Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Nelineární obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu: vlastnosti řešení a jeho analytické aproximace

Vedoucí práce:
Doc. Ing. Gabriela Holubová Ph.D.

Autor:
Veronika Báčová

Plzeň, 2021

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Veronika BÁČOVÁ**
Osobní číslo:	**A18B0001P**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obor:	**Matematika a finanční studia**
Téma práce:	**Nelineární obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu: vlastnosti řešení a jeho analytické aproximace**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Nastudovat základní teorii obyčejných diferenciálních rovnic včetně aplikací v oblasti finanční matematiky.
2. Aplikovat získané poznatky na konkrétní zadanou nelineární rovnici prvního řádu a získat informace o vlastnostech řešení.
3. Nelineární člen aproximovat Taylorovým polynomem 1. a 3. stupně a nalézt řešení příslušných rovnic.
4. Porovnat jednotlivé teoretické výsledky mezi sebou i s numerickými experimenty.

Rozsah bakalářské práce: **cca 20 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- A. Kufner: Obyčejné diferenciální rovnice, Západočeská univerzita, Plzeň, 1993.
- T.H. Gronwall: Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math. (2) 20 (4), 292-296, 1919.
- Ch. Jones: Introduction to economic growth, 2nd edition. W.W. Norton, New York, 2002.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2020**
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2021**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

L.S.

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Nelineární obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu: vlastnosti řešení a jeho analytické aproximace“ vypracovala samostatně a výhradně za použití citované literatury.

V Plzni dne 20. května 2021

.....
Veronika Báčová

Poděkování

Chtěla bych velmi poděkovat vedoucí bakalářské práce paní doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za návrh tématu práce, ochotu, užitečné rady a především za trpělivost a čas věnovaný konzultacím již od počátku mého studia. Dále bych chtěla poděkovat všem svým blízkým, kteří mě podporovali při studiu.

Abstrakt

Bakalářská práce je zaměřena na studium konkrétní obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, kterou nelze analyticky vyřešit. Nejprve pravou stranu rovnice aproximujeme pomocí Taylorova polynomu 1. a 3. stupně. V obou případech vypočteme a porovnáme řešení aproximací oproti řešení původní úlohy získanému v softwaru Wolfram Mathematica. V druhé části se zaměříme na vlastnosti řešení již ze samotného zadání diferenciální rovnice, jakými jsou například lokální minima a maxima, konkávnost a konvexita a intervaly, kde řešení roste nebo klesá. Nakonec bude řešení rovnice omezeno shora i zdola pomocí Gronwallova lemmatu a jemnějších odhadů na menších intervalech. Součástí práce jsou obrázky vypracované v počítačovém programu Wolfram Mathematica.

Abstract

This thesis is focused on the study of a first order ordinary differential equation that cannot be solved analytically. First, we use the Taylor polynomial of the 1st and 3rd degree to approximate the right side of the equation. In both cases, we calculate and compare the solution of the approximations against the solution of the original problem obtained in the Wolfram Mathematica software. In the second part, we will focus on the properties of the solution from the differential equation itself, such as local minima and maxima, concavity and convexity, and intervals where the solution increases or decreases. Finally, the solution of the equation will be bounded from above and below using the Gronwall lemma and finer estimates on smaller intervals. The work includes images created with the computer program Wolfram Mathematica.

Obsah

1 Úvod **6**
1.1 Motivace 6
1.2 Definice 7
1.3 Studovaná úloha 7

2 Linearizovaná úloha **10**

3 Úloha s kubickou nelinearitou **15**

4 Vlastnosti řešení **25**
4.1 Vlastnosti řešení lineární rovnice 25
4.2 Vlastnosti řešení nelineární rovnice 27
4.3 Gronwallovo lemma 30

5 Závěr **40**

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Diferenciální rovnice mají mnohé využití nejen v přírodních a technických vědách, ale i v matematické ekonomii. Sledováním veličiny v ekonomii získáme soubor naměřených hodnot, pro jejichž popsání je vhodnější posloupnost, než spojitá funkce. Studium chování diskrétních dynamických systémů je ale velmi složité, proto se ke zkoumání veličiny často používá aproximace spojitou funkcí. V matematické ekonomii se konkrétně jedná o růstové modely ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu $y' = f(t, y)$, kde proměnná t představuje čas a $y'(t)$ rychlost změny sledované veličiny. Mezi nejznámější růstové modely patří Harrodův-Domarův model a Solowův model.

Domarův růstový model byl zformulován Američanem Evsey Domarem v roce 1946. Model, který formuloval Angličan Roy Forbes Harrod v roce 1939, dochází k obdobným závěrům, proto je model nejčastěji uváděn jako Harrodův-Domarův. Mezi předpoklady modelu patří

1. rovnost investic a přírůstku hodnoty kapitálu,
2. přímá úměra mezi produkcí a hodnotou kapitálu,
3. v uzavřené ekonomice rovnost důchodu a součtu spotřeby a soukromých investic a
4. zvýšení objemu nabízeného produktu zvýší i poptávku.

Při splnění všech předpokladů vede zvýšení produkce ke zvýšení poptávky (poptávka je stanovena na základě velikosti důchodu, tudíž se zvýší důchody, což představuje investice a úspory), následně investic a to vede ke zvýšení produkční kapacity a tak pořád dokola. Tedy dochází k ekonomickému růstu. Model je založen hlavně na předpokladu rovnosti růstou investic a očekávaného tempa růstu, což není v realném světě vždy splněno. V realitě nejčastěji dochází ke dvou variantám, buď rostou investice pomaleji než očekávané tempo růstu a vzniká nadbytečná produkce, nebo naopak rostou investice rychleji než očekávané tempo růstu a produkce nestačí pokrýt poptávku. Pokud produkce nestačí pokrýt poptávku, firmy reagují nákupem dalších výrobních faktorů (investují), což má vliv na velikost poptávky, která se také zvýší. Nerovnováha se proto bude nadále prohlubovat. Obdobně tomu je i při nadbytečné produkci, tj. ekonomický růst je nestabilní. Nedostatky Harrodova-Domarova růstového modelu se snaží odstranit Solowův model růstu.

Solowův růstový model byl zveřejněn v roce 1956 Robertem M. Solowem, který v roce 1978 dostal Nobelovu cenu za ekonomii. Mezi hlavní rozdíly oproti Harrod-Domarovu modelu patří přidání práce jako faktoru výroby. Pokud připojíme ještě podmínku, že pracovní síla roste dle Malthusova zákona a uvažujeme rovnost investic a přírůstku hodnoty kapitálu (viz první podmínka pro Harrodův-Domarův model), dojdeme k závěru, že narozdíl od Harrodova-Domarova modelu ekonomika dosáhne stacionárního stavu bez nutnosti vhodného zvolení investic. Proto je

ekonomický růst tentokrát stabilní a z dlouhodobého hlediska je zdrojem růstu pouze technologický pokrok (trvalé tempo růstu již není závislé na míře úspor, investic) a růst populace. Naopak pokud nebude docházet k trvalému zlepšování technologie, tak bude HDP klesat k nule. Solowův model byl v následujících letech velmi používán, dokonce i v dnešní době je růstový model pro většinu ekonomů velmi důležitý při analýze hospodářského růstu.

Mezi další modely patří například Ramseyův model, který vychází z práce Franka Plumptona Ramseyho vydané roku 1928. Tento model dochází k obdobným závěrům jako Solowův model, tedy ekonomický růst je ovlivněn pouze technologickým pokrokem a růstem populace. Během posledních 20 let se model přestal používat, vzhledem k jeho závěrům předpokládajícím malé rozdíly ve výstupu jednotlivých ekonomik (ve světě jsou ve skutečnosti rozdíly mezi nejbohatšími a nejchudšími zeměmi velmi velké). V 70. letech zájem o teorii růstu ustoupil vzhledem k ropným šokům, kterými ekonomika procházela a hledala se snaha o alespoň udržitelný růst. Od poloviny 80. let se oživil zájem o ekonomický růst z hlediska vysokoškolských kurzů či publikací článků a mezi průkopnické práce se nadále považují práce Paula Romera (1986) a Roberta Lucase (1988) (viz [4], [2]).

V bakalářské práci nebudou zkoumány růstové modely, zaměříme se na konkrétní obyčejnou diferenicální rovnici ve tvaru $y' = f(t, y)$. Zkoumaná rovnice, stejně jako řada rovnic tohoto typu, není analyticky řešitelná. V práci je ukázáno, jakým způsobem můžeme rovnici studovat a co lze o řešení rovnice říci za pomoci základních metod matematické analýzy. Konkrétně postupně aproximujeme nelineární pravou stranu rovnice Taylorovým polynomem 1. a 3. stupně na okolí počátku. Aproximované úlohy analyticky vyřešíme a porovnáme s numerickým řešením původní úlohy (Kapitola 2 a 3). V poslední části práce se zaměříme na zkoumání vlastností řešení rovnice, které můžeme získat ze samotné rovnice (Kapitola 4).

1.2 Definice

Definice 1 ([5]). *Diferenciální rovnice prvního řádu je rovnice tvaru*

$$y' = f(t, y), \tag{1.1}$$

kde f je funkce dvou proměnných. Klasickým řešením rovnice (1.1) *na intervalu I rozumíme každou spojitě diferencovatelnou funkci $y = y(t)$, která rovnici* (1.1) *splňuje ve všech bodech $t \in I$.*

Definice 2 ([5]). *Nechť $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Úloha najít řešení rovnice* (1.1)*, které splňuje tzv. počáteční podmínku*

$$y(t_0) = y_0,$$

se nazývá počáteční (Cauchyho) úloha. Jejím řešením je funkce, která splňuje počáteční podmínku a je na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím bod t_0 řešením rovnice (1.1).

1.3 Studovaná úloha

V práci se budeme zabývat rovnicí

$$y'(t) = \sin(-2ty(t)), \tag{1.2}$$

kterou nelze analyticky vyřešit. Na obr. 1.1 je zobrazené přibližné řešení rovnice (1.2) pro různé počáteční podmínky získané v počítačovém programu Wolfram Mathematica pomocí numerických

metod. Můžeme si všimnout, že pro některé počáteční podmínky řešení klesá monotónně k nule a naopak pro větší počáteční hodnoty řešení mění monotónii. K podobnému závěru lze dojít ze směrového pole rovnice (1.2) na obr. 1.2.

Následující Lemma ukazuje řešitelnost studované počáteční úlohy pro všechny časy t.

Lemma 1. *Počáteční úloha*

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(-2ty(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

má právě jedno řešení $\forall t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Označme si $f(t, y)$ pravou stranu rovnice (1.2), tj. $f(t, y) = \sin(-2ty(t))$. Nejprve dokážeme, že funkce $f(t, y)$ je globálně lipschitzovská v proměnné y. Tedy $\forall t \in [-T, T], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

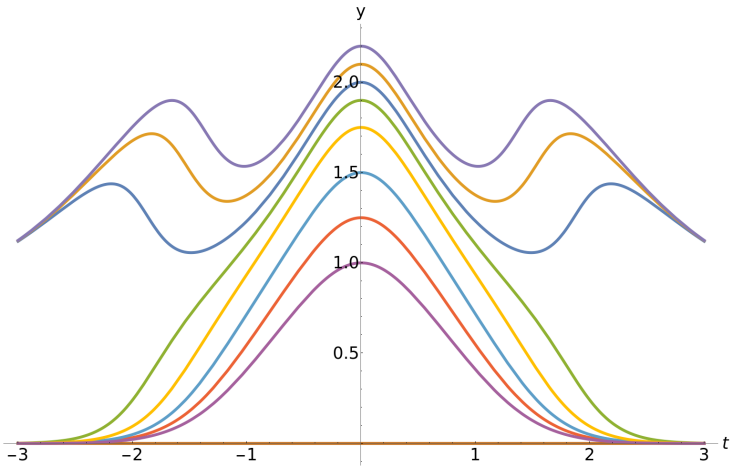
$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |\sin(-2ty_1) - \sin(-2ty_2)| = |2\cos(\tfrac{-2ty_1-2ty_2}{2})\sin(\tfrac{-2ty_1+2ty_2}{2})| =$$

$$2|\cos(ty_1 + ty_2)\sin(ty_2 - ty_1)| \leq 2|t||y_1 - y_2| \leq 2T|y_1 - y_2|.$$

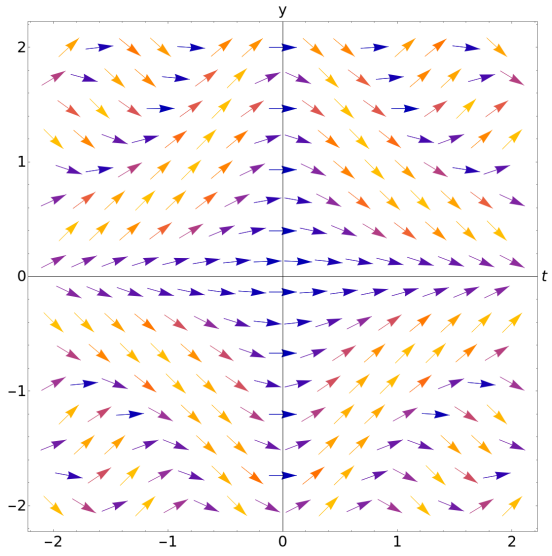
Dále platí

$$\int_{-T}^{T} 2|t|dt = 2T^2 < \infty.$$

Funkce $f(t, y)$ je spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a globálně lipschitzovská v proměnné y, tedy z Picardovy-Lindelöfovy věty plyne, že existuje jednoznačné řešení $\forall t \in [-T, T]$. Navíc z Důsledku 2.6 v [6] plyne, že existuje řešení $\forall t \in \mathbb{R}$. □



obr. 1.1: Grafické zobrazení řešení rovnice (1.2) pro různé počáteční podmínky.



obr. 1.2: Směrové pole rovnice (1.2).

Kapitola 2

Linearizovaná úloha

Vzhledem k tomu, že rovnici (1.2) nelze řešit analyticky, použijeme aproximaci pomocí linearizované úlohy. Funkci $f(x) = \sin(x)$ nahradíme Taylorovým polynomem 1. stupně na okolí počátku, tedy funkcí $f(x) = x$. Konkrétně nelineární člen $\sin(2yt)$ v rovnici (1.2) nahradíme lineárním výrazem $2yt$.

Řešíme tedy diferenciální rovnici je tvaru

$$y'(t) = -2yt. \tag{2.1}$$

Funkce

$$y \equiv 0 \tag{2.2}$$

splňuje rovnici (2.1) triviálně. Dále tedy budeme předpokládat, že $y \neq 0$.

Nejprve rovnici (2.1) vynásobíme výrazem $\frac{1}{y}$

$$\frac{y'(t)}{y} = -2t,$$

obě strany zintegrujeme podle t

$$\int \frac{y'(t)}{y} \mathrm{d}t = \int -2t \mathrm{d}t$$

a provedeme substituci za y, tedy

$$y = y(t)$$

a

$$\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t.$$

Po úpravě dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -2t \mathrm{d}t.$$

Po integraci dostáváme

$$\ln|y| = -t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po úpravě dostáváme

$$y(t) = C_2 e^{-t^2}, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.3}$$

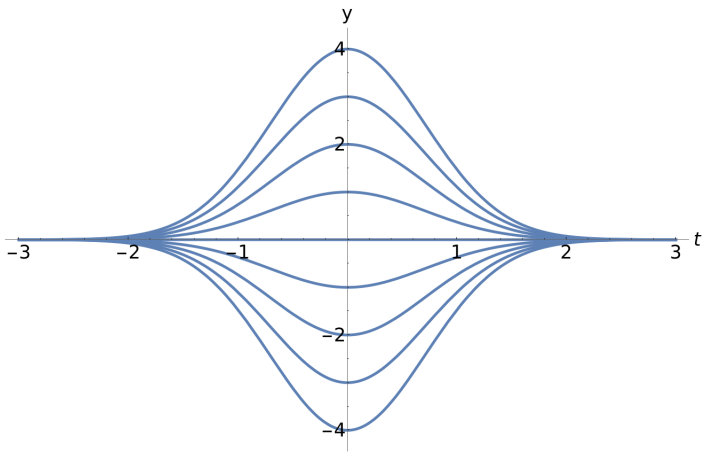
Spojíme-li řešení (2.2) a (2.3), tak obecné řešení rovnice (2.1) zapíšeme ve tvaru

$$y(t) = Ce^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

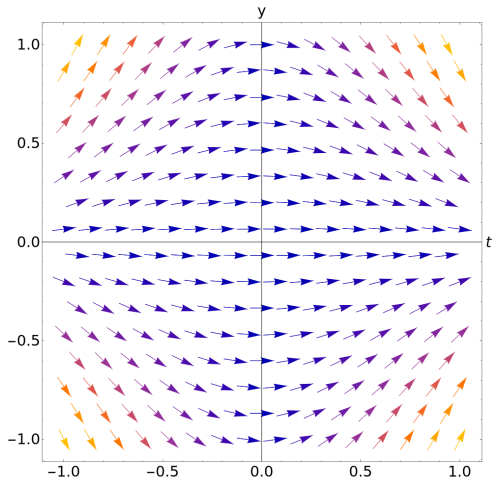
Připojíme-li k rovnici (2.1) počáteční podmínku $y(0) = y_0$, dostáváme řešení příslušné počáteční úlohy ve tvaru

$$y(t) = y_0 e^{-t^2}.$$

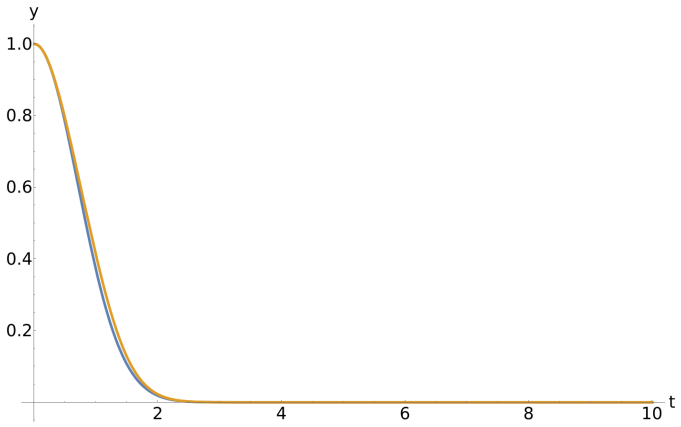
Grafické zobrazení řešení rovnice (2.1) pro různá $y(0)$ jsou na obr. 2.1 a směrové pole rovnice (2.1) je na obr. 2.2. Podobnost řešení rovnice (1.2) a (2.1) je především v blízkém okolí počátku, což je zřejmé při porovnání obr. 1.1 a 2.1. Konkrétní porovnání řešení rovnice (1.2) a (2.1) jsou na obr. 2.3, 2.5 a 2.7 pro počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y(0) = 2$ a $y(0) = 3$. Rozdíl řešení rovnice (1.2) a (2.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, $y(0) = 2$ a $y(0) = 3$ je na obr. 2.4, 2.6 a 2.8. Pro počáteční podmínku $y(0) = 1$ je rozdíl mezi řešením rovnic minimální, což lze vidět na obr. 2.3, případně na obr. 2.4. Naopak na obr. 2.5 a 2.7 je vidět, že se odchylka zvětšuje. Můžeme si tedy všimnout, že pro větší počáteční hodnoty rostou i absolutní hodnoty rozdílu řešení rovnic (1.2) a (2.1). Konkrétně pro počáteční podmínku $y(0) = 3$ je maximální chyba na uvažovaném časovém intervalu $t \in [0, 10]$ zhruba 60krát větší než pro $y(0) = 1$, což je způsobeno tím, že všechna řešení rovnice (2.1) monotónně klesají k nule narozdíl od řešení rovnice (1.2).



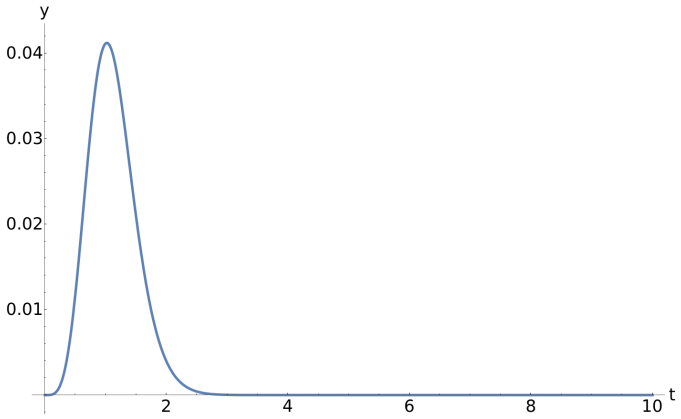
obr. 2.1: Grafické zobrazení řešení rovnice (2.1) pro různé počáteční podmínky.



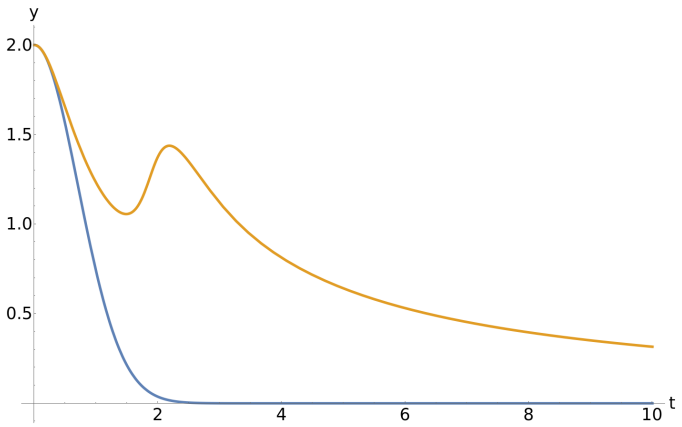
obr. 2.2: Směrové pole rovnice (2.1)



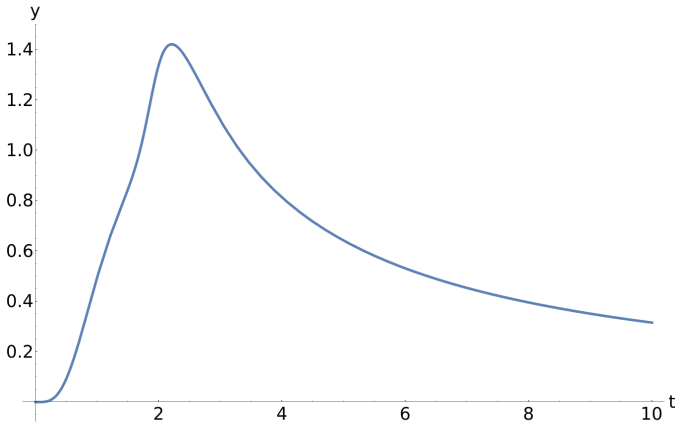
obr. 2.3: Porovnání řešení rovnice (1.2) (oranžová) a (2.1) (modrá) s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.



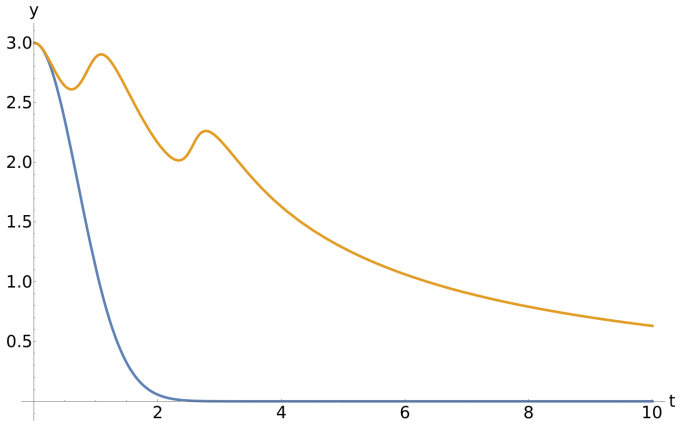
obr. 2.4: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (1.2) a (2.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.



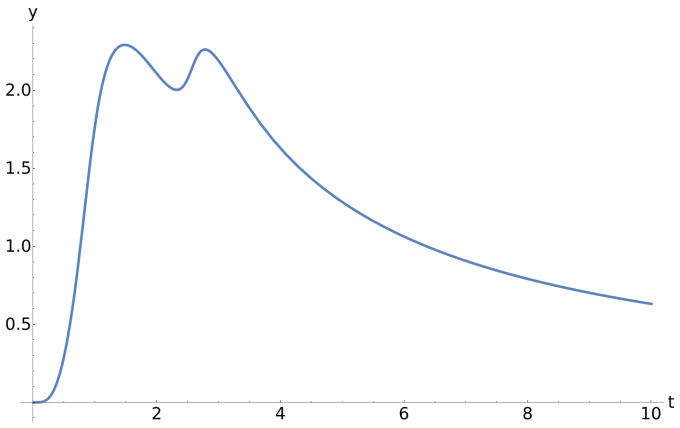
obr. 2.5: Porovnání řešení rovnice (1.2) (oranžová) a (2.1) (modrá) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.



obr. 2.6: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (1.2) a (2.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.



obr. 2.7: Porovnání řešení rovnice (1.2) a (2.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.



obr. 2.8: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (1.2) a (2.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.

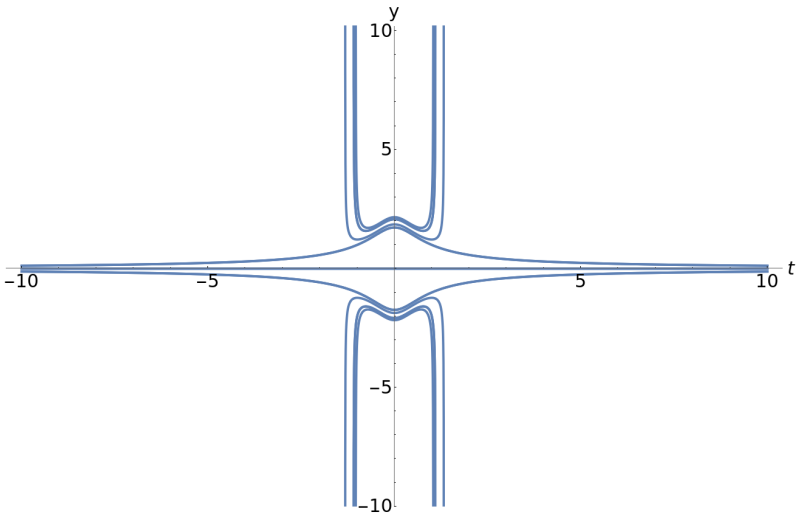
Kapitola 3

Úloha s kubickou nelinearitou

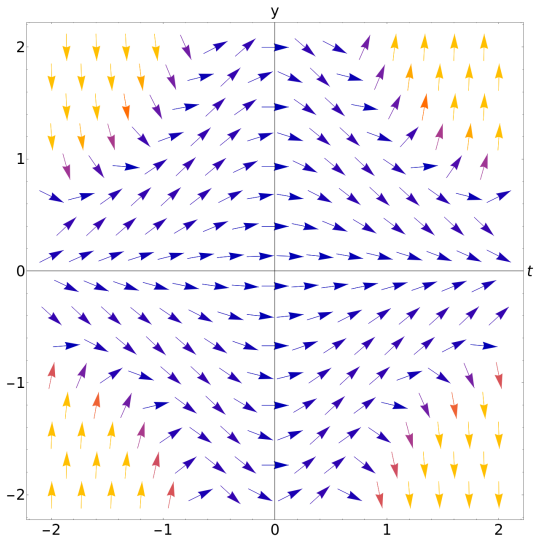
Pro přesnější aproximaci nahradíme funkci sinus Taylorovým polynomem 3. stupně na okolí počátku, tj. $\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3$, a rovnici (1.2) nahradíme rovnicí

$$y'(t) = -2ty(t) + \frac{1}{3!}(2ty(t))^3. \tag{3.1}$$

V tomto případě již pravá strana rovnice (3.1) není globálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y, ale pouze lokálně a nemáme tedy zaručenou existenci řešení počáteční úlohy pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Na obr. 3.1 je znázorněné řešení rovnice (3.1) pro různé počáteční podmínky získané v počítačovém programu Wolfram Mathematica. Na obr. 3.2 je zobrazené příslušné směrové pole.



obr. 3.1: Grafické zobrazení řešení rovnice (3.1) pro různé počáteční podmínky.



obr. 3.2: Směrové pole rovnice (3.1).

Rovnice (3.1) je tzv. Bernoulliho diferenciální rovnice

$$y' = g(t)y + h(t)y^n.$$

Konstantní řešení $y \equiv 0$ řeší rovnici (3.1) triviálně, dále tedy budeme předpokládat, že $y \neq 0$. Bernoulliho diferenciální rovnici lze řešit substitucí

$$u(t) = \frac{1}{y(t)^{n-1}}.$$

V našem případě $n = 3, g(t) = -2t, h(t) = \frac{4t^3}{3}$, tj. volíme substituci

$$u(t) = \frac{1}{y(t)^2}. \tag{3.2}$$

Z předpisu (3.2) je zřejmé, že nás budou zajímat pouze funkce $u(t) > 0$. Po zderivování (3.2) dostáváme

$$u'(t) = \frac{-2y'(t)}{y(t)^3}. \tag{3.3}$$

Přepíšeme si rovnici (3.1) do tvaru

$$\frac{y'(t)}{y(t)^3} = \frac{-2t}{y(t)^2} + \frac{4}{3}t^3. \tag{3.4}$$

Nyní dosadíme do rovnice (3.4) z výrazů (3.2) a (3.3) a dostaneme novou rovnici

$$u'(t) = 4tu(t) - \frac{8}{3}t^3. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.5) je lineární nehomogenní obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu, proto nejdříve vypočteme řešení $u_h(t)$ homogenní rovnice

$$u'(t) = 4tu(t). \tag{3.6}$$

Konstantní řešení $u \equiv 0$ splňuje rovnici (3.6) triviálně. Dále tedy budeme předpokládat, že $u \neq 0$. Nejprve rovnici (3.6) vynásobíme výrazem $\frac{1}{u}$

$$\frac{u'(t)}{u} = 4t,$$

obě strany zintegrujeme podle t

$$\int \frac{u'(t)}{u}\mathrm{d}t = \int 4t\mathrm{d}t$$

a provedeme substituci za u, tedy

$$u = u(t)$$

a

$$\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}u.$$

Po úpravě dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int 4t\mathrm{d}u.$$

Po integraci dostáváme

$$\ln|u| = 4\frac{t^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po úpravě dostáváme obecné řešení hommogenní rovnice (3.6)

$$u_h(t) = Ce^{2t^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Nyní vypočteme partikulární řešení rovnice (3.5) metodou variace konstanty. Nejdříve konstantu C ve (3.7) nahradíme funkcí závislou na t

$$u_p = C(t)e^{2t^2}. \tag{3.8}$$

Zderivujeme (3.8) a dostáváme

$$u_p' = C'(t)e^{2t^2} + C(t)e^{2t^2}4t. \tag{3.9}$$

Dosadíme do rovnice (3.5) z výrazů (3.8) a (3.9) a dostaneme

$$C'(t)e^{2t^2} + C(t)e^{2t^2}4t - 4C(t)e^{2t^2}t = -\frac{8}{3}t^3.$$

Po úpravě dostáváme

$$C'(t) = -\frac{8t^3}{3e^{2t^2}}.$$

Obě strany zintegrujeme

$$C(t) = -\frac{8}{3}\int \frac{t^3}{e^{2t^2}}.$$

Po integraci dostáváme

$$C(t) = \frac{1}{3}(2t^2+1)e^{-2t^2} + C_0.$$

Za C_0 volíme např. 0 a po dosazení do vztahu (3.7) dostáváme

$$u_p = \frac{2t^2+1}{3}. \tag{3.10}$$

Díky principu superpozice získáme obecné řešení rovnice (3.5) jako součet řešení u_p a u_h (viz (3.7) a (3.10)), tj. dostaneme

$$u(t) = \frac{2t^2+1}{3} + Ce^{2t^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Pokud je $u(t) > 0$, netriviální řešení rovnice (3.1) dostaneme dosazením vztahu (3.11) do vztahu (3.2)

$$y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2t^2+1}{3} + Ce^{2t^2}}}. \tag{3.12}$$

Připojíme-li k rovnici (3.1) počáteční podmínku $y(0) = y_0$, dopočteme

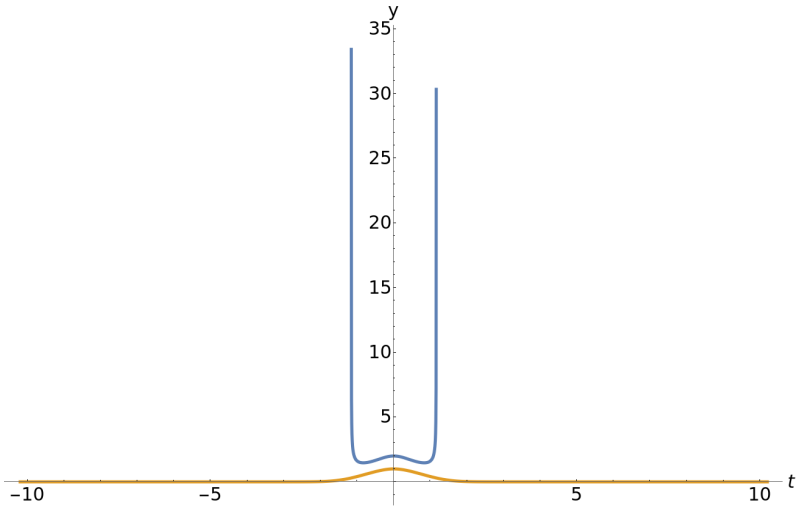
$$C = \frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{3}$$

a řešení příslušné počáteční úlohy dostaneme ve tvaru

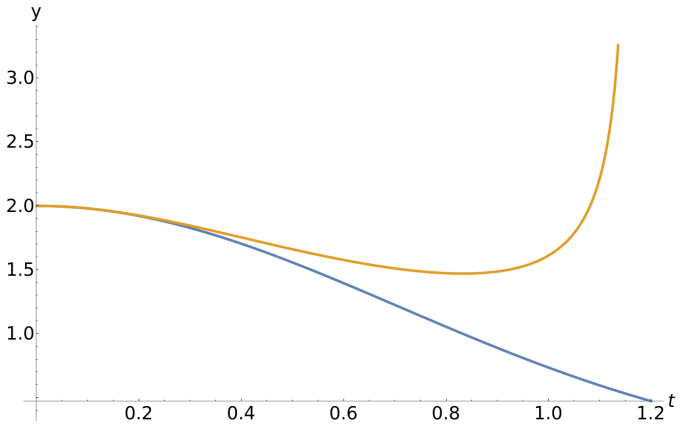
$$y(t) = \frac{\operatorname{sgn} y(0)}{\sqrt{\frac{2t^2+1}{3} + (\frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{3})e^{2t^2}}}. \tag{3.13}$$

Řešení s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ a $y(0) = 2$ je zobrazeno na obr. 3.3.

Na obr. 3.5 je zobrazen rozdíl řešení lineární rovnice (2.1) a rovnice (3.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a na obr. 3.7 s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Porovnání řešení rovnice (2.1) a (3.1) jsou na obr. 3.4 pro $y(0) = 2$ a na obr. 3.6 pro $y(0) = 1$.

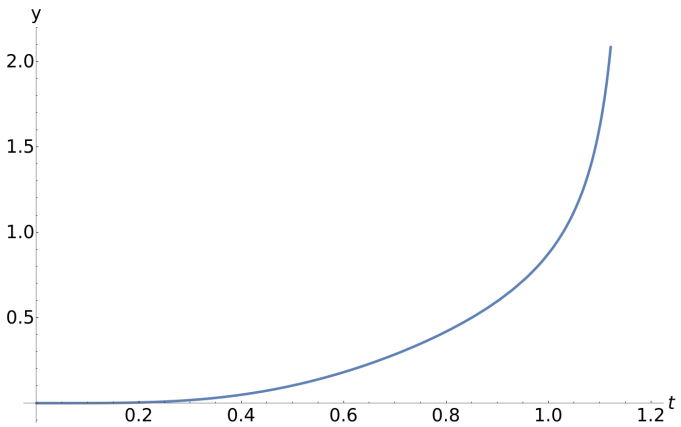


obr. 3.3: Grafické zobrazení řešení rovnice (3.1) s poč. podmínkou $y(0) = 1$ (oranžová) a $y(0) = 2$ (modrá).

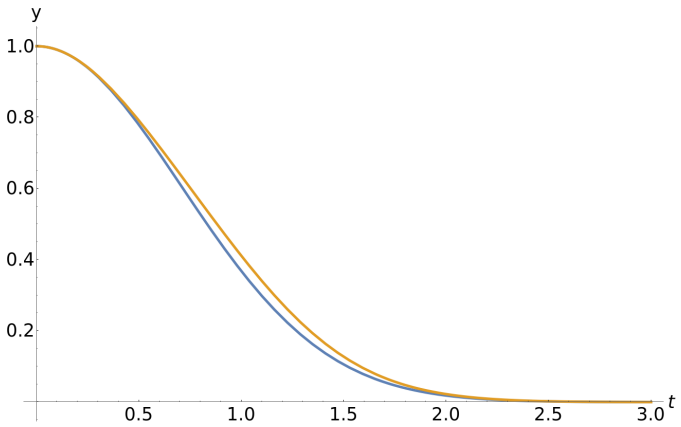


obr. 3.4: Porovnání řešení rovnice (3.1) (oranžová) a (2.1) (modrá) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

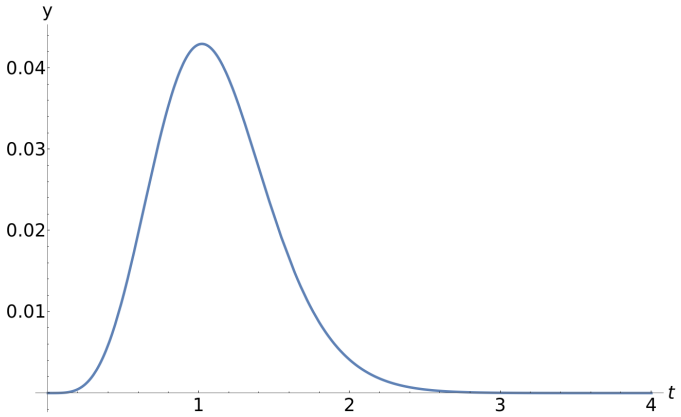
Na obr. 3.9 je zobrazen rozdíl řešení rovnic (1.2) a (3.1) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a na obr. 3.11 s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Porovnání řešení rovnice (1.2) a (3.1) jsou na obr. 3.8 pro $y(0) = 2$ a na obr. 3.10 pro $y(0) = 1$.



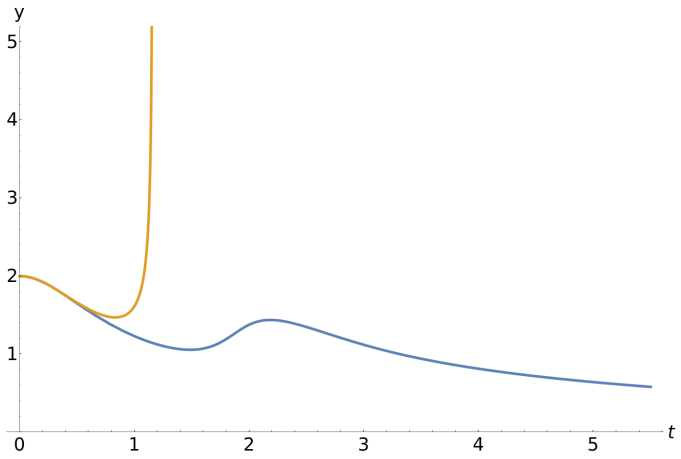
obr. 3.5: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (3.1) a (2.1) s poáteční podmínkou $y(0) = 2$.



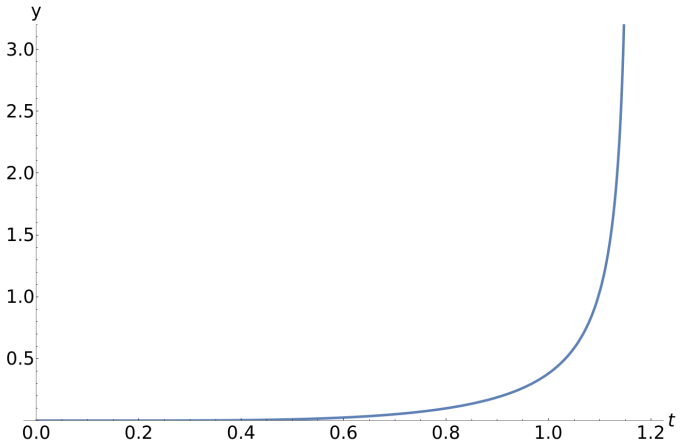
obr. 3.6: Porovnání řešení rovnice (3.1) (oranžová) a (2.1) (modrá) s poč. podmínkou $y(0) = 1$.



obr. 3.7: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (3.1) a (2.1) s poč. podmínkou $y(0) = 1$.



obr. 3.8: Porovnání řešení rovnice (1.2) (modrá) a (3.1) (oranžová) s poč. podmínkou $y(0) = 2$.



obr. 3.9: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (1.2) a (3.1) s poč. podmínkou $y(0) = 2$.

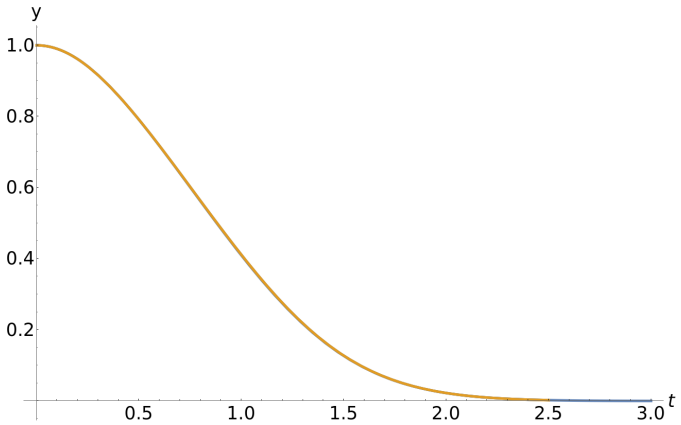
Z předpisů (3.11) a (3.12) je zřejmé, že pro některé počáteční hodnoty $y(0)$ řešení rovnice (3.1) neexistuje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Chceme-li zjistit, pro jaké hodnoty $y(0)$ existuje řešení pro všechna $t \in \mathbb{R}$, nejdříve zjistíme pro jaké hodnoty C bude výraz (3.11) kladný. Z nerovnice

$$0 < \frac{2t^2 + 1}{3} + Ce^{2t^2}$$

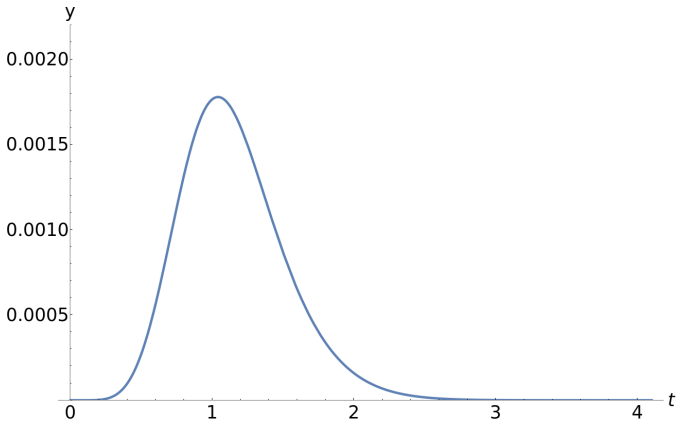
vyjádříme C:

$$C > \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}}.$$

Výraz



obr. 3.10: Porovnání řešení rovnice (1.2) (modrá) a (3.1) (oranžová) s poč. podmínkou $y(0) = 1$.



obr. 3.11: Absolutní hodnota rozdílu řešení rovnice (1.2) a (3.1) s poč. podmínkou $y(0) = 1$.

$$\frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}}$$

je záporný a platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} = 0.$$

Z toho vyplývá, že pro $C \geq 0$ je výraz (3.11) vždy kladný, tedy pro rovnici (3.1) existuje řešení dané předpisem (3.12). Pokud k rovnici (3.12) přidáme počáteční podmínku $y(0) = y_0$, dostáváme

$$y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+C}}.$$

Je zřejmé, že pokud $C \in [0, \infty)$, pak $y_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Pro $C < 0$ existuje hodnota t_0 taková, že $u(t_0) = 0$, tj. neexistuje řešení y pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a v bodě t_0 dochází k „blow-up“ . Nyní ukážeme závislost t_0 na C (respektive na počáteční hodnotě y_0). Do vztahu

$$C = \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} \tag{3.14}$$

dosadíme

$$C = \frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{3}, \tag{3.15}$$

viz (3.12), a dostaneme

$$\frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} = \frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{3}.$$

Po úpravé získáme

$$\frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{y_0^2}.$$

Na levé straně máme funkci proměnné t a na pravé číslo. Nyní vyšetřme průběh funkce

$$f(t) = \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} + \frac{1}{3}. \tag{3.16}$$

Definiční obor funkce f je $D = \mathbb{R}$, funkce f je sudá, spojitá na celém svém definičním oboru a platí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

a

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{-2t^2 - 1}{3e^{2t^2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pro zjištění extrémů nejprve funkci f zderivujeme:

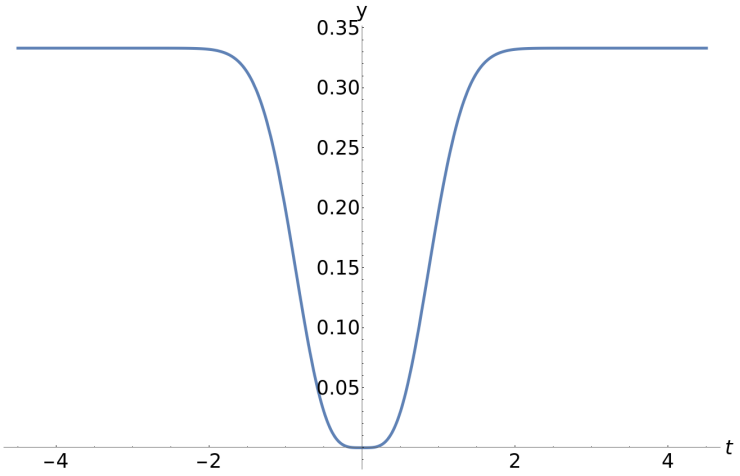
$$f'(t) = \frac{8t^3}{3e^{2t^2}}. \tag{3.17}$$

Derivace f' je nulová pouze pro $t = 0$. Pro $t \in (-\infty, 0)$ je derivace f' vždy záporná, tj. funkce f je na tomto intervalu klesající. Pro $t \in (0, \infty)$ je derivace f' vždy kladná tj. funkce f je na tomto intervalu rostoucí. Pro $t = 0$ je funkce f rovná nule, tento bod je tedy ostrým lokálním minimem. Grafické zobrazení funkce f je na obr. 14. Výraz $\frac{1}{y_0^2} > 0$ je číslo, které protne graf funkce f právě dvakrát (v bodech t_0 a $-t_0$) a když ho budeme zvětšovat, tak se bude zvětšovat i t_0. Tím jsme odvodili následující tvrzení.

Věta 1. *Řešení rovnice* (3.1) *s počáteční podmínkou* $y(0) = y_0$ *je dáno vztahem* (3.13). *Pro*

1. $y_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ *toto řešení existuje pro všechna* $t \in \mathbb{R}$,
2. $y_0 \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ *toto řešení existuje pouze pro* $t \in (-t_0, t_0)$.

Pro aproximaci rovnice (1.2) byl použit Taylorův polynom 3. stupně, tedy rovnice (3.1). Jedná se o speciální typ Bernouliho diferenciální rovnice, který lze řešit pomocí substituce. Řešení rovnic (3.1) a (1.2) je na okolí počátku velmi podobné a monotónně klesá k 0. Například pro počáteční podmínku $y(0) = 1$ je rozdíl řešení rovnic oproti linearizované úloze zhruba 25krát menší. Naopak pro počáteční podmínky $y(0) \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ rozdíl řešení rovnic (3.1) a (1.2) roste, řešení počáteční úlohy pro rovnici (3.1) neexistuje pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a dochází k tzv. „blow-up“ v bodě t_0.



obr. 3.12: Grafické zobrazení funkce f z (3.16).

Kapitola 4

Vlastnosti řešení

Některé vlastnosti řešení lze získat ze samotné diferenciální rovnice. Pro analyticky neřešitelné rovnice nám tyto vlastnosti mohou pomoci si představit výsledný tvar řešení a dát jisté ověření výsledku vygenerovaném v softwaru. Mezi tyto vlastnosti může patřit například monotónnost, konkávnost, konvexita a omezenost.

4.1 Vlastnosti řešení lineární rovnice

Pro lineární rovnice lze najít přesné řešení, ale ukážeme si, jaké vlastnosti řešení můžeme zjistit přímo z předpisu rovnice. Pro lineární rovnici (2.1) zjistíme globání minima a maxima, intervaly, kde je řešení rovnice rostoucí nebo klesající a konkávnost a konvexitu. V dalším textu uvažujeme, že $y = y(t)$ je klasické řešení rovnice (2.1).

Lemma 2. *Je-li $y(0) \neq 0$, pak $y(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nechť existuje $t_0 \neq 0$ takové, že $y(t_0) = 0$. Každá počáteční úloha pro lineární diferenciální rovnici 1. řádu má jednoznačné řešení, tedy počáteční úloha pro rovnici (2.1) s počáteční podmínkou $y(t_0) = 0$ má pak jednoznačné řešení $y \equiv 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. A to je spor s předpokladem $y(0) \neq 0$. □

Lemma 3. *Je-li $y(0) > 0$, pak $y = y(t)$ je ostře rostoucí funkcí na $(-\infty, 0)$, ostře klesající na $(0, \infty)$ a v bodě $t_0 = 0$ má ostré globální maximum. Je-li $y(0) < 0$, pak $y = y(t)$ je ostře klesající funkcí na $(-\infty, 0)$, ostře rostoucí na $(0, \infty)$ a v bodě $t_0 = 0$ má ostré globální minimum.*

Důkaz. Z Lemmatu 2 a spojitosti $y = y(t)$ plyne, že y nemění na $\mathbb{R}$ znaménko, tj. $\operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} y(0)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Nechť $y(0) > 0$. Označíme-li $f(t, y) = -2ty$, pak $y' = f(t, y)$ a tedy

- pro $t > 0$ je $f(t, y) < 0$, tj. y je klesající,
- pro $t < 0$ je $f(t, y) > 0$, tj. y je rostoucí.

Pro $y(0) < 0$ bychom postupovali analogicky. □

Lemma 4. *Je-li $y(0) > 0$, pak y je*

- *konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$,*
- *konkávní na $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.*

Je-li $y(0) < 0$, pak y je

- *konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$,*

- *konvexní na* $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Důkaz. Pro zjištění, na jakém intervalu je řešení rovnice (2.1) konkávní a konvexní, zderivujeme rovnici (2.1) a dostáváme

$$y'' = -2y't - 2y.$$

Za y' dosadíme z rovnice (2.1) a dostáváme

$$y'' = 4yt^2 - 2y.$$

Pravou stranu označme $g(t, y)$, tj: $g(t, y) = 4yt^2 - 2y = 2y(2t^2 - 1)$. Je-li $y(0) > 0$, pak i $y(t) > 0$ a

- $g(t, y) > 0$ pro $t \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $t \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, tj. y je konvexní,
- $g(t, y) < 0$ pro $t \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, tj. y je konkávní.

Pro $y(0) < 0$ bychom postupovali analogicky. □

Lemma 5. *Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí, že $y(-t) = y(t)$, tj. y je sudá funkce.*

Důkaz. Zavedeme novou proměnnou

$$z(t) = y(-t) \tag{4.1}$$

a výraz (4.1) zderivujeme

$$z'(t) = -y'(-t). \tag{4.2}$$

Ze vztahu (4.1) je zřejmé, že pro $t = 0$ platí $z(0) = y(0)$. Pokud obě strany rovnice (2.1) vynásobíme (-1), dostáváme

$$-y'(t) = 2ty(t).$$

Proměnnou t přeznačíme jako $-t$, čímž dostáváme

$$-y'(-t) = -2ty(-t).$$

Z (4.1) a (4.2) pak získáme

$$z'(t) = -y'(-t) = -2ty(-t) = -2tz(t).$$

Tedy $z(t)$ a $y(t)$ řeší stejnou počáteční úlohu. Z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy plyne

$$z(t) \equiv y(t),$$

po dosazení do vztahu (4.1) dostáváme

$$y(-t) = y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

tj. y je sudá funkce. □

Poznámka 1. *Pro lineární rovnici* (2.1) *lze analyticky zjistit řešení ve tvaru*

$$y(t) = Ce^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Připojíme-li počáteční podmínku $y(0) = y_0$, dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$y(t) = y_0 e^{-t^2}.$$

Ověříme, že toto řešení má vlastnosti uvedené v Lemmatech 4, 5, 6 a 7. Funkce $y(t)$ je evidentně nenulová pro $y_0 \neq 0$ (Lemma 4) a sudá (Lemma 7).

Pro jednoduchost dále uvažujeme $y_0 > 0$. Pro zjištění stacionárních bodů položme $y'(t) = 0$, tj. $0 = -2ty_0e^{-t^2}$. Platí, že pro $t > 0$ je $y'(t) < 0$ a pro $t < 0$ je $y'(t) > 0$. Z toho plyne, že řešení je ostře rostoucí funkcí na $(-\infty, 0)$, ostře klesající na $(0, \infty)$ a v bodě $t_0 = 0$ má má ostré globální maximum (Lemma 5).

Druhá derivace je rovna $y''(t) = -2y_0e^{-t^2}(1 - 2t^2)$. Pro zjištění inflexních bodů položme $y''(t) = 0$, tj. $0 = -2y_0e^{-t^2}(1 - 2t^2)$. Platí, že pro $t \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je $f''(t) < 0$, tj. řešení je konkávní a pro $t \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $t \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ je $f'(t) > 0$, tj. řešení je konvexní (Lemma 6).

4.2 Vlastnosti řešení nelineární rovnice

Vzhledem k analytické neřešitelnosti řady nelineárních rovnic má určení vlastností jejich řešení mnohem větší význam. Vlastnosti nám dají alespoň představu o výsledném tvaru řešení. Pro řešení nelineární rovnice (1.2) zjistíme, kde se nachází lokální minimum a maximum (pokud nějaké existuje) a křivky, na kterých dochází ke změně inflexe. V dalším textu uvažujeme, že $y(t)$ je klasické řešení rovnice (1.2).

Lemma 6. *Je-li $y(0) \neq 0$, pak $y(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nechť existuje $t_0 \neq 0$ takové, že $y(t_0) = 0$. Počáteční úloha pro rovnici (1.2) s počáteční podmínkou $y(t_0) = 0$ má pak jednoznačné řešení $y \equiv 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (viz. Lemma 1). A to je spor s předpokladem $y(0) \neq 0$. □

Lemma 7. *Má-li řešení $y(t)$ lokální minimum nebo maximum, pak se nachází na křivkách $y = \frac{k\pi}{2t}, k \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz. Pravou stranu rovnice (1.2) označme $f(t, y)$, tj. $f(t, y) = \sin(-2ty(t))$. Má-li řešení lokální minimum nebo maximum, z nutné podmínky existence extrémů plyne $f(t, y) = 0$, tj.

$$0 = \sin(-2ty(t)).$$

Sinus nabývá hodnoty 0 v bodech $k\pi$, tj.

$$2ty(t) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

po úpravě dostáváme

$$y(t) = \frac{k\pi}{2t}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Platí, že

- pro $t > 0$ a $\frac{k\pi}{2t} < y < \frac{(k+1)\pi}{2t}, \quad k \in \mathbb{Z}$, je $y' < 0$ pro k sudé a $y' > 0$ pro k liché.
- pro $t < 0$ a $\frac{(k+1)\pi}{2t} < y < \frac{k\pi}{2t}, \quad k \in \mathbb{Z}$, je $y' < 0$ pro k sudé a $y' > 0$ pro k liché.

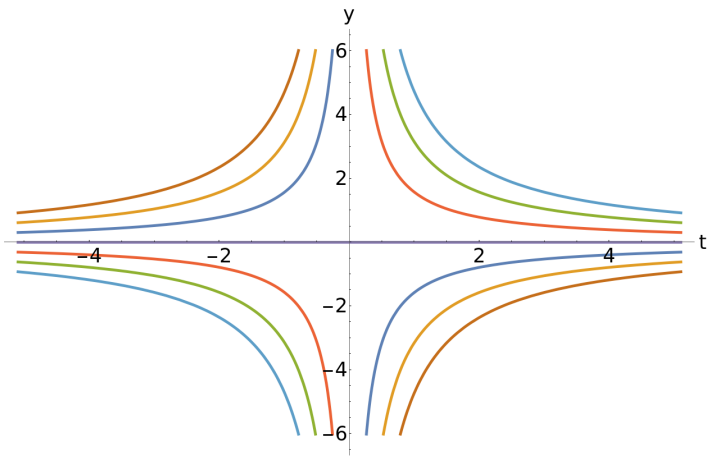
Dochází ke změně monotonie, tedy na křivkách se nachází lokální extrémy. □

Grafické zobrazení křivek z (4.3) je na obr. 4.1. Na obr. 4.2 jsou zobrazeny křivky ze vztahu (4.3) a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.

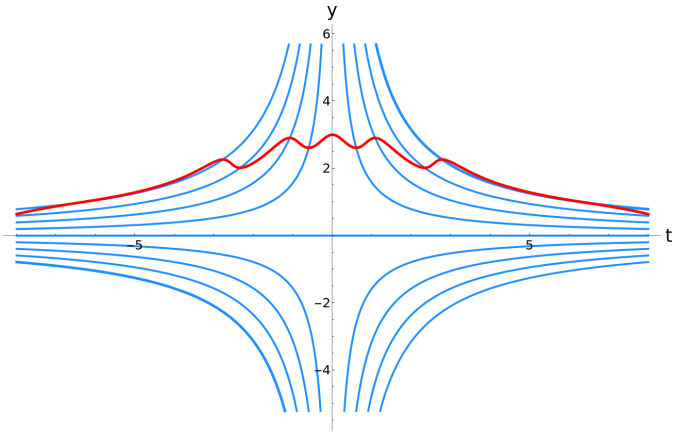
Lemma 8. *Pokud se u řešení rovnice (1.2) mění inflexe, pak k tomu dochází na křivkách*

$$y(t) = -\frac{\pi + 2k\pi}{4t}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad y(t) - t\sin(2ty(t)) = 0.$$

Důkaz. Zderivujeme-li rovnici (1.2), dostaneme



obr. 4.1: Grafické zobrazení křivek z (4.3).



obr. 4.2: Křivky ze vztahu (4.3) (modrá) a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$ (červená).

$$y''(t) = -2\cos(2ty(t))(y'(t)t + y(t)).$$

Nyní dosadíme za $y'(t)$ z rovnice (1.2) a dostáváme

$$y''(t) = -2\cos(2ty(t))(y(t) - t\sin(2ty(t))).$$

Pravou stranu označme $g(t, y)$, tj. $g(t, y) = -2\cos(2ty(t))(y(t) - t\sin(2ty(t)))$. Má-li dojít ke změně inflexe funkce y, musí nutně platit $y'' = 0$, tj: $g(t, y) = 0$, tj.

$$0 = -2\cos(2ty(t))(y(t) - t\sin(2ty(t))). \tag{4.4}$$

Tj.

$$0 = \cos(2ty(t)) \quad \vee \quad 0 = y(t) - t\sin(2ty(t)). \tag{4.5}$$

První podmínku lze ještě upravit, druhou ponecháme v implicitním tvaru

$$y(t) = \frac{\pi + 2k\pi}{4t}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad 0 = y(t) - t\sin(2ty(t)). \tag{4.6}$$

□

Grafické zobrazení křivek (4.6) je na obr. 4.3. Na obr. 4.4 jsou zobrazeny křivky ze vztahu (4.4) a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.

Lemma 9. *Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí, že $y(-t) = y(t)$, tj. y je sudá funkce.*

Důkaz. Zavedeme novou proměnnou

$$z(t) = y(-t) \tag{4.7}$$

a výraz (4.7) zderivujeme

$$z'(t) = -y'(-t). \tag{4.8}$$

Ze vztahu (4.7) je zřejmé, že pro $t = 0$ platí $z(0) = y(0)$. Pokud obě strany rovnice (1.2) vynásobíme (-1), dostáváme

$$-y'(t) = \sin(2ty(t)).$$

Proměnnou t přeznačíme jako $-t$, čímž dostáváme

$$-y'(-t) = \sin(-2ty(-t)).$$

Z (4.7) a (4.8) pak získáme

$$z'(t) = -y'(-t) = \sin(-2ty(-t)) = \sin(-2tz(t)).$$

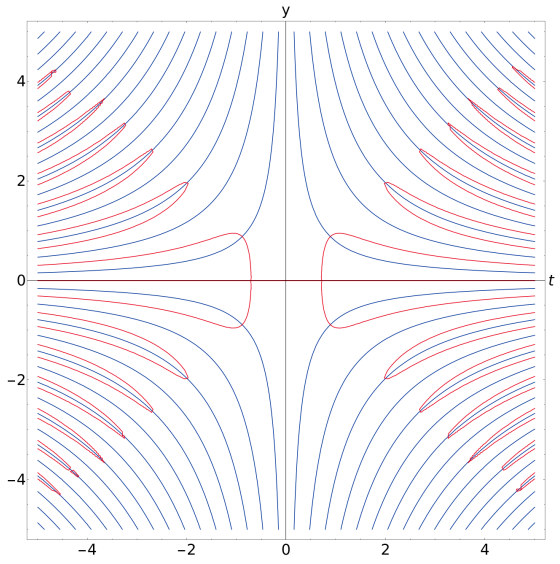
Tedy $z(t)$ a $y(t)$ řeší stejnou počáteční úlohu. Z Lemmatu 1 plyne

$$z(t) \equiv y(t),$$

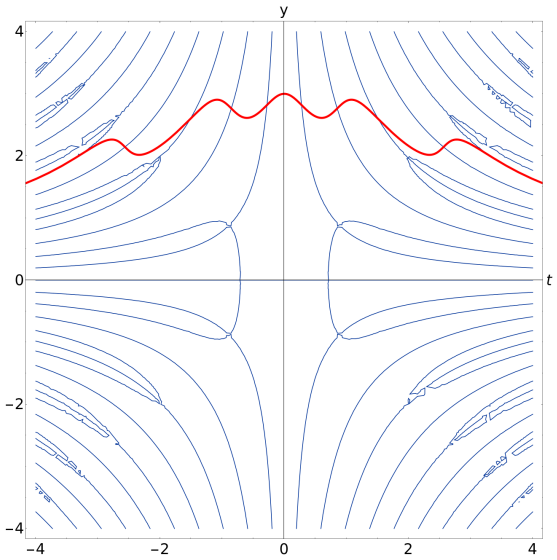
po dosazení do vztahu (4.7) dostáváme

$$y(-t) = y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

tj. y je sudá funkce. □



obr. 4.3: Grafické zobrazení křivek (4.6).



obr. 4.4: Křivky ze vztahu (4.4) (modrá) a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 3$ (červená).

4.3 Gronwallovo lemma

V této kapitole je vysvětleno Gronwallovo lemma (viz [3], [1]), které bylo poprvé dokázáno Thomasem Hakonem Grönwallem v roce 1919 a následně zobecňováno řadou autorů a využito při odhadech řešení rovnice prvního řádu. Lemma uvádíme v jedné z jeho diferenciálních podob, jak pro odhad shora, tak pro odhad zdola včetně důkazu. Důkaz uvádíme vzhledem k tomu, že ve většině literatury se v důkazech uvádí pouze odhad shora a není uveden odhad zdola, ze kterého v práci také vycházíme.

Lemma 10 (Gronwallovo lemma)**.** *Nechť I je interval reálných čísel ve tvaru $[a, \infty), [a, b]$ nebo $[a, b)$, kde $a < b$. Nechť β a u jsou spojité reálné funkce na intervalu I a nechť u je diferencovatelná na intervalu $I^0 = I \setminus \{a, b\}$.*

1. *Pokud funkce u splňuje nerovnost*

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t), \quad \forall t \in I^0, \tag{4.9}$$

potom platí

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad \forall t \in I. \tag{4.10}$$

2. *Pokud funkce u splňuje nerovnost*

$$u'(t) \geq \beta(t)u(t), \quad \forall t \in I^0, \tag{4.11}$$

potom platí

$$u(t) \geq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad \forall t \in I. \tag{4.12}$$

Důkaz. Zavedeme funkci

$$v(t) = e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad t \in I.$$

Všimněme si, že v splňuje

$$v'(t) = e^{\int_a^t \beta(s)ds}\beta(t) = \beta(t)v(t),$$

navíc $v(a) = 1$ a $v(t) > 0$ pro všechna $t \in I$.

1. Platí-li (4.9), pak pro derivaci podílu $\frac{u}{v}$ dostáváme

$$\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v^2(t)} = \frac{u'(t)v(t) - \beta(t)v(t)u(t)}{v^2(t)} \leq 0, \quad \forall t \in I^0.$$

   Funkce $\frac{u(t)}{v(t)}$ je tedy nerostoucí a shora omezená hodnotou v počátečním bodě a na intervalu I:

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \quad \forall t \in I,$$

   což je dokazovaná nerovnost (4.10).

2. Platí-li (4.11), pak pro derivaci podílu $\frac{u}{v}$ dostáváme

$$\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v^2(t)} = \frac{u'(t)v(t) - \beta(t)v(t)u(t)}{v^2(t)} \geq 0, \quad \forall t \in I^0.$$

   Funkce $\frac{u(t)}{v(t)}$ je tedy neklesající a zdola omezená hodnotou v počátečním bodě a na intervalu I:

$$\frac{u(t)}{v(t)} \geq \frac{u(a)}{v(a)} = u(a), \quad \forall t \in I,$$

   což je dokazovaná nerovnost (4.12).

□

S využitím Gronwallova lemmatu můžeme dokázat následující tvrzení. Pro jednoduchost budeme v dalším textu uvažovat $y(0) > 0$. Všechna následující tvrzení lze však analogicky dokázat i pro $y(0) < 0$.

Věta 2. *Nechť $y(0) = y_0 > 0$. Pro řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *platí*

$$y_0 e^{-t^2} \leq y(t) \leq y_0 e^{t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Vyjdeme z obecné nerovnosti

$$|\sin(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Pro výraz $-\sin(2ty)$ platí

$$|-\sin(2ty)| \leq |2ty|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Pro $y_0 > 0$ platí $y(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ (viz Lemma 8), tedy platí nerovnost $-2ty \leq -\sin(2ty) \leq 2ty, \forall t \geq 0$. Označme si $\beta_1(t) = 2t$ a $\beta_2(t) = -2t$. Pro řešení počáteční úlohy pro rovnici (1.2) platí: $y' \leq \beta_1(t)y = 2ty, \forall t > 0$, tedy z Grönwallova lemmatu dostáváme

$$y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t \beta_1(s)ds}, \quad \forall t \geq 0.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme

$$y(t) \leq y_0 e^{t^2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Obdobně pro odhad zdola dostáváme $y' \geq \beta_2(t)y = -2ty, \forall t > 0$, tedy z Grönwallova lemmatu platí

$$y(t) \geq y_0 e^{\int_0^t \beta_2(s)ds}, \quad \forall t \geq 0.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme

$$y(t) \geq y_0 e^{-t^2}, \forall t \geq 0.$$

Jelikož je řešení počáteční úlohy pro rovnici (1.2) sudé (viz Lemma 11), je omezeno shora funkcí

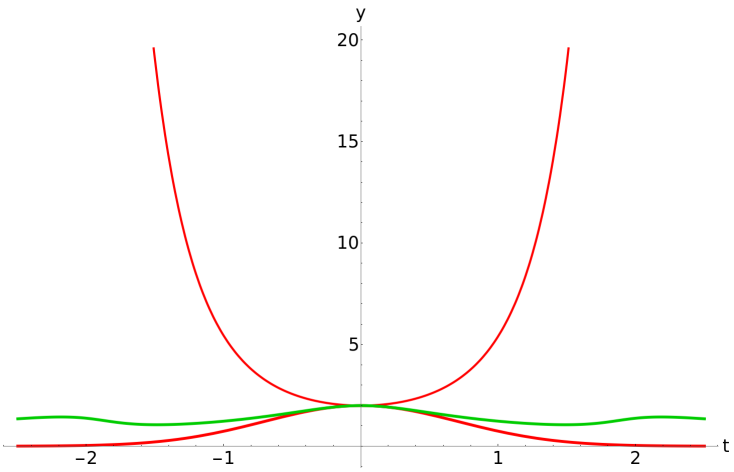
$$y_1(t) = y_0 e^{t^2} \tag{4.13}$$

a zdola funkcí

$$y_2(t) = y_0 e^{-t^2} \tag{4.14}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. □

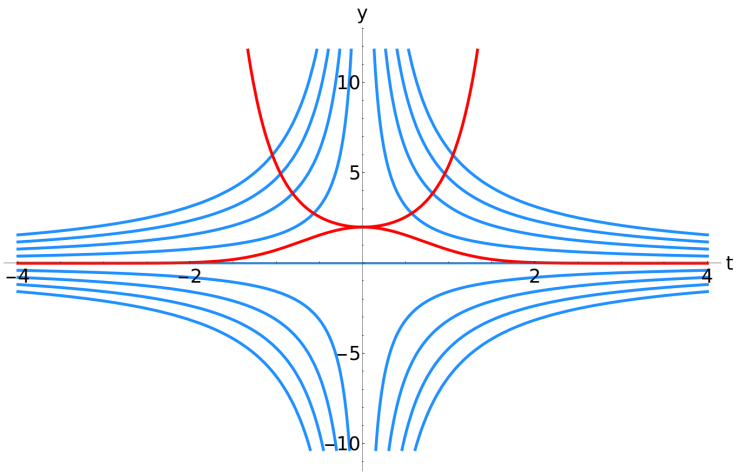
Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 daných předpisy (4.13) a (4.14) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ je na obr. 4.5. Na obr. 4.6 jsou funkce y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a křivky stacionárních bodů řešení dané předpisem (4.3).



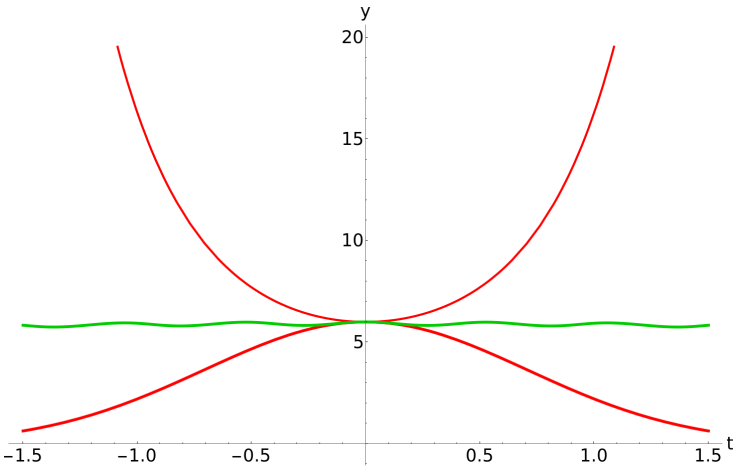
obr. 4.5: Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 6$ a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 6$ je na obr. 4.7. Na obr. 4.8 jsou funkce y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 6$ a křivky stacionárních bodů řešení dané předpisem (4.3).

Povšimněme si, že pokud funkce y_2 s počáteční hodnotou $y(0)$ protne některou z křivek (4.3), je řešení rovnice (1.2) na nějakém intervalu rostoucí a nemůže monotónně klesat pro všechna $t > 0$.



obr. 4.6: Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a křivky (4.3).



obr. 4.7: Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 6$ a řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou $y(0) = 6$.

Horní odhad je velmi hrubý, viz obr. 4.5. Použitím Gronwallova lematu lze stanovit jemnější odhady na určitých intervalech.

Věta 3. *Nechť* $y(0) = y_0 > 0$. *Pro řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *platí*

$$y_0 e^{-t^2} \leq y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2},$$

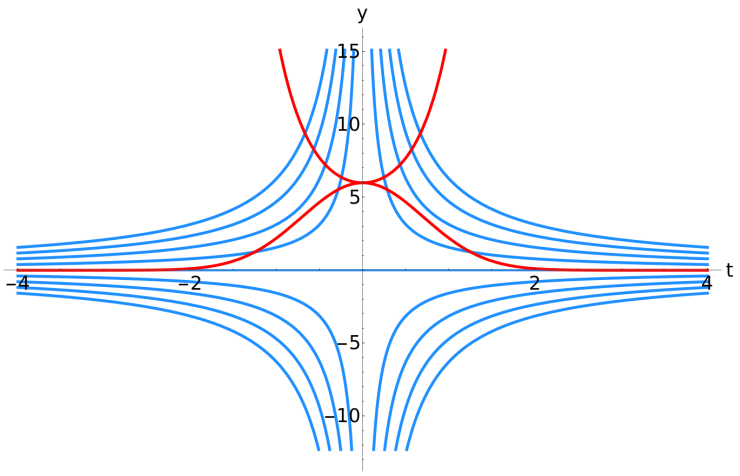
pro všechna $t \in \mathbb{R}$, *pro která je současně* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4|t|}$.

Důkaz. Nerovnost $y_0 e^{-t^2} \leq y(t)$ platí podle Věty 2 pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Obecně platí nerovnost

$$-\sin(z) \leq \frac{-2z}{\pi}, \quad \forall z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \tag{4.15}$$

Pro $-\sin(2ty)$ tedy platí

$$-\sin(2ty) \leq \frac{-4t}{\pi} y, \quad \forall y \in \left[0; \frac{\pi}{4t}\right], t > 0.$$



obr. 4.8: Grafické zobrazení funkcí y_1 a y_2 s počáteční podmínkou $y(0) = 6$ a křivky (4.3).

Označme si

$$\beta_1(t) = \frac{-4t}{\pi}. \tag{4.16}$$

Pro řešení počáteční úlohy pro rovnici (1.2) platí

$$y' \leq \beta_1(t)y = \frac{-4t}{\pi}y, \quad \forall y \in \left(0; \frac{\pi}{4t}\right), t > 0,$$

tedy z Grönwallova lemmatu platí

$$y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t \beta_1(s)ds}, \quad \forall y \in \left[0; \frac{\pi}{4t}\right], t > 0.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme

$$y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}, \quad \forall y \in \left[0; \frac{\pi}{4t}\right], t \geq 0.$$

Jelikož je řešení počáteční úlohy pro rovnici (1.2) sudé, můžeme říct, že je omezeno shora funkcí

$$y_1(t) = y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}, \tag{4.17}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pro která současně platí $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4|t|}$. □

Důsledek 1. *Nechť $y(0) = y_0 > 0$. Pro řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *platí*

$$y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}, \quad \forall t \in [-T, T],$$

kde $t{=}T$ je nejmenší kladné řešení rovnice

$$y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2} = \frac{\pi}{4t}. \tag{4.18}$$

Důkaz. Podle Věty 3 platí $y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pro která současně platí $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4|t|}$. Tedy platí, že $y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}$ pro $t \in [-T, T]$, kde $t = T$ je nejmenší (kladné) řešení rovnice

$$y(t) = \frac{\pi}{4t}. \tag{4.19}$$

V „nejhorším“ případě (tj. v případě, že řešení rovnice (1.2) je rovno hornímu odhadu, který protíná křivku $y(t) = \frac{\pi}{4t}$ v nejmenším možném čase) platí

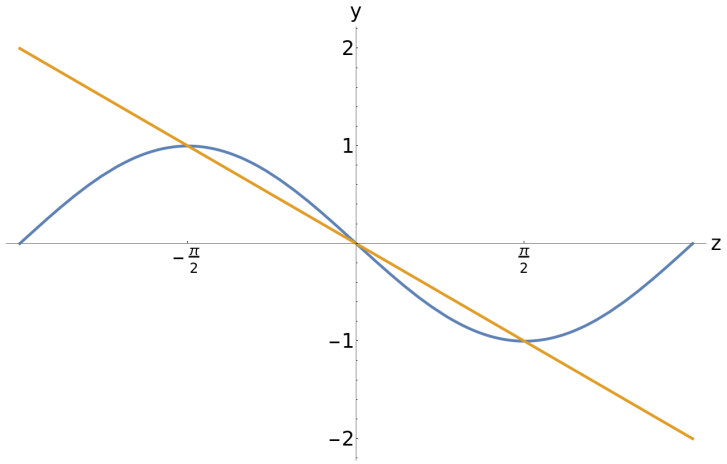
$$y(t) = y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2}. \tag{4.20}$$

Po dosazení výrazu (4.20) do (4.19) dostáváme

$$y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2} = \frac{\pi}{4t}.$$

□

Grafické zobrazení nerovnosti (4.15) je na obr. 4.9 a grafické zobrazení funkcí daných (4.14) a (4.17) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a funkce $y = \frac{\pi}{4|t|}$ je na obr. 4.11. Na obr. 4.12 jsou funkce dané předpisy (4.14) a (4.17) s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ a funkce $y = \frac{\pi}{4|t|}$.



obr. 4.9: Grafické zobrazení nerovnosti (4.12).

Věta 4. *Nechť $y(0) = y_0 > 0$. Pokud rovnice* (4.18) *nemá řešení, pak platí, že řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *monotónně klesá k nule pro $t \geq 0$.*

Důkaz. Pokud rovnice (4.18) nemá řešení, pak platí

$$y_0 e^{-t^2} \leq y(t) \leq y_0 e^{\frac{-2}{\pi}t^2} < \frac{\pi}{4|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Řešení rovnice (1.2) s počáteční podmínkou y_0 tedy neprotíná žádnou z křivek (4.3), tedy nemá žádné lokální minimum nebo maximum mimo hodnotu $t = 0$ a monotónně klesá k nule pro $t \geq 0$. □

Věta 5. *Pro $0 < y(0) = y_0 \leq \frac{\sqrt{e\pi}}{2}$ řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *klesá monotónně k nule pro všechna $t \geq 0$.*

Důkaz. Rovnici (4.18) přepíšeme do tvaru $y_0 = \frac{\pi}{4t} e^{\frac{2}{\pi}t^2}$ a pravou stranu označme jako $g(t)$, tj:

$$g(t) = \frac{\pi}{4t} e^{\frac{2}{\pi}t^2}. \tag{4.21}$$

Nyní zjistíme průběh funkce $g(t)$ pro $t > 0$. Definiční obor fce g je $D(g) = (0, \infty)$, funkce g je spojitá na definičním oboru a platí

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\pi}{4t} e^{\frac{2}{\pi}t^2} = \infty$$

a

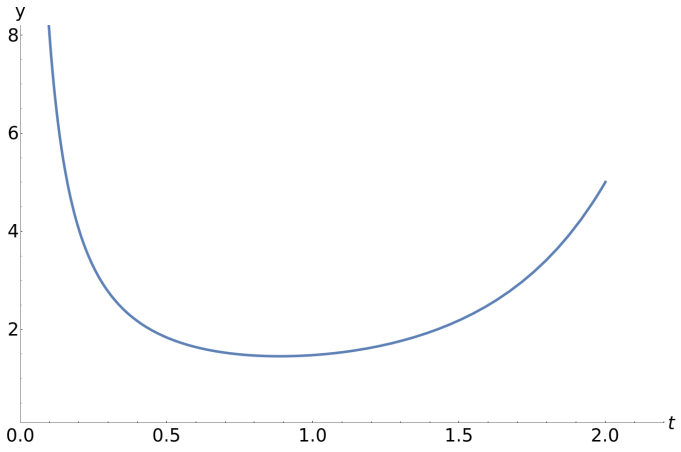
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\pi}{4t} e^{\frac{2}{\pi}t^2} = \infty.$$

Pro zjištění extrémů nejdříve funkci $g(t)$ zderivujeme. Derivace je rovna

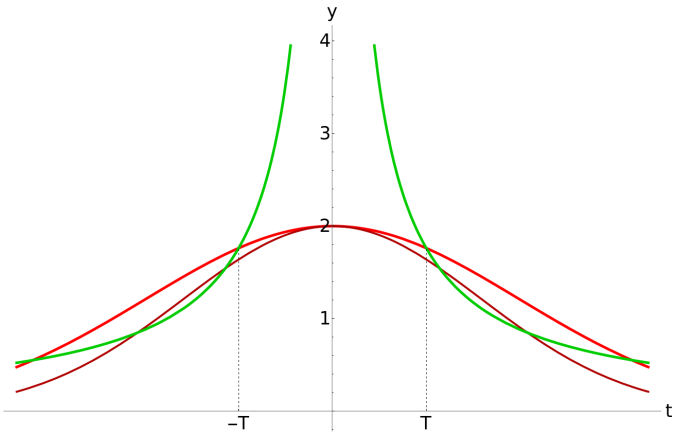
$$g'(t) = \frac{e^{\frac{2}{\pi}t^2}(4t^2 - \pi)}{4t^2}.$$

Derivace $g'(t)$ je nulová pouze pro $t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ a platí $g(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{\sqrt{e\pi}}{2}$. Pro $t \in (0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ je derivace $g'(t)$ vždy záporná, tj. funkce $g(t)$ je na tomto intervalu klesající. Pro $t \in (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \infty)$ je derivace $g'(t)$ vždy kladná, tj. funkce $g(t)$ je na tomto intervalu rostoucí. Obor hodnot funkce f je tedy $H(g) = [\frac{\sqrt{e\pi}}{2}, \infty)$. Pokud $y(0) \notin H(g)$, pak rovnice (4.15) nemá řešení a podle Věty 3 platí, že řešení rovnice (1.2) monotónně klesá k 0 pro $t \geq 0$. Pro $y(0) = \frac{\sqrt{e\pi}}{2}$ má rovnice (4.18) právě jedno řešení, ale křivky se jen dotknou (neprotnou), tj. řešení $y(t)$ zůstane monotónní (viz. obr. 4.13). □

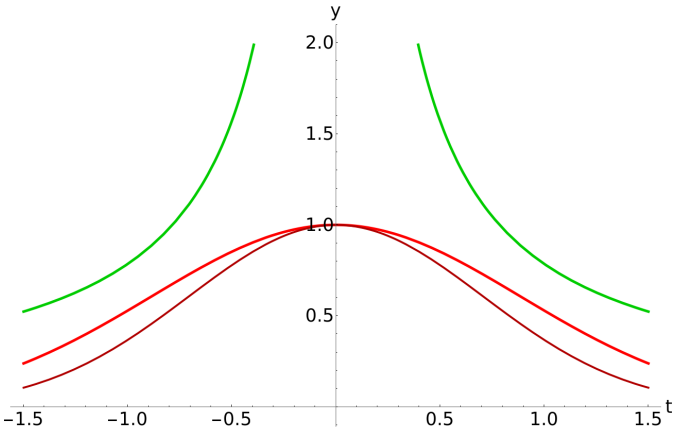
Grafické zobrazení funkce $g(t)$ je zobrazeno na obr. 4.10.



obr. 4.10: Grafické zobrazení funkce $g(t)$.



obr. 4.11: Grafické zobrazení funkcí daných předpisem (4.11) a (4.14) s počáteční podmínkou $y(0) = 2$ a funkce $\frac{\pi}{4|t|}$.



obr. 4.12: Grafické zobrazení funkcí daných předpisem (4.11) a (4.14) s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ a funkce $\frac{\pi}{4|t|}$.

Následující Věta se naopak zabývá situací, kdy u řešení počáteční úlohy pro rovnici (1.2) dochází ke změně monotonie.

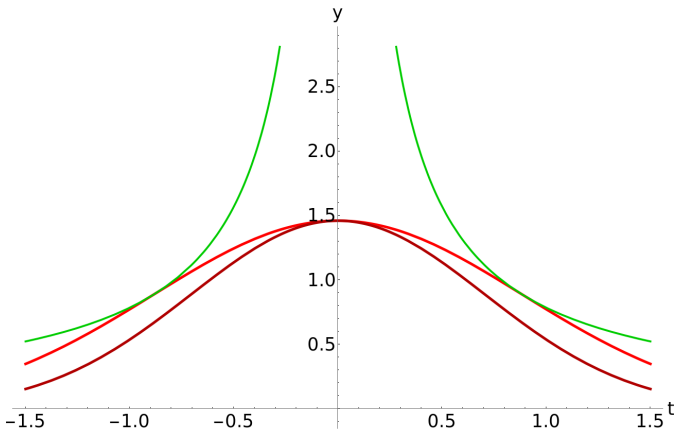
Věta 6. *Pro* $y(0) = y_0 > \frac{\sqrt{2e}}{4}\pi$ *řešení počáteční úlohy pro rovnici* (1.2) *mění monotonii pro* $t \geq 0$.

Důkaz. Dle Věty 2 platí $y_0 e^{-t^2} \leq y(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Zaměříme se na situaci, kdy dolní odhad protne křivku $y(t) = \frac{\pi}{4t}$, na které dochází ke změně monotonie. Uvažujeme tedy

$$y(t) = y_0 e^{-t^2}. \tag{4.22}$$

Po dosazení výrazu (4.19) do (4.22) dostáváme

$$\frac{\pi}{4t} = y_0 e^{-t^2}. \tag{4.23}$$



obr. 4.13: Grafické zobrazení funkcí daných předpisem (4.11) a (4.14) s počáteční podmínkou $y(0) = \frac{\sqrt{e\pi}}{2}$ a funkce $\frac{\pi}{4|t|}$.

Po úpravě získáme

$$y_0 = \frac{\pi}{4t} e^{t^2}$$

a pravou stranu označíme $h(t)$, tj:

$$h(t) = \frac{\pi}{4t} e^{t^2}.$$

Nyní zjistíme průběh funkce $h(t)$ pro $t > 0$. Definiční obor fce h je $D(h) = (0, \infty)$, funkce h je spojitá na definičním oboru a platí

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\pi}{4t} e^{t^2} = \infty$$

a

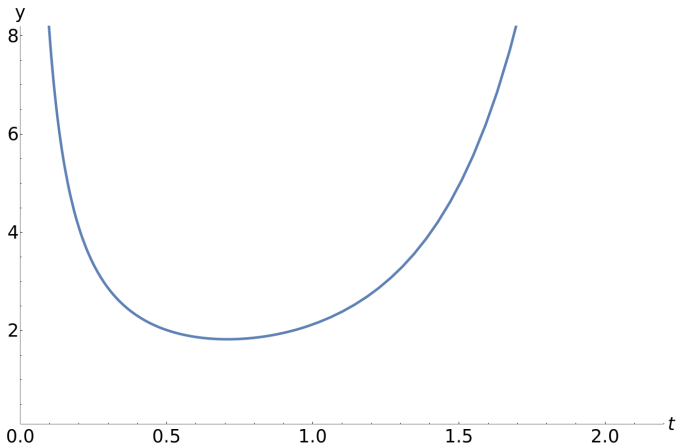
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\pi}{4t} e^{t^2} = \infty.$$

Pro zjištění extrémů nejdříve funkci $h(t)$ zderivujeme. Derivace je rovna

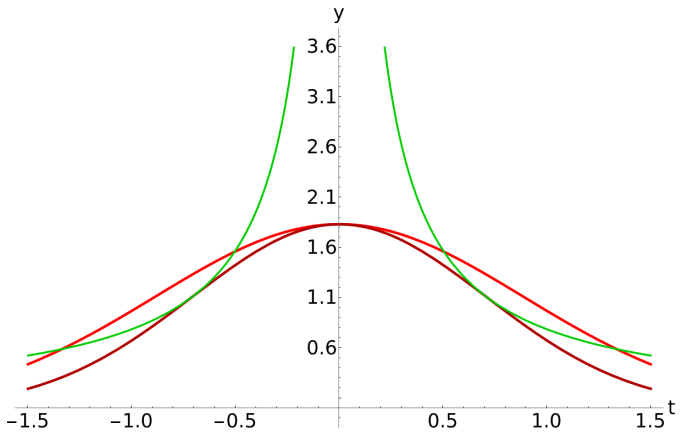
$$h'(t) = \frac{\pi e^{t^2}(2t^2 - 1)}{4t^2}.$$

Derivace $h'(t)$ je nulová pouze pro $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a platí $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2e}}{4}\pi$. Pro $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je derivace $h'(t)$ vždy záporná, tj. funkce $h(t)$ je na tomto intervalu klesající. Pro $t \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ je derivace $h'(t)$ vždy kladná, tj. funkce $h(t)$ je na tomto intervalu rostoucí. Obor hodnot funkce f je tedy $H(h) = [\frac{\sqrt{2e}}{4}\pi, \infty)$. Pokud $y(0) \in (\frac{\sqrt{2e}}{4}\pi, \infty)$, pak má rovnice (4.23) právě dvě řešení, tedy řešení rovnice (1.2) protíná křivku $y(t) = \frac{\pi}{4t}$ a dochází ke změně monotonie. Pro $y(0) = \frac{\sqrt{2e}}{4}\pi$ má rovnice (4.23) právě jedno řešení, ale křivky se jen dotknou (neprotnou), tj. řešení $y(t)$ může zůstat monotónní (viz. obr. 4.15). □

Grafické zobrazení funkce $h(t)$ je zobrazeno na obr. 4.14.



obr. 4.14: Grafické zobrazení funkce $h(t)$.



obr. 4.15: Grafické zobrazení funkcí daných předpisem (4.11) a (4.14) s počáteční podmínkou $y(0) = \frac{\sqrt{2e}}{4}\pi$ a funkce $\frac{\pi}{4|t|}$.

Kapitola 5

Závěr

V bakalářské práci jsme se zabývali diferenciální rovnicí ve tvaru $y' = \sin(-2ty)$, kterou nelze analyticky vyřešit. Nejprve bylo ukázáno, že počáteční úloha má právě jedno řešení $\forall t \in \mathbb{R}$. Následně bylo řešení rovnice pro různé počáteční podmínky vykresleno v počítačovém programu Wolfram Mathematica pomocí numerických metod, které nám dávají hrubou představu o tom, jak bude řešení rovnice vypadat a jak se bude chovat. Vzhledem k tomu, že rovnici nelze analyticky vyřešit, byla rovnice aproximována pomocí linearizované úlohy, konkrétně rovnicí $y' = -2ty$. Řešení linearizované úlohy a rovnice $y' = \sin(-2ty)$ bylo podobné především na blízkém okolí počátku, ale již při počáteční podmínce $y(0) = 3$ byla maximální chyba až 60krát větší než pro počáteční podmínku $y(0) = 1$. Pro přesnější aproximaci byla pravá strana rovnice nahrazena Taylorovým polynomem 3. stupně na okolí počátku. V práci je dokázáno, že pokud k dané aproximaci připojíme počáteční podmínku $y(0) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, řešení monotónně klesá k 0 a rozdíl chyby se oproti linearizované úloze zmenšil zhruba 25krát. Naopak pro počáteční podmínky $y(0) \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ rozdíl řešení rovnic roste a dochází k tzv. „blow-up“ v bodě t_0, tedy neexistuje řešení pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Ve druhé části jsme se zaměřili na vlastnosti, které je možno získat již ze samotné diferenciální rovnice. Konkrétně pro lineární aproximaci byla zjištěna globální minima a maxima, intervaly, kde řešení roste nebo klesá, a jeho konkávnost a konvexita. U diferenciální rovnice $y' = \sin(-2ty)$ byly nalezeny křivky, na kterých dochází k inflexi, a následně bylo zjištělo, že pokud existuje lokální minimum, nebo maximum, pak se nachází na křivkách $y = \frac{k\pi}{2t}, k \in \mathbb{Z}$. Dále bylo zjištěno, že řešení rovnice a její lineární aproximace jsou sudé funkce.

Ve třetí části bylo řešení počáteční úlohy pomocí Gronwallova lemmatu omezeno shora. Horní odhad je ale velmi hrubý (exponenciálně roste), proto byly vypočteny jemnější odhady na menších intervalech, díky kterým se podařilo výsledné řešení do určitého času T lépe omezit shora. Následně bylo odvozeno, že pro počáteční podmínky $y(0) \in \left[-\frac{\sqrt{e\pi}}{2}, \frac{\sqrt{e\pi}}{2}\right]$ řešení počáteční úlohy pro rovnici monotónně klesá k nule pro $t \geq 0$. Naopak pro $y(0) \in (-\infty, \frac{\sqrt{2e}}{4}\pi) \cup \left(\frac{\sqrt{2e}}{4}\pi, \infty\right)$ dochází ke změně monotonie.

V případě, že bychom se dále zabývali tímto tématem, můžeme omezovat řešení diferenciální rovnice $y' = \sin(-2ty)$ jemněji, tedy po částech i pro větší argumenty.

Literatura

[1] BAINOV, D. D. - SIMEONOV, P. S. *Integral inequalities and applications*. 57. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] ČIHÁK, M. - HOLUB, T. *Teorie růstové politiky*. Vysoká škola ekonomická, Národohospodářská fakulta, 2000. ISBN 80-245-0126-0.

[3] GRONWALL, T H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics*, 1919, s. 292-296

[4] JONES, Ch. *Introduction to Economic Growth; Ros. J. Development Theory and the Economics of Growth*. W. W. Norton, 2002. ISBN 978-0393977455.

[5] KUFNER, A. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Západočeská univerzita v Plzni, 1993.

[6] TESCHL, G. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. 140. American Mathematical Soc., 2012. ISBN 978-0821883280.