Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Hamiltonovské problémy a jejich obarvené varianty

Plzeň, 2020

Kateřina Sosnová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s užitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 18. 7. 2020 Kateřina Sosnová

Poděkování

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce panu doc. Ing. Romanovi Čadovi Ph.D. za poskytnutí dat, odborné vedení, vstřícný přístup a trpělivost během psaní této práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá Hamiltonovskými problémy a jejich obarvenými variantami. Práce se zaměřuje na podmínky, za kterých je graf hamiltonovský. A to jak pro neorientované, tak orientované varianty. V poslední kapitole je zmíněna i struktura grafů bez určitých typů kružnic.

Klíčová slova: hamiltonovské grafy, barvení, orientované grafy, neorientované grafy

Abstract

This bachelor thesis deals with Hamiltonian problems and their coloured variants. The thesis focuses on the conditions under which the graph is Hamiltonian. Both for non-oriented and oriented variants. The last chapter also mentions the structure of graphs without certain types of circles.

Keywords: Hamiltonian graphs, colouring, oriented graphs, non-oriented graphs

Obsah

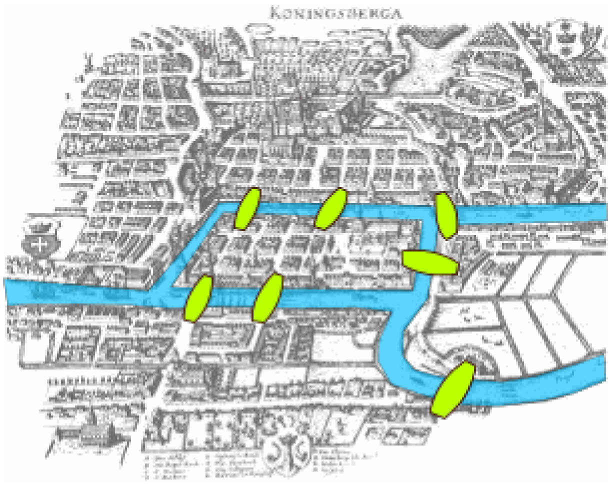
1 Úvod

V této kapitole uvedeme krátký historický náhled na teorii grafů, který je uveden v [1].

1.1 Historie teorie grafů

Teorie grafů patří mezi mladé matematické odvětví. První zmínky nacházíme v 18. a 19. století, avšak k rozvoji této oblasti došlo především v druhé polovině 20. století, kdy našla teorie grafů uplatnění i ve fyzice, elektrotechnice, chemii a ekonomii.

Za první práci je považován článek [2] švýcarského matematika a fyzika Leonharda Eulera (1707-1783) z roku 1736, kde Euler řešil tzv. “problém mostů města Královce”. Ten je založen na skutečném místě a situaci. Na Obrázku 1 můžeme vidět mapu města Královce z té doby se sedmi vyznačenými mosty. Otázka problému zní, zda je možné přejít všechny mosty pouze jednou a skončit na místě, kde byla cesta započata.



Obrázek 1: Sedm mostů města Královce

Další práce nalezneme až v druhé polovině 19. století, konkrétně v roce 1847 u německého fyzika Gustava Kirchhoffa (1824-1887). Zabýval se otázkami teorie stromů v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic, které obdržel při výpočtu neznámých proudů v elektrických sítích.

Otázky stromů se rozvíjely hlavně v souvislosti s úlohami chemie. Konkrétně u britského matematika Arthura Cayleye (1821-1895), který studoval problém izomerů uhlovodíků C_2H_{2n+2}, který formoval obecně.

Otázkami stromů se zabývali dále i anglický matematik James Joseph Sylvester (1814-1897) a francouzský matematik Camille Jordan (1838-1922).

Nejznámější úlohou teorie grafů, je „problém čtyř barev“ z poloviny minulého století. Jde o otázku, zda je možné k obarvení libovolné mapy (v rovině či na kulové ploše) použít pouze čtyři barvy. Problém byl vyřešen až v roce 1976 za použití počítače. Podnítil tak řadu matematiků 19. a 20. století k práci v teorii grafů.

2 Základní terminologie

V následující kapitole jsou shrnuty všechny základní definice pojmů, které budeme v tomto textu používat. Definice jsou použity z [3]

Neorientovaný graf G je dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina tzv. *vrcholů* (nebo uzlů, nebo bodů) a $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ je množina dvouprvkových množin vrcholů, tzv. *hran* (nebo linek). Na Obrázku 2 vidíme ukázku grafů. Vrcholy grafu budeme značit malými písmeny, podobně je tomu u hran, ale ta je určena dvěma vrcholy. Tedy hrana uv je hrana mezi vrcholy u a v.

Obrázek 2: Ukázka grafů

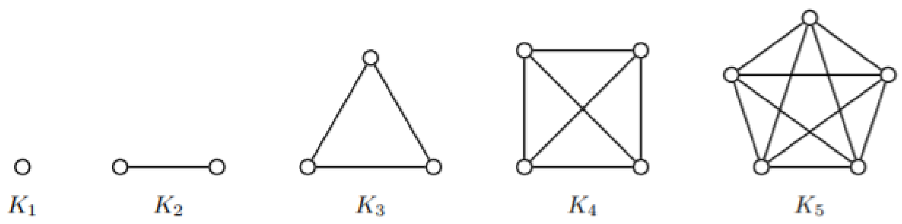
Orientovaný graf je dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq V \times V$ je množina uspořádaných dvojic vrcholů, tzv hran.

Řád grafu G je počet vrcholů grafu G a *velikost grafu* G je počet hran grafu G.

Dva vrcholy x, y grafu G jsou *sousední* (nebo *sousedé*), pokud xy je hrana G. Dvě hrany $e \neq f$ jsou *sousední*, pokud mají společný konec.

Graf $H = (V_H, E_H)$ je *podgraf* grafu $G = (V_G, E_G)$, jestliže platí následující podmínky: $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ a hrany grafu H mají oba své vrcholy ve V_H. Tedy podgraf vznikne vymazáním některých vrcholů původního grafu, všech hran do těchto vrcholů zasahujících a případně některých dalších hran.

Pokud všechny různé vrcholy G jsou sousedící, potom je graf G *úplný*. Úplný graf řádu n se značí K_n. Dvojice nesousedních vrcholů nebo hran se nazývá *nezávislá*. Formálněji, soubor vrcholů nebo hran je *nezávislý* (nebo *stabilní*) jestliže žádné dva jeho prvky nejsou sousední. Maximální počet vrcholů v nezávislém setu vrcholů grafu G se nazývá *číslo nezávislosti* a značí se $\alpha(G)$. Graf obsahující pouze jeden vrchol se nazývá triviální. Na Obrázku 3 je ukázka triviálního a úplných grafů.



Obrázek 3: Triviální graf a úplné grafy

Graf G je *bipartitní*, pokud množina $V(G)$ může být rozdělena na dvě podmnožiny U a W (nazývají se *partitní sety*) takové, že každá hrana z G spojuje vrchol z U a vrchol z W. Graf G je *úplný bipartitní* graf, pokud $V(G)$ může být rozdělena na dva sety U a W (opět se nazývají partitní sety) tak, že uw je hrana z G právě tehdy, když $u \in U$ a $w \in W$. Pokud $|U| = s$ a $|W| = t$, potom úplný bipartitní graf má řád $s + t$, velikost st a značí se $K_{s,t}$ (nebo $K_{t,s}$).

Multigraf, je graf, který obsahuje rovnoběžné hrany. Mezi dvěma uzly multigrafu tedy může existovat více (stejně orientovaných) hran. *Pseudograf* je graf, který obsahuje smyčky, to znamená, že obsahuje hrany, které začínají i končí ve stejném vrcholu.

Sled $v_0v_1v_2 \dots v_n$ je posloupnost vrcholů a hran mezi vrcholy v_0 a v_n. *Tah* je sled, ve kterém se neopakují žádné hrany a *cesta* je sled, ve kterém se neopakují žádné vrcholy (tedy ani hrany).

Tah, který začíná a končí ve stejném vrcholu daného grafu se nazývá *uzavřený tah*. Uzavřený tah v souvislém grafu G, který navíc obsahuje všechny hrany grafu G, se nazývá *uzavřený eulerovský tah*. Tah v souvislém grafu G, který obsahuje všechny hrany grafu G a výchozí vrchol se liší od koncového vrcholu, se nazývá *otevřený eulerovský tah*. Graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá *eulerovský graf*.

Stupeň $d_G(v) = d(v)$ *vrcholu* v je počet $|E(v)|$ hran incidentních s v; podle naší definice grafu se to rovná počtu sousedů v. Vrchol stupně 0 je *izolovaný*. Číslo $\Delta(G) := max\{d(v)|v \in V\}$ nazveme *maximální stupeň* grafu G. Číslo $\delta(G) := min\{d(v)|v \in V\}$ nazveme *minimální stupeň* grafu G.

Pokud všechny vrcholy G mají stejný stupeň k, potom G je *k-regulární*, nebo jednoduše *regulární*. Číslo $d(G) := \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v)$ je *průměrný stupeň G*. Platí $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

Cesta je neprázdný graf $P = (V, E)$, pro který platí $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$, kde x_i jsou všechna různá. Vrcholy x_0 a x_k se nazývají se její *konce*; vrcholy $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ jsou *vnitřní* vrcholy P. Počet hran cesty je její *délka*, cesta délky k je značená P_k. Často označujeme $P = x_0x_1 \dots x_k$.

Pokud $P = x_0 \dots x_{k-1}$ je cesta a $k \geq 3$, potom graf $C := P + x_{k-1}x_0$ se nazývá *kružnice*. Jako u cest, často označujeme kružnici její sekvencí vrcholů; výše uvedená kružnice může být zapsaná jako $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$. *Délka* kružnice je její počet vrcholů (nebo hran); kružnice délky k je značená C_k.

Skóre grafu označuje libovolně uspořádanou posloupnost stupňů jeho vrcholů. Dvě skóre považujeme za stejná, pokud jedno dostaneme přerovnáním čísel (permutací) druhého – tzn. na zvoleném pořadí vrcholů nezáleží.

Dva *izomorfní* grafy mají shodné skóre, z toho vyplývá, že dva grafy s různým skóre jsou *neisomorfní*.

Neprázdný graf G se nazývá *souvislý*, jestliže $\forall x, y \in V(G)$ existuje mezi x a y cesta. *Komponenta* grafu je jeho maximální souvislý podgraf. Graf G se nazývá *k-souvislý* (pro $k \in \mathbb{N}$) pokud $|G| > k$ a $G - X$ je souvislý pro každou množinu $X \subseteq V$ s $|X| < k$.

(Vrcholová) souvislost $\kappa(G)$ grafu G je nejmenší počet vrcholů, jejichž odstraněním z grafu G zůstane buď nesouvislý graf nebo triviální graf.

3 Hamiltonovské vlastnosti

Jako zdroj pro následující kapitolu byl použit [3].

Graf G je definován jako *hamiltonovský*, pokud má kružnici obsahující všechny vrcholy G. Název hamiltonovský je odvozen ze jména Sira Williama Rowana Hamiltona, známého irského matematika. Překvapivě však Hamiltonův vztah s grafy nesoucími jeho jméno není striktně matematický. V roce 1857 Hamilton představil hru skládající se z pevného pravidelného dvanáctistěnu ze dřeva, dvaceti kolíčků (každý vložen na vrchol dvanáctistěnu) a zásoby provázku. Každý vrchol představoval důležité město té doby. Cílem hry bylo najít cestu přes všechny hrany dvanáctistěnu, která projde každé město pouze jednou a končí ve městě, kde začíná. Aby si hráč vzpomněl, která města na trase již byla navštívena, byl provázek použit k propojení příslušných kolíčků v příslušném pořadí. Nic nenasvědčuje tomu, že by hra byla někdy úspěšná.

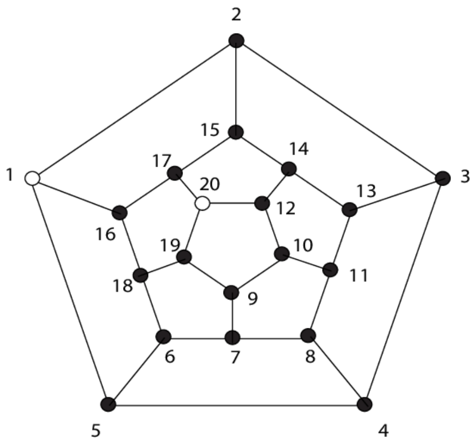
Předmět Hamiltonovy hry může být popsán graficky, konkrétně, zda má graf dvanáctistěnu kružnici obsahující každý z jeho vrcholů (Obrázek 4). Odtud získáváme název hamiltonovský.

Je zajímavé uvést, že v roce 1855 (dva roky předtím, než Hamilton představil hru) anglický matematik Thomas P. Kirkman položil následující otázku předloženou písemně královské společnosti: Lze pro graf mnohostěnu vždy najít kružnici, která prochází každým vrcholem právě jednou? Kirkman tak zřejmě představil obecnou studii hamiltonovských grafů, ačkoli až Hamiltonova hra vyvolala zájem o tento problém.

Kružnice grafu G obsahující každý vrchol G se nazývá *hamiltonovská kružnice* G, tedy hamiltonovský graf je ten, který obsahuje hamiltonovskou kružnici. Kvůli podobnosti v definicích eulerovských grafů a hamiltonovských grafů, a protože existuje zvláště užitečná charakterizace eulerovských grafů, lze očekávat analogické kritérium pro hamiltonovské grafy. Tak tomu však není. Ve skutečnosti je charakterizace hamiltonovských grafů jeden z hlavních nevyřešených problémů teorie grafů.

Hamiltonovská cesta v grafu *G* je cesta, která obsahuje každý vrchol grafu *G* právě jednou.

Má-li graf G hamiltonovskou kružnici, má i hamiltonovskou cestu. Je zřejmé, že pokud má-li graf G hamiltonovskou cestu, pak G je 1-souvislý a má-li graf G hamiltonovskou kružnici, pak G je 2-souvislý.



Obrázek 4: Graf dvanáctistěnu

Věta 3.1 (Dirac) [4] Nechť G je graf řádu $n \geq 3$. Je-li $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ pro každý vrchol v z G, potom G má hamiltonovskou kružnici.

Věta 3.2 (Ore) [5] Jestliže G je graf řádu $n \geq 3$ takový, že pro všechny různé nesousedící vrcholy u a v platí $d(u) + d(v) \geq n$, poté G je hamiltonovský.

Věta 3.3 (Bondy, Chvátal) [6] Nechť u a v jsou různé nesousední vrcholy grafu G řádu n takové, že $d(u) + d(v) \geq n$. Potom $G + uv$ je hamiltonovský právě tehdy když G je hamiltonovský.

Uzávěr grafu G řádu n, značený $C(G)$, je graf získaný z G rekurzivním spojením nesousedních vrcholů, jejichž součet stupňů je alespoň n (ve výsledném grafu v každém kroku), dokud žádný takový pár nezůstane.

Věta 3.4 [7] Nechť G je graf řádu $n \geq 3$, stupně vrcholů d_i odpovídají $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Pokud není žádná hodnota $k < \frac{n}{2}$ pro kterou $d_k \leq k$ a $d_{n-k} \leq n - k - 1$, poté je G hamiltonovský.

Postačující podmínky pro hamiltonovskost, které jsme dosud uvedli, zahrnují stupně vrcholů grafu. Další výsledek zahrnuje mohutnost nezávislých množin vrcholů a souvislost grafu.

Věta 3.5 [8] Nechť G je graf s alespoň 3 vrcholy. Pokud $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, potom G je hamiltonovský.

Věta 3.6 Nechť G je graf s alespoň 3 vrcholy. Pokud $\kappa(G) \geq \alpha(G) + 1$, potom G je hamiltonovsky souvislý.

Zajímavé je, že Oreho věta (3.2) následuje jako důsledek věty (3.3).

Jak jsme již poznamenali, získání použitelné charakterizace hamiltonovskýh grafů zůstává v teorii grafů nevyřešeným problémem. S ohledem na nedostatek úspěchu ve vývoji takové charakterizace není překvapivé, že pro zkoumání byly vybrány zvláštní podtřídy hamiltonovských grafů, jakož i určité třídy nehamiltonovských grafů. Nyní diskutujme několik typů hamiltonovských grafů a poté stručně uvažujeme o grafech, které jsou téměř hamiltonovské. Definujme *(n+1) -uzávěr* $C_{n+1}(G)$ grafu G řádu n jako graf získaný z G rekurzivním spojením dvojic nesousedních vrcholů, jejichž součet stupňů je alespoň $n+1$, dokud žádný takový pár nezůstane.

Věta 3.6 Nechť G je graf řádu n. Pokud $C_{n+1}(G)$ je úplný, potom G je hamiltonovsky souvislý.

Důsledek 3.7 Pokud G je graf řádu n takový, že pro všechny různé nesousední vrcholy u a v platí $d(u)+d(v) \geq n+1$, potom G je hamiltonovsky souvislý.

Důsledek 3.8 Nechť G je graf řádu n takový, že $d(v) \geq \frac{n+1}{2}$ pro každý vrchol v grafu G, potom G je hamiltonovsky souvislý.

Důsledek 3.9 Nechť G je graf řádu $n \geq 3$, stupně vrcholů d_i splňují $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Pokud neexistuje žádná hodnota $k \leq \frac{n}{2}$ pro kterou $d_k \leq k$ a $d_{n-k} \leq n-k$, potom G je hamiltonovsky souvislý.

4 Hranová obarvení grafů a multigrafů

4.1 Úvod

Jako zdroj pro tuto podkapitolu a podkapitoly 4.2 a 4.3 byl použit článek Proper Hamiltonian Cycles in Edge-Colored Multigraphs [9].

Nechť $I_c = \{1,2,\ldots,c\}$ je množina o $c \geq 2$ barvách. V tomto textu G^c označuje hranově-c-obarvený mutigraf takový, že každá hrana je obarvená jednou barvou z I_c a žádné dvě hrany spojené ve stejném vrcholu nemají stejnou barvu. Takové obarvení nazveme *dobré obarvení*. Nechť $V(G^c)$ a $E(G^c)$ je množina vrcholů a množina hran G^c. Označme $n = |V(G^c)|$ a $m = |E(G^c)|$.

Pokud H je buď množina vrcholů nebo podgraf G^c, a x je vrchol G^c, potom $N_H^i(x)$ označuje sadu vrcholů H sousedních k x hranou barvy i a $d_H^i(x)$ označuje její mohutnost. Pokud H obsahuje všechny vrcholy G^c , pak píšeme $N^i(x)$ namísto $N_{G^c}^i(x)$.

Barevný i-stupeň vrcholu x, značený $d^i(x)$, je mohutnost $N^i(x)$. *Duhový stupeň* vrcholu x, značený $rd(x)$, je počet různých barev hran spojených s x. Duhový stupeň multigrafu G^c, značený $rd(G^c)$, je minimální duhový stupeň mezi jeho vrcholy. Hrana s konci x a y je značena xy, a $c(xy)$ značíme množinu barev přítomných na hranách mezi x a y.

Duhově kompletní multigraf je ten, který má všechny možně barevné hrany mezi jakýmkoliv párem vrcholů (počet hran je tedy c). Doplněk multigrafu G^c, značený $\overline{G^c}$, je multigraf se stejnými vrcholy jako G^c a hranami $vw \in E(\overline{G^c})$ barvy i právě tehdy, když $vw \notin E(G^c)$ té barvy. Říkáme, že hrana xy je chybějící hrana G^c , pokud $xy \in E(\overline{G^c})$.

Podgrafu G^c říkáme, že je *dobře obarvený* nebo jen *dobrý*, pokud se jakékoliv dvě sousední hrany tohoto podgrafu liší v barvě. Pro připomenutí cesta je sekvence různých vrcholů $v_1 v_2 \ldots v_k$ takových, že v_i je sousední s v_{i+1} pro

$i = 1, \dots, k-1$. Pro $k \geq 3$, pokud v_k je sousední s v_1, potom $v_1 v_2 \dots v_k v_1$ se nazývá kružnice.

Hamiltonovská cesta (kružnice) je cesta (kružnice) obsahující všechny vrcholy multigrafu. Dobrá Hamiltonovská cesta (kružnice) je Hamiltonovská cesta (kružnice), která je dobře obarvená. Předpokládáme, že všechny multigrafy jsou souvislé. Dále budeme zkracovat barvy *červená, modrá, zelená a černá* na *č, m, z a čn*. Například budeme psát $d^{č}(x)$ místo $d^{červená}(x)$.

Věta 4.1 [10] Nechť G^c je hranově-2-obarvený multigraf na n vrcholech obarvený $\{č, m\}$. Pokud pro každý vrchol x máme $d^{č}(x) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ a $d^m(x) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou kružnici pro n sudá a dobrou kružnici délky $n-1$ pro n lichá.

Věta 4.2 [11] Nechť G^c je hranově-c-obarvený multigraf na n vrcholech, $n \geq 2$ a $c \geq 3$. Pokud $m \geq c\binom{n-1}{2} + 1$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou cestu.

4.2 Meze pro hranově-2-barvené multigrafy

V této sekci se zaměříme na existenci dobré hamiltonovské kružnice ve hranově-2-obarvených multigrafech. Představíme dva hlavní výsledky. První zahrnuje počet hran. Druhý duhový stupeň a počet hran.

Věta 4.3 Nechť G^c je hranově-2-obarvený multigraf na n vrcholech, $n \geq 4$ obarvený $\{č, m\}$. Pokud $m \geq 2\binom{n-1}{2} + n$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou kružnici, pokud n je sudé, a dobrou kružnici délky $n-1$ jinak.

Pro extrémní příklady, uvažujme duhový úplný hranově-2-obarvený multigraf na $n-1$ vrcholech (n sudé). Přidáme jeden nový vrchol x. Potom přidáme všechny možné hrany stejné barvy mezi x a úplným multigrafem. Výsledný multigraf má $2\binom{n-1}{2} + n - 1$ hran a nemá žádnou dobrou hamiltonovskou kružnici, protože x má pouze jednu incidentní barvu.

Věta 4.4 Nechť G^c je hranově-2-obarvený multigraf na n vrcholech, $n \geq 9$ obarvený $\{č, m\}$. Pokud $rd(G^c) = 2$ a $m \geq \binom{n}{2} + \binom{n-2}{2} + 3$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou kružnici, pokud n je sudé, a dobrou kružnici délky $n-1$ jinak.

4.3 Meze pro c-hranově-obarvené multigrafy, $c \geq 3$

V této sekci se zaměříme na existenci dobré hamiltonovské kružnice v hranově-c-obarvených multigrafech, $c \geq 3$. Představíme dva hlavní výsledky. První zahrnuje počet hran. Druhý, duhový stupeň a počet hran. Nakonec uvedeme odhad týkající se duhového stupně, počtu hran a souvislosti.

Věta 4.5 Nechť G^c je hranově-c-obarvený multigraf na n vrcholech, $n \geq 4$ a $3 \leq c < n$. Pokud $m \geq 2\binom{n-1}{2} + n$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou kružnici.

Pro extrémní příklady, uvažujme duhový kompletní hranově-c-obarvený multigraf na $n-1$ vrcholech. Přidáme jeden nový vrchol x. Potom přidáme všechny možné hrany stejné barvy, řekněme červené, mezi x a úplným multigrafem. Výsledný multigraf má $c\binom{n-1}{2}+n-1$ hran a nemá žádnou dobrou hamiltonovskou kružnici, protože x má pouze dopadající hrany červené barvy.

Věta 4.6 Nechť G^c je hranově-c-obarvený multigraf na n vrcholech, $n \geq 4$ a $c \geq 3$. Pokud $rd(G^c) = c$ a $m \geq c\binom{n-1}{2}+c+1$, potom G^c má dobrou hamiltonovskou kružnici.

Pro extrémní případ, uvažujme duhový úplný hranově-c-obarvený multigraf na $n-1$ vrcholech. Přidáme jeden nový vrchol x. Potom přidáme všechny možné hrany všech barev mezi x a úplným multigrafem. Výsledný multigraf má $c\binom{n-1}{2}+c$ hran, duhový stupeň roven c, ale nemá dobrou hamiltonovskou kružnici, protože není 2-souvislý.

Graf nazveme dobře hamiltonovský, pokud obsahuje dobře obarvenou hamiltonovskou kružnici.

Domněnka 4.7 Pro $n \geq 3$, pokud $d^c(G) \geq \frac{n}{2}$, potom G je dobře hamiltonovský.

4.4 Úplné obarvené grafy

Jako zdroj pro následující podkapitolu posloužil článek Properly colored Hamilton cycles in edge colored complete graphs [12].

Nechť G^c označuje graf G jehož hrany jsou obarveny libovolně. Zejména, K_n^c označuje hranově obarvený úplný graf na n vrcholech a $K_{m,m}^c$ označuje hranově obarvený úplný bipartitní graf se stejnými partitami velikosti m. Pro hranově obarvený graf G^c, nechť $\Delta(G^c)$ označuje maximální počet hran stejné barvy spojených s vrcholem G^c.

Dobře obarvená kružnice v grafu G^c je kružnice, ve které sousední hrany mají odlišné barvy a nazývá se střídavá kružnice. Zejména, střídavá Hamiltonovská kružnice je dobře obarvená kružnice v G^c. Bollobás a Erdös [13] prokázali, že pokud $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{69}$, potom K_n^c obsahuje střídavou Hamiltonovskou kružnici.

Výše uvedené dokázali Chen a Daykin [14] a Shearer [15], který dokázal, že stejný závěr platí i pro slabší předpoklady $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{17}$, respektive $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{7}$. Autoři [13] se domnívali, že ve skutečnosti stačí předpokládat, že $\Delta(K_n^c) < \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, což, pokud je pravdivé, by bylo nejlepší možné. Dokládáme následující větu, která zlepšuje odhad [15], ale přesto nedosahuje výše uvedené domněnky.

Věta 4.8 [12] Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že pro každé $n > n_0$, každé K_n^c vyhovující

$$\Delta(K_n^c) \leq \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon\right)n \qquad (\ = (0{,}2928\ldots-\varepsilon)n \ )$$

obsahuje střídavou Hamiltonovskou kružnici.

Chen a Daykin [14] dokázali, že pokud $K^c_{m,m}$ je hranově úplný bipartitní graf s partitami velikosti m a $\Delta(K^c_{m,m}) \leq \frac{m}{25}$ potom $K^c_{m,m}$ obsahuje střídavou Hamiltonovskou kružnici. Důkaz věty 4.8 obsahuje důkaz následujícího tvrzení.

Tvrzení 4.9 [14] Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m = m_0(\varepsilon)$ tak, že pro každé $m > m_0$, každé $K^c_{m,n}$ vyhovující

$$\Delta\left(K^c_{m,m}\right) \leq (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon)m \quad (\ = (0{,}2928\ldots - \varepsilon)m \ )$$

obsahuje střídavou Hamiltonovskou kružnici.

Autoři [13] ukazují, že pokud $\Delta(K^c_{m,m}) \leq \frac{n}{69}$ potom, ve skutečnosti K^c_n obsahuje střídavou kružnici všech délek od 3 do n. Podobně v [14] je uveden stejný závěr, který vyplývá ze slabšího předpokladu $K^c_n < \frac{n}{17}$.

Věta 4.10 Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tak, že pro každé $n > n_0$, každé K^c_n vyhovující

$$\Delta(K^c_n) \leq (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon)n \qquad (\ = (0{,}2928\ldots - \varepsilon)n \ )$$

obsahuje střídavou kružnici všech délek mezi 3 a n.

Tvrzení 4.11 Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m = m_0(\varepsilon)$ tak, že pro každé $m > m$, každé $K^c_{m,n}$ vyhovující

$$\Delta\left(K^c_{m,m}\right) \leq (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon)m \quad (\ = (0{,}2928\ldots - \varepsilon)m \ )$$

obsahuje střídavou kružnici každé sudé délky mezi 4 a $2m$.

5 Hamiltonovské digrafy (orientované grafy)

Jako zdroj pro úvod této kapitoly a podkapitol 5.1 a 5.1.1 byl použit [3].

Stejně jako u hamiltonovských grafů neexistuje ani žádná charakteristika hamiltonovských orientovaných grafů. Ve skutečnosti je situace pro hamiltonovské orientované grafy ještě složitější než pro hamiltonovské grafy. Pokud existují postačující podmínky pro to, aby byl orientovaný graf hamiltonovský, jedná se o analogy jednodušších postačujících podmínek pro hamiltonovské grafy.

Vstupní stupeň vrcholu u je $d^+ = |\{e \in E | \exists v \in V: e = (v,u)\}|$, tedy počet hran vstupujících do vrcholu u. *Výstupní stupeň vrcholu* u je $d^- = |\{e \in E | \exists v \in V: e = (u,v)\}|$, tedy počet hran vystupujících z vrcholu u.

Orientovaný graf G řádu $n \geq 3$ je *pancyklický*, pokud obsahuje kružnice každé možné délky, to je G obsahuje kružnice délky l pro každé $l = 3, 4, \ldots, n$ a je vrcholově pancyklický, pokud každý vrchol v grafu G leží na kružnici každé možné délky.

Následující výsledek od Henriho Meyniela [16] dává postačující podmínku pro orientovaný graf, aby byl hamiltonovský.

Věta 5.1 (Meyniel) Pokud G je netriviální silný orientovaný graf řádu n takový, že

$$d(u) + d(v) \geq 2n - 1$$

pro každou dvojici nesousedních vrcholů u, v, potom G je hamiltonovský.

Věta 5.1 má velké množství důsledků. Ty vezmeme nyní v úvahu, počínaje s výsledkem původně objeveným Douglasem Woodallem [17].

Důsledek 5.2 Pokud G je netriviální orientovaný graf řádu n takový, že

$$d^+(u) + d^-(v) \geq n$$

kdykoliv jsou u a v rozdílné vrcholy a $(u, v) \notin E(G)$, potom G je hamiltonovský.

Důsledek 5.3 Pokud G je souvislý orientovaný graf řádu n takový, že

$$d(v) \geq n$$

pro každý vrchol v z G, potom G je hamiltonovský.

Důsledek 5.4 (Nash-Williams) [18] Pokud G je orientovaný graf řádu n takový, že

$$d^+(v) \geq \frac{n}{2} \text{ a } d^-(v) \geq \frac{n}{2}$$

pro každý vrchol v z G, potom G je hamiltonovský.

Věta 5.6 Jakýkoliv orientovaný graf G na m vrcholech, ve kterém každý vstupní a výstupní stupeň vrcholu, je alespoň $\frac{m}{2} + 1$ je vrcholově pancyklický. To znamená, pro každý vrchol v grafu G a každé číslo k mezi 2 a m, existuje orientovaná kružnice délky k procházející skrz v.

5.1 Turnaje

Existují sportovní události zahrnující týmy nebo jednotlivce které vyžadují, aby se každé dva týmy nebo jednotlivci, utkali proti sobě. To se označuje jako turnaj každý-s-každým. Mužský fotbal je součástí Letních olympijských her od roku 1900. Týmy ze 16 účastnících se zemí jsou rozděleny do 4 skupin po 4 týmech v každé. V každé skupině se odehraje turnaj každý-s-každým, ve kterém první dva týmy postoupí do boje o medaile. Ke stejnému dojde na Mistrovství světa ve fotbale, kde se 32 účastnících zemí rozdělí na 8 skupin po 4 týmech v každé.

Turnaj je orientace úplného grafu. Proto, turnaj může bát definován jako orientovaný graf takový, že pro každou dvojici nesousedících vrcholů u, v, je přesně jedna z (u, v) a (v, u) *obloukem*. Turnaj T potom modeluje turnaj každý-s-každým ve kterém nejsou povoleny žádné remízy. Vrcholy T jsou týmy v turnaji každý-s-každým a (u, v) jsou *oblouky* v T pokud tým u porazil tým v.

Obrázek 5 ukazuje dva turnaje řádu 3. Ve skutečnosti jsou pouze dva turnaje řádu 3. Nicméně počet neisomorfních turnajů prudce roste s jejich řádem. Například je pouze jeden turnaj řádu 1 a jeden řádu 2. Jak jsme právě ukázali, jsou pouze dva turnaje řádu 3. Dále jsou čtyři turnaje řádu 4, 12 řádu 5, 56 řádu 6 a přes 154 miliard řádu 12.

Obrázek 5: Turnaje řádu 3

Turnaj je tranzitivní, pokud kdykoliv když (u, v) a $(v, w,)$ jsou *oblouky* T, potom i (u, w) je také *oblouk* T. Turnaj T_2 v obrázku 6.1 je tranzitivní, zatímco turnaj T_1 není.

5.1.1 Hamiltonovské turnaje

Nyní se podíváme na cesty a kružnice. Začneme s možná nejběžnějším výsledkem tohoto typu, vlastnosti turnaje poprvé pozoroval László Rédei [18] v roce 1934. Cesta v orientovaném grafu obsahující všechny vrcholy G je hamiltonovská cesta.

Věta 5.7 [19] Každý turnaj obsahuje hamiltonovskou cestu.

Jednoduchý ale užitečný důsledek Věty 6.1 je spojený s tranzitivním turnajem.

Důsledek 5.8 Každý tranzitivní turnaj T je hamiltonovský tehdy a pouze tehdy, když T je souvislý.

Pokud T je hamiltonovský turnaj, potom samozřejmě každý vrchol T leží na každé hamiltonovské kružnici T. Ve skutečnosti, každý vrchol T leží na trojúhelníku T.

Věta 5.9 Každý vrchol v netriviálním souvislém turnaji patří do trojúhelníku.

Frank Harary a Leo Moser [20] ukázali, že každý netriviální souvislý turnaj je pancyklický, zatímco John W. Moon [21] šel o krok dále získáním následujícího výsledku.

Věta 5.10 Každý netriviální souvislý turnaj je vrcholově pancyklický.

5.2 Vztah orientovaných grafů a obarvených grafů

Jako zdroj pro tuto kapitolu byl použit článek A classification of edge-colored graphs based on properly colored walks [22].

Přes mnoho speciálních strukturálních vlastností, některé hranově obarvené grafy ukazují velmi silné znaky orientovaných grafů založených na problémech dobře obarvených kružnic.

Konstrukce 5.11 Nechť G je hranově obarvený graf připouštějící zobrazení $f: V(G) \to \mathbb{N}$ takové, že $c(e) = f(u)$ nebo $c(e) = f(v)$ pro každou hranu e spojující vrcholy u a v. Vytvoříme orientovaný graf D s množinou $V(D) = V(G)$ a $uv \in A(D)$ právě tehdy, když existuje hrana e spojující vrcholy u a v s $c(e) = f(u)$ a $c(e) \neq f(v)$.

Ve výše uvedené konstrukci, jelikož každá hrana e spojující vrcholy u a v splňující $f(u) = f(v)$ není obsažena v žádné dobře obarvené kružnici, ignorujeme tento druh hran při konstrukci grafu D. Je jednoduché ověřit, že v Konstrukci 5.11 každá dobře obarvená kružnice v G je také orientovaná kružnice v D a naopak. Takže studium dobře obarvených kružnic v tomto druhu hranově obarvených grafů je vlastně úkol o kružnicích v orientovaném grafu (viz [23] pro více detailů).

Pokud G je úplný graf, získaný orientovaný graf D z Konstrukce 5.11 je multipartitní turnaj. Li a kol. [23] nazvali tento druh grafu „v podstatě multipartitní turnaj“ (nebo „v podstatě silně souvislý multipartitní turnaj“ když D je silně souvislý). Podobné konstrukce jsou uvedeny v [24] a [25]. K popisu takových pozorování říkáme, že tyto orientované grafy, respektive hranově obarvené grafy, jsou degenerované a uvádíme následující obecnější definici.

Definice 5.12 Nechť G je hranově obarvený graf. Pokud existuje neprázdná množina $S \subseteq V(G)$ a funkce $f: S \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro každou hranu e spojující vrcholy u a v platí následující

$$c(e) = \begin{cases} f(u)\ nebo\ f(v), & pokud\ u, v \in S; \\ f(u), & pokud\ u \in S, v \in V(G) \setminus S. \end{cases}$$

potom řekneme, že G je polo-degenerovaný, S je degenerovaná množina G a f je kompatibilní s (G, S). Konkrétně pokud $S = V(G)$, potom řekneme, že G je degenerovaný a f je kompatibilní s G. Pokud S neexistuje, pak řekneme, že G je nedegenerovaný.

Li a kol. [23] se snažili popsat hranově obarvené úplné grafy, které jsou degenerované a získali následující. Pro vysvětlení následující věty, hranově obarvený graf G je kritický vzhledem k barevnému stupni, pokud $\delta^C(G - S) < \delta^C(G)$ pro každou neprázdnou podmnožinu $S \subset V(G)$. Dále théta graf se získá spojením dvou vrcholů třemi vnitřně disjunktními cestami.

Věta 5.13 (Li a kol.) [23] Nechť G je hranově obarvený úplný graf s kritickým barevným stupněm. Potom G neobsahuje dobře obarvený théta graf právě tehdy, když G je degenerovaný, pokud $\delta^C(G) = 2$ a G je hranově obarvený K_4 obsahující jednobarevný hranový řez.

Li a kol. [23] dále diskutovali vztah mezi hranově obarvenými úplnými grafy a multipartitními turnaji na vrcholově disjunktních kružnicích a přišli s následujícím výsledkem jako základním lemma.

Věta 5.14 (Li a kol.) [23] Nechť G je hranově obarvený úplný graf s $\delta^C(G) \geq 2$. Pokud $v \in V(G)$ není obsažen v žádné dobře obarvené kružnici, pak G připouští vrcholové rozdělení $V_0, V_1, V_2, \dots, V_p$ takové, že následující tvrzení platí pro odlišné barvy $c_1, c_2, \dots, c_p \in c(G)$.

(a) $2 \leq p \leq d^c(v), v \in V_0$ a $|V_i| \geq 1$pro $0 \leq i \leq p$;
(b) $c(V_0, V_i) = \{c_i\}$ pro $0 \leq i \leq p$;
(c) $c(V_i, V_j) = \{c_i, c_j\}$ pro $0 \leq i \leq j \leq p$;
(d) $c(G[V_i]) \subseteq \{c_i\}$ (tj. $c(G[V_i]) \subseteq \{c_i\}$, když $|V_i| \geq 2$) pro $0 \leq i \leq p$.

Můžeme vidět, že hranově obarvený graf G z výše zmíněné věty je polo-degenerovaný. Gutin a kol. [26] klasifikovali hranově obarvené grafy, které neobsahují žádné dobře obarvené kružnice, do 5 typů. Je jednoduché ověřit, že typy 3, 4 a 5 jsou degenerované. Nedávno Čada a kol. [27] dali nový výsledek struktury hranově obarvených úplných bipartitních grafů bez dobře obarvených kružnic délky 4, což zesílilo výsledek ve [24]. Struktura je aktuálně degenerovaná.

Věta 5.15 (Čada a kol.) [27] Nechť G je hranově obarvený úplný bipartitní graf s $\delta^C(G) \geq 2$ a neobsahující žádné dobře obarvené kružnice délky 4. Potom graf G připouští funkci $f: V(G) \to \mathbb{N}$ takovou, že pro každou hranu $xy \in E(G)$ je buď $c(xy) = f(x)$ nebo $c(xy) = f(y)$.

6 Gallaiova barvení

Jako zdroj pro následující kapitolu byl použit článek A complete bipartite graph without properly colored cycles of length four [27].

Bylo ukázáno, že úplný graf, nebo úplný bipartitní graf bez určitých dobře obarvených podgrafů má zvláštní vlastnosti. Nejznámější je charakteristika díky Gallaiovi pro případ, že dobře obarvená C_3 (nebo ekvivalentně duhová C_3). Vlastně, charakterizace dává speciální rozdělení vrcholů, které se nazývají Gallaiovo rozdělení.

Věta 6.1 (Gallai) [29] Pro $n \geq 2$, pokud G je hranově obarvený K_n bez dobře obarvených C_3, pak existují nejvíce dvě barvy i, j a rozdělení $V(G)$ do alespoň dvou částí takových, že pro každé dvě různé části všechny hrany mezi nimi jsou obarveny stejnou barvou, tedy i nebo j.

Nechť G je graf a k je počet barev použitých v G. *Zobrazení* $\varphi: V(G) \to \{1, \dots, k\}$ je dobré, pokud pro $i, j \in \{1, \dots, k\}$, každá hrana mezi $\varphi^{-1}(i)$ a $\varphi^{-1}(j)$ je obarvena buď i nebo j.

Následující věta je rozšířením Věty 5.15.

Věta 6.2 [27] Nechť G je hranové obarvení úplného bipartitního grafu bez dobře obarvených C_4 a nechť X a Y jsou partity G. Pak G připouští dobré zobrazení z $V(G)$ do $\{1, \dots, k\}$. Dále, pokud je minimální barevný stupeň alespoň dva, pak platí následující. Pro nějakou sadu tří barev, řekněme 1, 2, 3 symetricky, je šest vrcholů $\tilde{x}_i \in \varphi^{-1}(i) \cap X$ a $\tilde{y}_i \in \varphi^{-1}(i) \cap Y$ vyhovující následující podmínce pro $i \in \{1, 2, 3\}$ (indexy bereme modulo 3):

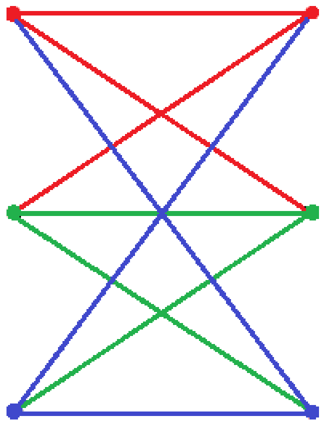
$$C(\tilde{x}_i, Y - \varphi^{-1}(i+1)) = \{i\} \text{ a } C(X - \varphi^{-1}(i+1), \tilde{y}_i) = \{i\}.$$

6.1 Struktura obarvených grafů K_{l_1,l_2,l_3} bez dobře obarvených C_3, C_4

V této sekci uvedeme vlastní výsledek bakalářské práce získaný pro grafy K_{l_1,l_2,l_3} bez dobře obarvených C_3, C_4.

V souvislosti s Větou 6.2 označíme podgraf indukovaný na třech barvách $1, 2, 3$ jako *dobré jádro* (viz Obrázek 6), pokud v něm existuje 6 vrcholů $\tilde{x}_i \in \varphi^{-1}(i) \cap X$ a $\tilde{y}_i \in \varphi^{-1}(i) \cap Y$ splňujících pro $i = 1, 2, 3$ podmínku (indexy bereme modulo 3)

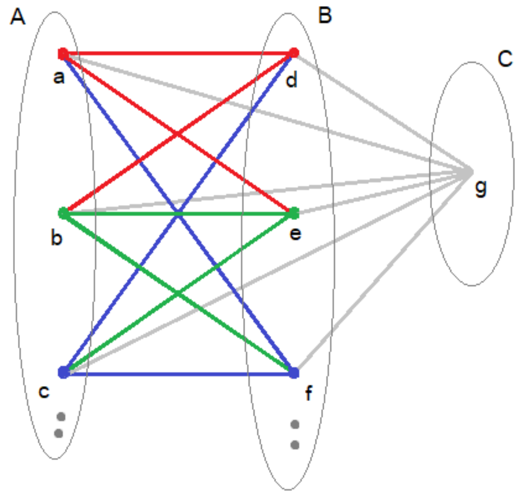
$$C\big(\tilde{x}_i, Y - \varphi^{-1}(i+1)\big) = \{i\} \text{ a } C(X - \varphi^{-1}(i+1), \tilde{y}_i) = \{i\}.$$



Obrázek 6: Dobré jádro

Věta 6.3 Buď $G = K_{l_1,l_2,l_3}$ tripartitní graf, kde je $V = A \cup B \cup C$, vzniklý překrytím tří úplných bipartitních grafů $G_1 = K_{l_1,l_2}$, $G_2 = K_{l_2,l_3}$ a $G_3 = K_{l_1,l_3}$. Nechť je alespoň jeden z nich takový, že jeho minimální barevný stupeň je alespoň 2. Předpokládejme $\delta^C(G_1) \geq 2$. Nechť je G bez dobře obarvených C_3 a C_4. Pak v G_2 a G_3 je jim společná partita C obsahující e_3 vrcholů tvořená vrcholy, které mají $d^C_{G_2 \cup G_3}(v) = 1$ pro všechna $v \in V$.

Důkaz Věty 6.3



Obrázek 7: Ilustrace k důkazu Věty 6.3

Na Obrázku 7 je ilustrace k důkazu Věty 6.3.

Barvy označíme 1 = červená (č), 2 = zelená (z), 3 = černá ($čn$), modrá (m) a $c(e)$ je barva hrany e.

Nechť je dobré jádro tvořené vrcholy a, b, c, d, e, f, kde $\{a, b, c\} \subset A$, $\{d, e, f\} \subset B$ a vrchol g je libovolný vrchol partity C.

Případ 1 $c(dg) = m$

Jelikož $dgeb$ není dobře obarvená C_4, pak $c(eg) = z$ nebo $c(eg) = m$.

Případ 1.1 $c(eg) = z$

Jelikož adg, aeg nejsou dobře obarvené C_3, pak $c(ag) = \text{č}$.

Uvažujme hranu gf. Jelikož $adgf$ není dobře obarvená C_4, pak $c(gf) = čn$ nebo $c(gf) = m$. Kružnice agf ale není dobře obarvená C_3, tedy $c(gf) = čn$. Tím pak ale $bdgf$ je nutně dobře obarvená C_4, což je spor v případě 1.1.

Případ 1.2 $c(eg) = m$

Uvažujme hranu gf. Kružnice $cegf$ není dobře obarvená C_4, pak máme $c(gf) = čn$ nebo $c(gf) = m$. Jelikož $bdgf$ není dobře obarvená C_4, je $c(gf) = m$.

Dále bdg, beg, ceg a cfg nejsou dobře obarvené C_3, odkud $c(gb) = c(gc) = m$. Obdobně adg a afg nejsou dobře obarvené C_3 a máme $c(ga) = m$.

Případ 2 $c(gd) = čn$

Uvažujme hranu gf. Jelikož $bdgf$ není dobře obarvená C_4, pak $c(fg) = z$ nebo $c(fg) = čn$. Je-li $c(fg) = z$, pak $adgf$ je dobře obarvená C_4. Máme tedy $c(fg) = čn$.

Dále $c(ag) \neq č$, neboť jinak je $agbf$ dobře obarvená C_4. Tedy $c(ag) = čn$.

Uvažujme hranu bg. Jelikož bdg, bgf nejsou dobře obarvené C_3, pak $c(bg) = čn$.

Určíme barvu hrany eg. Jelikož $bdge$ není dobře obarvená C_4, pak $c(eg) = z$ nebo $c(eg) = čn$.

Jelikož aeg není dobře obarvená C_3, nemůže být $c(eg) = z$. Tedy $c(eg) = čn$.

Zbývá určit barvu hrany cg. Kružnice ceg, cfg nejsou dobře obarvené C_3, tedy $c(cg) = z$ nebo $c(cg) = čn$. Je-li ale $c(cg) = z$, je $cgad$ dobře obarvená C_4, což je spor. Tím je $c(cg) = čn$.

<u>Případ 3</u> $c(dg) = z$

Jelikož $dgeb$ není dobře obarvená C_4, je $c(eg) = z$. Obdobně, $dgfb$ není dobře obarvená C_4, tím je $c(fg) = z$.

Určíme barvu hrany ag. Jelikož adg není dobře obarvená C_3, je $c(ag) = č$ nebo $c(ag) = z$. Ovšem, je-li $c(ag) = č$, pak agf je dobře obarvená C_3. Tedy $c(ag) = z$.

Určíme barvu hran cg a bg. Jelikož $ceag$ není dobře obarvená C_4, je $c(cg) = z$. Obdobně, jelikož $beag$ není dobře obarvená C_4, je $c(eg) = z$.

<u>Případ 4</u> $c(dg) = č$

Jelikož $aegf$ není dobře obarvená C_4, je $c(eg) = č$ nebo $c(fg) = čn$. Obdobně $cegf$ není dobře obarvená C_4, tedy $c(eg) = z$ nebo $c(fg) = čn$.

<u>Podpřípad $c(fg) = čn$</u>

Je-li $c(eg) = č$, pak $c(fg) = čn$ nebo $c(fg) = č$. Jelikož beg není dobře obarvená C_3, pak $c(bg) = z$ nebo $c(bg) = č$.

a) *nechť* $c(bg) = z$
   Jelikož dcg není dobře obarvená C_3, pak $c(cg) = č$ nebo $c(cg) = čn$. Kružnice $agce$ není dobře obarvená C_4, tedy $c(ag) = č$ nebo $c(cg) = z$. Ovšem cdg není dobře obarvená C_3, tedy $c(cg) \neq z$ a tím $c(ag) = č$. Kružnice cdg a ceg nejsou dobře obarvené C_3, odkud $c(cg) = č$. Pak je ovšem $cfbg$ dobře obarvená C_4, což je spor s předpokladem. Tedy $c(bg) = z$.
b) nechť $c(bg) = č$
   Připomeňme, že je $c(eg) = č$. Pak bgf není dobře obarvená C_3 a tedy $c(bg) \neq č$. To je finální spor s předpokladem $c(fg) = čn$.

Celkově tedy máme $c(fg) = č$.

Všechny hrany z g do libovolného vrcholu dobrého jádra mají tedy stejnou barvu.

Nyní ukážeme, že rovněž pro libovolný vrchol h v G_1 má hrana gh stejnou barvu jako $ga, gb, \dots, gf$.

Nechť $c(ga) = \cdots = c(gf) = \text{č}$. Předpokládejme, že $c(gh) = \beta \neq \text{č}$. Pak jelikož $ghdcg$ není dobře obarvená C_4, je nutně $c(cg) = \beta$. To je ale spor s tím, že $c(cg) = \text{č}$. ■

7 Závěr

V této práci jsme se zabývali hamiltonovskými problémy a jejich obarvenými variantami. Hlavním cílem bylo uvést podmínky, za kterých je graf hamiltonovský.

V kapitole 1 jsme uvedli náhled na historii teorie grafů. V kapitole 2 jsme vymezily všechny základní pojmy použité v této práci.

V kapitole 3 jsme se zabývali hamiltonovskými vlastnostmi. Po úvodu a zmínění vzniku tohoto pojmu, jsme se zaměřili na konkrétní podmínky. Uvedli jsme dvě stěžejní věty, a to Diracovo a Oreho větu, které se zakládají na stupni vrcholu, respektive na minimálním stupni vrcholu. Dále jsme uvedli věty zabývající se hamiltonovskou souvislostí.

Kapitola 4 je zaměřená na hranové obarvení grafů a multigrafů. V úvodní podkapitole jsme definovali nové pojmy související s barvením grafu. V podkapitolách 4.2 a 4.3 jsme se zabývali konkrétními typy grafů a to hranově-2-obarvenými a hranově-c-obarvenými multigrafy. V těchto podkapitolách jsme se zaměřili na věty soustředící se na dobrou hamiltonovskou kružnici. V podkapitole 4.3 jsme se zabývali dalším konkrétním typem grafu, a to úplným obarveným grafem. Opět jsme se soustředili na věty, které jako výsledek dávají dobrou hamiltonovskou kružnici.

V kapitole 5 jsme se zabývali turnaji. V úvodu kapitoly jsme uvedli vysvětlení tohoto pojmu a některé další základní pojmy. V podkapitole 5.1 jsme se zaměřili na konkrétní typ, a to hamiltonovské turnaje. V kapitole 5.2 jsme se zabývali vztahem mezi orientovanými grafy a obarvenými grafy.

V kapitole 6 jsme se zabývali Gallaiovo barvením. Konkrétně tzv. dobrým jádrem. V závěru práce jsme uvedli vlastní výsledek práce (Věta 6.3) získaný pro grafy K_{l_1,l_2,l_3} bez dobře obarvených C_3 a C_4.

8 Literatura

[1] P. Šišma. *Vznik a vývoj teorie grafu*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 43 (1998).

[2] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736).

[3] G. Chartrand, L. Lesniak and P. Zhang. *Graphs & digraphs*. 5th ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC (2011).

[4] G. A. Dirac. *Some theorems on abstract graphs*. Proc. London Math. Soc. 2 (1952).

[5] O. Ore. *Note on Hamilton circuits*. Amer. Math. Monthly 67 (1960).

[6] J. A. Bondy and V. Chvátal. *A method in graph theory*. Discrete Math. 15 (1976).

[7] V. Chvátal. *On Hamilton's ideals*. J. Combin. Theory Ser. B 12 (1972).

[8] V. Chvátal and P. Erdös. *A note on Hamiltonian circuits*. Discrete Math.

[9] R. Águeda, V. Borozan, R. Díaz, Y. Manoussakis and L. Montero. Proper Hamiltonian Cycles in Edge-Colored Multigraphs (2017).

[10] A. Abouelaoualim, K. C. Das, W. Fernandez de la Vega, M. Karpinski, Y. Manoussakis, C. A. Martinhon and R. Saad. *Cycles and paths in edge-colored graphs with given degrees*. J. Graph Theory (2010).

[11] R. Águeda, V. Borozan, M. Groshaus, Y. Manoussakis, G. Mendy, and L. P. Montero. *Proper hamiltonian paths in edge-coloured multigraphs*. CoRR (2014).

[12] N. Alon and G. Gutin. *Properly colored Hamilton cycles in edge colored complete graphs* (2015).

[13] B. Bollobás and P. Erdös. *Alternating Hamiltonian cycles*. Israel J. Math. 23 (1976).

[14] C. C. Chen and D. E. Daykin. *Graphs with Hamiltonian cycles having adjacent lines different colors.* J. Combin. Th. Ser. B 21 (1976).

[15] J. Shearer. *A property of the colored complete graph*. Discrete Math. 25 (1979).

[16] M. Meyniel. *Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien dans un graphe oriente.* J. Combin. Theory Ser. B14 (1973).

[17] D. R. Woodall. *Sufficient conditions for circuits in graphs.* Proc. London Math. Soc. 24 (1972).

[18] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs.* North Holland, Paris, (1976).

[19] L. Rédei. *Ein kombinatorischer Satz*. Acta Litt. Szaged 7 (1934).

[20] F. Harary and L. Moser. *The theory of round robin tournaments*. Amer. Math. Monthly 73 (1966).

[21] J. W. Moon. *On subtournaments of a tournament*. Canad. Math. Bull. 9 (1966).

[22] R. Li, B. Li and S. Zhang. *A classification of edge-colored graphs based on properly colored walks*. Discrete Appl. Math 283 (2020).

[23] R. Li, H. Broersma and S. Zhang. *Properly edge-colored theta graphs in edge-colored complete graphs*. Graphs Combin. 35 (2019).

[24] S. Fujita, R. Li and S. Zhang. *Color degree and monochromatic degree conditions for short properly colored cycles in edge-colored graphs*. J. Graph Theory 87 (2018).

[25] S. Fujita and C. Magnant. *Properly colored paths and cycles*. Discrete Appl. Math. 159 (2011).

[26] G. Gutin, M. Jones, B. Sheng, M. Wahlström and A. Yeo. *Acyclicity in edge-colored graphs*. Discrete Math 340 (2017).

[27] R. Čada, K. Ozeki and K. Yoshimoto. *A complete bipartite graph without properly colored cycles of length four*. J. Graph Theory 93 (2020).

[28] T. Gallai. *Transitiv orientierbare graphen.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967).