáme opět středově symetrickou matici. Nulová matice a opačná matice ke středově symetrické matici jsou také středově symetrické matice. Množina C všech centrálně symetrických matic řádu n s operací „+“ tvoří komutativní grupu. Při násobení dvou středově symetrických matic stejného řádu dostaneme také středově symetrickou matici. Struktura $(C, \cdot)$ je tedy grupoid. Protože násobení jakýchkoliv, a tedy i středově symetrických matic je asociativní, je tato struktura aspoň pologrupa. Všimněme si, že jednotková matice je také centrálně symetrická matice a její součin s jakoukoli, tedy i centrálně symetrickou maticí tuto matici nezmění. Struktura $(C, \cdot)$ je proto dokonce monoid. Struktura $(C, +, \cdot)$ je vzhledem k předchozímu okruh (nekomutativní). Pokud bude „·“ představovat zobrazení – násobení prvku tělesa se středově symetrickou maticí řádu n, pak jde o vektorový prostor, který je podprostorem vektorového prostoru všech matic řádu n.

Pokud je středově symetrická matice regulární, pak existuje její inverzní matice, která je také středově symetrická. Zaměříme-li se na množinu C_R pouze takových středově symetrických

[2]Poskládáním polynomiálních křivek vznikne spline křivka. Jedná se o hladkou křivku, která prochází sadou bodů ovlivňujících její tvar. Tato křivka se využívá v matematice, především v matematické analýze a v numerických metodách, a také v počítačové grafice.

matic, které jsou regulární, pak je (C_R, ·) grupa. Struktura (C_R, +) ovšem grupa není, protože nulová matice, která by byla neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání, není regulární maticí. Je to komutativní pologrupa, pokud jsou prvky matic z komutativního tělesa.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 2 & 6 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & 3 & 8 & 11 \\ 10 & 7 & 6 & 2 & 12 \\ 9 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Definice 3.6.1

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ nad komutativním okruhem K. Řekneme, že matice A je středově symetrická, jestliže platí pro každé $i, j = 1, \dots, n$ je $a_{i,j} = a_{n-i+1,n-j+1}$.

Středově symetrická matice se využívá při numerickém řešení určitých diferenciálních rovnic a při řešení Markových řetězců. Také se tyto matice využívají při řešení problémů vlastních čísel a v řadě fyzikálních problémů.

V této kapitole jsem uvedla několik speciálních symetrických matic. Existují i jiné druhy speciálních symetrických matic. Jedná se o nulovou matici, Hilbertovu matici, Coxeterovu matici a Schläfliho matici. Tyto matice nebudeme již více popisovat.

4 ÚPRAVA NA DIAGONÁLNÍ TVAR ELEMENTÁRNÍMI ÚPRAVAMI

V této kapitole se zaměříme na úpravy symetrických matic na diagonální tvar. Využijeme k tomu elementární úpravy. Elementární úpravy matice mohou být sloupcové nebo řádkové. Těmito úpravami lze převést matici na trojúhelníkovou či diagonální. Úpravu symetrických matic elementárními úpravami můžeme využívat například ke zjištění jejich hodnosti.

Definice 4.1

Při práci s maticemi budeme rozumět sloupcovými elementárními úpravami:

i. vynásobení nějakého sloupce nenulovým prvkem $b \in R$;
ii. přičtení b-násobku nějakého sloupce k jinému sloupci (přitom $b \in R$).

Podobně budeme řádkovými elementárními úpravami rozumět:

i. vynásobení nějakého řádku nenulovým prvkem $b \in R$;
ii. přičtení b-násobku nějakého řádku k jinému řádku (přitom $b \in R$). (2, s. 138)

Věta 4.1

i. Každou matici je možno pomocí konečně mnoha sloupcových a řádkových elementárních úprav převést na diagonální matici.
ii. Ke každé matici A existují regulární matice B, C takové, že BAC je diagonální matice. (2, s. 138)

Připsáním jednotkové matice vpravo od upravované matice lze sledovat řádkové elementární úpravy matice, a připsáním jednotkové matice pod matici lze sledovat sloupcové elementární úpravy matice.

Po provedení jakékoli sloupcové nebo řádkové elementární úpravy při zaznamenávání řádkových a sloupcových elementárních úprav lze upravenou matici zapsat jako součin tří nově vzniklých matic BAC. Kde B je regulární matice, do níž zaznamenáváme řádkové úpravy, A je původní matice a C je regulární matice, do níž zaznamenáváme sloupcové úpravy. Tuto vlastnost ukážeme na příkladu.

Příklad 4.1

Uvažujme symetrickou matici $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, která je regulární, a symetrickou matici $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, která není regulární. Tyto dvě matice převedeme elementárními úpravami na diagonální matice.

Nejprve převedeme regulární symetrickou matici A na diagonální matici. K symetrické matici A dopíšeme jednotkové matice, do kterých budeme zaznamenávat prováděné elementární úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

2-násobek prvního řádku přičteme ke druhému řádku a 5-násobek prvního řádku přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 28 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

(-1)-násobek druhého řádku přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme čtyřmi a přičteme k němu (-1)-násobek třetího řádku. Druhý řádek vynásobíme pěti a přičteme k němu (-2)-násobek třetího řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 8 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 40 & 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme pěti a přičteme k němu (-1)-násobek druhého řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 40 & 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Matici A jsme převedli elementárními úpravami na diagonální matici. Celkovou matici $\left(\frac{A}{E}\middle|\frac{E}{-}\right)$ jsme převedli na matici $\left(\frac{D}{J}\middle|\frac{I}{-}\right)$. Všimneme si, že k úpravě regulární symetrické matice A stačí pouze řádkové elementární úpravy. Ještě provedeme kontrolu, zda jsme počítali správně. Zkontrolujeme, že součin matic IAJ se rovná získané diagonální matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Nyní převedeme symetrickou matici B, která není regulární, na diagonální matici. K symetrické matici B dopíšeme jednotkové matice, do kterých budeme zaznamenávat prováděné elementární úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Nejprve zaměníme první a druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

6-násobek prvního sloupce přičteme ke třetímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 6 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

6-násobek druhého řádku přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 6 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Matici $\left(\frac{B}{E}\middle|\frac{E}{}\right)$ jsme převedli na matici $\left(\frac{D'}{G}\middle|\frac{F}{}\right)$. Pro symetrickou matici, která není regulární, jsme museli použít i sloupcové elementární úpravy. Ještě provedeme zkoušku, zda platí $FBG = D'$, jestli jsme počítali správně.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V příkladu jsme vyzkoušeli, že symetrickou regulární matici lze upravit pouze řádkovými elementárními úpravami na diagonální matici. Symetrické matice, které nejsou regulární, se musí použít i sloupcové elementární úpravy. Je to způsobeno tím, že řádky a sloupce symetrická matice, která není regulární, je tedy singulární, jsou lineárně závislé.

Matice A a B v předchozím příkladu jsme převedli různými řádkovými a sloupcovými elementárními úpravami na diagonální matice. Při převodu těchto matic nás můžou napadnout různé jiné elementární úpravy, kterými bychom mohli matice převést na diagonální. Zkusíme na dalším příkladu, zda je to opravdu možné, abychom různými elementárními úpravami převedli jednu matici na několik různých diagonálních matic.

Příklad 4.2

Uvažujme symetrickou matici A z příkladu 4.1. V příkladu 4.1 jsme matici převedli řádkovými elementárními úpravami na diagonální matici, označme ji D_1. Pokusme se matici A řádkovými a sloupcovými elementárními úpravami převést na jinou diagonální matici než v příkladu 4.1.

Nejprve k symetrické matici A dopíšeme jednotkové matice, do kterých budeme zaznamenávat prováděné elementární úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

2-násobek prvního řádku přičteme ke druhému řádku a 5-násobek prvního řádku přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 28 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

2-násobek prvního sloupce přičteme k druhému sloupci a 5-násobek prvního sloupce přičteme ke třetímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 28 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 5 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

(-1)-násobek druhého řádku přičteme ke třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 5 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

(-1)-násobek druhého sloupce přičteme ke třetímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Matici $\left(\frac{A}{E}\middle|\frac{E}{-}\right)$ jsme převedli na matici $\left(\frac{D_2}{Q}\middle|\frac{P}{-}\right)$. Ještě provedeme kontrolu jako v příkladu 4.1.

$$PAQ = D_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Našli jsme jiný postup, jak převést symetrickou matici A na diagonální matici. Můžeme říct, že různé elementární úpravy převádí danou matici na různé diagonální matice. Nelze tedy danou matici jednoznačně převést na diagonální matici.

5 ÚPRAVA NA DIAGONÁLNÍ TVAR SYMETRICKÝMI ÚPRAVAMI

Speciálním typem elementárních úprav jsou symetrické úpravy. Symetrická úprava je vlastně provedení dvou elementárních úprav. Nejprve provedeme řádkovou elementární úpravu a poté provedeme tu samou elementární úpravu, ale tentokrát ve sloupci či nejdříve provedeme sloupcovou elementární úpravu a pak provedeme tu samou řádkovou elementární úpravu. Symetrické úpravy mají různé využití. Pomocí symetrických úprav lze zjistit typ symetrické matice, zda je matice pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní nebo indefinitní.

Definice 5.1

Každou symetrickou matici A budeme nazývat

i. pozitivně definitní, jestliže pro každý sloupcový vektor $x \neq o$ platí $x^T A x > 0$;
ii. pozitivně semidefinitní, jestliže pro každý sloupcový vektor $x \neq o$ platí $x^T A x \geq 0$;
iii. negativně definitní, jestliže pro každý sloupcový vektor $x \neq o$ platí $x^T A x < 0$;
iv. negativně semidefinitní, jestliže pro každý sloupcový vektor $x \neq o$ platí $x^T A x \leq 0$;
v. indefinitní, jestliže matice A nesplňuje ani jednu z uvedených vlastností. (10, s. 1)

Určování typu matic podle této definice ukážeme na příkladu.

Příklad 5.1

Uvažujme symetrické matice A, B, C, F nad tělesem reálných čísel. Určete typy těchto matic.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro určení typu matice využijeme vztah $x^T A x$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ je libovolný sloupcový vektor.

Matice postupně dosadíme do uvedeného vztahu a tím zjistíme typy zadaných matic.

$$x^T A x = (x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1^2 + 2x_1x_2 = -2\left(\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{4}\right)$$

Výraz $x^T A x$ je pro některé vektory x záporný, např. pro $x = (1, 0)$, pro některé kladný, $x =$ (1, 2), nebo roven nule, např. pro vektor $x = (1, 1)$, proto matice A je indefinitní.

Postupujme podobně pro matici B:

$$x^T B x = (x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 4\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 \geq 0$$

Matice B je pozitivně semidefinitní.

Nyní určíme typ matice C:

$$x^T C x = (x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 =$$
$$-1((x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + 3x_2^2) < 0$$

Matice C je negativně definitní.

Zbývá zjistit typ matice F:

$$x^T F x = (x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) = 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{2} > 0$$

Matice F je pozitivně definitní.

Určovat typ definitnosti matice nemusíme jen podle definice 5.1. Dále v textu uvedeme větu, kde se určuje typ symetrických matic podle toho, na jakou diagonální matici je lze symetrickými úpravami převést. Nejdříve se ale zaměříme na symetrické úpravy, kterými lze převést symetrickou matici na diagonální.

Definice 5.2

Při úpravách čtvercových matic budeme symetrickými úpravami rozumět následující dvojice elementárních úprav.

i. Vynásobení i-tého řádku nenulovým prvkem b a vynásobení i-tého sloupce stejným prvkem b.
ii. Přičtení b-násobku i-tého řádku k j-tému řádku a přičtení b-násobku i-tého sloupce k j-tému sloupci. (2, s. 148)

Symetrické úpravy budeme využívat k přeměně matice A na diagonální matici.

Věta 5.1

Nechť T je těleso, jehož charakteristika není dva. Potom platí:

i. Každou symetrickou matici nad tělesem T je možno symetrickými úpravami převést na diagonální matici.
ii. Ke každé symetrické matici A nad tělesem T existuje regulární matice B taková, že $D = B^T AB$ je diagonální matice. (2, s. 148)

Symetrickou matici A nemusíme symetrickými úpravami převést „až" na diagonální matici, můžeme ji pouze symetrickými úpravami „poupravit". Pokud budeme symetrické úpravy matice A zaznamenávat do jednotkové matice za maticí A, vznikne regulární matice F^T taková, že $C = F^T AF.$ Pak matice A a C jsou kongruentní. Totéž můžeme říct i o symetrické matici A a diagonální matici $D,$ kde platí $D = B^T AB$, pak je symetrická matice A kongruentní s diagonální maticí D.

Příklad 5.2

Reálnou symetrickou matici A převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici D a nalezneme regulární matici B, pro kterou platí $D = B^T AB.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

K matici A připíšeme jednotkovou matici E, do níž se budou zaznamenávat provedené úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme (-2)-násobek druhého řádku k prvnímu řádku a (-2)-násobek druhého sloupce k prvnímu sloupci. Dostaneme matici, jejíž levá část je opět symetrická.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Abychom nemuseli počítat se zlomky, tak vynásobíme třetí řádek a třetí sloupec číslem 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -15 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 12 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Pak přičteme (-5)-násobek prvního řádku ke třetímu řádku a (-5)-násobek prvního sloupce ke třetímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 84 & -5 & 10 & 3 \end{array}\right)$$

Teď přičteme (-12)-násobek druhého řádku ke třetímu řádku a (-12)-násobek druhého sloupce ke třetímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Těmito symetrickými úpravami jsme se od matice $(A|E)$ dostali k matici $(D|B^T)$. Ještě se přesvědčíme, že platí $D = B^T AB$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = B^T AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

Převod symetrické matice na diagonální symetrickými úpravami se využívá k převodu kvadratické formy na kanonický tvar.

Pokud budeme symetrickou matici upravovat na diagonální elementárními řádkovými a sloupcovými úpravami, nelze to bez dalších úmluv provést jednoznačně. Elementární úpravy matice A můžeme libovolně kombinovat a získat tak jinou diagonální matici. Pokud budeme matici A upravovat symetrickými úpravami můžeme ji upravit na diagonální matici jednoznačně. Takováto diagonální matice má na hlavní diagonále nejprve 1, pak -1 a nakonec 0. Pokud bude více lidí upravovat symetrickou matici A na diagonální, kde nejprve budou 1, pak -1 a nakonec 0, tak všem musí vyjít matice B stejně. Když symetrickou matici upravíme symetrickými úpravami na takovouto diagonální matici, můžeme pomocí prvků na hlavní diagonále diagonální matice určit typ matice. Tuto vlastnost shrnuje věta 5.2.

Věta 5.2

Symetrická matice A je

i. pozitivně definitní, pokud ji lze symetrickými úpravami upravit na diagonální matici, jejíž všechny prvky na diagonále jsou kladné;
ii. pozitivně semidefinitní, má-li diagonální matice, na niž lze A upravit symetrickými úpravami, všechny diagonální prvky nezáporné;
iii. negativně definitní, jestliže lze matici A symetrickými úpravami změnit na diagonální matici, jejíž všechny diagonální prvky jsou záporné;
iv. negativně semidefinitní, pokud všechny diagonální prvky diagonální matice, na niž lze upravit matici A symetrickými úpravami, jsou nekladné;
v. indefinitní, jestliže mezi diagonálními prvky diagonální matice, na kterou lze matici A upravit symetrickými úpravami, je aspoň jeden prvek kladný a aspoň jeden prvek záporný. (2, s. 356-357; 17, s. 6)

V následujícím příkladu určíme typ matice pomocí věty 5.2.

Příklad 5.3

Uvažujme symetrické matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel. Určete jejich typ.

Matice postupně upravíme symetrickými úpravami na diagonální matice a určíme typ matice. K maticím nebudeme připisovat jednotkovou matici. V tomto příkladu je pro nás důležitá výsledná diagonální matice, proto nemusíme zaznamenávat provedené úpravy do jednotkové matice.

Nejprve budeme symetrickými úpravami převádět matici A.

3-násobek prvního sloupce přičteme ke druhému sloupci a 3-násobek prvního řádku přičteme ke druhému řádku. První a druhý sloupec zaměníme a první a druhý řádek zaměníme. První řádek a první sloupec vydělíme $\sqrt{10}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Na diagonále je jedno kladné a jedno záporné číslo, proto je matice A indefinitní.

Matici B také převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici.

Nejprve vynásobíme druhý řádek a druhý sloupek třemi. 1-násobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a 1-násobek prvního sloupce přičteme ke druhému sloupci. Třetí sloupec a třetí řádek vynásobíme třemi. 2-násobek prvního řádku přičteme ke třetímu řádku a 2-násobek prvního sloupce přičteme ke třetímu sloupci. Třetí řádek a třetí sloupec vynásobíme deseti. (-1)-násobek druhého řádku přičteme ke třetímu řádku a (-1)-násobek druhého sloupce přičteme ke třetímu sloupci. První řádek a první sloupec vydělíme $\sqrt{3}$. Druhý řádek a druhý sloupec vydělíme $\sqrt{30}$. Třetí řádek a třetí sloupec vydělíme $\sqrt{2040}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -3 & 36 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 30 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 30 & 3 \\ -6 & 3 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 3 \\ 0 & 3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 30 \\ 0 & 30 & 2100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 2040 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Na diagonále jsou všechna tři čísla kladná, proto je matice pozitivně definitní.

6 DIAGONALIZOVATELNOST A ROZKLAD MATICE

V této kapitole se zaměříme na převedení čtvercové matice na diagonální matici jiným způsobem než v předchozí kapitole. Některé čtvercové matice A lze upravit do tvaru

$$A = B.D.C,$$

kde D je diagonální matice, která má na hlavní diagonále tzv. vlastní čísla matice A. Matice B a C jsou navzájem inverzní matice.

Proto se v této kapitole budeme věnovat nejprve výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů. Spektrálnímu rozkladu matice A, která je symetrická, se budeme věnovat v poslední podkapitole této kapitoly.

6.1 VLASTNÍ ČÍSLA, VEKTORY A PODPROSTORY

Definice 6.1.1

Nechť A je čtvercová matice nad tělesem T. Charakteristickou maticí matice A budeme rozumět λ-matici $\lambda E - A$ a charakteristickým polynomem matice A determinant její charakteristické matice, tj. $\det(\lambda E - A)$. Kořeny charakteristického polynomu matice A se nazývají vlastní čísla matice A. (Bečvář, 219)

Na následujícím příkladu ukážeme charakteristickou matici matice, charakteristický polynom matice a vlastní čísla matice. Ukážeme to pro čtvercovou nesymetrickou matici *A* a pro symetrickou matici *B*.

Příklad 6.1.1

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem reálných čísel a vypočítejme vlastní čísla matice.

Nyní nalezneme charakteristické matice matic A a B.

$$\lambda E - A = \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E - B = \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Z těchto vypočítaných charakteristických matic získáme výpočtem determinantů charakteristické polynomy.

$$\det(\lambda E - A) = \lambda.(\lambda - 1).(\lambda - 3) + (-3).1.0 + 1.1.0 - 1.(\lambda - 1).(-3) - 0.0.\lambda - (\lambda - 3).1.1 = \lambda^3 - 4.\lambda^2 + 5.\lambda$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - B) &= (\lambda-1).(\lambda-1).(\lambda-1) + 0.(-4).(-2) + (-2).(-4).0\\ &\quad - (-2).(\lambda-1).(-2) - (-4).(-4).(\lambda-1) - (\lambda-1).0.0\\ &= \lambda^3 - 3.\lambda^2 - 17.\lambda + 19\end{aligned}$$

A z charakteristických polynomů nalezneme vlastní čísla matic.

$\lambda^3 - 4.\lambda^2 + 5.\lambda = 0$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$$

$$\lambda_3 = 2 + \mathrm{i}$$

$\lambda^3 - 3.\lambda^2 - 17.\lambda + 19 = 0$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{5} + 1$$

$$\lambda_3 = 2\sqrt{5} + 1$$

Na tomto příkladu je ukázáno, že vlastní čísla matice mohou být i komplexní čísla. V případě symetrické matice nad tělesem reálných čísel, kterou je matice *B*, jsou vlastní čísla reálná. Tato vlastnost je zahrnuta ve větě 6.1.1.

Z vypočtených vlastních čísel ještě určíme vlastní vektory. Vlastní vektory budeme užívat pro zjišťování, jestli je daná matice diagonalizovatelná.

Definice 6.1.2

Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T a $\lambda \in T$ její vlastní číslo. Vlastním vektorem matice A, který přísluší vlastnímu číslu λ, budeme rozumět každý nenulový vektor $x \in T^n$, pro který $A.x^T = \lambda.x^T$. (2, s. 230)

Vlastní vektory mají zajímavou vlastnost. Pokud budeme zobrazovat vlastní vektory v lineárním zobrazení daném maticí A, zobrazí se vlastní vektory na svůj násobek.

Příklad 6.1.2

Uvažujme symetrickou matici $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ověřme, že $u = (2,-1)$ a $v = (2,4)$ jsou vlastní vektory dané matice.

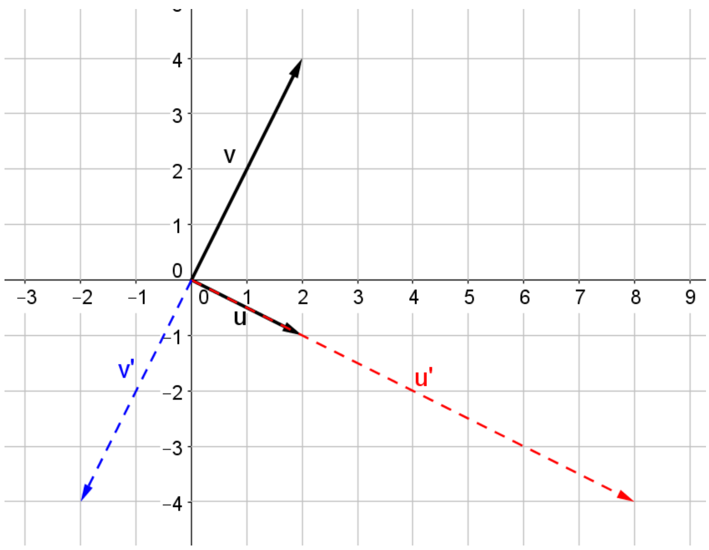
Vektor u zobrazíme v zobrazení daném maticí A.

$$u' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.(2,-1)^T = (8,-4) = 4.(2,-1) = 4.u$$

Vektor v také zobrazíme v zobrazení daném maticí A.

$$v' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.(2,4)^T = (-2,-4) = -1.(2,4) = -1.v$$

Vektory u a v se zobrazily na svůj násobek. Ověřili jsme, že vektory jsou vlastní vektory matice A.



Obrázek 1: Zobrazení vektorů

Všimněme si, že vektor $w = (-4, 2)$, který je (–2)-násobkem vektoru u, je také vlastním vektorem matice A, protože se v zobrazení daném maticí A zobrazí na svůj násobek. Totéž platí pro každý násobek vektoru u. Vektor $x = k \cdot (2, -1)$ se zobrazí na vektor $4k \cdot (2, -1)$, tj. jakýkoli násobek vektoru $(2, -1)$ je vlastním vektorem matice A. Vlastní vektory můžeme zapsat jako lineární obal $[(2, -1)]$. Protože lineární obal je vektorový podprostor, tvoří vlastní vektory. Tomuto vektorovému podprostoru se říká vlastní podprostor.

Definice 6.1.3

Vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ je množina všech vlastních vektorů, které příslušejí vlastnímu číslu λ dané matice.

Na následujícím příkladu ukážeme nalezení vlastního vektoru nesymetrické čtvercové matice a symetrické matice.

Příklad 6.1.3

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem reálných čísel a vypočteme vlastní vektory matic.

Nyní nalezneme charakteristické matice matic A a B.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 2 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Z těchto vypočítaných charakteristických matic získáme výpočtem determinantů charakteristické polynomy.

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 + \lambda^2 - 5.\lambda + 3$$

$$\det(\lambda E - B) = \lambda^3 + 2.\lambda^2$$

A z charakteristických polynomů vypočteme vlastní čísla matic.

$\lambda^3 + \lambda^2 - 5.\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 1$$

$\lambda^3 + 2.\lambda^2 = 0$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 0$$

Nyní budeme hledat vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice. Nejdříve vypočítáme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -3$. Rovnici $A.x^T = \lambda.x^T$ můžeme přepsat do tvaru $(A - \lambda.E).x = 0$ a tuto soustavu rovnic budeme řešit. V našem případě budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} -1+3 & 0 & -2 \\ -2 & 1+3 & -2 \\ -2 & 0 & -1+3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Upravíme matici na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = x_2 = x_3 = k$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1. Vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = -3$ je každý násobek vektoru $(1,1,1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastního vektoru, $[(1,1,1)^T]$ je tedy vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu –3.

Podobným způsobem spočítáme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 0 & -2 \\ -2 & 1-1 & -2 \\ -2 & 0 & -1-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici opět upravíme na trojúhelníkovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = -x_3 = k, x_2 = l$, kde k a l jsou libovolná čísla. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = 1$ a $x_3 = -1$. Za l zvolíme 2, pak je $x_2 = 2$. Vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ je jakýkoli vlastní vektor, který lze získat libovolnou kombinací vektorů $(-1,0,1)^T$ a $(0,2,0)^T$. Všechny tyto kombinace tvoří lineární obal $[(-1,0,1)^T, (0,2,0)^T]$, tj. vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu 1.

Nyní budeme hledat vlastní vektory příslušné vlastním číslům symetrické matice B. Nejdříve nalezneme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$. Budeme řešit soustavu rovnic $(B - \lambda.E).x = 0$. V našem případě budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} -1+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0+2 & 0 \\ 1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Upravíme matici B na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = -x_3 = k, x_2 = 0$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = 1$. Vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = -2$ je každý násobek vektoru $(1,0,-1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastní vektoru $[(1,0,-1)^T]$.

Podobným způsobem spočteme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu

$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} -1-0 & 0 & 1 \\ 0 & 0-0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Upravíme matici B na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočetli jsme řešení $x_1 = x_3 = k, x_2 = l$. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = 1$ a $x_3 = 1$. Za l zvolíme 2, pak je $x_2 = 2$. Vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ je jakýkoli vlastní vektor, který lze získat libovolnou kombinací vektoru $(1,0,1)^T$ a $(0,2,0)^T$. Všechny možné kombinace těchto dvou vektorů zapíšeme jako lineární obal $[(1,0,1)^T, (0,2,0)^T]$.

Vlastní čísla a jejich vlastní vektory se uplatňují při řešení různých technických problémů, například při řešení stavebních konstrukcí.

Podle počtu vlastních čísel a podle lineární závislosti vlastních vektorů jsme schopni určit, zda bude matice diagonalizovatelná či ne, viz věty 6.2.1 a 6.2.2 v následující podkapitole. Na tomto místě uveďme vlastnost vlastních čísel a vektorů, kterou využijeme v podkapitole 6.3.

Věta 6.1.1

Pokud je matice A symetrická nad tělesem reálných čísel, pak platí:

i. Vlastní čísla matice A jsou všechna reálná.
ii. Vlastní vektory z různých vlastních podprostorů jsou kolmé. (1, s. 411)

Tuto větu ukážeme na příkladu.

Příklad 6.1.4

Uvažujme symetrickou matici B z příkladu 6.1.3 a ukažme, že pro ni platí věta 6.1.1. Pro tuto matici jsme již spočetli její vlastní čísla a vlastní vektory.

Vlastní čísla matice B jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 0$. Na první pohled vidíme, že všechna vlastní čísla jsou reálná.

Ověření, že vlastní vektory z různých vlastních podprostorů jsou kolmé, nebude už tak jednoduché. Tato matice má vlastní vektory ze dvou různých vlastních prostorů. Všechny násobky vlastního vektoru příslušného k vlastnímu číslu $\lambda_2 = -2$ tvoří lineární obal vlastního vektoru $(1,0,-1)^T$. Druhý vlastní podprostor $[(1,0,1)^T, (0,2,0)^T]$ je tvořen vlastními vektory příslušnými k vlastnímu číslu $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

Každý vektor z prvního vlastního podprostoru lze napsat ve tvaru $(a, 0, -a)^T$, kde a je libovolné reálné číslo. Jakýkoli vektor z druhého vlastního podprostoru má tvar $(b, c, b)^T$, kde b a c jsou libovolná reálná čísla. Skalární součin vektorů z různých vlastních podprostorů je roven 0, protože

$$(a, 0, -a)^T . (b, c, b)^T = a.b + 0.c + (-a).b = 0$$

Vlastní vektory matice B z různých vlastních podprostorů jsou kolmé.

6.2 DIAGONALIZOVATELNOST A DIAGONALIZACE

Definice 6.2.1

Čtvercová matice A typu $n \times n$ se nazývá diagonalizovatelná nad tělesem T, jestliže je podobná diagonální matici. To znamená, jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P taková, že platí

$$A = PDP^{-1}, \text{ neboli } D = P^{-1}AP.$$

Diagonalizace matice A je proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P. (5, s. 13)

Příklad 6.2.1

Ověřme s využitím definice 5.4, že symetrická matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ z příkladu 6.1.3 je podobná diagonální matici $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž příslušnou regulární maticí je $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aby byla matice B podobná diagonální matici D, musí platit $B = PDP^{-1}$.

Nejprve spočítáme matici P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Spočítali jsme matici P^{-1} a nyní už jen dosadíme do vzorce $B = PDP^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ověřili jsme, že symetrická matice B je podobná diagonální matici D.

Všimněme si, že na hlavní diagonále diagonální matice D jsou vlastní čísla symetrické matice B. Ve sloupcích matice P jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům ve stejném pořadí, jako jsou příslušná vlastní čísla na hlavní diagonále diagonální matice D.

Věta 6.2.1

Matice A řádu n je diagonalizovatelná právě když má n nezávislých vlastních vektorů. (19, s. 149)

Vrátíme-li se k příkladu 6.1.2, můžeme si všimnout, že vlastní vektory $u = (2, -1)$ a $v = (2,4)$ matice A řádu 2 jsou lineárně nezávislé. Podle věty 6.2.1 je matice A diagonalizovatelná.

Vlastní vektory reálných symetrických matic jsou navzájem kolmé, a tudíž i lineárně nezávislé. Proto je každá reálná symetrická matice diagonalizovatelná.

Věta 6.2.2

Matice A je diagonalizovatelná, pokud jsou všechna vlastní čísla matice A navzájem různá. (19, s. 149)

Matice B z příkladu 6.1.1 má navzájem různá vlastní čísla, a proto je podle předchozí věty diagonalizovatelná.

Podle definice 6.2.1 nelze jednoduše zjistit, zda je daná matice diagonalizovatelná. Proto pro zjištění, zda je matice diagonalizovatelná, je vhodné využívat věty 6.2.1 a 6.2.2.

Příklad 6.2.2

Ověřme, že symetrická matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je diagonalizovatelná.

Pro ověření diagonalizovatelnosti matice A použijeme větu 6.2.1. Spočteme proto vlastní vektory matice A a ověříme jejich lineární nezávislost.

Nejprve musíme spočítat vlastní čísla, a proto nyní spočteme charakteristickou matici matice A.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda - 3 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Z této vypočítané charakteristické matice spočteme výpočtem determinantu charakteristický polynom.

$$\det(\lambda E - A) = -(\lambda + 5).(\lambda - 3).(\lambda - 7)$$

A z charakteristického polynomu spočteme vlastní čísla matice.

$(\lambda + 5).(\lambda - 3).(\lambda - 7) = 0$

$$\lambda_1 = -5$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 7$$

Nyní budeme hledat vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice. Nejdříve vypočítáme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -5$. Rovnici $A.x^T = \lambda.x^T$ můžeme přepsat do tvaru $(A - \lambda.E).x = 0$ a tuto soustavu rovnic budeme řešit. V našem případě budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} 1+5 & 4 & -2 \\ 4 & 3+5 & 4 \\ -2 & 4 & 1+5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Upravíme matici na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = -x_2 = x_3 = k$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = -5$ je každý násobek vektoru $(1, -1, 1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastního vektoru $[(1, -1, 1)^T]$.

Podobným způsobem spočítáme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$.

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 & -2 \\ 4 & 3-3 & 4 \\ -2 & 4 & 1-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici opět upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = -x_3 = k, x_2 = 0$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = 1$ a $x_3 = -1$. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ je jakýkoli vlastní vektor, který lze získat libovolnou kombinací vektoru $(-1,0,1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal $[(-1,0,1)^T]$.

Podobným způsobem spočítáme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 7$.

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 4 & -2 \\ 4 & 3-7 & 4 \\ -2 & 4 & 1-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici opět upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = 2x_2 = x_3 = k$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 1$. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 7$ je jakýkoli vlastní vektor, který lze získat libovolnou kombinací vektoru $(1,2,1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal $[(1,2,1)^T]$.

Vypočítali jsme vlastní vektory matice A a nyní už můžeme spočítat, zda jsou lineárně závislé či nezávislé. Pro zjištění závislosti budeme hledat řešení této soustavy lineárních rovnic.

$$a.(1,-1,1)+b.(-1,0,1)+c.(1,2,1)=(0,0,0)$$

Soustavu zapíšeme pomocí matic.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matici upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $a=0$, $b=0$ a $c=0$. Soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení, tak jsou vlastní vektory lineárně nezávislé. Protože jsou vlastní vektory matice A lineárně nezávislé, je symetrická matice A podle věty 6.2.1 diagonalizovatelná. Je diagonalizovatelná i podle věty 6.2.2, protože má tři různá vlastní čísla.

Postup diagonalizace matice, který se opírá o vlastní čísla a vlastní vektory, není složitý. Nejprve musíme najít vlastní čísla matice a vypočítat k nim příslušné vlastní vektory. Pak dle věty 6.2.1 nebo 6.2.2 rozhodneme, zda je matice diagonalizovatelná. Když bude matice diagonalizovatelná, tak jednoduše určíme diagonální matici D a regulární matici P. Diagonální matice D bude mít na hlavní diagonále vypočítaná vlastní čísla. A regulární matice P bude mít po sloupcích vypočtené vlastní vektory, které jsou ve stejném pořadí jako jim příslušná vlastní čísla na hlavní diagonále diagonální matice D.

Příklad 6.2.3

Uvažujme symetrickou matici $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel a diagonalizujme ji.

Nejprve musíme určit vlastní čísla matice A. Spočítáme tedy charakteristickou matici matice A.

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda & -3 & 1 \\ -3 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

Z této vypočítané charakteristické matice spočteme výpočtem determinantu charakteristický polynom.

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^3-6.\lambda^2-3.\lambda+44$$

A z charakteristického polynomu spočteme vlastní čísla matice.

$\lambda^3 - 6.\lambda^2 - 3.\lambda + 44 = 0$

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -2\sqrt{3} + 1$$
$$\lambda_3 = 2\sqrt{3} + 1$$

Nyní budeme hledat vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice. Nejdříve vypočítáme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$. Budeme řešit soustavu rovnic $(A - \lambda.E).x = 0$. V našem případě budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Upravíme matici na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = x_2 = -x_3 = k,$ kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ je každý násobek vektoru $(1,1,-1)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastního vektoru $[(1,1,-1)^T]$.

Podobným způsobem spočítáme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu

$\lambda_2 = -2\sqrt{3} + 1.$

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{3}+1 & -3 & 1 \\ -3 & -2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici opět upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{3}+1 & -3 & 1 \\ -3 & -2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{-6\sqrt{3}-3}{11} & \dfrac{2\sqrt{3}+1}{11} \\ -3 & -2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{-6\sqrt{3}-3}{11} & \dfrac{2\sqrt{3}+1}{11} \\ 0 & \dfrac{-4\sqrt{3}-2}{11} & \dfrac{-6\sqrt{3}-14}{11} \\ 0 & \dfrac{-6\sqrt{3}-14}{11} & \dfrac{-20\sqrt{3}-32}{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{-6\sqrt{3}-3}{11} & \dfrac{2\sqrt{3}+1}{11} \\ 0 & 1 & \sqrt{3}+1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-6\sqrt{3}-3}{11} & \frac{2\sqrt{3}+1}{11} \\ 0 & 1 & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = \left(\sqrt{3}+2\right).x_3,\ x_2 = \left(-\sqrt{3}-1\right).x_3,\ x_3 = k$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = \sqrt{3}+2,\ x_2 = -\sqrt{3}-1$ a $x_3 = 1$. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ je každý násobek vektoru $\left(\sqrt{3}+2, -\sqrt{3}-1\,,1\right)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastního vektoru $\left[\left(\sqrt{3}+2, -\sqrt{3}-1\,,1\right)^T\right]$.

Podobným způsobem spočítáme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu

$\lambda_3 = 2\sqrt{3}+1$.

Budeme řešit tuto soustavu

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+1 & -3 & 1 \\ -3 & 2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici opět upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+1 & -3 & 1 \\ -3 & 2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-6\sqrt{3}+3}{11} & \frac{2\sqrt{3}-1}{11} \\ -3 & 2\sqrt{3}-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{3}-3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-6\sqrt{3}+3}{11} & \frac{2\sqrt{3}-1}{11} \\ 0 & \frac{4\sqrt{3}-2}{11} & \frac{6\sqrt{3}-14}{11} \\ 0 & \frac{6\sqrt{3}-14}{11} & \frac{20\sqrt{3}-32}{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \frac{-6\sqrt{3}+3}{11} & \frac{2\sqrt{3}-1}{11} \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}+1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-6\sqrt{3}-3}{11} & \frac{2\sqrt{3}+1}{11} \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme řešení $x_1 = \left(-\sqrt{3}+2\right).x_3,\ x_2 = \left(\sqrt{3}-1\right).x_3,\ x_3 = k$, kde k je libovolné číslo. Za k zvolíme 1, pak je $x_1 = -\sqrt{3}+2,\ x_2 = \sqrt{3}-1$ a $x_3 = 1$. Vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ je každý násobek vektoru $\left(-\sqrt{3}+2, \sqrt{3}-1\,,1\right)^T$. Všechny násobky vlastního vektoru tvoří lineární obal tohoto vlastního vektoru $\left[\left(-\sqrt{3}+2, \sqrt{3}-1\,,1\right)^T\right]$.

Nyní ověříme, že všechna vlastní čísla jsou navzájem různá. Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2\sqrt{3}+1$ a $\lambda_3 = 2\sqrt{3}+1$. Vidíme, že tato vlastní čísla jsou navzájem různá.

Už můžeme sestavit z vlastních čísel diagonální matici D a z vlastních vektorů regulární matici P.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{3}+2 \\ 1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nakonec provedeme kontrolu, zda jsme počítali správně.

$$A = PDP^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{3}+2 \\ 1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{3}+2 \\ 1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

V předchozím textu jsme uvedli postup, jak najít k dané matici A diagonální matici D tak, aby s ní byla podobná. Na několika příkladech jsme ukázali, že to souvisí s rozkladem matice A na součin $P \cdot D \cdot P^{-1}$, kde P je regulární matice. V následující podkapitole ukážeme, že symetrické matice lze diagonalizovat dokonce ortogonální maticí, tj. maticí, pro niž platí $P^{-1} = P^T$.

6.3 ROZKLAD MATICE

Maticové rozklady používáme, když se snažíme napsat danou matici jako součin nějakých jiných matic. Existují různé druhy rozkladů matic. Např. zápis $A = PDP^{-1}$, s nímž jsme se setkali v předchozí kapitole, představuje rozklad matice A.

Spektrální rozklad matice A souvisí s ortogonální diagonalizovatelností matice A.

Definice 6.3.1

Nechť A je reálná symetrická matice, pak existuje spektrální rozklad

$$A = PDP^T,$$

kde D je diagonální matice a P je ortogonální matice.

Rozklad z předchozí definice se velmi podobá rozkladu uvedenému v definici 6.2.1 diagonalizovatelné matice. V následujícím textu zjistíme, že z rozkladu PDP^{-1} se snadno získá spektrální rozklad ortonormalizací vlastních vektorů zapsaných ve sloupcích matice P. Ortonormalizace je úprava vektorů, aby byly normované a zároveň navzájem kolmé.

Jsou-li vektory ve sloupcích matice P po dvou navzájem kolmé a normované, pak je součinem P a P^T jednotková matice, a tedy $P^T = P^{-1}$, tj. matice P je ortogonální, jak je ve spektrálním rozkladu.

Na diagonále diagonální matice D jsou vlastní čísla matice A. Matice P je ortogonální, tj. $P^{-1} = P^T$, a její sloupce tvoří ortonormální vlastní vektory matice A, které jsou ve stejném pořadí jako jim příslušející vlastní čísla v diagonální matici D.

Příklad 6.3.1

Uvažujme matici $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a nalezněme spektrální rozklad matice.

Nejprve vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 5.\lambda^2 + 9.\lambda - 6$$

$\lambda^3 - 5.\lambda^2 + 9.\lambda - 6 = 0$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

Spočetli jsme vlastní čísla matice A a nyní spočteme vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům.

$$\lambda_1 = 0, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nalezli jsme vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice A. Podle věty 6.1.1 víme, že vlastní vektory jsou ortogonální a zjistíme, zda jsou vlastní vektory ortonormální.

$$(v_1 . v_1) = (-1).(-1) + (-2).(-2) + 1.1 = 6$$

$$(v_2 . v_2) = 1.1 + 0.0 + 1.1 = 2$$

$$(v_3 . v_3) = (-1).(-1) + 1.1 + 1.1 = 3$$

Zjistili jsme, že vlastní vektory nejsou ortonormální, protože $\|v_1\| = \sqrt{6}$, $\|v_2\| = \sqrt{2}$, $\|v_3\| = \sqrt{3}$, a proto musíme vektory normalizovat.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{(v_1 . v_1)}} = \frac{(-1, -2,\ 1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{(v_2 . v_2)}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{(v_3 . v_3)}} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Z těchto vektorů a vlastních čísel už snadno sestavíme matice spektrálního rozkladu.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ještě provedeme zkoušku, jestli jsme počítali správně.

$$A = PDP^T = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.3.2

Ověřme, že matice P s normovanými vlastními vektory ve sloupcích z příkladu 6.3.1 je skutečně ortogonální maticí.

Pro matici P, která je ortogonální, musí platit $P^{-1} = P^T$. Nejprve spočítáme inverzní matici P^{-1} k matici P.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Dále spočítáme transponovanou matici P^T k matici P.

$$P^{T} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že

$$P^{-1} = P^T$$

Ověřili jsme, že inverzní matice P^{-1} se rovná transponované matici P^T. Matice P je opravdu ortogonální maticí.

Spektrální rozklad se využívá k umocňování matic. Pokud budeme umocňovat diagonální matici, pouze umocníme prvky na diagonále, tím ušetříme spoustu početních operací, které se musejí spočíst, když se umocňuje čtvercová matice. Když budeme chtít matici umocnit na určitou mocninu, tak nejprve matici rozložíme pomocí spektrálního rozkladu. Diagonální matici, která vznikne tímto rozkladem, snadno umocníme na danou mocninu. A pak jen spočítáme spektrální rozklad, kde místo diagonální matice dosadíme umocněnou diagonální matici. Výsledkem bude matice umocněná na danou mocninu. Na následujícím příkladu ukážeme umocnění pomocí spektrálního rozkladu.

Příklad 6.3.3

Pomocí spektrálního rozkladu spočítejme A^3, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je symetrická matice z příkladu 6.2.2. V příkladu 6.2.2 jsme vypočetli vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

$$\lambda_1 = -5, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 7, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou ortogonální podle věty 6.1.1 a zjistíme, zda jsou vlastní vektory ortonormální.

$$(v_1 . v_1) = 1.1 + (-1).(-1) + 1.1 = 3$$

$$(v_2 . v_2) = (-1).(-1) + 0.0 + 1.1 = 2$$

$$(v_3 . v_3) = 1.1 + 2.2 + 1.1 = 6$$

Zjistili jsme, že vlastní vektory nejsou ortonormální, a proto musíme vektory normalizovat.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{(v_1 . v_1)}} = \frac{(1, -1,\ 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{(v_2 . v_2)}} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{(v_3 . v_3)}} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Z těchto vektorů a vlastních čísel už snadno sestavíme matice spektrálního rozkladu.

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, P = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Spočetli jsme matice spektrálního rozkladu matice A. Nyní snadno spočteme třetí mocninu diagonální matice D tím, že umocníme prvky na diagonále.

$$D^3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} (-5)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 343 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet A^3 zbývá vypočítat následující součin:

$$A^3 = PD^3P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 343 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -125 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 343 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 156 & 2 \\ 156 & 187 & 156 \\ 2 & 156 & 29 \end{pmatrix}$$

Matice P, P^T se neumocňují ani nijak neupravují, protože platí:

$$A^3 = (PDP^T)^3 = (PDP^T) \cdot (PDP^T) \cdot (PDP^T) = PD \cdot (P^T \cdot P) \cdot D \cdot (P^T \cdot P) \cdot DP^T =$$
$$= PD \cdot E \cdot D \cdot E \cdot DP^T = PD \cdot D \cdot DP^T = P \cdot D^3 \cdot P^T$$

Protože jde o výpočet „pouze“ třetí mocniny matice A, lze správnost výsledku snadno zkontrolovat výpočtem odpovídajícího součinu, tj. $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Poznamenejme, že spektrální rozklad může podobně dobře posloužit i k výpočtu $A^{-1}, A^{-2}, \dots, A^{-n}$ nebo hodnot $f(x) = p_n x^n + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$. Příslušné operace se provedou pouze na diagonální matici.

Existují i jiné rozklady symetrických matic. Například jde o Schurův rozklad, Hessenbergův rozklad či Choleského rozklad. Zkoumání těchto rozkladů a jejich aplikací by přesáhlo doporučený rozsah bakalářské práce.

ZÁVĚR

V bakalářské práci jsem se snažila vytvořit přehled o symetrických maticích, o jejich vlastnostech a využitích. Zaměřila jsem se na to, čím jsou symetrické matice specifické oproti běžným maticím. Zjistila jsem, že množina symetrických matic se operacemi, sčítání a násobením prvkem tělesa, tvoří vektorový prostor, což umožňuje na tuto strukturu aplikovat poznatky z lineární algebry. Zaměřila jsem se i na množinu symetrických matic s jednou binární operací. Uvedla jsem i několik operací se symetrickými maticemi.

Soustředila jsem se také na speciální symetrické matice. Čím se speciální symetrické matice liší od „běžných" symetrických matic. Jaké algebraické struktury tvoří a jaké mohou mít využití.

Uvedla jsem úpravu symetrických matic na diagonální tvar elementárními a symetrickými úpravami. Na příkladech je vidět rozdíl mezi těmito úpravami.

Nakonec jsem se zaměřila na diagonalizovatelnost a rozklady symetrických matic. Zjistila jsem, že každá reálná symetrická matice je diagonalizovatelná. Zmínila jsem výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů, které jsou pro kapitolu 6 velice důležité. Pomocí vlastních čísel a vektorů se vytvoří spektrální rozklad matic.

Vše jsem doplnila jednoduchými příklady pro lepší pochopení.

RESUMÉ

Bakalářská práce pojednává o symetrických maticích. Nejprve se v této práci věnuji operacím se symetrickými maticemi a jejich vlastnostmi. Tímto jsem dospěla k poznatku, že symetrické matice při použití operací sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový podprostor. Jedna kapitola je zvláště věnována speciálním typům symetrických matic, jejich vlastnostem a využití v praxi. V druhé části práce se zaměřuji na úpravu symetrických matic na takzvaný diagonální tvar a také na diagonalizovatelnost matic. Zjistila jsem, že pokud je symetrická matice reálná, poté je také diagonalizovatelná. Na závěr práce se ještě zaměřují na spektrální rozklad symetrických matic.

This Bachelor thesis deals with the symmetric matrices. In the first part I pursue with operations with symmetric matrices and their properties. This brings me to knowledge that symmetric matrices by counting and multiplication scalar make a vector subspace. One chapter is particularly dedicated to special types of symmetric matrices, their properties and application. In the second part I focus on adaptation of symmetric matrices to so-called diagonal shape and diagonalizability of symmetric matrices. I found out that if a symmetric matrix is real than it´s diagonalizable too. At the end I present spectral decomposition of symmetric matrices.

SEZNAM LITERATURY

1. ANTON, Howard a Chris RORRES. *Elementary linear algebra: applications version*. 11 th edition. Hoboken: NJ: John Wiley&Sons, 2014. ISBN 978-1-118-43441-3. Dostupné také z: https://geometria.math.bme.hu/sites/geometria.math.bme.hu/files/users/csgeza/howard-anton-chris-rorres-elementary-linear-algebra-applications-version-11th-edition.pdf
2. BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.
3. Bisymmetrische Matrix. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://de.wikipedia.org/wiki/Bisymmetrische_Matrix
4. BLAŽEK, Matouš. *Spektrální rozklad obecných matic s využitím Arnoldiho metody*. 2018. Bakalářská práce. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra aplikované matematiky.
5. BULANT, Michal. *Matematika I-12. přednáška: Diagonalizovatelné matice, symetrické matice*. Dostupné také z: https://is.muni.cz/el/fi/jaro2009/MB101/um/mI-12.pdf. Slidy k přednášce. Masarykova univerzita, Fakulta informatiky.
6. Diagonální matice. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Diagon%C3%A1ln%C3%AD_matice
7. DOSTÁL, Zdeněk a Vít VONDRÁK. *Lineární algebra*. 2011. Dostupné také z: http://docplayer.cz/118760957-Linearni-algebra-verze-zdenek-dostal-vit-vondrak.html. Skriptum. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.
8. GOLUB, Gene H. a Charles F. VAN LOAN. *Matrix computations*. Fourth edition. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. ISBN 978-1-4214-0794-4. Dostupné také z: http://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/books/2013%20Matrix%20Computations%204th.pdf
9. Hankelova matice. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Hankelova_matice

10. KALVODA, Tomáš a Štěpán STAROSTA. *Poznámka k typům definitnosti matic*. 2021. Dostupné také z: https://kam.fit.cvut.cz/deploy/mi-mpi/mi-mpi-formy.pdf. Poznámky. ČVUT v Praze, Fakulta informačních technologií, Katedra aplikované matematiky.
11. Koeficient mnohonásobné korelace. *Matematická biologie* [online]. 2021 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-hodnoceni-biologickych-dat--statisticke-modelovani--zaklady-regresni-a-korelacni-analyzy--analyza-zavislosti--koeficient-mnohonasobne-korelace
12. Kovariance a korelace příklady. *Finance v praxi* [online]. 2021 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://www.financevpraxi.cz/statistika-kovariance-a-korelace-priklady
13. KRAJNÍK, Eduard. *Maticový počet*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004, c1997. ISBN 80-01-03084-9.
14. KRUPKOVÁ, Olga. *Lineární algebra 1*. Olomouc, 2008. Dostupné také z: https://phoenix.inf.upol.cz/esf/ucebni/Algebra.pdf. Učební text. Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Katedra informatiky.
15. NEUHAUSER, Jaroslav a Pavel TRNKA. *Metody Subspace Identification*. Dostupné také z: https://slideplayer.cz/slide/3244251/. Prezentace k semináři. ČVUT v Praze, Elektrotechnická fakulta, Katedra Řídící techniky.
16. OLŠÁK, Petr. *Lineární algebra*. Praha, 2002. Dostupné také z: http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/QuantumComputing/linal.pdf. ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická.
17. RAIMAN, Tom. *Klasifikace kvadratických forem*. Dostupné také z: https://homel.vsb.cz/~ber95/LA/Podklady_od_cvicicich/Raiman/06%20Klasifikace%20kvadratick%C3%BDch%20forem.pdf. Příklady do cvičení. Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky.
18. RAIMAN, Tom. *Spektrální rozklad, Geršgorinova věta*. Dostupné také z: https://homel.vsb.cz/~ber95/LA/Podklady_od_cvicicich/Raiman/09%20Spektr%C3%A1ln%C3%AD%20rozklad,%20Ger%C5%A1gorinova%20v%C4%9Bta.pdf. Příklady do cvičení. Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky.
19. ROHN, Jiří. *Lineární algebra a optimalizace*. 2004. Dostupné také z: http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/other/lascript.pdf. Učební text. Univerzita Karlova.

20. ŘÍHA, David. *Mocnění intervalových matic*. Praha, 2018. Dostupné také z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/200553/. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra aplikované matematiky.
21. Spline. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Spline
22. Toeplitz Matrix. *WolframMathWorld* [online]. 2021 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/ToeplitzMatrix.html
23. Toeplitz-Matrix. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://de.wikipedia.org/wiki/Toeplitz-Matrix
24. Vlastní vektory a vlastní čísla. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastn%C3%AD_vektory_a_vlastn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADsla
25. Zentralsymmetrische Matrix. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://de.wikipedia.org/wiki/Zentralsymmetrische_Matrix

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ