Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd
Katedra Matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úvěrové splácení z pohledu diferenčních rovnic

Plzeň, 2021 Nikola Svrčinová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 25. května 2021

. . . .
vlastnoruční podpis

Poděkování

Moc ráda bych poděkovala panu doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. za cenné rady, odborné vedení a za jeho čas strávený na konzultacích.

Abstrakt

Úvěrové splácení z pohledu diferenčních rovnic

Cílem předložené práce je analýza vztahů mezi diferenčními rovnicemi a úvěrovým splácením. Konkrétně se nejdříve zabýváme odvozením rovnic pro splácení úvěrů a umořovacím plánem. Dále zkoumáme závislosti na jednotlivých parametrech a rozšiřujeme splácení úvěru o poplatky. Nakonec vytváříme kalkulačku pro výpočet výše splátek, roční procentní sazby nákladů a umořovacího plánu.

Klíčová slova: diferenční rovnice, úvěr, hypotéka, závislosti na parametrech, kalkulačka

Abstract

Loan Repayment in Terms of Difference Equations

The goal of this thesis is to analyze relationships among difference equations and loan repayment. Specifically, we first consider the derivation of equations for loan repayment and the amortization plan. Next, we examine the dependencies on the various parameters and we extend loan repayment to include fees. Finally, we develop a calculator to compute amount of the repayments, the annual percentage rate and the amortization plan.

Keywords: difference equations, loan, mortgage, dependencies on parameters, calculator

Obsah

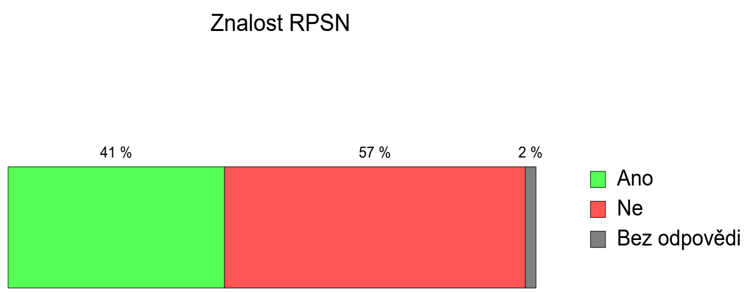
Přehled použitých značek

A	APR with all fees	RPSN
$A(t_1, t_2)$	accumulation factor	akumulační faktor
a_t	amount of amortization at time t	výše úmoru ve splátce v čase t
C_t	payment amount at time t	celková platba v čase t
D_t	debt at time t	dluh v čase t
F_t	fictitious amount of debt at time t	fiktivní výše zbylého dluhu v čase t
I	auxiliary variable $I = 1 + \frac{i}{p}$	pomocná proměnná $I = 1 + \frac{i}{p}$
i	nominal interest rate	nominální úroková míra
i_{ef}	effective interest rate	efektivní úroková míra
i_{max}	maximal nominal interest rate	maximální nominální úroková míra
i_{min}	minimal nominal interest rate	minimální nominální úroková míra
$\mathbb{N}$	set of natural numbers	množina přirozených čísel
P	regular fee	pravidelný konstantní poplatek
P_t	fee at time t	jednorázový poplatek v čase t
PV	present value	současná hodnota
p	payment frequency	frekvence splácení
R	repayment	splátka
$\mathbb{R}$	set of real numbers	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	set of positive real numbers	množina kladných reálných čísel
T	total time	celkový čas
T_{min}	minimal total time	minimální celkový čas
t	time	čas
U	total amount of interest	celková výše úroků
u_t	amount of interest at time t	výše úroku ve splátce v čase t

Předmluva

Rozhodování, zda si vzít úvěr na bydlení, na zaplacení nákladů při podnikání nebo na dovolenou může stát v určitých životních situacích před každým z nás. Proto je dobré mít povědomí o tom, jak funguje úročení, porozumět mírám uvedených na úvěrových smlouvách a mít celkově dobrou finanční gramotnost.

Ministerstvo financí[1] v roce 2020 provádělo statistické šetření finanční gramotnosti, jehož část se zaměřovala na úvěrové splácení. Jednou z otázek pro respondenty bylo zodpovědět, zda znají význam zkratky RPSN a pokud ano, tak jeho význam přibližně popsat. Na obrázku 0.1 vidíme graf zobrazující procentuální rozdělení odpovědí na otázku „Věděl(a) byste, co v souvislosti s úvěry znamená zkratka RPSN?“

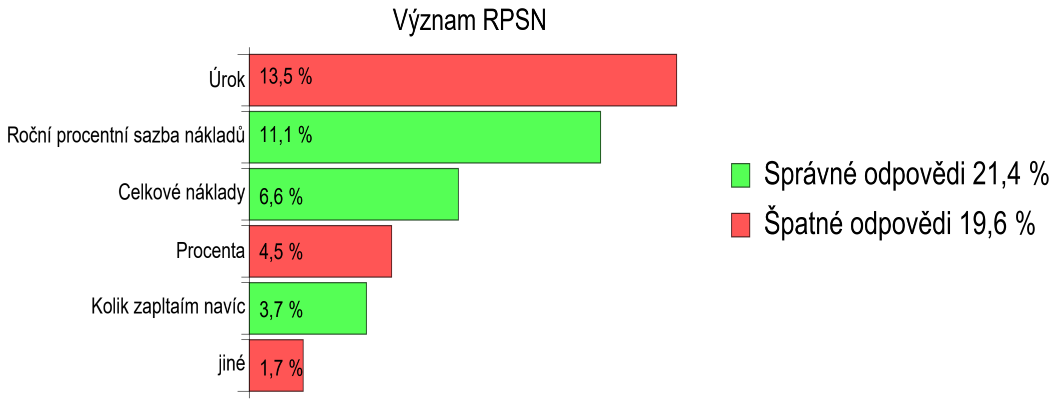


Obrázek 0.1: Procentuální výsledek odpovědí na otázku: Věděl(a) byste, co v souvislosti s úvěry znamená zkratka RPSN?

41 % respondentů, jež se domnívalo, že zná skutečný význam RPSN, jej dále mělo definovat. Na obrázku 0.2 vidíme graf zobrazující odpovědi 41 % respondentů na dotaz „Pokuste se alespoň přibližně popsat, co RPSN znamená.“ Zeleně označené jsou správné odpovědi mezi něž patří „roční procentní sazba nákladů“, „celkové náklady“ a „kolik zaplatím navíc“. Ze statistiky vyplývá, že skutečný význam RPSN zná z celkového počtu respondentů 21,4 % osob. Správnou

[1]Měření finanční gramotnosti 2020.Ministerstvo financí ČR - proč se finančně vzdělávat? [online]. Copyright © 2013, MF [cit. 13.05.2021]. Dostupné z: https://financnigramotnost.mfcr.cz/cs/pro-odborniky/mereni-urovne-financni-gramotnosti/2020/mereni-financni-gramotnosti-2020-3302

odpověď nejčastěji uváděli osoby s maturitou, s vysokoškolským vzděláním, vícečetné rodiny s dětmi a lidé s vyššími příjmy. Naopak špatnou odpověď uváděli většinou lidé se základním či středoškolským vzděláním bez maturity, důchodci a lidé s nízkými a středními příjmy.



Obrázek 0.2: Procentuální výsledek odpovědí na otázku významu RPSN položenou 41 % osob, které se domnívaly, že význam znají.

Finanční negramotnost a s tím spojená nedostatečná připravenost na úvěrové náklady mohou vést k exekuci či případné insolvenci. Ze statistik Exekutorské komory ČR[2] vyplývá, že v roce 2019 činí počet osob s exekucí 783 053, což je 13,68 % obyvatelstva ČR. Přitom na jednu osobu v exekuci připadá průměrně 5,72 exekučních řízení.

Smyslem této práce je proto nejdříve teoreticky a dále na praktických příkladech vysvětlit pomocí diferenčních rovnic fungování úvěrového splácení a ukázat tvorbu umořovacího plánu. Dalším cílem je graficky znázornit a interpretovat závislosti jednotlivých parametrů a vytvořit praktický nástroj pro výpočet výše splátek, RPSN a celého umořovacího plánu.

Jádrem výpočtů jsou diferenční rovnice, které popisují vývoj určitého jevu v diskrétním čase. Často se s nimi setkávají právě ekonomové například při analýze časových řad nebo při vytváření modelů sektorové ekonomiky v makroekonomii. V práci se zaměříme na splácení úvěrů, což spadá do oblasti mikroekonomie.

Mnohé výpočty uvedené v práci mají alternativní způsoby řešení, které jsou často i jednodušší. Obecný pohled pomocí diferenčních rovnic umožňuje využít nestandardní postupy při řešení a ukázat jiný úhel pohledu na úvěrové splácení.

[2]Otevřená data o exekucích. Otevřená data o exekucích [online]. Copyright © 2009 [cit. 13.05.2021]. Dostupné z: https://statistiky.ekcr.info/statistiky

Úvod do úvěrového splácení 1

V této kapitole si nejprve představíme parametry a jejich podmínky související se splácením úvěrů. Dále se podíváme na průběh splácení a odvodíme výchozí rovnici úvěrového splácení. U úvěrové rovnice vyjádříme zbylou výši dluhu dvěma možnými způsoby. Nejdříve si objasníme odvození za pomoci rekurentní posloupnosti a poté odvodíme zbylou výši dluhu pomocí řešení diferenčních rovnic. Nakonec se budeme věnovat splácení z pohledu banky a ukážeme si tvorbu umořovacího plánu.

Mezi parametry pro popis splácení řadíme celkovou dobu $T \in \mathbb{N}$, kde T uvažujeme převážně v měsících a méně často i v dalších časových jednotkách, jako jsou roky, pololetí, čtvrtletí či týdny. V čase $t \in \mathbb{N}$ s podmínkami $0 \leq t \leq T$ se zabýváme zbylou výší dluhu $D_t \geq 0$. Speciálně pro počáteční dluh v čase $t = 0$ platí, že $D_0 > 0$. Dalším parametrem popisující průběh splácení je výše úroku $i \geq 0$ p.a. (zkratka per annum z latiny označuje úrok za jeden rok [1]) s frekvencí splácení $p \in \mathbb{N}$ v jednom roce a výší splátek $R \in \mathbb{R}^+$. V práci budeme při umořování dluhu předpokládat stejnou frekvenci splácení úroků a úmorů.

1.1 Výchozí rovnice úvěrového splácení

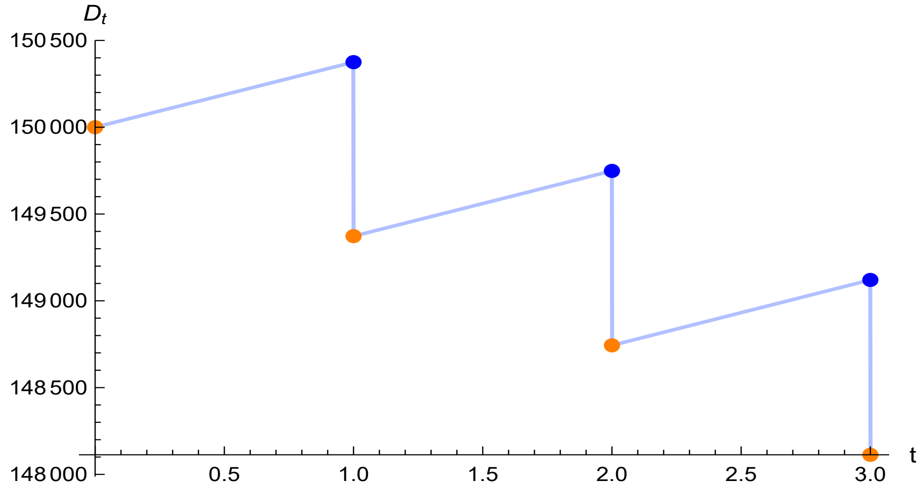
Při splácení v čase t nejdříve naběhne k celkové částce področní úrok ve výši $\frac{i}{p}$ a celkový dluh poté činí $\frac{i}{p}D_{t-1}$. Dále dojde k platbě splátky R. Tento jev vytváří pilovitý tvar funkce, kterou můžeme vidět na obrázku 1.1. Dluh s naběhlými úroky je označen modrou barvou a oranžová barva značí zbylý dluh D_t po již zaplacené splátce R.

Výše popsané splácení lze zapsat ve tvaru rekurentní posloupnosti

$$D_t = D_{t-1} + \frac{i}{p}D_{t-1} - R. \tag{1.1}$$

Pro přehlednost a zkrácení zápisu budeme dále používat pomocnou konstantu $I = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$. Za výchozí úvěrovou rovnici budeme v následujícím textu považovat nehomogenní lineární diferenční rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$D_t = ID_{t-1} - R. \tag{1.2}$$



Obrázek 1.1: Pilovitý tvar funkce úvěrového splácení s parametry D_0 = 150 000 Kč, R = 1 000 Kč, i = 0,03 p.a., p = 12 a $t \in \langle 0, 3\rangle$. Modrou barvou je označen zbylý dluh po úročení a oranžová označuje D_0 a zbylý dluh D_t po zaplacení splátky R.

Následně je naším cílem získat vyjádření zbylé výše dluhu D_t v závislosti na počátečním dluhu D_0. Odvození je možné provést minimálně dvěma různými způsoby. Nejdříve odvodíme zbylou výši dluhu za pomoci rekurentního vztahu a poté druhým způsobem podle řešení nehomogenních diferenčních rovnic.

1.2 Odvození zbylé výše dluhu pomocí rekurentní posloupnosti

Pro první způsob odvození zbylého dluhu v čase t použijeme výchozí úvěrovou rovnici (1.2), pro jejíž zbylý dluh D_1 platí

$$D_1 = ID_0 - R,$$

dále pro D_2

$$D_2 = I^2 D_0 - IR - R$$

a obecně vyjádřeno pro D_t

$$D_t = I^t D_0 - R \sum_{n=0}^{t-1} I^n.$$

Po vyjádření součtu geometrické řady $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ získáme rovnici

$$D_t = I^t D_0 - R \frac{1 - I^t}{1 - I}.$$

Při rozepsaní $I = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$ dostáváme odvozenou rovnici pro výši zbylého dluhu ve tvaru

$$D_t = \left(1+\frac{i}{p}\right)^t D_0 + R\frac{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^t}{\frac{i}{p}}. \tag{1.3}$$

Při vyjádření součtu geometrické řady jsme neuvažovali $q = 1$. Tento případ nastane, pokud $I = 1$, tedy úrok $i = 0$ p.a. Pro $i = 0$ zbylý dluh jednoduše vyjádříme jako $D_t = D_0 - Rt$.

1.3 Odvození zbylé výše dluhu pomocí řešení diferenčních rovnic

Druhým možným pohledem na odvození zbylého dluhu je využít řešení diferenčních rovnic [4]. Počáteční úloha opět vychází z výchozí úvěrové rovnice (1.2) s počáteční podmínkou ve tvaru

$$\begin{cases} D_{t+1} &= ID_t - R, \\ D_0 &= D, \end{cases} \tag{1.4}$$

kde $D \in \mathbb{R}^+$ značí výši počátečního dluhu. Pro odvození použijeme metodu odhadu. Nejprve nalezneme řešení homogenní rovnice, pro kterou platí, že výše splátek $R = 0$. Řešení hledáme ve tvaru

$$D_{t+1} = IK$$

pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$. Pro D_1 platí

$$D_1 = IK,$$

pro D_2

$$D_2 = I^2K$$

a obecně vyjádřené homogenní řešení pro D_t

$$D_t = I^tK.$$

Dále pro nehomogenní rovnici hledáme partikulární řešení s předpokladem $D_{t+1} = D_t$. Nehomogenní rovnice přejde do tvaru

$$D_t = ID_t - R.$$

Po úpravách nalézáme partikulární řešení

$$D_t = \frac{-R}{1-I}.$$

Spojením homogenního a partikulárního řešení získáme rovnici ve tvaru

$$D_t = I^tK - \frac{R}{1-I}. \tag{1.5}$$

Po dosazení počáteční podmínky $D_0 = D$ v $t = 0$ dostáváme tvar

$$D_0 = D = K - \frac{R}{1-I},$$

a tedy

$$K = D_0 + \frac{R}{1 - I}. \tag{1.6}$$

Odvozený vzorec pro výpočet zbylé výše dluhu je následující vztah, získaný dosazením (1.6) do (1.5)

$$D_t = I^t \left(D_0 + \frac{R}{1 - I} \right) - \frac{R}{1 - I} \tag{1.7}$$

a vyjádřením $I = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$ dostáváme rovnici ve tvaru

$$D_t = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^t \left(D_0 - \frac{R}{\frac{i}{p}} \right) + \frac{R}{\frac{i}{p}}. \tag{1.8}$$

Příklad 1.1. Předpokládejme, že klient si chce od banky půjčit $D_0 = 150\,000$ Kč a rád by svůj dluh splatil za jeden rok, tedy $D_{12} = 0$ Kč. Banka nabízí na $T = 12$ měsíců úrokovou sazbu $i = 0,059$ p.a. s měsíčním úročením $p = 12$krát ročně. Jaká bude výše splátek R?

Pro výpočet výše splátek využijeme odvozeného vztahu za pomoci rekurentní posloupnosti (1.3). Tuto rovnici úpravami dostaneme do tvaru

$$R = \frac{\frac{i}{p}}{1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^T} \left(D_T - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^T D_0 \right). \tag{1.9}$$

Dosazením hodnot zjistíme, že výše splátek činí 12 903 Kč měsíčně.

Příklad 1.2. Pokud je klient z předchozího příkladu schopen zaplatit v jednom měsíci maximálně $R = 10\,000$ Kč a na konci roku doplatit zbytek dluhu, jak velká bude poslední 12. splátka, aby byl dluh splacen $D_{12} = 0$?

Nejdříve zjistíme velikost dluhu v čase $t = 11$. Pro výpočet použijeme odvozenou rovnici zbylého dluhu (1.8) a zjistíme, že dluh po 11. splátce činí 45 570,45 Kč. K této částce musíme ještě přičíst úrok $D_{11} \frac{i}{p}$. Poslední splátka R bude celkově činit 45 794,51 Kč.

1.4 Umořovací plán

V předchozích příkladech 1.1 a 1.2 jsme si ukázali aplikaci výpočtů z pohledu dlužníka. Nyní se budeme věnovat splácení dluhu z pohledu banky, ukážeme tvorbu umořovacího plánu a podíváme se na závislost výše splátek na úroku $R(i)$.

Průběh splácení banka zachycuje v podobě umořovacího plánu [1]. Umořovací plán obsahuje pro jednotlivá období

- výši splátky,
- výši úmoru ze splátky,
- výši úroku ze splátky a
- stav dluhu po odečtení úmoru.

Z obsahu umořovacího plánu zjistíme, že splátka R se skládá z části z úmoru a_t a z části z úroku u_t. Rovnici (1.1) převedeme do tvaru

$$R = \frac{i}{p} D_{t-1} + D_{t-1} - D_t,$$

kde první člen odpovídá výši úroku

$$u_t = \frac{i}{p} D_{t-1}, \tag{1.10}$$

kterou můžeme chápat jako odměnu pro banku za poskytnutí služeb. Zbylé členy zachycují výši úmoru

$$a_t = D_{t-1} - D_t. \tag{1.11}$$

Při umoření neboli splacení dluhu dojde ke snížení dlužné částky, proto výše úmoru a_t v čase t je rozdílem předchozí a současné výše dluhu. Splátku R můžeme přepsat do tvaru

$$R = u_t + a_t.$$

Pokud bychom chtěli znát výši úroku či úmoru v konkrétním čase t, tak z vyjádřených rovnic (1.10) a (1.11) je nutné znát výši dluhu $D_0, D_1, ...D_{t-1}, D_t$. Pokud bychom se chtěli obejít bez výpočtu zbylého dluhu v časových okamžicích $\langle 0; t \rangle$, tak úmor a_t můžeme vyjádřit v závislosti jen na počátečním dluhu D_0. Hodnoty D_{t-1} a D_t vyjádříme dle (1.7) a dosadíme do rovnice (1.11)

$$a_t = I^{t-1} \left(D_0 + \frac{R}{1-I} \right) - \frac{R}{1-I} - I^t \left(D_0 + \frac{R}{1-I} \right) + \frac{R}{1-I}.$$

Upravíme do tvaru

$$a_t = \left(I^{t-1} - I^t \right) \left(D_0 + \frac{R}{1-I} \right) \tag{1.12}$$

a vyjádříme $I = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$

$$a_t = \left(\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t-1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^t \right) \left(D_0 - \frac{Rp}{i} \right).$$

Výši úroku u_t v čase t lze vypočítat i bez známosti celého umořovacího plánu jako rozdíl celkové splátky a úmoru, tedy $u_t = R - a_t$. Další možností je vyjádřit D_{t-1} dle (1.8) a dosadit do (1.10)

$$u_t = \frac{i}{p} \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t-1} \left(D_0 - \frac{R}{\frac{i}{p}} \right) + R.$$

Dále můžeme spočítat celkovou výši úroků U jako $U = \sum_{t=1}^{T} u_t$, která vyjadřuje přesnou výši zaplacených úroků bance za období $t \in \langle 1, T \rangle$. Pokud se chceme vyhnout celé tvorbě umořovacího plánu a s tím spojeným výpočtem jednotlivých výší u_t, tak celkovou výši úroků U můžeme vyjádřit jako rozdíl všech splátek a celkového úmoru, který se rovná počátečnímu

t	R	a_t	u_t	D_t
0				400 000
1	74 977	34 977	40 000	365 023
2	74 977	38 475	36 502	326 547
3	74 977	42 323	32 655	284 224
4	74 977	46 555	28 422	237 669
5	74 977	51 211	23 767	186 458
6	74 977	56 332	18 646	130 126
7	74 977	61 965	13 013	68 161
8	74 977	68 161	6 816	0
celkem		400 000		

Tabulka 1.1: Umořovací plán z příkladu 1.3. s výší půjčky $D_0 = 400\ 000$ Kč, placenou v $T = 8$ letech s frekvencí $p = 1$krát ročně a úrokem $i = 0{,}1$ p.a. a splátkou R = 74 977 Kč.

dluhu $U = RT - D_0$. Protože výpočet nezahrnuje časovou hodnotu plateb úroků, tak neslouží k porovnání jednotlivých úvěrů, ale jen k zjištění celkové výše úroků. Časové hodnotě plateb se budeme věnovat až v 3. kapitole.

Příklad 1.3. Sestavíme umořovací plán pro stejně velké splátky a zobrazíme závislost úmorů a úroků na čase pro půjčku ve výši $D_0 = 400\ 000$ Kč, placenou v $T = 8$ letech s frekvencí $p = 1$krát ročně a úrokem $i = 0{,}1$ p.a.

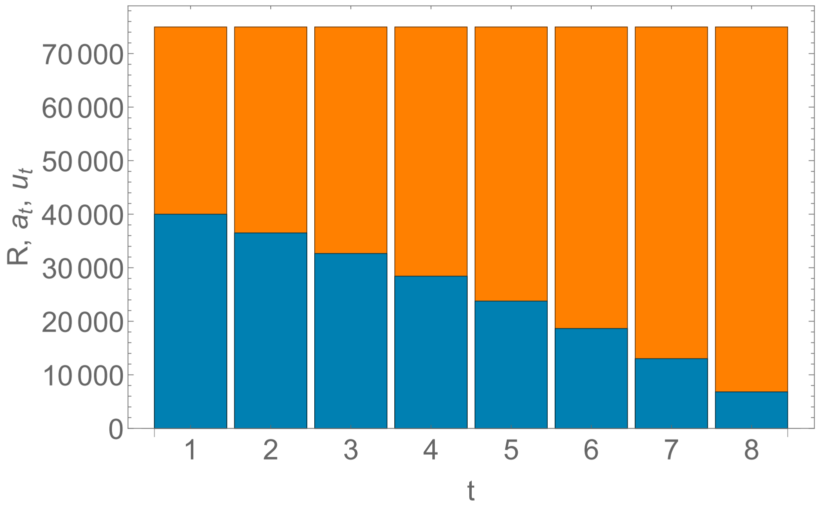
Vypočtený umořovací plán pomocí výše uvedených rovnic je možné vidět v tabulce 1.1. Součet úmorů se rovná počátečnímu dluhu a dluh je tedy za 8 let splacen. Dále si můžeme všimnout, že při stejně velké splátce se postupem času snižují úroky, kdežto úmory rostou. Postupné snižování úroků je způsobeno snižováním zbylého dluhu, neboť úrok u_t je procentuální část ze zbylého dluhu v minulém období D_{t-1}. Na obrázku 1.2 je zobrazen poměr úroků a úmorů pro splátky z příkladu 1.3.

Příklad 1.4. Banka musí navrhnout takový plán, aby došlo ke splacení dluhu v konečném čase. Ke splacení dojde v případě, kdy výše splátky převyšuje úrok. Na obrázku 1.3 je možné vidět tři případy, kde $R > D_0 \frac{i}{p}$ (modrá) , $R = D_0 \frac{i}{p}$ (oranžová) a nakonec $R < D_0 \frac{i}{p}$ (zelená).

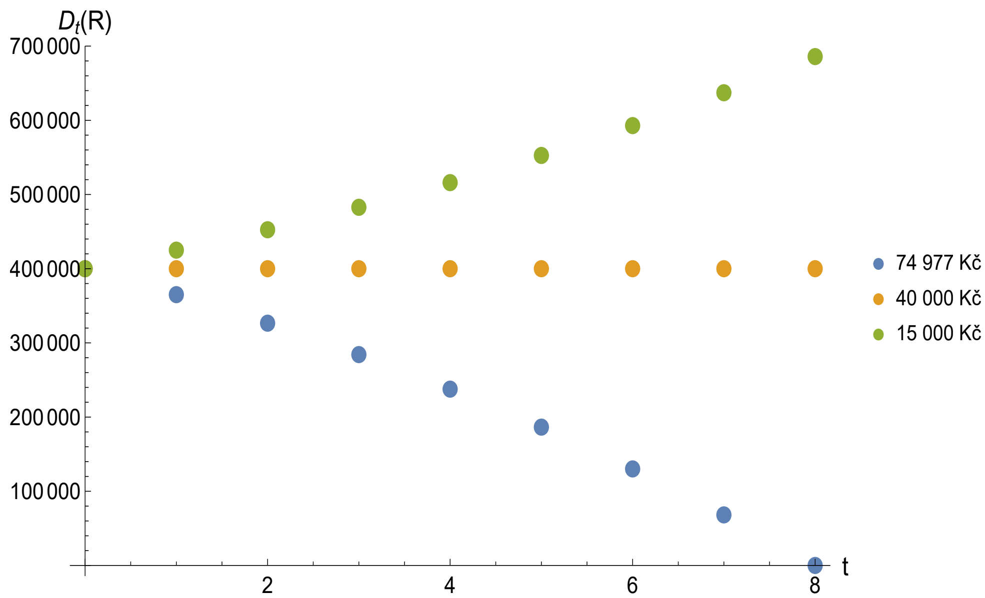
První případ je odvozen z příkladu 1.3., kdy pro půjčku ve výši 400 000 Kč, placenou ročně v 8 letech s úrokem 0,1 p.a. je splátka ve výši 74 977 Kč a je označena modrou barvou. Splátka převyšuje výši úroku a dochází ke splacení dluhu.

Druhým případem je, pokud je výše splátky 40 000 Kč a tedy se rovná výši úroku. V tomto případě zůstává dluh stále stejný, úmor je nulový a nikdy nedojde ke splacení dluhu.

Třetím případem je výše splátky 15 000 Kč. Protože výše splátky nepokrývá výši úroku, tak dlužná částka každý rok roste.



Obrázek 1.2: Poměr úroků u_t (modrá) a úmorů a_t (oranžová) v celkové splátce s parametry z příkladu 1.3., kde uvažujeme půjčku ve výši $D_0 = 400\,000$ Kč, placenou v $T = 8$ letech s frekvencí $p = 1$krát ročně, úrokem $i = 0{,}1$ p.a. a splátkou $R = 74\,977$ Kč.



Obrázek 1.3: Splácení z příkladu 1.3. pro půjčku ve výši $D_0 = 400\,000$ Kč, placenou v $T = 8$ letech s frekvencí $p = 1$krát ročně a úrokem $i = 0{,}1$ p.a. s roční výší splátek 74 977 Kč (modrá), 40 000 Kč (oranžová), 15 000 Kč (zelená).

Závislosti na parametrech 2

V předchozí kapitole jsme otevřeli téma závislostí parametrů. Konkrétně jsme zkoumali závislost zbylého dluhu na čase pro různé hodnoty splátek $D_t(R)$. V této kapitole navážeme a rozvineme další závislosti parametrů, jako je počáteční dluh D_0, zbylý dluh D_t, doba splácení T, úrok i, výše úroku u_t, úmoru a_t a celková výše úroků U. Nejprve odvodíme závislost doby splácení T na velikosti úroku i, dále se podíváme na velikost splátek R v závislosti na úroku i a na celkové době splácení T. Nakonec se zaměříme na výši celkových úroků U v závislosti na čase t a na celkové době splácení T.

2.1 Závislost celkové doby splácení T na úroku i

Z počátku určíme minimální a maximální možnou dobu splácení dluhu T podle možné velikosti úroku a dále určíme tvar funkce závislosti celkové doby splácení na úroku $T(i)$.

2.1.1 Interval existence celkové doby splácení T

Pro stanovení intervalu existence splácení dluhu zjistíme nejdříve výši úroku $i \in \langle i_{min}; i_{max})$. Minimální výše úroku je $i_{min} = 0$ a maximální výši úroku i_{max} určíme z výše uvedeného příkladu 1.4. Smysluplná hodnota výše splátek a úroku je taková, u které dojde ke splacení dluhu v konečném čase T. Ke splacení dochází, pokud splátka převyšuje výši úroku $R > D_0 \frac{i}{p}$. Maximální výše úroku je následně určena jako

$$i_{max} = \frac{Rp}{D_0}. \tag{2.1}$$

Úrok tedy dává smysl zkoumat na intervalu $i \in \left\langle 0; \frac{Rp}{D_0} \right)$ p.a.

Pro výpočet intervalu existence T podle úroku upravíme rovnici (1.8) nahrazením času t za celkovou dobu splácení T a stejně tak D_t za D_T. Protože zbylý dluh po splacení je $D_T = 0$, tak rovnice (1.8) se zmíněnými úpravami přejde do tvaru

$$0 = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^T \left(D_0 - \frac{R}{\frac{i}{p}}\right) + \frac{R}{\frac{i}{p}}.$$

Pomocí úprav vyjádříme T jako funkci celkové doby splácení na úroku $T(i)$ a dostaneme

$$T(i) = \frac{\ln\left(\frac{Rp}{Rp-D_0 i}\right)}{\ln\left(1+\frac{i}{p}\right)}. \tag{2.2}$$

Minimální hodnota T_{min} nastává při nulovém úroku $i = 0$ p.a., kde splátky obsahují jen úmor, a proto pro minimální celkovou dobu splácení platí následující vztah $T_{min} = \frac{D_0}{R}$. Pokud chceme zjistit maximální celkovou dobu splácení, tak nejdříve pomocí pravidla $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ upravíme výraz (2.2) do tvaru

$$T(i) = \frac{\ln(Rp) - \ln(Rp - D_0 i)}{\ln\left(1+\frac{i}{p}\right)},$$

dále pro $\lim_{i->i_{max}} T(i)$ vyjádříme jako

$$\lim_{i->i_{max}} T(i) = \frac{\ln(Rp) - \lim_{i\to i_{max}}(Rp - D_0 i)}{\ln\left(1+\frac{R}{D_0}\right)},$$

kde hodnota $\lim_{i\to i_{max}}(Rp - D_0 i) = -\infty$ a maximální hodnota celkové doby splácení je rovna $\lim_{i->i_{max}} T(i) = \infty$. Celý interval existence doby splácení je následně $T(i) \in \left\langle \frac{D_0}{R}, \infty\right)$.

2.1.2 Graf závislosti celkové doby splácení na výší úroku $T(i)$

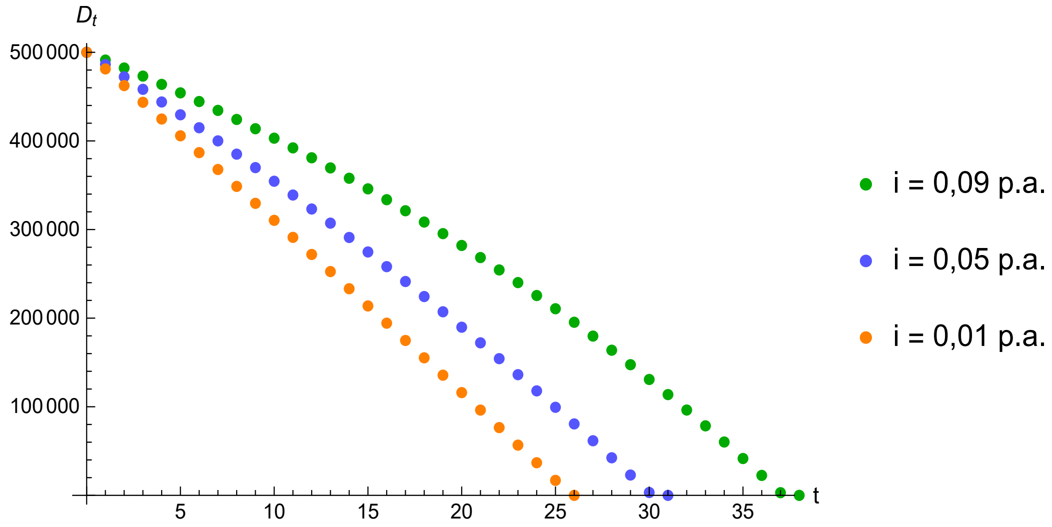
Dále se zaměříme na tvar funkce závislosti celkové doby splácení T na úroku i. Tvar funkce je odvozen ze vztahu (2.2), který dává pro umořovací plány s poslední neúplnou splátkou R neceločíselné hodnoty T. Protože celková doba splácení $T \in \mathbb{N}$, tak výraz (2.2) upravíme pomocí horní celé části. Rovnici (2.2) upravíme pomocí pravidla $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$. Dostáváme

$$T(i) = \left\lceil \log_{1+i}\left(\frac{\frac{R}{i}}{\frac{R}{i} - D_0}\right)\right\rceil, \tag{2.3}$$

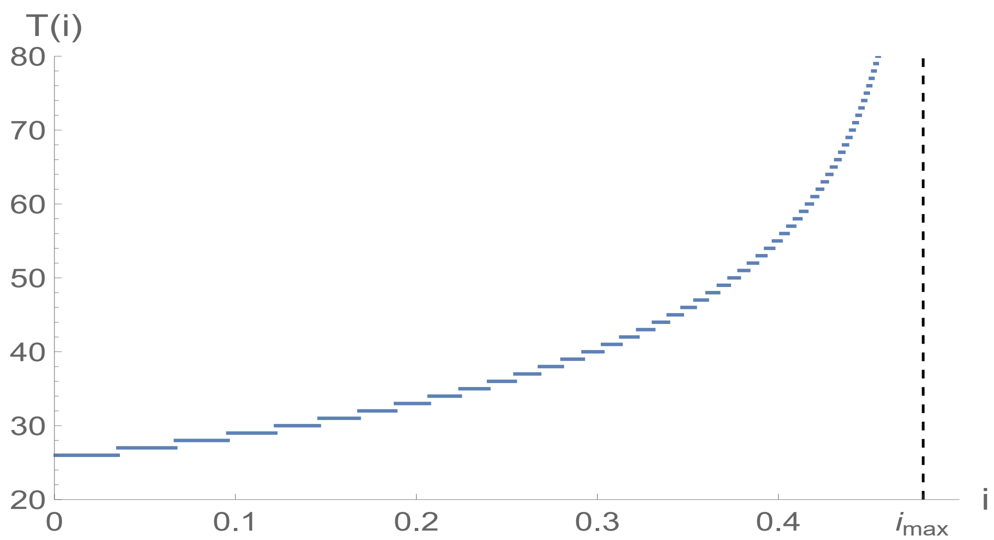
kde $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z}, z \geq x\}$ je horní celá část čísla x.

Příklad 2.1. Pro výši počátečního dluhu $D_0 = 500\,000$ Kč, výši splátky $R = 20\,000$ Kč s frekvencí splácení $p = 4$krát v jednom roce určíme výši zbylého dluhu D_t v závislosti na čase t pro různé hodnoty úroků i. Výše úroků na obrázku 2.1 nabývají hodnot $i = 0{,}09$ p.a. (zelená), $i = 0{,}05$ p.a. (modrá) a $i = 0{,}01$ p.a. (oranžová). Hodnoty zbylého dluhu D_t jsou vypočteny z rovnice (1.8). Na obrázku 2.1 lze vidět, že hodnoty D_T vybočují z předpokládaného tvaru funkce. Tato změna je způsobena tím, že poslední splátka je neúplná a má nižší hodnotu. Pro úroky, které se liší o 0,04 p.a. je celkový čas splácení $T = 38$, $T = 31$ a $T = 26$ čtvrtletí. Nerovnoměrně rozdělený celkový čas splácení pro rovnoměrně rozdělené výše úroků je způsoben tím, že pro vyšší úrok dochází k nižšímu splácení úmorů a tedy umořování dluhu trvá delší dobu. Čím vyšší je úrok, tím je rozdíl hodnot znatelnější, proto si na následujícím příkladu ukážeme, jak vypadá celkový čas splácení v závislosti na výši úroku $T(i)$.

Příklad 2.2. Pro výši počátečního dluhu $D_0 = 500\,000$ Kč, výši splátky $R = 20\,000$ Kč s frekvencí splácení $p = 12$krát v jednom roce je na obrázku 2.2 vidět výše celkové doby splácení T v závislosti na výši úroku i. Určíme interval existence úroku podle (2.1). Interval pro tento konkrétní příklad je $i \in \langle 0; 0{,}48)$. Maximální hodnota $i_{max} = 0{,}48$ p.a. tvoří asymptotu, ke které se funkce $T(i)$ přibližuje. Asymptota je na obrázku vyznačena černou čerchovanou čarou. Funkce T(i) existuje podle (2.2) na intervalu $T(i) \in \langle 25, \infty)$. Výše celkové doby splácení je vypočtena dle (2.3) a její hodnoty jsou zobrazeny na obrázku 2.2. Výše celkové doby splácení T je uvedena v měsících stejně jako frekvence splácení p.



Obrázek 2.1: Závislost celkové doby splácení T na úroku i s počátečním dluhem D_0 =500 000 Kč, výší splátky R =20 000 Kč s čtvrtletním splácením $p = 4$ a výší úroků $i =$ 0,09 p.a. (zelená), úroků $i =$ 0,05 p.a. (modrá) a $i =$ 0,01 p.a. (oranžová).



Obrázek 2.2: Závislost celkové doby splácení T na úroku $i \in (0; 0{,}48)$ s počátečním dluhem $D_0 =$ 500 000 Kč, výší splátky $R =$ 20 000 Kč s měsíčním splácením $p =$ 12krát ročně.

2.2 Velikost splátek R v závislosti na úroku i a na době splácení T

V předchozí podkapitole jsme ukázali závislosti celkového času T na úroku i a nyní se budeme zajímat o závislost velikosti splátek R. Nejdříve si ukážeme závislost R na úroku i a poté se zaměříme na závislost velikosti splátek R na celkové době splácení T.

2.2.1 Závislost splátek R a úroku i pro různá T

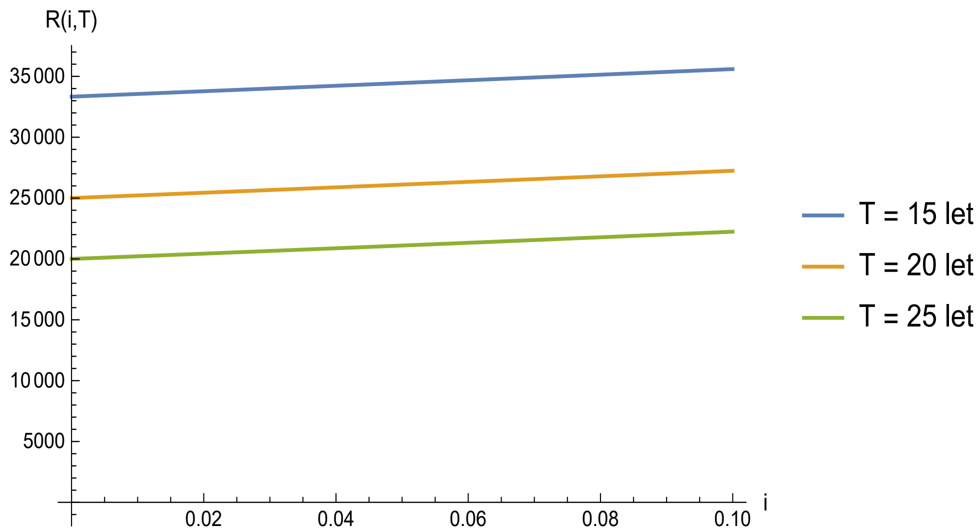
Pro vyjádření závislosti $R(i,T)$ nejdříve upravíme rovnici (1.3) do tvaru

$$R(i,T) = \left(D_t - \left(1+\frac{i}{p}\right)^t D_0\right) \frac{\frac{i}{p}}{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^t},$$

kde za t dosadíme celkový čas splácení T a uvažujeme $D_T = 0$. Rovnice přejde do tvaru

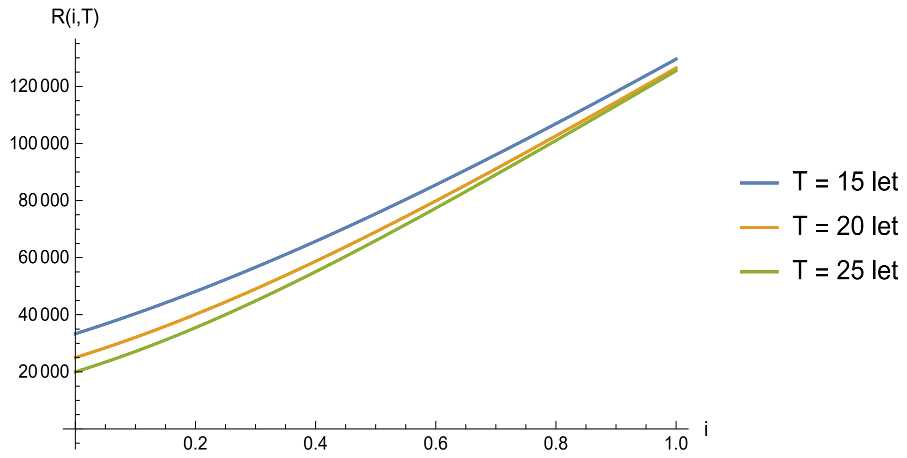
$$R(i,T) = \frac{i}{p} D_0 \frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^T}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^T - 1}. \tag{2.4}$$

Pro $i = 0$ p.a. spočteme $R = \frac{D_0}{T}$.



Obrázek 2.3: Závislost velikosti splátky R na úroku $i \in (0;0{,}1)$ s frekvencí $p = 12$krát ročně a počátečním dluhem $D_0 = 500\,000$ Kč pro různou délku splácení T, kde $T = 15$ let (modrá), $T = 20$ let (oranžová) a $T = 25$ let (zelená).

Příklad 2.3. Na obrázku 2.3 je možné vidět závislost (2.4) pro různé hodnoty celkové doby splácení T, kde $T = 15$ let (modrá), $T = 20$ let (oranžová) a $T = 25$ let (zelená). Dalším parametrem je počáteční dluh $D_0 = 500\,000$ Kč, konečný dluh $D_T = 0$ Kč, úrok $i \in (0;0{,}1)$ a frekvence splácení $p = 12$krát za rok. Intuitivně je jasné, že čím vyšší je úrok, tím vyšší musí být i splátka, aby došlo ke splacení dluhu za čas T a přirozeně platí, že čím vyšší je doba splácení T, tím nižší je výše splátky. Z obrázku 2.3 můžeme pro $i \in (0; 0{,}1)$ nabýt dojmu, že funkce $R(i, T)$ má lineární tvar. Pokud ale uvážíme i úroky považované za lichvu s frekvencí splácení $p = 4$krát ročně, tak se můžeme přesvědčit, že funkce je lineárně lomená. Tvar lineárně lomené funkce pro $i \in (0, 1)$ můžeme vidět na obrázku 2.4, kde hodnoty funkce jsou spočteny dle (2.4).



Obrázek 2.4: Závislost velikosti splátky R na i p.a., kde $i \in (0, 1)$ s frekvencí $p = 4$krát ročně a počátečním dluhem $D_0 = 500\,000$ Kč pro různou délku splácení T, kde $T = 15$ let (modrá), $T = 20$ let (oranžová) a $T = 25$ let (zelená).

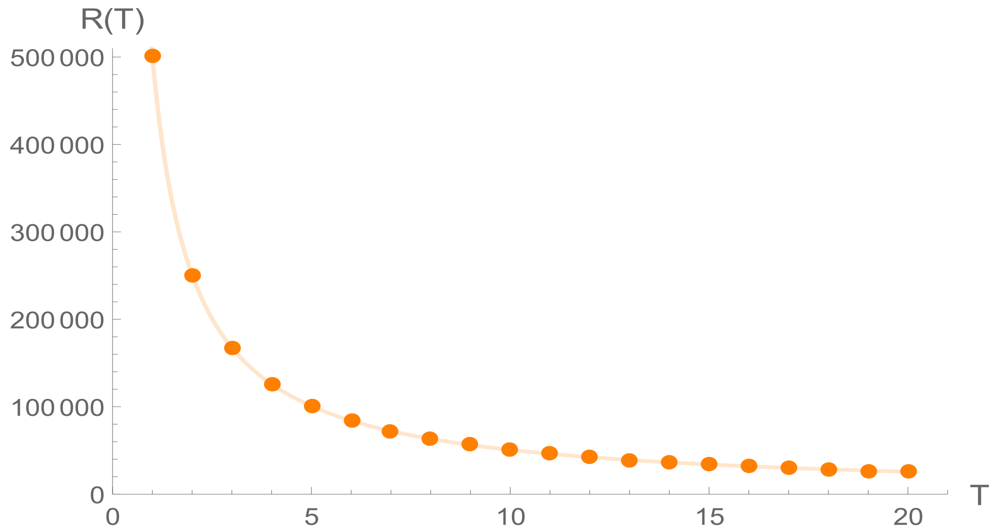
2.2.2 Závislost splátek R na celkové době splácení T

Ještě se vrátíme k obrázku 2.3 a pozastavíme se nad vzdáleností jednotlivých hodnot funkce $R(i, t)$ pro různá T. Protože pro T vzdálené vždy o 5 let neplatí, že by výše splátek $R(i, T)$ pro stejné výše úroků i byla rovnoměrně vzdálená, tak ukážeme vztah mezi R a T. Pro celkovou dobu splácení $T \in \mathbb{N}$ zjistíme minimální hodnotu $R(i, T)$ dosazením $T = 1$ do (2.4). Získáme výsledek $R(i, 1) = D_0 \left(1 + \frac{i}{p}\right)$. Pro maximální dobu splácení $T \to \infty$ upravíme výraz (2.4) a vyjádříme jako

$$\lim_{T\to\infty} R(i,T) = \lim_{T\to\infty} \frac{i}{p} D_0 \frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^T}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^T - 1} = \frac{i}{p} D_0 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^T}} = \frac{i}{p} D_0.$$

Maximální hodnota odpovídá $R(i, T_{max}) = \frac{i}{p} D_0$ a vypočtený interval existence výše splátek $R(i, T)$ je následně $R(i, T) \in \left(\frac{i}{p} D_0, \left(1 + \frac{i}{p}\right) D_0\right\rangle$. Tvar funkce R(i,T) lze určit z již odvozené rovnice (2.4) pro fixní úrok i.

Příklad 2.4. Na obrázku 2.5 se můžeme podívat na závislost výše splátek R na celkové době splácení $T \in \langle 1; 20 \rangle$ s frekvencí splácení $p = 12$krát ročně a úrokem $i = 0{,}03$ p.a. Výpočet hodnot odpovídá (2.4). Z obrázku přirozeně vyplývá, že čím delší je doba splácení, tím menší je potřebná výše splátek R ke splacení úvěru a rozdíl mezi jednotlivými výškami splátek se postupně zmenšuje.



Obrázek 2.5: Závislost velikosti splátky R na celkové době splácení T pro úrok $i = 0{,}03$ p.a.

2.3 Závislost celkových úroků U na čase t a celkové době T

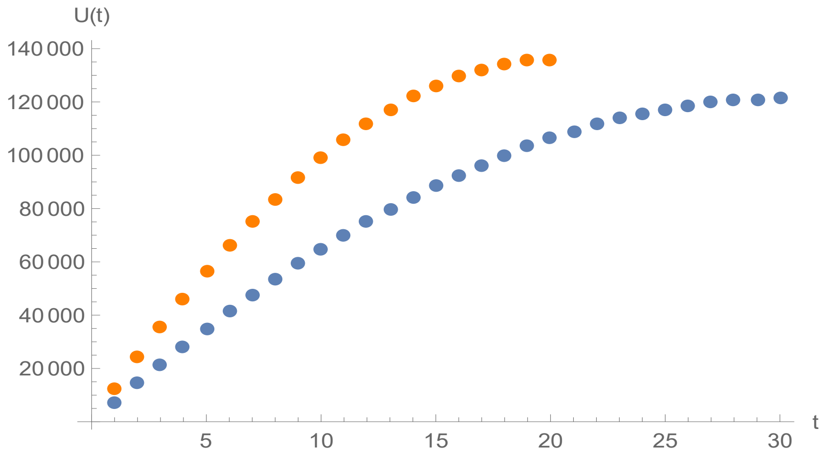
V první kapitole jsme ukázali na umořovacím plánu, že výše úroků u_t při konstantní výši splácení postupem času klesá a spočítali jsme celkovou výši úroků U. Nyní se budeme věnovat závislosti celkové výše úroků U na čase splácení t a dále na celkové době splácení T.

Celkový úrok nezávislý na časové hodnotě jsme již definovali jako $U = \sum_{t=1}^{T} u_t$ a pro zadané parametry D_0, i, p a T jsme ho mohli vyjádřit také následně $U = RT - D_0$. Pokud se zajímáme o celkový úrok $U = \sum_{s=1}^{t} u_s$ po kratší dobu než T, tak celkový úrok v době $t \in \langle 1, T)$ stanovíme nejlépe pomocí vytvoření celého umořovacího plánu. V následujícím příkladu ukážeme graf závislosti $U(t)$ a porovnáme výši zaplacených úroků pro různou celkovou dobu splácení T.

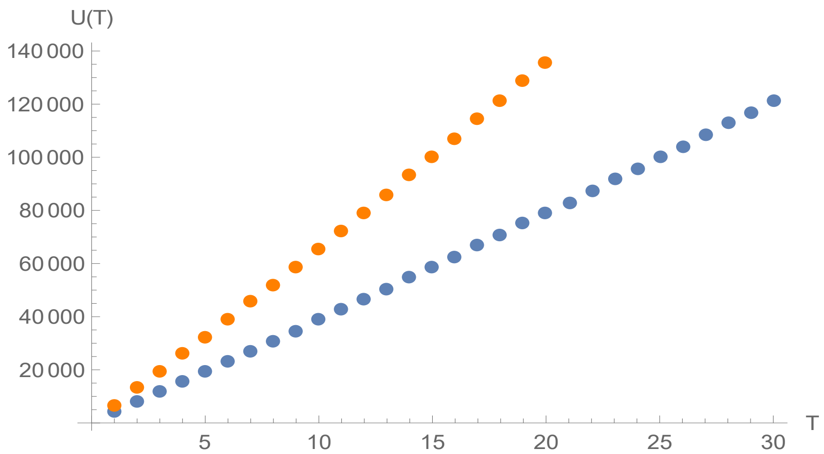
Příklad 2.5. Předpokládejme, že máme k dispozici dvě možné hypotéky, u kterých nás zajímá výše úroků. Obě hypotéky mají počáteční dluh $D_0 = 500\,000$ Kč s frekvencí splácení $p = 12$krát ročně. První hypotéka s celkovou dobou splácení $T = 360$ měsíců, s úrokem $i = 0{,}015$ p.a. a vypočtenou splátkou $R = 1725{,}6$ Kč měsíčně dle (1.9) je na obrázcích 2.6 a 2.7 vyznačena modrou barvou. Druhá hypotéka je na $T = 240$ měsíců s úrokem $i = 0{,}025$ p.a. se splátkou $R = 2649{,}5$ Kč měsíčně je označena oranžovou barvou.

Na obrázku 2.6 je vidět postupný růst výše úroků U v závislosti na čase t. Celkový úrok se zvyšuje pomaleji, kvůli snižování úroků u_t a zbylého dluhu D_t. Pro zjištění výše celkového úroku stačí dosadit do vzorce $U = RT - D_0$. Dosazením zjistíme, že zaplatíme o 14 667 Kč méně, pokud si vezmeme první hypotéku na 360 měsíců.

Na obrázku (2.7) lze vidět závislost celkové výše úroků na celkovém čase $U(T)$ pro různé hodnoty T a k nim dopočtené výše splátek podle (1.9). Zbylé parametry jsou totožné s parametry z příkladu 2.5. Z obrázku vyplývá, že pro delší dobu splácení T a zmenšování splátek R stoupá celková výše úroku. V příkladu jsme nebrali v potaz časovou hodnotu výše úroků, kterou si představíme v následující kapitole.



Obrázek 2.6: Závislost celkového úroku U na době splácení t v letech pro $i = 0{,}015$ p.a.,$T = 360$ měsíců (modrá) a $i = 0{,}025$ p.a.,$T = 240$ měsíců (oranžová) s počátečním dluhem D_0 = 500 000 Kč, frekvencí splácení $p = 12$krát ročně.



Obrázek 2.7: Závislost celkového úroku U_T na době splácení T v letech pro úrok $i = 0{,}015$ p.a. (modrá) a $i = 0{,}025$ p.a. (oranžová) s počátečním dluhem D_0 = 500 000 Kč, frekvencí splácení $p = 12$krát ročně.

Souvislost časové hodnoty a poplatků se splácením 3

V první kapitole jsme se věnovali odvozování rovnic souvisejících se splácením úvěrů. Ve druhé kapitole jsme ukázali závislosti na některých parametrech. Dále rozšíříme splácení přidáním poplatků a vysvětlíme jejich souvislost s RPSN a diferenčními rovnicemi. Abychom mohli definovat RPSN, tak nejdříve budeme věnovat pozornost nominální i efektivní úrokové míře a časové hodnotě plateb. Z pohledu diferenčních rovnic odvodíme závislost zbylého dluhu na RPSN pro splácení s různými kombinacemi poplatků. Nakonec vytvoříme praktický nástroj pro výpočet splátek, RPSN a celého umořovacího plánu.

3.1 Úrokové míry

Nejdříve definujeme akumulační faktor, pomocí něhož vysvětlíme efektivní a nominální úrokovou míru. Dále ukážeme vztah mezi efektivní a nominální úrokovou mírou a osvětlíme jejich souvislost s hypotečním splácením.

DEFINICE 3.1. [3] Akumulační faktor $A(t_1, t_2)$, kde $0 \leq t_1 \leq t_2$, je podíl hodnot investice v čase t_2 a t_1, speciálně $A(t,t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$. Předpokládá se, že akumulační faktor nezávisí na velikosti investice, že $A(t_1, t_2) > 0$ a dále že je splněn princip konzistence

$$A(t_1, t_2) = A(t_1, t)A(t, t_2) \quad \forall t_1 < t < t_2,$$

tj. že navazování investičních příležitostí v čase odpovídá investování na celé období.

Akumulační faktor použijeme k definici efektivní úrokové míry i_{ef}.

DEFINICE 3.2. [3] Efektivní úroková míra pro období délky h začínající v čase t je přírůstek hodnoty jednotkové investice z času t k času $t+h$, tj.

$$i_{ef} = A(t, t+h) - 1,$$

kde A označuje akumulační faktor.

Dále přejdeme k definici nominální úrokové míry, kterou jsme doposud uváděli mezi nezbytnými parametry při výpočtu hypotečního splácení.

p	frekvence splácení	zkratka	význam
1	ročně	p.a.	per annum
2	pololetně	p.s.	per semestre
4	čtvrtletně	p.q.	per quartale
12	měsíčně	p.m.	per mensem
52	týdně	p.sept.	per septimanam
365	denně	p.d.	per diem

Tabulka 3.1: Období, ve kterých se udává nominální úroková míra i.

DEFINICE 3.3. [7] Nominální úroková míra za jednotku času pro investici délky h začínající v čase t je taková hodnota $i_h(t)$, že efektivní úroková míra pro toto období délky h je $hi_h(t)$. Pokud platí $h = \frac{1}{p}$ pro $p \in \mathbb{N}$ a nominální úroková míra je konstantní, tak se hovoří o nominální úrokové míře splatné p krát za období.

Vyplývající vztah $i_{ef} = \frac{i}{p}$ z definice 3.3 odpovídá efektivní úrokové míře za období délky $\frac{1}{p}$. Protože se v praxi setkáváme s roční efektivní úrokovou mírou s úročením p krát ročně, tak ukážeme jaký je vztah nominální a efektivní úrokové míry pro období jednoho roku.

DEFINICE 3.4. [1] Efektivní úroková míra i_{ef} odpovídající nominální úrokové míře i při úročení p krát ročně je roční úroková míra, která dává za dobu jednoho roku stejnou splatnou částku jako nominální úroková míra, tj.

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p. \tag{3.1}$$

Banky uvádějí při hypotečním splácení většinou nominální úrokovou míru vztaženou k jednomu roku. Nominální úroková míra ale může být udávaná i pro jiná období, která jsou uvedená v tabulce 3.1. Pro roční nominální úrokovou míru se splácením s frekvencí $p = 1$krát ročně se nominální úroková míra rovná efektivní úrokové míře. Na následujícím příkladu ukážeme, že při stejné nominální úrokové míře i a vyšší frekvenci splácení $p > 1$ dochází k nárůstu efektivní úrokové míry.

Příklad 3.5. Pro nominální úrokovou míru $i = 0{,}04$ p.a. s počátečním dluhem $D_0 = 120\,000$ Kč a roční frekvencí splácení $p = 1$ se nominální úroková míra rovná efektivní míře. Splátka na konci roku je rovna $R = D_0(1 + i) = 124\,800$ Kč. Pokud změníme frekvenci splácení na měsíční $p = 12$, tak klient bude při stejné nominální úrokové míře i měsíčně platit splátku $R = 10\,218$ Kč vypočtenou dle (1.9). Za rok tedy splatí 122 616 Kč. Efektivní úroková míra vypočtená dle (3.1) činí $i_{ef} = 0{,}040742$. V tomto případě při vyšší efektivní úrokové míře zaplatíme méně na celkové splátce, tedy i na úrocích.

Pokud chceme zjistit, jaká bude efektivní úroková míra při stejné výši zaplacených úroků, ale jiné frekvenci splácení, tak pro výpočet musíme nejdříve definovat počáteční neboli současnou hodnotu všech plateb PV a ukázat její souvislost se splácením.

3.2 Současná hodnota v souvislosti se splácením úvěrů

Nejdříve uvedeme definici počáteční hodnoty pomocí akumulačního faktoru. Dále přejdeme k definici počáteční hodnoty všech plateb pomocí nominální a efektivní úrokové míry a vysvětlíme souvislost se splácením.

DEFINICE 3.6. [3] Počáteční hodnotou částky C z času t rozumíme hodnotu, kterou by bylo třeba v čase 0 investovat, aby v čase t investice dosáhla právě hodnoty C. Počáteční hodnotu jednotkové částky z času $t > 0$ značíme $v(t)$. Počáteční hodnotu jednotkové částky lze vyjádřit pomocí akumulačního faktoru

$$v(t) = \frac{1}{A(0,t)}.$$

Dále definujeme současnou hodnotu všech plateb pomocí akumulačního faktoru a přejdeme k vyjádření pomocí efektivní a nominální úrokové míry.

DEFINICE 3.7. [3] Počáteční hodnota PV všech diskrétních plateb C_t v čase t je dána součtem počátečních hodnot jednotlivých plateb

$$PV = \sum_t C_t v(t), \tag{3.2}$$

kde $v(t)$ označuje počáteční hodnotu jednotkové platby v čase t.

Pokud chceme počáteční hodnotu jednotkové částky $v(t) = \frac{1}{A(0,t)}$ vyjádřit pomocí efektivní úrokové míry i_{ef}, tak z definice 3.2 víme, že platí $A(t, t+h) = 1 + i_{ef}$. V našem případě je počáteční čas $t = 0$ a období h je pro efektivní úrokovou míru používanou k porovnání v délce jednoho roku $h = 1$, tj. $\frac{1}{A(0,1)} = \frac{1}{1+i_{ef}}$. Pro současnou hodnotu vyjádřenou pomocí efektivní úrokové míry platí

$$PV = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1 + i_{ef})^{\frac{t}{p}}}, \tag{3.3}$$

kde p je frekvence splácení v jednom roce a T je celkový počet všech splátek.

Parametry z definice současné hodnoty 3.3 přeznačíme a upravíme ve smyslu hypotečního splácení. U hypotečního splácení platí pro současnou hodnotu, že pokud se $PV = 0$, tak se počáteční dluh C_0 rovná všem zaplaceným splátkám C_t. Jediné půjčené peníze jsou v době 0 a z pohledu banky činí tento dluh $C_0 = -D_0$. Ostatní platby C_t jsou přijaté splátky úmorů, úroků a poplatků. Upravený výraz pro hypoteční splácení přejde do tvaru

$$0 = -D_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1 + i_{ef})^{\frac{t}{p}}}. \tag{3.4}$$

Pokud namísto efektivní úrokové míry i_{ef}, chceme použít nominální úrokovou míru i, tak upravíme výraz (3.1) do tvaru $1 + \frac{i}{p} = \left(1 + i_{ef}\right)^{\frac{1}{p}}$ a dosadíme do (3.4)

$$0 = -D_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{t}}. \tag{3.5}$$

V následujícím příkladu si ukážeme výpočet efektivní úrokové míry, dle výše odvozeného výrazu (3.4) pro stejně velké splátky $C_t = R$.

Příklad 3.8. V minulém příkladu jsme měli půjčku ve výši $D_0 = 120\,000$ Kč s nominální úrokovou mírou $i = 0{,}04$ p.a. Jedinou splátkou na konci roku $p = 1$ zaplatil klient 124 800 Kč. Rozšířením příkladu může být případ, kdy klient místo 124 800 jednou ročně, by chtěl splátky rovnoměrně rozprostřít do 12 měsíců $p = 12$ se splátkou $R = 10\,400$ Kč. Při porovnání jedné platby 124 800 Kč a 12 plateb 10 400 Kč zaplatíme na úrocích stejnou částku 4 800 Kč, ale efektivní úroková míra bude odlišná. Pro roční splácení je nominální úroková míra shodná s efektivní $i_{ef} = 0{,}04$ a pro měsíční splácení $p = 12$ je $i_{ef} = 0{,}07553$. Pro měsíční splácení je efektivní úroková míra spočtena dle vzorce (3.4). V tomto případě je při stejném množství zaplacených úroků vyšší efektivní úroková míra při vyšší frekvenci splácení.

Při úvěrovém splácení se v praxi nesetkáváme s efektivní úrokovou mírou i_{ef}, ale s takzvaným RPSN neboli roční procentní sazbou nákladů, kterou označujeme $A \in \langle 0, +\infty)$. Efektivní úroková míra i_{ef} se narozdíl od RPSN vztahuje jen k úrokům, a proto u splácení bez poplatků jsou míry totožné. RPSN je procentní vyjádření souhrn úroků a poplatků, jako je například jednorázový poplatek za uzavření úvěru, pravidelný poplatek za vedení účtu nebo platba pojistného v případě neschopnosti splácet. V nadcházející podkapitole se podíváme na výpočet zbylého dluhu v závislosti na RPSN. Nejprve ukážeme výpočet pro splácení bez poplatků, dále přidáme pravidelně splácené a jednorázové poplatky.

3.3 Splácení bez poplatků

Začneme u hypotečního splácení, které jsme uvažovali doposud a tím je splácení bez poplatků. Pro nominální výši úroku $i = 0$ obsahuje splátka jen úmor a RPSN je proto také rovno $A = 0$. Zbylý dluh spočteme jednoduše jako $D_t = D_0 - tR$.

Při nenulovém úročení $i > 0$ dochází k navýšení RPSN. Při známe nominální úrokové míře můžeme RPSN spočítat stejně jako efektivní úrokovou míru pomocí (3.1). Pro výpočet zbylého dluhu D_t můžeme využít odvozený vzorec (1.8) se závislostí na nominální úrokové míře i nebo můžeme zbylý dluh zapsat v závislosti na RPSN. Protože pro RPSN stejně tak jako pro efektivní úrokovou míru v (3.1) platí, že $1 + \frac{i}{p} = (1 + A)^{\frac{1}{p}}$, tak výraz $1 + \frac{i}{p}$ z rovnice (1.1) nahradíme. V čase $t \in \langle 0, T - 1\rangle$ je okrajová úloha definována jako

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_{t+1} & = & (1+A)^{\frac{1}{p}} D_t - R, \\ D_0 & = & D, \\ D_T & = & 0, \end{array} \right.$$

kde $D \in \mathbb{R}^+$ označuje počáteční dluh. Řešení úlohy je ve tvaru

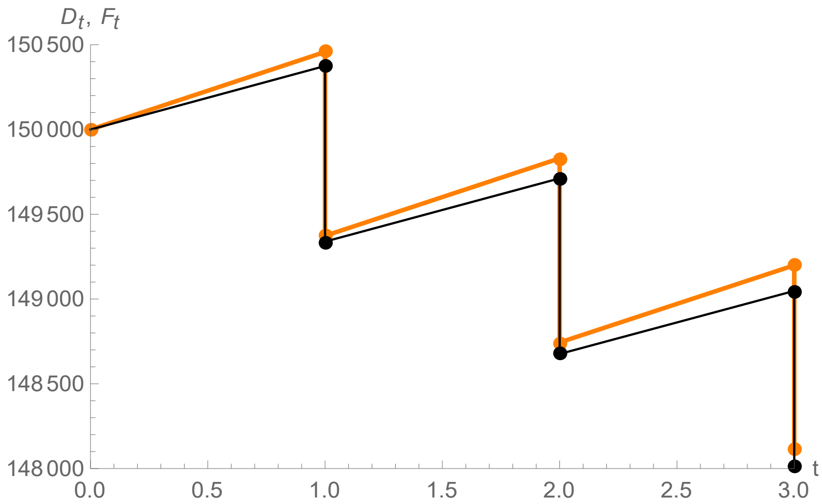
$$D_t = (1 + A)^{\frac{t}{p}} \left(D_0 - \frac{R}{(1 + A)^{\frac{1}{p}} - 1} \right) + \frac{R}{(1 + A)^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

Nalezení řešení je obdobné jako v úloze (1.4) v 1. kapitole. V následující podkapitole přidáme poplatky s pravidelnou dobou splácení.

3.4 Pravidelné poplatky splácené se stejnou frekvencí jako úmor

V této podkapitole přidáme ke splácení konstantní poplatky P splácené se stejnou frekvencí jako úmor a vysvětlíme rozdíl mezi skutečnou výší zbylého dluhu D_t a fiktivní zbylou výší dluhu F_t vypočtenou pomocí diferenční rovnice.

D_t je skutečná výše dluhu, která je vždy rozepsána v umořovacím plánu a na obrázku 3.1 je zobrazena černou barvou, na rozdíl od fiktivní výše dluhu F_t, která je vyznačena oranžovou barvou.



Obrázek 3.1: Fiktivní (oranžová) a skutečná (černá) výše zbylého dluhu, kde $D_0 = 150\,000$ Kč, R = 1 035 Kč, i = 0,03 *p.a.*, p = 12 a $t \in \langle 0, 3 \rangle$ s měsíčním poplatkem $P = 50$ Kč.

U skutečné výše dluhu D_t funkce narůstá pomocí $D_{t-1}(1+\frac{i}{p})$ a následně je ponížena o splátku R. Okrajová úloha pro výpočet skutečné výše zbylého duhu D_t je definována stejně jako v první kapitole 1.4

$$\begin{cases} D_{t+1} &= (1+\frac{i}{p})D_t - R, \\ D_0 &= D, \\ D_T &= 0, \end{cases}$$

s řešením 1.8

$$D_t = \left(1+\frac{i}{p}\right)^t \left(D_0 - \frac{R}{\frac{i}{p}}\right) + \frac{R}{\frac{i}{p}}.$$

Pokud do diferenční rovnice přidáme jakékoliv poplatky, tak zbylou výši dluhu budeme označovat za fiktivní F_t. U fiktivní výše zbylého dluhu F_t narůstá funkce o $F_{t-1}(1+A)^{\frac{1}{p}}$. Protože poplatky P placené se stejnou frekvencí jako úmor lze chápat jako navýšení splátky R o výši poplatku P, tak se funkce snižuje nejen o splátku R, ale i o poplatek P. Okrajová úloha pro $t \in \langle 0, T-1 \rangle$ je ve tvaru

t	D_t po úročení	D_t po splacení	F_t po úročení	F_t po splacení
1	80 200	60 074	80 598	60 223
2	60 224	40 099	60 673	40 298
3	40 200	20 074	40 599	20 224
4	20 125	0	20 375	0

Tabulka 3.2: Skutečný a fiktivní dluh pro parametry z příkladu 3.9.

$$\begin{cases} F_{t+1} &= (1+A)^{\frac{1}{p}} F_t - R - P, \\ F_0 &= F, \\ F_T &= 0, \end{cases}$$

kde F je počáteční dluh. Řešení okrajové úlohy nalézáme

$$F_t = (1+A)^{\frac{t}{p}} \left(F_0 - \frac{R+P}{(1+A)^{\frac{1}{p}} - 1} \right) + \frac{R+P}{(1+A)^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

Skutečná a fiktivní výše dluhu se rovnají v čase 0 a na konci doby splácení T, tedy $D_0 = F_0$ a $D_T = F_T = 0$. Rozdíl mezi fiktivní a skutečnou výší dluhu se zvyšuje do času $T-1$, kde celkový rozdíl mezi $D_{T-1}(1+\frac{i}{p})$ a $F_{T-1}(1+A)^{\frac{1}{p}}$ je výše poplatku P.

Příklad 3.9. V tabulce 3.2 je uveden příklad skutečné a fiktivní výše dluhu pro počáteční dluh $D_0 = F_0 = 80\,000$ Kč s nominální úrokovou mírou $i = 0{,}03$ p.a. placenou měsíčně $p = 12$ v celkové době $T = 4$ měsíce. K měsíční splátce 20 125 Kč je přidán pravidelný měsíční poplatek $P = 250$ Kč.

3.5 Jednorázový poplatek na začátku období

K okrajové úloze s pravidelnými poplatky přidáme počáteční poplatek P_0, jako je například poplatek za ocenění nemovitosti nebo za vyřízení hypotéky. Poplatek placený jednorázově při založení hypotéky lze chápat stejně, jako kdybychom si půjčili o výši P_0 méně z počátečního dluhu F_0. Okrajová úlohu pro $t \in \langle 0, T-1 \rangle$ stanovíme

$$\begin{cases} F_{t+1} &= (1+A)^{\frac{1}{p}} F_t - R - P, \\ F_0 &= F - P_0, \\ F_T &= 0. \end{cases}$$

Řešení nalézáme ve tvaru

$$F_t = (1+A)^{\frac{t}{p}} \left(F_0 - P_0 - \frac{R+P}{(1+A)^{\frac{1}{p}} - 1} \right) + \frac{R+P}{(1+A)^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

Na příkladu si ukážeme rozdíl výše RPSN s počátečním poplatkem pro dvě různé výše půjčky.

Příklad 3.10. Pro oba případy s různou výší půjčky máme společné parametry jako je počet splátek $T = 6$ měsíců, měsíční frekvence splácení $p = 12$, nominální úroková míra $i = 0{,}03$ p.a., počáteční poplatek $P_0 = 2000$ Kč a uvažujeme půjčku bez pravidelných poplatků $P = 0$ Kč. Nejdříve budeme uvažovat půjčku ve výši $F_0 = 10\,000$ Kč s měsíční splátkou $R = 1681$ Kč a druhou půjčku s $F_0 = 100\,000$ Kč se splátkou $R = 16\,812$ Kč, kde výše splátek je vypočtená dle 1.9. RPSN v prvním případě činí 126,64 %. Ve druhém případě uvažujeme větší počáteční dluh a zachováváme stejnou výši poplatku. Zvýšením počátečního dluhu se sníží poměr poplatků a úroků ve splátkách, a tak se sníží i hodnota RPSN. V druhém případě RPSN činí 10,47 %.

3.6 Okrajová úloha s obecnými platbami

Okrajovou úlohu můžeme zobecnit pro platby s různou výší poplatků P_t v časech t. Obecná okrajová úloha je ve tvaru

$$\begin{cases} F_{t+1} &= (1+A)^{\frac{1}{p}} F_t - P_{t+1}, \\ F_0 &= F - P_0, \\ F_T &= 0. \end{cases}$$

Protože pro RPSN existuje analytické vyjádření jen ve specifických případech, tak je pro okrajovou úlohu s obecnými platbami vytvořená hypoteční kalkulačka, která využívá numerickou metodu půlení intervalů [5].

3.7 Úvěrová kalkulačka

V této podkapitole se nejdříve budeme věnovat obecnému popisu fungování kalkulačky a dále si na konkrétním příkladu ukážeme její výstupy.

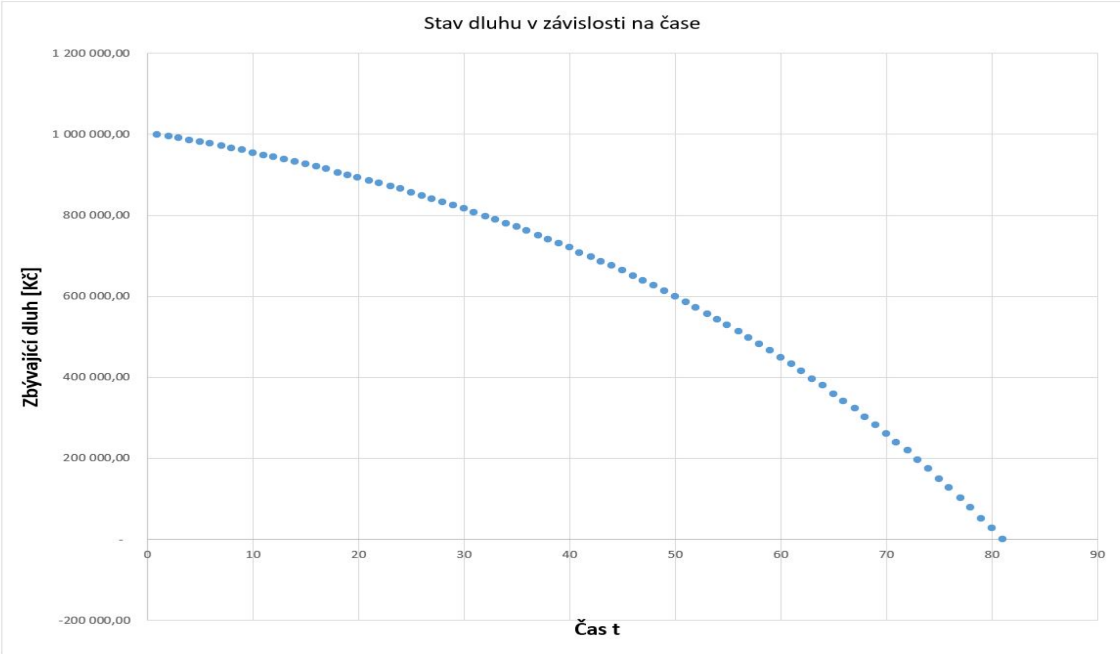
Na přiloženém CD nalezneme soubor „kalkulačka.xlsx“. Nejprve je nutné pro funkčnost kalkulačky a jejích součástí na listu „RPSN a splátka“ zadat základní parametry v části pro základní údaje. Mezi nezbytné parametry patří výše půjčky uváděná v korunách, počet splátek, roční nominální úroková míra a frekvence splácení, kde frekvenci lze vybrat z rozevíracího seznamu s možností zvolit týdenní, měsíční, čtvrtletní, pololetní či roční frekvenci splácení. Kalkulačka umožňuje zadat i další vstupní proměnné mezi než patří jednorázové a pravidelné poplatky. Mezi jednorázové poplatky při uzavření úvěru řadíme mj. vyhotovení smluvní dokumentace, komplexní posouzení či refinancování úvěru. Dále se při úvěrovém splácení setkáváme s poplatkem při uzavření úvěru a mimořádnými jednorázovými poplatky. K pravidelným poplatkům řadíme například poplatky za vedení, výpisy nebo za čerpání úvěru.

Na výstupu je uživateli dána výše splátky bez poplatků a vypočtené RPSN. Na dalším listě „Umořovací plán“ může uživatel vidět vypočtený umořovací plán obsahující výši splátky, úmory, úroky a stav dluhu v obdobích odpovídající frekvenci splácení. Dále na listě „Zbývající dluh - graf“ je možné vidět graf závislosti zbývajícího dluhu v závislosti na čase. Na listu „Úmor a úrok ve splátce - graf“ je vyobrazen graf výše splátek, úmorů a úroků opět v závislosti na čase.

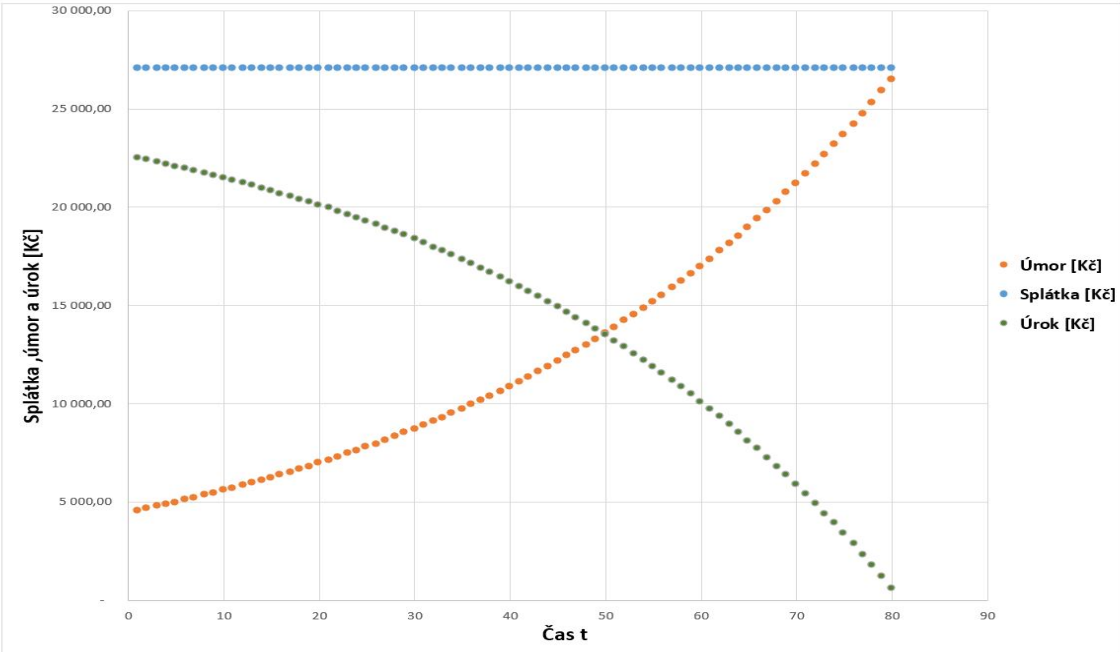
Příklad 3.11. Pro představu máme uživatele kalkulačky, který si chce půjčit 1 000 000 Kč se čtvrtletním splácením. Banka klientovi nabízí nominální úrokovou míru 0,09 p.a a splácení na 20 let. Banka si účtuje poplatek za vyřízení účtu v hodnotě 4 000 Kč, 500 Kč po jednom roce za speciální služby, 100 Kč čtvrtletně za správu účtu a 200 Kč ročně za pojištění schopnosti splácet úvěr. Tyto údaje jsou postupně vyplněny do kalkulačky přiložené na CD na listu „RPSN a splátka“. Možný příklad je vidět na obrázku 3.2. Kalkulačka na základě zadaných parametrů spočte výši splátek bez poplatků v hodnotě 27 063,76 Kč a RPSN 9,46 %. Na dalších listech si může klient prohlédnout celý umořovací plán, graf zbývajícího dluhu zobrazený na obrázku 3.3 a výši úmorů a úroků ve splátce na obrázku 3.4.

ZÁKLADNÍ ÚDAJE				
Výše půjčky	1 000 000	Kč		
počet splátek	80			
roční nominální úroková míra	0,09	p.a.		
frekvence splácení	čtvrteltní			
JEDNORÁZOVÉ POPLATKY				
poplatek za uzavření úvěru	4000	Kč		
poplatek při ukončení úvěru	0	Kč		
poplatek během úvěru	500	Kč	placený v době	4
poplatek během úvěru	0	Kč	placený v době	0
PRAVIDELNÉ POPLATKY				
týdenní	0	Kč		
měsíční	0	Kč		
čtvrteltní	100	Kč		
pololetní	0	Kč		
roční	200	Kč		
splátka bez poplatků	27 063,76	Kč		
RPSN	9,46	%		

Obrázek 3.2: Ukázka zadání vstupních parametrů do úvěrové kalkulačky pro výpočet výše splátek a RPSN z příkladu 3.11.



Obrázek 3.3: Ukázka výstupu úvěrové kalkulačky zobrazující závislost zbylého dluhu na čase pro parametry z příkladu 3.11.



Obrázek 3.4: Ukázka výstupu kalkulačky zobrazující výši splátek (modrá), úmorů (oranžová) a úroků (zelená) v závislosti na čase pro parametry z příkladu 3.11.

Literatura

[1] CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* Praha: HZ, 1995. ISBN 80-901918-0-0. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:833a27b0-d6b5-11e6-8010-005056827e51

[2] ELAYDI, Saber N. *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag GmbH,2005.

[3] FRIESL, Michal, ŠEDIVÁ, Blanka. *Finanční matematika hypertextově.* 2003. Domovské stránky uživatelů [online]. Copyright © [cit. 05.05.2021]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/ friesl/hfim/hFimP.pdf

[4] FULFORD, Glenn, FORRESTER, Peter. *Modelling with Differential and Difference Equations.* Cambridge University Press, 2006.

[5] HOROVÁ, Ivana, ZELINKA, Jiří. *Numerické metody.* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3317-7. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:6a3f4690-7fc7-11e6-8340-5ef3fc9ae8677

[6] KELLEY, Walter, PETERSON, Alan. *Difference equations: an introduction with applications.* Harcourt/Academic Press, San Diego, 2001.

[7] MAREK, Patrice. *Finanční a pojistná matematika* [Přednášky]. Západočeská univerzita v Plzni, 2020.

[8] NOVÝ, Miloš. *Mikroekonomie* [Přednášky]. Západočeská univerzita v Plzni, 2018.

[9] RADOVÁ, Jarmila, DVOŘÁK, Petr, MÁLEK, Jiří. *Finanční matematika pro každého.* Praha: Grada, 2009. s. ISBN 978-80-247-3291-6. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:79c1cdf0-1277-11e4-a8ab-001018b5eb5c

Přílohy

BP_Svrcinova.pdf - elektronická verze bakalářské práce

kalkulačka.xlsx - kalkulačka obsahuje výpočet výše splátek, RPSN, umořovacího plánu a zobrazuje závislost zbylého dluhu, úmorů a úroků na čase