Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Bakalářská práce

Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami

Jiří Kadlec

2017/2018

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami”vypracoval samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Plzni, dne 31.7. 2018

Jiří Kadlec

Poděkování

Děkuji panu Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za ochotu, cenné rady, odborné vedení a velkou trpělivost při konzultacích ohledně této práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na Fučíkovo spektrum dvou okrajových úloh pro diferenciální rovnice druhého řádu. Nejdříve vyšetřujeme úlohu s jednoduchou nelokální podmínkou, ke které přistupujeme vlastním způsobem, a nalezneme část jejího spektra. Dále nalezenou část spektra odhadneme několika množinami, jejichž hranice tvoří algebraické křivky. V závěru tyto kroky provedeme u úlohy ve tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \ \int_0^p u(t)\,dt + \int_q^1 u(t)\,dt = 0, \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p^2 + (q-1)^2 \neq 0$ a $p, q \in [0,1]$, které se týkají hlavní výsledky práce.

Abstract

This Bachelor Thesis is focused on the Fucik spectrum of two boundary value problems for second order differential equations. First, we solve boundary value problem with simple nonlocal condition that we approach to in our own way and we find part of its spectrum. This part of the spectrum is then estimated by several sets whose boundary is formed by algebraic curves. Finally, we do the same for nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \ \int_0^p u(t)\,dt + \int_q^1 u(t)\,dt = 0, \end{cases}$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p^2 + (q-1)^2 \neq 0$ and $p, q \in [0,1]$, which concern main results of this Thesis.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce je studium úlohy

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^p u(t)\, dt + \int_q^1 u(t)\, dt = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

kde $p^2 + (q-1)^2 \neq 0$, $p, q \in [0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ a $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$. Budeme se zabývat množinou

$$\Sigma_{pq} = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \text{úloha (1.1) má netiviální řešení } u\Big\},$$

kterou nazveme Fučíkovým spektrem úlohy (1.1) a sestavíme odhady pro jeho lokalizaci.

V druhé kapitole úlohu (1.1) redukujeme na případ, kde $p = q$. Tímto získáme úlohu s nelokální podmínkou, která již byla zkoumána v článku [3]. My však budeme k tomuto problému přistupovat novým způsobem, určeným pro α, $\beta > 0$ a vycházejícím z vhodné úpravy integrální podmínky. Tímto sice získáme popis Fučíkova spektra pro $p = q$ jen v prvním kvadrantu roviny $\alpha\beta$, ale bude určen pomocí jedné hladiny transcendentní funkce dvou proměnných a proto bude snadno implementovatelný například v programu Mathematica, v němž jsou vytvořené i přiložené kódy. Navíc pak budeme moci získat odhady pro Fučíkovo spektrum právě v prvním kvadrantu.

Ve třetí kapitole využijeme našeho přístupu k popisu spektra z druhé kapitoly a budeme konstruovat odhady pro Fučíkovo spektrum úlohy (1.1) pro $p = q$ a $\alpha, \beta > 0$. Potom vytvoříme množiny takové, že s jistotou budou obsahovat všechny body Fučíkova spektra prvního kvadrantu. Užitek těchto množin je v tom, že jejich hranice je tvořena algebraickými křivkami, které lze snadněji popsat.

Ve čtvrté kapitole se nakonec vrátíme k úloze (1.1). Zde nejdříve využijeme poznatků druhé kapitoly a nalezneme popis spektra pro libovolné $p, q \in [0,1]$ takové, že $p^2 + (q-1)^2 \neq 0$. Po té využijeme poznatků ze třetí kapitoly a nalezneme množiny obsahující všechny body Fučíkova spektra v prvním kvadrantu.

Kapitola 2

Po částech lineární úloha s jednoduchou integrální podmínkou

V této kapitole se budeme zabývat následující okrajovou úlohou

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ \int_0^1 u(t)\, dt = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $u \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ a $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$.

Definice 2.1 : Fučíkovým spektrem úlohy (2.1) s $\alpha, \beta > 0$ nazveme množinu

$$\Sigma = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ \text{úloha (2.1) má netriviální řešení } u\Big\}.$$

2.1 Počáteční úloha

Nadále budeme využívat řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = c, \end{cases} \tag{2.2}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta > 0$. Úloha (2.2) má vždy právě jedno T-periodické řešení u s periodou

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

Toto řešení vypadá na $[0, T]$ pro $c > 0$ následovně

$$u(t) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha} t, & t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}), \\ \frac{c}{\sqrt{\beta}} \sin \sqrt{\beta}(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - t), & t \in [\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, T]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pro $c < 0$ má řešení u tvar

$$u(t) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{\beta}} \sin \sqrt{\beta} t, & t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}), \\ \frac{c}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha}(\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} - t), & t \in [\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, T]. \end{cases}$$

Definice 2.2 : Definujme pro Σ její podmnožiny

$$\Sigma^+ = \{(\alpha,\beta) \in \Sigma;\ \text{úloha (2.1) má netriviální řešení } u,\ u'(0) > 0\},$$
$$\Sigma^- = \{(\alpha,\beta) \in \Sigma;\ \text{úloha (2.1) má netriviální řešení } u,\ u'(0) < 0\}.$$

Poznámka. Pro podmínku $u'(0) = 0$ dostáváme $u \equiv 0$ jako triviální řešení úlohy (2.1). Proto množinu Σ získáme jako sjednocení množin Σ^+ a Σ^-.

Lemma 2.1 : Dvojice $(\alpha,\beta) \in \Sigma^+$ právě tehdy, když dvojice $(\beta,\alpha) \in \Sigma^-$.

Důkaz. Nechť nejdříve dvojice $(\alpha,\beta) \in \Sigma^+$. Dle definice (2.2) pro dvojici (α,β) existuje nenulová funkce u jako řešení úlohy (2.1) a to taková, že $u'(0) > 0$. Dále tedy platí rovnost

$$u'' + \alpha u^+ - \beta u^- = 0. \tag{2.4}$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti (2.4) číslem (-1), dostáváme

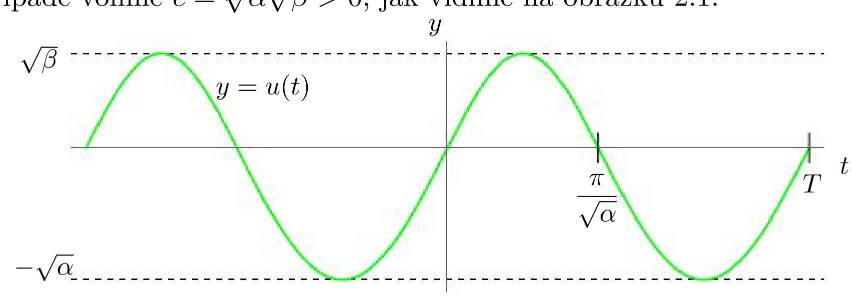
$$-u'' - \alpha u^+ + \beta u^- = 0. \tag{2.5}$$

Všimněme si, že vzhledem k vlastnostem funkcí u^+ a u^- z úlohy (2.1) je zřejmě $u^+ = (-u)^-$ a $u^- = (-u)^+$. Tím pádem z (2.5) obdržíme

$$(-u)'' + \beta(-u)^+ - \alpha(-u)^- = 0.$$

Navíc funkce u splňuje okrajové podmínky úlohy (2.1) právě tehdy, když funkce $-u$ je splňuje také. Pro dvojici (β,α) je tedy funkce $-u$ netriviálním řešením úlohy (2.1) a $(\beta,\alpha) \in \Sigma^-$. Nechť nyní dvojice $(\beta,\alpha) \in \Sigma^-$. Všimněme si, že stačí postupovat opačným směrem, neboť veškeré úpravy v důkazu byly ekvivalentní. $\square$

Řešení počáteční úlohy (2.2) využijeme k vytvoření ekvivalentní úlohy k úloze (2.1). Díky lemmatu 2.1 nám nadále stačí pracovat s řešením pro kladné c. Zbytek spektra pak získáme díky jeho symetrii dle diagonály prvního kvadrantu. Navíc, jelikož je rovnice v počáteční úloze (2.2) pro $c > 0$ lineární, je jejím řešením i libovolný k-násobek, $k \in \mathbb{R}$, funkce u. Proto si za c můžeme zvolit hodnotu, která nám bude nejvíce vyhovovat, aniž by jsme přišli o další řešení. V tomto případě volíme $c = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} > 0$, jak vidíme na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Graf řešení (2.3) počáteční úlohy (2.2) na intervalu $[0,T]$ pro $\alpha = 49$, $\beta = 25$ a $c = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$.

Pro snadnější práci budeme nadále značit $a = \sqrt{\alpha}$ a $b = \sqrt{\beta}$. Mějme tedy počáteční úlohu

$$\begin{cases} u''(t) + a^2u^+(t) - b^2u^-(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = ab, \end{cases} \tag{2.6}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ s řešením

$$u(t) = \begin{cases} b \sin at, & t \in [0, \frac{\pi}{a}), \\ a \sin b(\frac{\pi}{a} - t), & t \in [\frac{\pi}{a}, T]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Okrajovou úlohu (2.1) s novým značením a,b máme ve tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + a^2 u^+(t) - b^2 u^-(t) = 0, \ t \in [0,1] \\ u(0) = 0, \\ \int_0^1 u(t)\, dt = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $u \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ a $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$.

Definice 2.3 : Definujme množinu

$$\mathcal{M} := \Big\{ (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \text{ úloha (2.8) má netriviální řešení } u \\ \text{s derivací v nule } u'(0) = ab > 0 \Big\}.$$

Poznamenejme, že patří-li dvojice (a,b) do množiny $\mathcal{M}$, pak dvojice $(a^2, b^2) \in \Sigma$. A naopak patří-li dvojice (α, β) do množiny Σ, pak dvojice $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) \in \mathcal{M}$ nebo $(\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha}) \in \mathcal{M}$.

2.2 Množina $\mathcal{M}$

Definice 2.4 : Definujme si funkci

$$F(t) := \int_0^t u(x)\, dx, \ t \in \mathbb{R},$$

kde u je řešením počáteční úlohy (2.6).

Integrální okrajovou podmínku v úloze (2.8) si nyní pomocí funkce F zapíšeme následovně

$$F(1) = 0. \tag{2.9}$$

Pomocí přímé integrace s využitím (2.7) zjistíme, že funkce F má na intervalu $[0, T]$ následující tvar:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cos(at), & t \in [0, \frac{\pi}{a}), \\ -\frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} \cos(b(\frac{\pi}{a} - t)), & t \in [\frac{\pi}{a}, T]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Lemma 2.2 : Nechť $a > 0$ a $b > 0$. Pak pro funkci F platí

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ F(t+T) = F(t) + F(T), \tag{2.11}$$

kde

$$F(T) = \frac{2(b^2 - a^2)}{ab}.$$

Speciálně pro $a = b$ je funkce F T-periodická.

Důkaz. Pro levou stranu rovnice v (2.11) platí:

$$\begin{aligned} F(t+T) &= \int_0^{t+T} u(x)\,dx \\ &= \int_0^T u(x)\,dx + \int_T^{t+T} u(x)\,dx. \end{aligned}$$

V určitém integrálu

$$\int_T^{t+T} u(x)\,dx$$

použijeme substituci $p = x - T$ po které dostáváme

$$F(t+T) = \int_0^T u(x)\,dx + \int_0^t u(p+T)\,dp = \int_0^T u(x)\,dx + \int_0^t u(p)\,dp = F(T) + F(t), \quad (2.12)$$

čímž je dokázáno (2.11). Z vyjádření funkce F ve (2.10) dostáváme

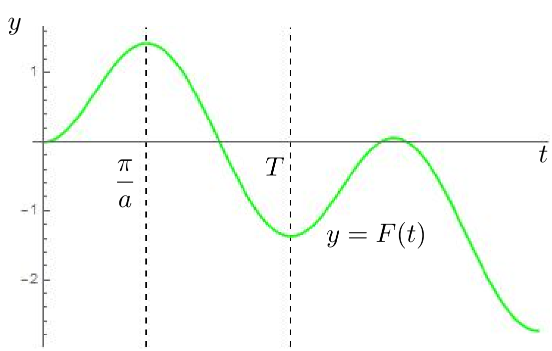
$$\begin{aligned} F(T) &= -\tfrac{a}{b} + \tfrac{2b}{a} + \tfrac{a}{b}\cos\left(b(\tfrac{\pi}{a} - T)\right) \\ &= -\tfrac{a}{b} + \tfrac{2b}{a} + \tfrac{a}{b}\cos\left(b(\tfrac{\pi}{a} - \tfrac{\pi}{a} - \tfrac{\pi}{b})\right) \\ &= -\tfrac{a}{b} + \tfrac{2b}{a} + \tfrac{a}{b}\cos\left(-\pi\right) \\ &= -\tfrac{2a}{b} + \tfrac{2b}{a} = \tfrac{2(b^2-a^2)}{ab}. \end{aligned}$$

Tedy pro $a = b$ je

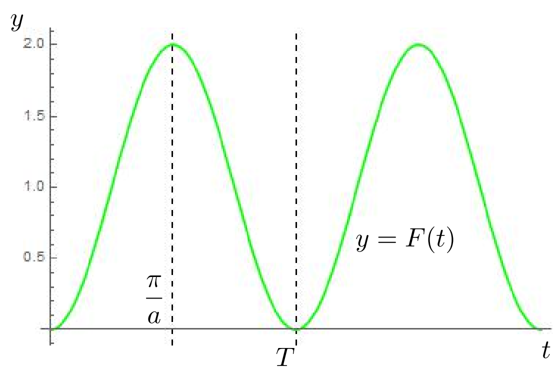
$$F(T) = \frac{2(b^2 - a^2)}{ab} = 0 \quad (2.13)$$

a z (2.11) a (2.13) tedy plyne, že F je T-periodická funkce. $\square$

Na obrázcích 2.2 a 2.3 jsou znázorněny grafy neperiodické funkce F pro $a > b$ a periodické funkce F pro $a = b$.



Obrázek 2.2: Graf funkce F na intervalu $[0, 2T]$ pro pro $a = 7$ a $b = 5$.



Obrázek 2.3: Graf funkce F na intervalu $[0, 2T]$ pro $a = b = 5$.

Definice 2.5 : Definujme funkci $\hat{F}$ a konstantu $\bar{u}$ následovně

$$\hat{F}(x) := \int_0^x (u(t) - \bar{u})\,dt, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\bar{u} := \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt,$$

kde funkce u je řešením počáteční úlohy (2.6) a $T = \dfrac{\pi}{a} + \dfrac{\pi}{b}$.

Poznamenejme, že $\bar{u}$ je střední hodnota funkce u na intervalu $[0, T]$ a s využitím vyjádření $F(T)$ z lemmatu (2.2) platí

$$\bar{u} = \frac{F(T)}{T} = \frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right) = \frac{2}{T}\left(-\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right). \tag{2.14}$$

Všimněme si, že

$$\hat{F}(1) = \int_0^1 (u(t) - \bar{u})\,dt = \int_0^1 u(t)\,dt - \int_0^1 \bar{u}\,dt = F(1) - \bar{u}.$$

Podmínka (2.9) je tedy splněna právě tehdy, když

$$\hat{F}(1) = -\bar{u}.$$

Zformulujme si nyní ekvivalentní úlohu k úloze (2.8), kde navíc $u'(0) = ab$:

$$\hat{F}(1) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right), \tag{2.15}$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

Lemma 2.3 : Funkce $\hat{F}$ je T-periodická, kde $T = \dfrac{\pi}{a} + \dfrac{\pi}{b}$ a $a, b > 0$.

Důkaz. Ukážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \hat{F}(x + T) = \hat{F}(x). \tag{2.16}$$

Pro pravou stranu rovnice v (2.16) platí:

$$\hat{F}(x) = \int_0^x (u(t) - \bar{u})\,dt = F(x) - \bar{u}x.$$

A pro levou stranu rovnice v (2.16) platí:

$$\hat{F}(x + T) = \int_0^{x+T} (u(t) - \bar{u})\,dt = F(x + T) - \bar{u}(x + T).$$

Z lemmatu 2.2 a z vyjádření $\bar{u}$ v (2.14) dostáváme

$$\begin{aligned} F(x + T) - \bar{u}(x + T) \quad &= F(x) + F(T) - \bar{u}x - F(T) \\ &= F(x) - \bar{u}x. \end{aligned}$$

Tedy vztah (2.16) platí. □

Dle lemmatu 2.3 je funkce $\hat{F}$ již T-periodická pro libovolné a, $b > 0$. Rozepíšeme-li si ji pro $t \in [0, T]$, tak dostáváme

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)t + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\cos(at), & t \in [0, \frac{\pi}{a}), \\ -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)t - \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b}\cos(b(\frac{\pi}{a} - t)), & t \in [\frac{\pi}{a}, T], \end{cases}$$

kde jsme užili vyjádření (2.10) pro funkci F a vztahu (2.14). Základní perioda funkce $\hat{F}$ závisí na a a b, jelikož $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$. Nyní vytvoříme funkci $\tilde{F}$ takovou, že platí

$$\tilde{F}(x) = \hat{F}(\frac{Tt}{2\pi}).$$

Účel této funkce je sjednocení frekvencí funkce $\hat{F}$ pro všechna $a > 0$ a $b > 0$. Jako základní délku periody volíme 2π a docílíme jí následující substitucí ve funkci $\hat{F}$:

$$x = \frac{2ab}{a+b}t. \tag{2.17}$$

Vyjádření funkce $\tilde{F}$ vypadá na intervalu $[0, 2\pi]$ následovně

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)\frac{a+b}{2ab}x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\cos\left(\frac{a+b}{2b}x\right), & x \in [0, \frac{2b\pi}{a+b}), \\ -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)\frac{a+b}{2ab}x - \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b}\cos\left(\frac{\pi b}{a} - \frac{a+b}{2a}x\right), & x \in [\frac{2b\pi}{a+b}, 2\pi]. \end{cases}$$

Po substituci (2.17) se a a b ve vyjádření funkce $\hat{F}$ vyskytují pouze v podílech. Pro další zjednodušení si tedy zavedeme novou proměnnou k následujícím způsobem:

$$k = \frac{b}{a}. \tag{2.18}$$

Dostáváme funkci, kterou si označíme jako S, kde $k > 0$:

$$S(k, x) = \begin{cases} \frac{2}{T}\left(\frac{1}{k} - k\right)\frac{T}{2\pi}x + k - k\cos\left(\frac{k+1}{2k}x\right), & x \in [0, \frac{2k\pi}{1+k}), \\ \frac{2}{T}\left(\frac{1}{k} - k\right)\frac{T}{2\pi}x - \frac{1}{k} + 2k + \frac{1}{k}\cos\left(k\pi - \frac{1+k}{2}x\right), & x \in [\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi]. \end{cases}$$

A po úpravě dostáváme 2π-periodickou funkci v druhé proměnné a pro $k > 0$

$$S(k, x) = \begin{cases} \frac{1-k^2}{k\pi}x + k - k\cos\left(\frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [0, \frac{2k\pi}{1+k}) \\ \frac{1-k^2}{k\pi}x - \frac{1}{k} + 2k + \frac{1}{k}\cos\left(k\pi - \frac{1+k}{2}x\right), & x \in [\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Definice 2.6 : Definujme funkci

$$P(k, x) := \frac{1-k^2}{k\pi}x, \ k > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

a funkci S, která je 2π-periodická v druhé proměnné pro $k > 0$ a $x \in \mathbb{R}$. Pro $x \in [0, 2\pi]$ vypadá následovně

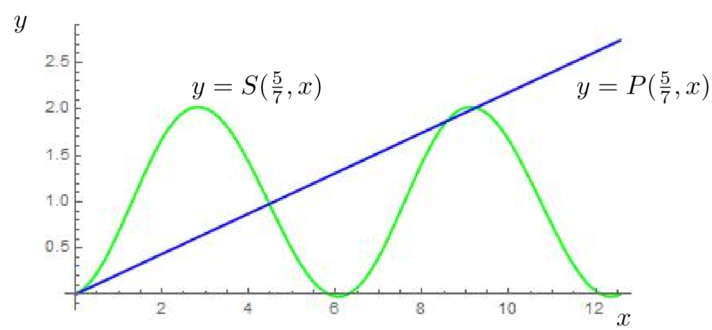
$$S(k, x) := \begin{cases} P(k, x) + k - k\cos\left(\frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [0, \frac{2k\pi}{1+k}) \\ P(k, x) - \frac{1}{k} + 2k + \frac{1}{k}\cos\left(k\pi - \frac{1+k}{2}x\right), & x \in [\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi], \end{cases} \tag{2.21}$$

Grafy funkcí S a P můžeme vidět na obrázku 2.4.

Lemma 2.4 : Mějme $a > 0$, $b > 0$ a $\hat{x} \in [0, 1]$. Pak platí

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\hat{x}\right) = \hat{F}(\hat{x}). \tag{2.22}$$

Důkaz. Označme si nejprve
$$\tilde{x} = \frac{2ab}{a+b}\hat{x}$$
a pro $\tilde{x}$ platí
$$\tilde{x} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}\hat{x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}}\hat{x} = \frac{2\pi}{T}\hat{x}.$$
Dále po dosazení v substituci (2.17) $\tilde{x}$ za x dostáváme:
$$\tilde{t} = \frac{T}{2\pi}\tilde{x} = \frac{T}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\hat{x} = \hat{x}. \tag{2.23}$$
Všimněme si, že ve formulaci rovnosti (2.22) provádíme transformaci proměnných k a x funkce S na a,b a t funkce $\hat{F}$ dle použitých substitucí (2.18) a (2.17) a navíc dle rovnosti (2.23) dostáváme pro $S(\frac{b}{a},\tilde{x})$ funkci $\hat{F}$ v bodě $\tilde{t} = \hat{x}$ a tedy platí
$$S\left(\frac{b}{a},\frac{2ab}{a+b}\hat{x}\right) = \hat{F}(\hat{x}).$$
□



Obrázek 2.4: Graf funkce S a funkce P pro $x \in [0,4\pi]$ a $k = 5/7$.

Lemma 2.5 : Mějme $a > 0$, $b > 0$ a $\hat{x} \in [0,1]$. Pak platí
$$P\left(\frac{b}{a},\frac{2ab}{a+b}\hat{x}\right) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\hat{x}.$$
Důkaz. Z důkazu lemmatu 2.4 již víme, že
$$\frac{2ab}{a+b}\hat{x} = \frac{2\pi}{T}\hat{x}.$$
Dále tedy platí
$$P\left(\frac{b}{a},\frac{2ab}{a+b}\hat{x}\right) = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{b}{a}\pi}\frac{2\pi}{T}\hat{x} = \left(\frac{a}{b\pi}-\frac{b}{a\pi}\right)\frac{2\pi}{T}\hat{x} = \frac{1}{T}\left(\frac{2a}{b}-\frac{2b}{a}\right)\frac{T}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\hat{x},$$
z čehož již dostáváme
$$P\left(\frac{b}{a},\frac{2ab}{a+b}\hat{x}\right) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\hat{x}.$$
□

Věta 2.1 : Mějme $a > 0$ a $b > 0$. Dvojice (a, b) patří do množiny $\mathcal{M}$ právě tehdy, když platí

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right), \tag{2.24}$$

kde funkce S je definovaná v (2.21) a funkce P je definovaná v (2.20).

Důkaz. Ukážeme, že rovnost (2.24) je ekvivalentní s rovností v úloze (2.15). Zde můžeme použít lemmata 2.4 a 2.5 pro $\hat{x} = 1$. Nejdříve tedy dle lemmatu 2.4 platí rovnost

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = \hat{F}(1).$$

Dále dle lemmatu 2.5 platí rovnost

$$P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right).$$

Z čehož nakonec dostáváme, že rovnost

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right)$$

platí právě tehdy, když je splněno

$$\hat{F}(1) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right).$$

$\square$

Věta (2.1) nám tedy dává způsob jak získat množinu $\mathcal{M}$, kterou můžeme vidět na obrázku 2.5. Poznamenejme, že pro funkci P platí

$$P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right) = \frac{ab}{a\pi + b\pi}\frac{2a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{2(a-b)}{\pi}.$$

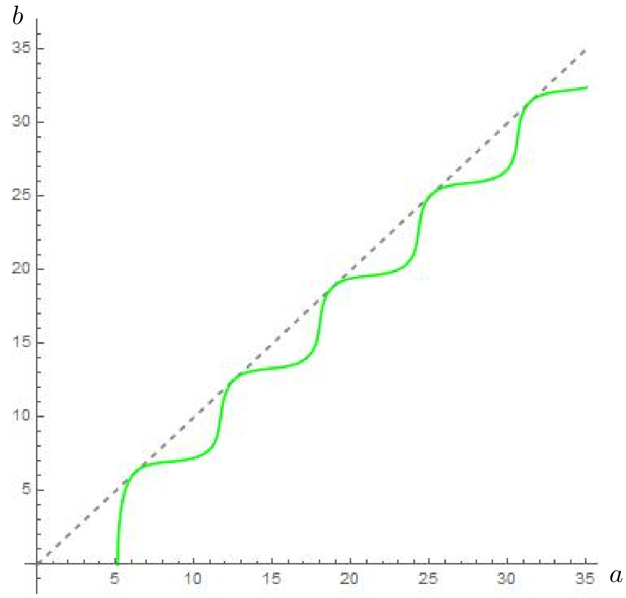
Množina $\mathcal{M}$ je tedy pro funkci dvou proměnných takovou, že

$$(a, b) \mapsto S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) - \frac{2(a-b)}{\pi},$$

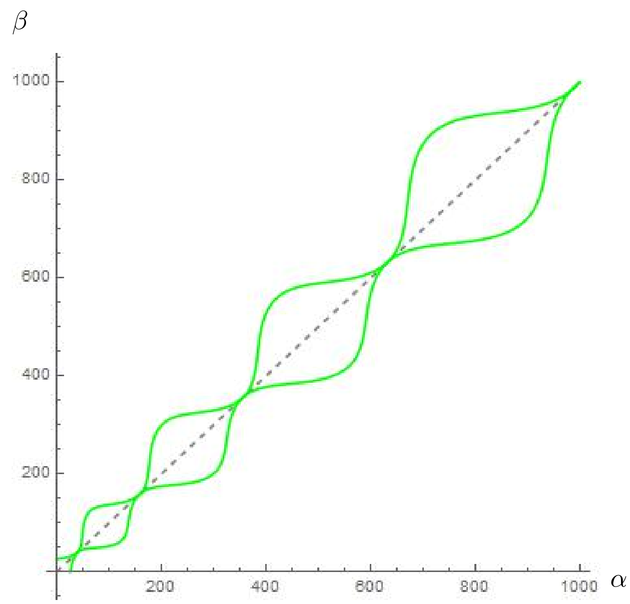
kde S je 2π-periodická funkce z definice 2.6, nulovou hladinou.

2.3 Fučíkovo spektrum

Získat množinu Fučíkova spektra je teď již snadné. Množina $\mathcal{M}$, kterou jsme získali tedy řeší úlohu (2.15), která je ekvivalentní s okrajovou úlohou (2.8), kde tedy pro dvojici $(a, b) \in \mathcal{M}$ existuje netriviální řešení u takové, že $u'(0) = 0$. Připomeňme, že mezi a, b a α, β byly vztahy $a = \sqrt{\alpha}$ a $b = \sqrt{\beta}$. Přejdeme-li tedy zpět k α, β, získáme dvojici $(a^2, b^2) = (\alpha, \beta) \in \Sigma^+$ neboť řešení u pro tuto dvojici v úloze (2.1) má v bodě nula derivaci nulovou. Díky lemmatu 2.1 získáme druhou část spektra záměnou β za α, neboť pro $(\alpha, \beta) \in \Sigma^+$ je $(\beta, \alpha) \in \Sigma^-$ a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- = \Sigma$.



Obrázek 2.5: Množina $\mathcal{M}$.



Obrázek 2.6: Fučíkovo spektrum Σ v prvním kvadrantu roviny α, β okrajové úlohy (2.1).

Kapitola 3

Fučíkovo spektrum v obležení algebraických křivek

V předchozí kapitole jsme našli Fučíkovo spektrum pro a, $b > 0$, popsané nultou hladinou transcendentní funkce dvou proměnných. Nyní budeme hledat množinu ohraničenou algebraickými křivkami a ležící v prvním kvadrantu roviny ab takovou, že je $\mathcal{M}$ její podmnožinou. Hranice takové množiny získáme pomocí po částech polynomiální funkcí $S^{\mathtt{H}}(k,x)$ a $S^{\mathtt{D}}(k,x)$ s periodou délky 2π v druhé proměnné takových, že platí

$$\forall (k,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} : S^{\mathtt{D}}(k,x) \leq S(k,x) \leq S^{\mathtt{H}}(k,x). \tag{3.1}$$

Jelikož budou všechny funkce, se kterými budeme pracovat, 2π-periodické v druhé proměnné, stačí se při konstrukci hledaných funkcí omezit na interval, kde $x \in [0, 2\pi]$ a $k > 0$.

Definice 3.1 : Nechť $S^{\mathtt{D}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $S^{\mathtt{H}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce takové, že splňují podmínku (3.1). Označme Ω následující množinu:

$$\Omega := \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ S^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq S^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \right\}.$$

Věta 3.1 : Pro množinu $\mathcal{M}$ platí:

$$\mathcal{M} \subset \Omega.$$

Důkaz. Mějme dvojici $(a,b) \in \mathcal{M}$. Pak dle věty 2.1 platí:

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) = P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right). \tag{3.2}$$

Vzhledem k vlastnostem funkcí $S^{\mathtt{D}}$ a $S^{\mathtt{H}}$ navíc platí

$$S^{\mathtt{D}}(k,x) \leq S(k,x) \leq S^{\mathtt{H}}(k,x) \tag{3.3}$$

pro libovolné $(k,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Pak z (3.2) a (3.3) plyne nerovnost

$$S^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq S^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right).$$

A tedy dle definice 3.1 též $(a,b) \in \Omega$. $\square$

Poznámka. Hranice množiny Ω tvoří osy a, b a nulové hladiny funkcí

$$
\begin{aligned}
(a,b) &\mapsto S^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) - \frac{2(a-b)}{\pi},\\
(a,b) &\mapsto S^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) - \frac{2(a-b)}{\pi}.
\end{aligned}
$$

V důkazu věty (3.1) vidíme, že nám tedy pro vytvoření odhadu spektra stačí, když nalezneme funkce $S^{\mathtt{H}}$ a $S^{\mathtt{D}}$ tak, že platí podmínka (3.1). Začneme nejdříve s množinami s jednoduchou hranicí.

Definice 3.2 : Označme Ω_0 následující množinu:

$$
\Omega_0 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ S_0^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}\right) \le P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \le S_0^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}\right)\right\},
$$

kde

$$
S_0^{\mathtt{D}}(k) = \begin{cases} k - k\cos\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{k\pi}\right) + \frac{2(1-k)\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k}}{\pi}, & 1 \le k,\\ \frac{2(1-k)\left(\pi + k\pi + \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{\pi k} + 2k - \frac{1}{k} + \frac{\cos\left(-\pi + \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{k}, & 0 < k \le 1, \end{cases}
$$

$$
S_0^{\mathtt{H}}(k) = \begin{cases} k + \frac{2(1-k)\left(k\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k} - \pi k\right)}{-\pi k} - k\cos\left(\pi - \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k}\right), & 1 \le k,\\ \frac{(1-k)\left(2\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi} - 2\pi k\right)}{-\pi k} + 2k - \frac{1}{k} + \frac{\cos\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{k}, & 0 < k \le 1. \end{cases}
$$

Lemma 3.1 : Pro každé $k > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$
S(k,x) = S\left(\frac{1}{k}, -x\right).
$$

Důkaz. Budeme vycházet z tvaru funkcí S a P v definici 2.6. Nejprve proveďme úpravu v první proměnné

$$
S\left(\frac{1}{k}, x\right) = \begin{cases} -\frac{1-k^2}{k\pi}x + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\cos\left(\frac{1+k}{2}x\right), & x \in [0, \frac{2\pi}{1+k}),\\ -\frac{1-k^2}{k\pi}x - k + \frac{2}{k} + k\cos\left(\frac{\pi}{k} - \frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [\frac{2\pi}{1+k}, 2\pi]. \end{cases}
$$

Dále poupravíme interval na kterém se pohybujeme

$$
\begin{aligned}
S\left(\frac{1}{k}, x\right) &= \begin{cases} -\frac{1-k^2}{k\pi}(x+2\pi) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\cos\left(\frac{1+k}{2}(x+2\pi)\right), & x \in [-2\pi, -2\pi + \frac{2\pi}{1+k}),\\ -\frac{1-k^2}{k\pi}(x+2\pi) - k + \frac{2}{k} + k\cos\left(\frac{\pi}{k} - \frac{1+k}{2k}(x+2\pi)\right), & x \in [-2\pi + \frac{2\pi}{1+k}, 0], \end{cases}\\
&= \begin{cases} -\frac{1-k^2}{k\pi}x - \frac{1-k^2}{k\pi}2\pi + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\cos\left(\frac{1+k}{2}x + \pi + k\pi\right), & x \in [-2\pi, \frac{-2\pi - 2k\pi + 2\pi}{1+k}),\\ -\frac{1-k^2}{k\pi}x - \frac{2}{k} + 2k - k + \frac{2}{k} + k\cos\left(\frac{\pi}{k} - \frac{1+k}{2k}x - \pi - \frac{\pi}{k}\right), & x \in [\frac{-2\pi - 2k\pi + 2\pi}{1+k}), 0], \end{cases}\\
&= \begin{cases} -\frac{1-k^2}{k\pi}x - \frac{1}{k} + 2k + \frac{1}{k}\cos\left(\frac{1+k}{2}x + k\pi\right), & x \in [-2\pi, -\frac{2k\pi}{1+k}),\\ -\frac{1-k^2}{k\pi}x + k - k\cos\left(-\frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [-\frac{2k\pi}{1+k}, 0]. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nakonec po dosazení $-x$ za x dostáváme

$$
S\left(\frac{1}{k}, -x\right) = \begin{cases} \frac{1-k^2}{k\pi}x - \frac{1}{k} + 2k + \frac{1}{k}\cos\left(k\pi - \frac{1+k}{2}x\right), & x \in (\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi],\\ \frac{1-k^2}{k\pi}x + k - k\cos\left(\frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [0, \frac{2k\pi}{1+k}]. \end{cases}
$$

$\square$

Lemma 3.2 : Pro množinu $\mathcal{M}$ platí:

$$\mathcal{M} \subset \Omega_0.$$

Důkaz. Naši funkci S nejdříve pro jednotlivá k odhadneme konstantní funkcí, a to jejím maximem a minimem. Hledáme tedy stacionární body funkce S, kde si k zafixujeme a $x \in [0, 2\pi]$. Mějme tedy funkci jedné proměnné $S_k(x) : x \mapsto S(k, x)$. Funkce $S_k(x)$ je periodická a spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy je omezená a existuje pro ni maximum i minimum v bodech, pro které platí

$$S_k'(x) = 0,$$

kde

$$S_k'(x) = \begin{cases} \frac{1-k^2}{k\pi} - \frac{1+k}{2} \sin\left(\frac{1+k}{2k}x\right), & x \in [0, \frac{2k\pi}{1+k}), \\ \frac{1-k^2}{k\pi} + \frac{1+k}{2k} \sin\left(k\pi - \frac{1+k}{2}x\right)), & x \in [\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi]. \end{cases} \tag{3.4}$$

Funkce (3.4) má vždy právě dva nulové body a to různé pro $1 \leq k$ a pro $0 < k \leq 1$. Díky lemmatu 3.1 nám stačí nalézt maximum a minimum třeba jen pro $0 < k \leq 1$ neboť platí, že maximum funkce $S(k, x)$ je rovno maximu funkce $S(\frac{1}{k}, -x)$ a jelikož je S periodická, tak má i $S(\frac{1}{k}, x)$ maximum stejné. Tedy maximum funkce $S_k(x)$ pro $1 \leq k$ získáme nahrazením $\frac{1}{k}$ za k v maximu pro $0 < k \leq 1$. To samé platí pro minimum. Pro $0 < k \leq 1$ tedy funkce $S_k(x)$ nabývá minima na intervalu $[\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi]$ v bodě

$$x_1 = \frac{2 \arcsin \frac{2(k-1)}{\pi} + 2\pi k + 2\pi}{k+1}$$

a maxima na intervalu $[\frac{2k\pi}{1+k}, 2\pi]$ v bodě

$$x_2 = \frac{-2 \arcsin \frac{2(k-1)}{\pi} + 2\pi k}{k+1}.$$

A předpisy pro naše odhady tedy vypadají pro $x \in [0, 2\pi]$ následovně pro dolní odhad

$$S_0^{\mathtt{D}}(k) = \begin{cases} \frac{2(1-k)\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k}}{\pi} + k - k\cos\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{k\pi}\right), & 1 \leq k, \\ \frac{2(1-k)\left(\pi + k\pi + \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{\pi k} - \frac{1}{k} + 2k + \frac{\cos\left(-\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi} - \pi\right)}{k}, & 0 < k \leq 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

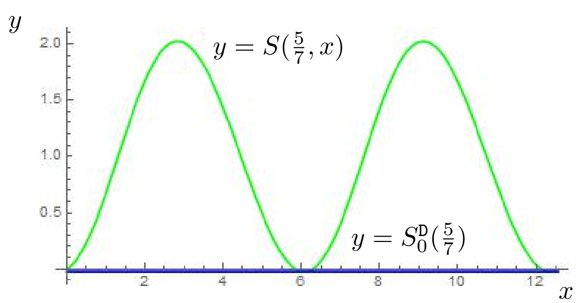
a pro horní odhad

$$S_0^{\mathtt{H}}(k) = \begin{cases} \frac{2(1-k)\left(k\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k} - \pi k\right)}{-\pi k} + k - k\cos\left(\pi - \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi k}\right), & 1 \leq k, \\ \frac{2(1-k)\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi} - \pi k\right)}{-\pi k} - \frac{1}{k} + 2k + \frac{\cos\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{k}, & 0 < k \leq 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

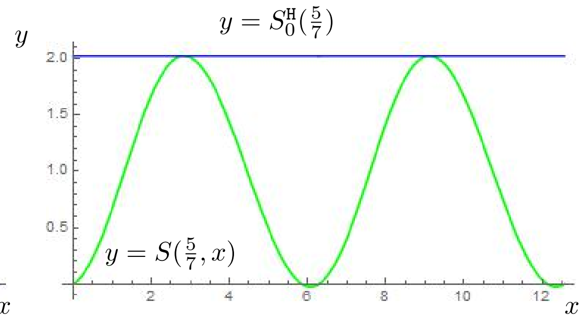
□

Poznámka. Předpis funkce (3.4) též popisuje řešení počáteční úlohy (2.2) na intervalu $[0, T]$, posunuté o konstantu (2.14).

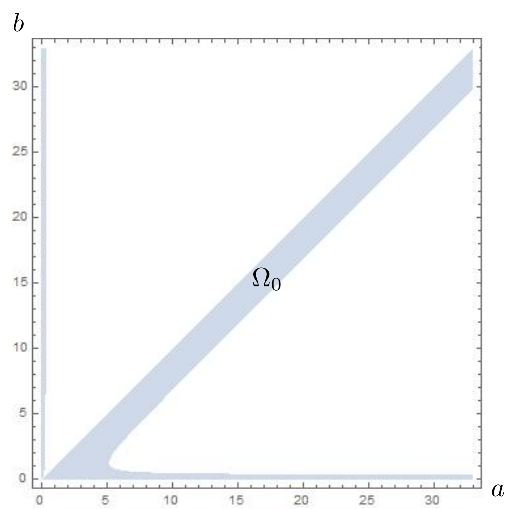
Na obrázcích 3.1 a 3.2 můžeme vidět funkci S a její dolní odhad $S_0^{\mathtt{D}}$ a horní odhad $S_0^{\mathtt{H}}$. Na obrázku 3.3 lze po té vidět množina Ω_0



Obrázek 3.1: Graf funkce S a $S_0^{\mathtt{D}}$ na intervalu $[0, 4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.2: Graf funkce S a $S_0^{\mathtt{H}}$ na intervalu $[0, 4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.3: Množina Ω_0.

Pomocí těchto odhadů ale nelze vytvořit algebraickou křivku, kterou hledáme, neboť obsahují goniometrické funkce. To napravíme v následujícím lemmatu za cenu zvětšení množiny Ω_0.

Definice 3.3 : Označme Ω_1 následující množinu:

$$\Omega_1 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ S_1^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}\right) \leq P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq S_1^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}\right) \right\},$$

kde

$$S_1^{\mathtt{D}}(k) = \begin{cases} 1-k, & 1 \leq k, \\ 1-\frac{1}{k}, & 0 < k \leq 1, \end{cases}$$

$$S_1^{\mathtt{H}}(k) = \begin{cases} 1+k, & 1 \leq k, \\ 1+\frac{1}{k}, & 0 < k \leq 1. \end{cases}$$

Lemma 3.3 : Pro množinu $\mathcal{M}$ platí:

$$\mathcal{M} \subset \Omega_1.$$

Důkaz. Zde navážeme na důkaz lemmatu (3.2). Naše odhady tedy upravíme tak, že goniometrické funkce vhodně nahradíme jejich maximem, popřípadě minimem, tak, aby byla pro obě funkce splněna podmínka (3.1).

U funkce $S_0^{\mathtt{D}}$ jednotlivé členy případně zmenšíme. Pro $0 < k \leq 1$ dostáváme pro první člen funkce $S_0^{\mathtt{D}}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{2(1-k)(\pi+k\pi)}{\pi k} + \tfrac{2(1-k)\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}}{\pi k} &\geq \tfrac{2(1-k)(\pi+k\pi)}{\pi k} + \tfrac{2(1-k)\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi k} \\
&\geq \tfrac{2(1-k)\left(\frac{1}{2}+k\right)}{k} \\
&\geq \tfrac{1}{k} + 2 - 1 - 2k \\
&\geq \tfrac{1}{k} + 1 - 2k
\end{aligned}$$

a nakonec pro její čtvrtý člen

$$\frac{\cos\left(-\pi + \arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{k} \geq -\frac{1}{k}.$$

U funkce $S_0^{\mathtt{H}}$ postupujeme analogicky s tím že jednotlivé členy případně zvětšíme. Pro $0 < k \leq 1$ tedy dostáváme pro první člen funkce $S_0^{\mathtt{H}}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1-k)2\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}}{-\pi k} - \tfrac{(1-k)2\pi k}{-\pi k} &\leq 2\tfrac{(1-k)\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi k} + 2(1-k) \\
&\leq \tfrac{1}{k} + 1 - 2k
\end{aligned}$$

a nakonec pro její čtvrtý člen

$$\frac{\cos\left(\arcsin\frac{2(k-1)}{\pi}\right)}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Zde opět můžeme využít lemma 3.1, díky kterému získáme minimum či maximum pro $1 \leq k$ jen tím, že ve funkci pro $0 < k \leq 1$ jen nahradíme k za $\frac{1}{k}$. V závěru tedy dostáváme pro $x \in [0, 2\pi]$

$$S_1^{\mathtt{D}}(k) = \begin{cases} 1-k, & 1 \leq k, \\ 1-\frac{1}{k}, & 0 < k \leq 1, \end{cases}$$

$$S_1^{\mathtt{H}}(k) = \begin{cases} 1+k, & 1 \leq k, \\ 1+\frac{1}{k}, & 0 < k \leq 1. \end{cases}$$

□

Na obrázcích 3.4 a 3.5 lze vidět funkci S, její dolní odhad $S_1^{\mathtt{D}}$ a horní odhad $S_1^{\mathtt{H}}$. Na obrázku 3.6 je pak nalezená množina Ω_1.

Nyní zkusme nalézt množinu s hranicí danou po částech.

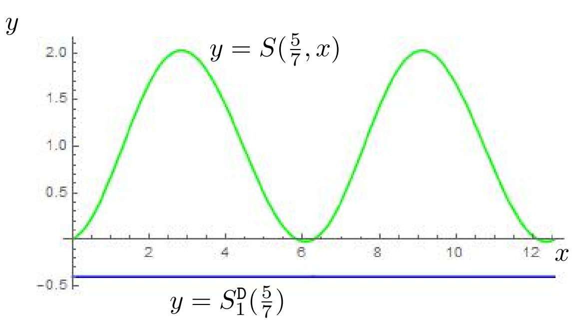
Definice 3.4 : Označme Ω_2 následující množinu

$$\Omega_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ S_2^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) \leq S_2^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right)\right\},$$

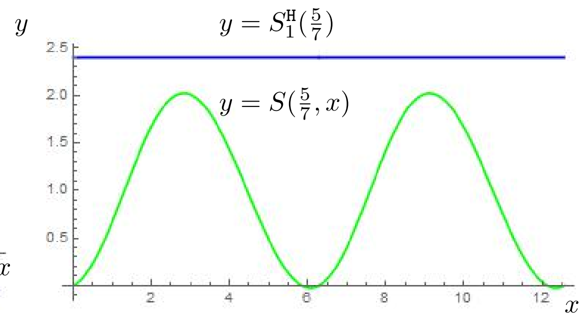
kde

$$S_2^D(k,x) = \begin{cases} -\frac{\pi(\pi-2k^2)}{24k}x + \frac{(1+k)^2}{8k}x^2 - \frac{(1+k)^3}{24k^2\pi}x^3, \\ \frac{k\pi^2(2-(3+2k)\pi)}{12} \quad + \frac{2\pi^2+12k\pi^2+12k^3\pi^3+k^2(4\pi-24\pi^2)}{48k}x- \\ \qquad -\frac{3\pi+12k\pi+15k^2\pi+6k^3\pi}{48k}x^2 + \frac{(1+k)^3}{48k}x^3, \end{cases}$$

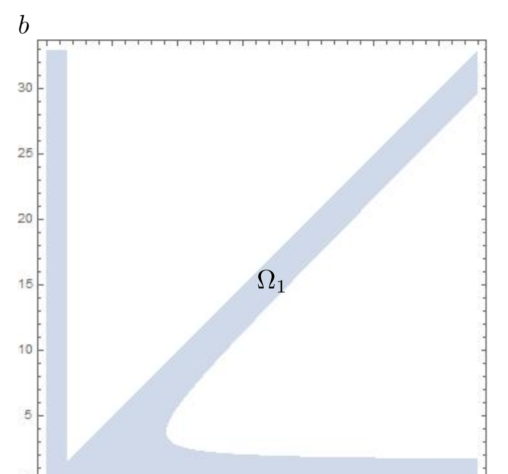
$$S_2^H(k,x) = \begin{cases} \frac{2\pi-k^2\pi^2}{24k}x + \frac{(1+k)^2\pi}{16k}x^2 - \frac{(1+k)^3}{48k^2}x^3, \\ \frac{k\pi^2(\pi-6-4k)}{12} \quad -\frac{\pi(2+k(12(1+k)^2-k\pi))}{24k}x- \\ \qquad -\frac{(1+k)^2(1+2k)}{8k}x^2 + \frac{(1+k)^3}{24k\pi}x^3. \end{cases}$$



Obrázek 3.4: Graf funkce S a $S_1^{\mathtt{D}}$ na intervalu $[0, 4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.5: Graf funkce S a $S_1^{\mathtt{H}}$ na intervalu $[0, 4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.6: Množina Ω_1.

Definice 3.5 : Nechť $a, b > 0$. Definujme T-periodické funkce $u^{\mathtt{D}}, u^{\mathtt{H}}$, kde $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$ a pro $x \in [0,T]$ jsou určeny následovně

$$u^{\mathtt{D}} = \begin{cases} \frac{b\pi}{4}\left(1-\left(-1+\frac{2at}{\pi}\right)^2\right), & t \in [0,\frac{\pi}{a}), \\ \frac{\pi^2 a}{8}(-1+(1+\frac{2b}{a}-\frac{2bt}{\pi})^2), & t \in [\frac{\pi}{a},T], \end{cases}$$
$$u^{\mathtt{H}} = \begin{cases} \frac{\pi^2 b}{8}\left(1-\left(-1+\frac{2at}{\pi}\right)^2\right), & t \in [0,\frac{\pi}{a}), \\ -\frac{a\pi}{4}\left(-1+\left(1+\frac{2b}{a}-\frac{2bt}{\pi}\right)^2\right), & t \in [\frac{\pi}{a},T]. \end{cases}$$

Lemma 3.4 : Mějme $a,b>0$. Pak platí

$$\forall t \in \mathbb{R} : u^{\mathtt{D}}(t) \le u(t) \le u^{\mathtt{H}}(t), \tag{3.7}$$

kde u je řešením počáteční úlohy (2.6).

Důkaz. Díky tomu, že jsou $u^{\mathtt{D}}$, $u^{\mathtt{H}}$, a u T-periodické, stačí nerovnost v (3.7) dokázat $\forall t \in [0,T]$. Dále si lze všimnout, že pro $t \in [0,T]$ platí

$$u^{\mathtt{D}}(t) = -\frac{a}{b}u^{\mathtt{H}}\left(\frac{b}{a}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right),$$
$$u^{\mathtt{H}}(t) = -\frac{a}{b}u^{\mathtt{D}}\left(\frac{b}{a}\left(t-\frac{\pi}{a}\right)\right).$$

Tedy stačí nerovnost v (3.7) dokázat již jen $\forall t \in [0,\frac{\pi}{a}]$. Navíc si lze ještě všimnout, že jsou funkce $u^{\mathtt{D}}(t+\frac{\pi}{2a})$, $u^{\mathtt{H}}(t+\frac{\pi}{2a})$ a $u(t+\frac{\pi}{2a})$ sudé na $[0,\frac{\pi}{a}]$. Nerovnost v (3.7) tedy dokážeme jen $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2a}]$. Ukážeme tedy, že platí následující nerovnost

$$\frac{b\pi}{4}\left(1-\left(-1+\frac{2at}{\pi}\right)^2\right) \le b\sin(at) \le \frac{\pi^2 b}{8}\left(1-\left(-1+\frac{2at}{\pi}\right)^2\right) \tag{3.8}$$

pro $t \in [0,\frac{\pi}{2a}]$. Nerovnosti v (3.8) vydělíme $b>0$ a pro snadnější práci zavedeme substituci $p=at$, tedy dostáváme

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\left(-1+\frac{2p}{\pi}\right)^2\right) \le \sin(p) \le \frac{\pi^2}{8}\left(1-\left(-1+\frac{2p}{\pi}\right)^2\right), \tag{3.9}$$

kde $p \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Nerovnost v (3.9) lze též napsat jako

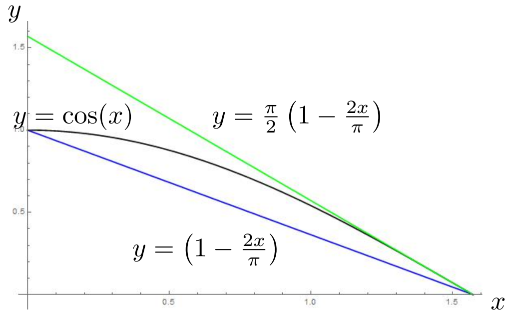
$$\int_0^p \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx \le \int_0^p \sin(p)\,dx \le \int_0^p \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx. \tag{3.10}$$

A nerovnost (3.10) platí, neboť platí následující nerovnost

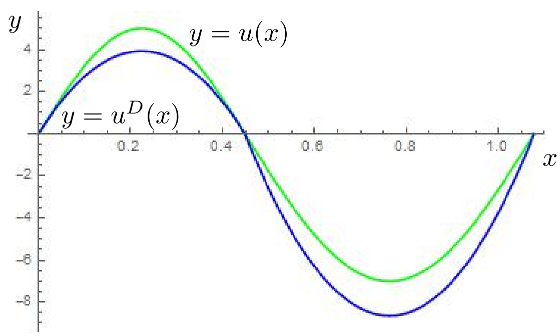
$$\left(1-\frac{2x}{\pi}\right) \le \cos(x) \le \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right) \tag{3.11}$$

kterou lze vidět na obrázku 3.7. $\square$

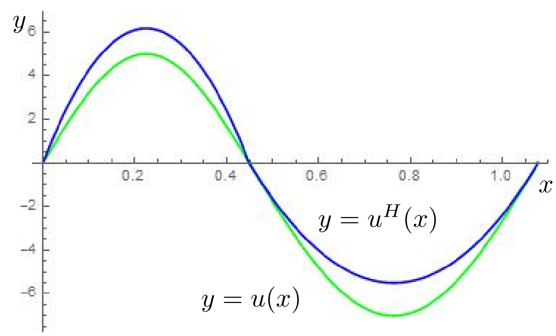
Funkce $u^{\mathtt{D}}$ a $u^{\mathtt{H}}$ a jejich srovnání s funkcí u lze vidět na obrázcích 3.8 a 3.9.



Obrázek 3.7: Nerovnosti (3.11).



Obrázek 3.8: Graf funkce u a u^D na intervalu $[0, 2\pi]$ pro $a = 5$ a $b = 7$.



Obrázek 3.9: Graf funkce u a u^H na intervalu $[0, 2\pi]$ pro $a = 5$ a $b = 7$.

Definice 3.6 : Pro $a, b > 0$ definujme

$$
\begin{aligned}
\hat{F}^{\mathtt{D}}(x) &:= \int_0^x \left(u^{\mathtt{D}}(t) - \bar{u}^{\mathtt{D}}(t)\right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{D}} - \bar{u}\right),\ x \in \mathbb{R},\\
\bar{u}^{\mathtt{D}} &:= \frac{1}{T}\int_0^T u^{\mathtt{D}}\, dt,\\
\hat{F}^{\mathtt{H}}(x) &:= \int_0^x \left(u^{\mathtt{H}}(t) - \bar{u}^{\mathtt{H}}(t)\right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{H}} - \bar{u}\right),\ x \in \mathbb{R},\\
\bar{u}^{\mathtt{H}} &:= \frac{1}{T}\int_0^T u^{\mathtt{H}}\, dt,
\end{aligned}
$$

kde $\bar{u}$ je definována v 2.5, $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$ a u je řešením počáteční úlohy (2.6).

Nyní potřebujeme následující lemma pro důkaz některých vlastností funkcí $\hat{F}^{\mathtt{D}}$ a $\hat{F}^{\mathtt{H}}$, kterým se po té budeme věnovat.

Lemma 3.5 : Mějme T-periodickou funkci $v(t) \in C[\mathbb{R}]$, $T > 0$ a zaveďme si funkci $\hat{V}(x) = \int_0^x (v(t) - \bar{v})\, dt$, kde $\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, dt$. Pak funkce $\hat{V}(x)$ je též T-periodická.

Důkaz. Ukážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \hat{V}(x+T) = \hat{V}(x). \tag{3.12}$$

Pro levou stranu rovnosti v (3.12) platí

$$\hat{V}(x+T) = \int_0^{x+T} (v(t) - \bar{v})\, dt = \int_0^T v(t)\, dt + \int_T^{x+T} v(t)\, dt - \int_0^{x+T} \bar{v}\, dt.$$

V určitém integrálu

$$\int_T^{x+T} v(t)\, dt$$

použijeme substituci $p = t - T$ po které dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{V}(x+T) &= \int_0^T v(t)\, dt + \int_0^x v(p+T)\, dp - \int_0^{x+T} \bar{v}\, dt \\ &= T\bar{v} + \int_0^x v(p)\, dp - (x+T)\bar{v} = \int_0^x v(t)\, dt - x\bar{v}. \end{aligned}$$

A pro pravou stranu rovnosti v (3.12) platí

$$\hat{V}(x) = \int_0^x (v(t) - \bar{v})\, dt = \int_0^x v(t)\, dt - x\bar{v}.$$

Tedy vztah (3.12) platí. □

Lemma 3.6 : Nechť $a, b > 0$. Pak funkce $\hat{F}^{\mathtt{D}}$ a $\hat{F}^{\mathtt{H}}$ jsou T-periodická a platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : \hat{F}^{\mathtt{D}}(x) \le \hat{F}(x) \le \hat{F}^{\mathtt{H}}(x). \tag{3.13}$$

Důkaz. Nejdříve si všimněme, že funkce $u^{\mathtt{D}}$ a $u^{\mathtt{H}}$ jsou spojité a periodické s periodou $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} > 0$. Dle lemmatu 3.5 jsou tedy i funkce $\hat{F}^{\mathtt{D}}$ a $\hat{F}^{\mathtt{H}}$ T-periodické. Dále díky lemmatu 3.4 dostáváme, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí následující posloupnost úvah

$$\begin{gathered} u^{\mathtt{D}}(x) - u(x) \le 0 \le u^{\mathtt{H}}(x) - u(x), \\ \int_0^T \left(u^{\mathtt{D}}(t) - u(t) \right)\, dt \le 0 \le \int_0^T \left(u^{\mathtt{H}}(t) - u(t) \right)\, dt, \\ \bar{u}^{\mathtt{D}}(x) - \bar{u}(x) \le 0 \le \bar{u}^{\mathtt{H}}(x) - \bar{u}(x). \end{gathered}$$

Díky T-periodičnosti funkcí $\hat{F}^{\mathtt{D}}$, $\hat{F}^{\mathtt{H}}$ a $\bar{F}$ nám stačí nerovnost v (3.13) stačí dokázat pro $x \in [0, T]$. Pro tato x tedy platí

$$\begin{gathered} \int_0^x \left(u^{\mathtt{D}}(t) - u(t) \right)\, dt + (T-x)\left(\bar{u}^{\mathtt{D}} - \bar{u} \right) \le 0 \le \int_0^x \left(u^{\mathtt{H}}(t) - u(t) \right)\, dt + (T-x)\left(\bar{u}^{\mathtt{H}} - \bar{u} \right), \\ \int_0^x \left(u^{\mathtt{D}}(t) - u(t) + \bar{u} - \bar{u}^{\mathtt{D}} \right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{D}} - \bar{u} \right) \le 0 \le \int_0^x \left(u^{\mathtt{H}}(t) - u(t) + \bar{u} - \bar{u}^{\mathtt{H}} \right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{H}} - \bar{u} \right), \\ \int_0^x \left(u^{\mathtt{D}}(t) - \bar{u}^{\mathtt{D}} \right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{D}} - \bar{u} \right) \le \int_0^x (u(t) - \bar{u})\, dt \le \int_0^x \left(u^{\mathtt{H}}(t) - \bar{u}^{\mathtt{H}} \right)\, dt + T\left(\bar{u}^{\mathtt{H}} - \bar{u} \right), \\ \hat{F}^{\mathtt{D}}(x) \le \hat{F}(x) \le \hat{F}^{\mathtt{H}}(x). \end{gathered}$$

Tedy platí i (3.13). □

Lemma 3.7 : Pro množinu $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \subset \Omega_2.$$

Důkaz. Hledejme nyní po částech polynomiální periodické funkce $S_2^{\mathtt{H}}$ a $S_2^{\mathtt{D}}$ vyššího řádu s periodou 2π v druhé proměnné takové, že platí

$$\forall (k,x) \in (0,\infty) \times [0,2\pi] : S_2^{\mathtt{D}}(k,x) \leq S(k,x) \leq S_2^{\mathtt{H}}(k,x).$$

Díky lemmatu 3.13 víme, že máme funkce $\hat{F}^{\mathtt{D}}$ a $\hat{F}^{\mathtt{H}}$ takové, že platí

$$\forall x \in [0,T] : \hat{F}^{\mathtt{D}}(x) \leq \hat{F}(x) \leq \hat{F}^{\mathtt{H}}(x). \tag{3.14}$$

Stačí tedy už jen použít v substituci

$$\begin{aligned} k &= \tfrac{b}{a}, \\ t &= \tfrac{T}{2\pi}x. \end{aligned}$$

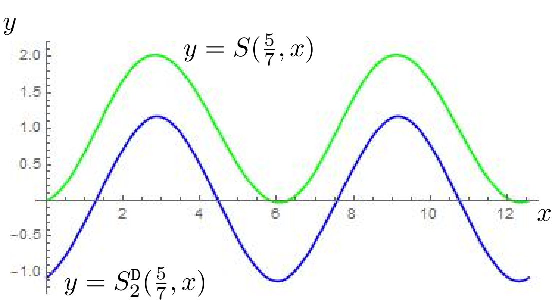
A dostáváme například v programu mathematica pro $(k,x) \in (0,\infty) \times [0,T]$:

$$S_2^D(k,x) = \begin{cases} -\frac{\pi(\pi-2k^2)}{24k}x + \frac{(1+k)^2}{8k}x^2 - \frac{(1+k)^3}{24k^2\pi}x^3, & \\ \frac{k\pi^2(2-(3+2k)\pi)}{12} & +\frac{2\pi^2+12k\pi^2+12k^3\pi^3+k^2(4\pi-24\pi^2)}{48k}x- \\ & -\frac{3\pi+12k\pi+15k^2\pi+6k^3\pi}{48k}x^2 + \frac{(1+k)^3}{48k}x^3, \end{cases}$$

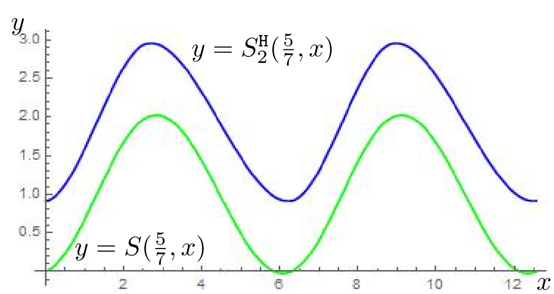
$$S_2^H(k,x) = \begin{cases} \frac{2\pi-k^2\pi^2}{24k}x + \frac{(1+k)^2\pi}{16k}x^2 - \frac{(1+k)^3}{48k^2}x^3, & \\ \frac{k\pi^2(\pi-6-4k)}{12} & -\frac{\pi(2+k(12(1+k)^2-k\pi))}{24k}x- \\ & -\frac{(1+k)^2(1+2k)}{8k}x^2 + \frac{(1+k)^3}{24k\pi}x^3. \end{cases}$$

□

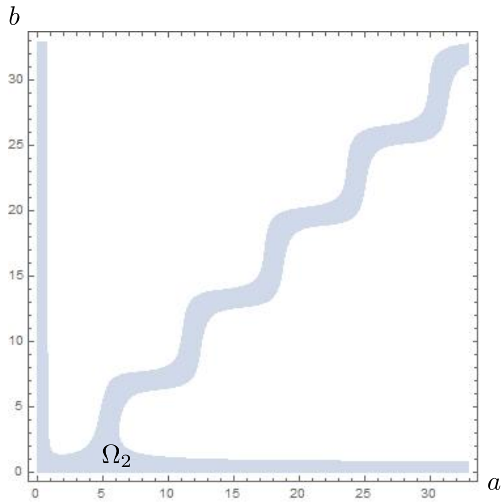
Na obrázcích 3.10 a 3.11 lze vidět srovnání funkcí S a $S_2^{\mathtt{D}}$, případně $S_2^{\mathtt{H}}$. Na obrázku 3.12 je po té vyobrazena množina Ω_2 a nakonec na obrázku 3.13 je k vidění srovnání hranic množin Ω_0, Ω_1 a Ω_2.



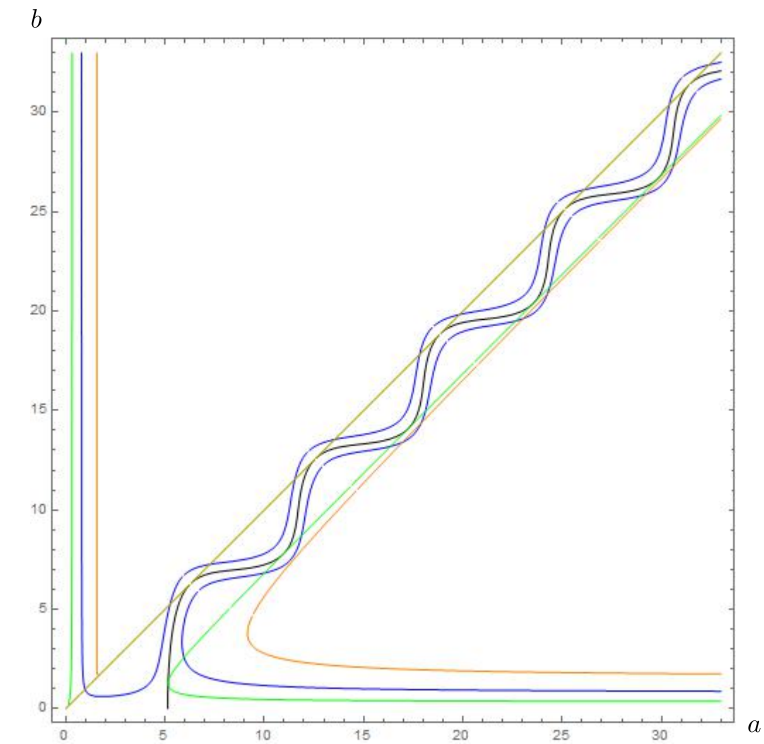
Obrázek 3.10: Graf funkce S a $S_2^{\mathtt{D}}$ na intervalu $[0,4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.11: Graf funkce S a $S_2^{\mathtt{H}}$ na intervalu $[0,4\pi]$ pro $k = \frac{5}{7}$.



Obrázek 3.12: Množina Ω_2.



Obrázek 3.13: Srovnání hranic množin Ω_0 (zeleně), Ω_1 (oranžově) a Ω_2 (modře) a množina $\mathcal{M}$ (černě).

Kapitola 4

Po částech lineární úloha s novou integrální podmínkou

V této kapitole se budeme zabývat okrajovou úlohou

$$\begin{cases} u''(t) + a^2u^+(t) - b^2u^-(t) = 0, \ t \in (0,1) \\ u(0) = 0, \\ \int_0^p u(t)\,dt + \int_q^1 u(t)\,dt = 0, \ p^2 + (q-1)^2 \neq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $u \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $u^+(t) = \max\{u(t), 0\}$ a $u^-(t) = \max\{-u(t), 0\}$.

Definice 4.1 : Definujme množinu

$$\mathcal{M}_{pq} := \Big\{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \text{úloha (4.1) má netriviální řešení } u \text{ s derivací v nule } u'(0) = ab > 0\Big\}.$$

Vytvořme ekvivalentní úlohu podobně jako u okrajové úlohy (2.8). Nejdříve si upravme integrální podmínku v úloze (4.1)

$$0 = \int_0^p u(t)\,dt + \int_q^1 u(t)\,dt = \int_0^p u(t)\,dt + \int_0^1 u(t)\,dt - \int_0^q u(t)\,dt,$$

kterou si zapíšeme pomocí funkce F z definice 2.4

$$F(p) + F(1) - F(q) = 0. \tag{4.2}$$

Dále s použitím periodické funkce $\hat{F}$ z definice 2.5 dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{F}(p) + \hat{F}(1) - \hat{F}(q) &= \int_0^p(u(t) - \bar{u})\,dt + \int_0^1(u(t) - \bar{u})\,dt - \int_0^q(u(t) - \bar{u})\,dt \\ &= F(p) + F(1) - F(q) - p\bar{u} - \bar{u} + q\bar{u}. \end{aligned}$$

A podmínka (4.2) je splněna právě tehdy, když

$$\hat{F}(p) + \hat{F}(1) - \hat{F}(q) = -p\bar{u} - \bar{u} + q\bar{u}.$$

Nyní formulujme ekvivalentní úlohu k úloze (4.1), kde $u'(0) = ab$

$$\hat{F}(p) + \hat{F}(1) - \hat{F}(q) = (-p - 1 + q)\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right), \tag{4.3}$$

kde $a > 0$, $b > 0$ a $\hat{F}$ je funkce z definice 2.5.

Věta 4.1 : Mějme $a > 0$ a $b > 0$. Dvojice (a, b) patří do množiny $\mathcal{M}_{pq}$ právě tehdy, když platí

$$S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) = P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right), \tag{4.4}$$

kde funkce S je definovaná v (2.21) a funkce P je definovaná v (2.20).

Důkaz. Ukážeme, že rovnost (4.4) je ekvivalentní s rovností v úloze (4.3). Dle lemmatu 2.4 je

$$S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}p\right) + S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) - S\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}q\right) = \hat{F}(p) + \hat{F}(1) - \hat{F}(q).$$

Dále dle lemmatu 2.5 je

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}p\right) &= -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)p, \\
P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) &= -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right), \\
-P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}q\right) &= +\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)q.
\end{aligned}$$

A tedy

$$P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}q\right) = -\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right)(q + 1 - p).$$

A a, b splňují rovnost (4.4) právě tehdy, když jsou řešením úlohy

$$\hat{F}(p) + \hat{F}(1) - \hat{F}(q) = (-p - 1 + d)\frac{1}{T}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right).$$

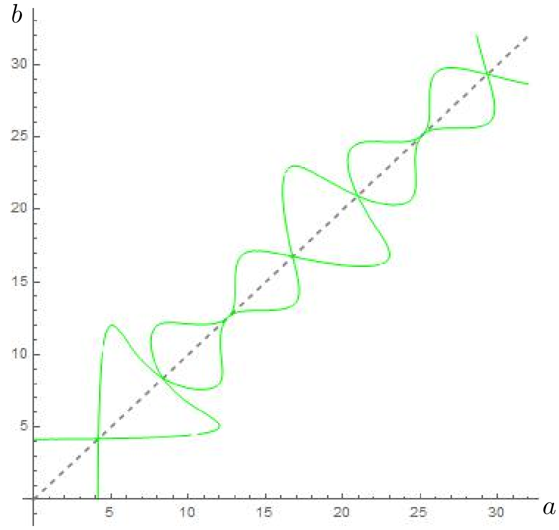
□

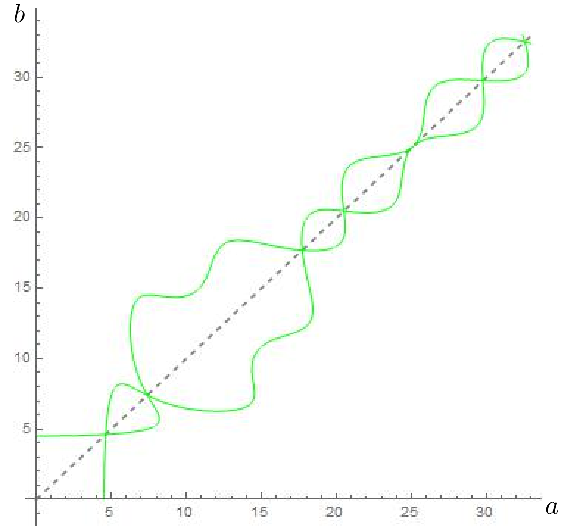
Takto jsme získali Fučíkovo spektrum prvního kvadrantu okrajové úlohy (4.1), které nám ukazuje obrázek 4.1 pro vybraná p, q.

Věnujme se nyní hledání algebraických křivek příslušných tomuto spektru.

Definice 4.2 : Nechť $S^{\mathtt{D}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $S^{\mathtt{H}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce takové, že splňují podmínku (3.1). Definujme množinu:

$$\Omega_{pq} = \left\{ \begin{array}{ll} (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; & S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) \le \\ & P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) \le \\ & S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) \end{array} \right\}.$$





Obrázek 4.1: Fučíkovo spektrum Σ_{pq} v prvním kvadrantu roviny ab pro $p = 0$ a $q = \frac{1}{2}$ (vlevo) a pro $p = \frac{1}{4}$ a $q = \frac{1}{2}$ (vpravo).

Věta 4.2 : Pro množinu $\mathcal{M}_{pq}$ platí:

$$\mathcal{M}_{pq} \subset \Omega_{pq}.$$

Důkaz. Mějme $(a, b) \in \mathcal{M}_{pq}$. Pak dle věty 4.1 platí:

$$S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) = P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right), \tag{4.5}$$

Vzhledem k vlastnostem funkcí $S^{\mathtt{D}}$ a $S^{\mathtt{H}}$ navíc platí

$$S^{\mathtt{D}}(k, x) \leq S(k, x) \leq S^{\mathtt{H}}(k, x) \tag{4.6}$$

nebo též

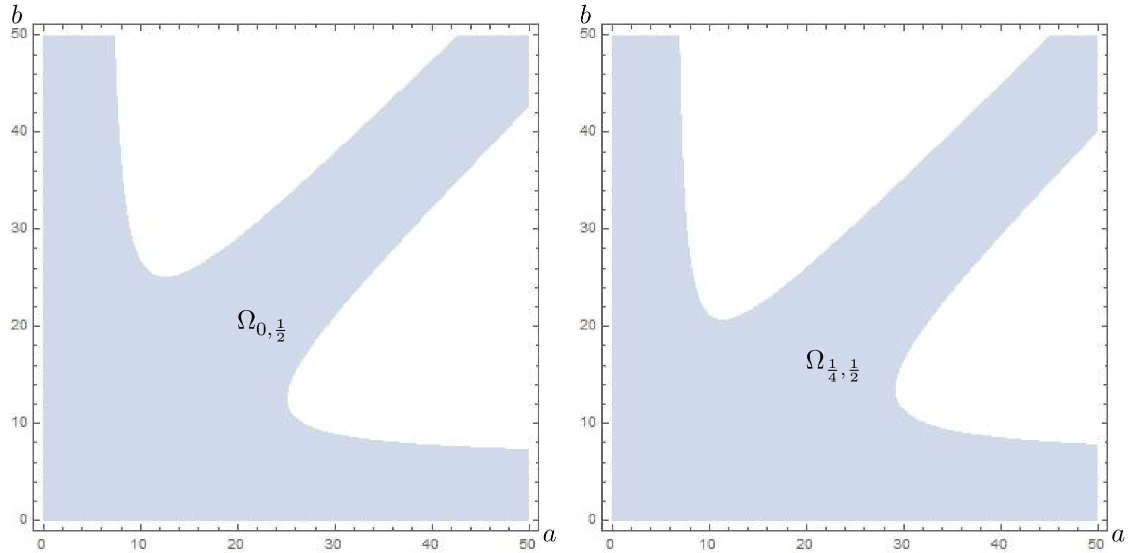
$$-S^{\mathtt{H}}(k, x) \leq -S(k, x) \leq -S^{\mathtt{D}}(k, x) \tag{4.7}$$

pro libovolné $(k, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Pak z (4.5), (4.6) a (4.7) plynou nerovnosti

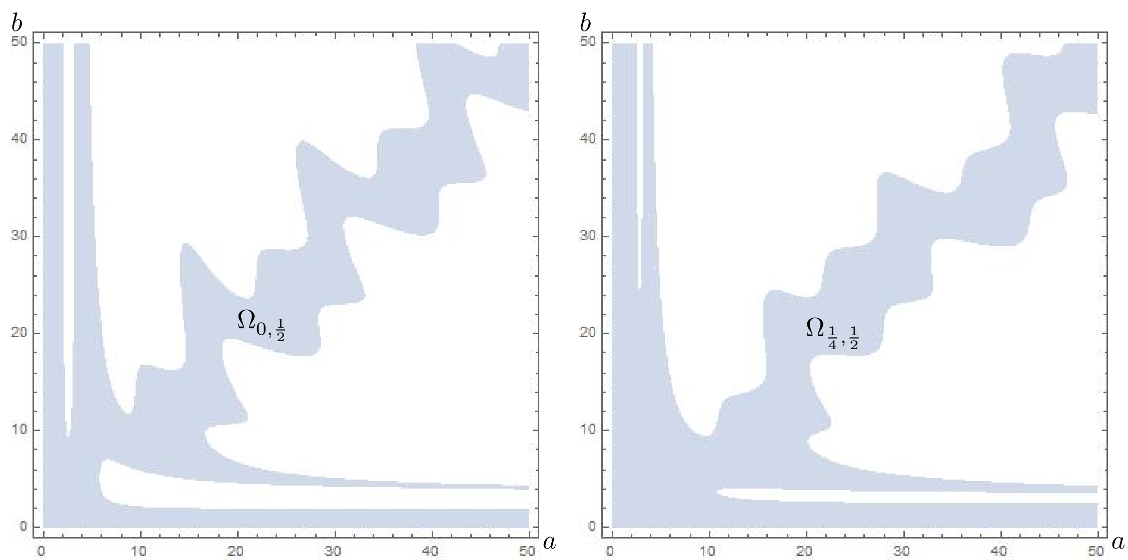
$$\begin{aligned}
S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) &\leq P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right), \\
P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - P\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right) &\leq S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}p\right) + S^{\mathtt{H}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}\right) - S^{\mathtt{D}}\left(\tfrac{b}{a}, \tfrac{2ab}{a+b}q\right).
\end{aligned}$$

A tedy dle definice 4.2 též $(a, b) \in \Omega_{pq}$. □

Množiny Ω_{pq} s využitím funkcí $S_1^{\mathtt{D}}$ a $S_1^{\mathtt{H}}$ pro p, q z obrázku 4.1 lze vidět na obrázku 4.2. Na obrázku 4.3 lze po té vidět množiny Ω_{pq} s využitím funkcí $S_2^{\mathtt{D}}$ a $S_2^{\mathtt{H}}$.



Obrázek 4.2: Množiny Ω_{pq} s využitím funkcí $S_1^{\mathtt{D}}$ a $S_1^{\mathtt{H}}$ pro $p = 0$ a $q = \frac{1}{2}$ (vlevo) a pro $p = \frac{1}{4}$ a $q = \frac{1}{2}$ (vpravo).



Obrázek 4.3: Množiny Ω_{pq} s využitím funkcí $S_2^{\mathtt{D}}$ a $S_2^{\mathtt{H}}$ pro $p = 0$ a $q = \frac{1}{2}$ (vlevo) a pro $p = \frac{1}{4}$ a $q = \frac{1}{2}$ (vpravo).

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce bylo nalézt Fučíkovo spektrum úlohy

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \ \int_0^p u(t)\,dt + \int_q^1 u(t)\,dt = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

a sestavit odhady pro lokalizaci tohoto spektra pro vybrané parametry p, q, kde $p^2 + (q-1)^2 \neq 0$ a $p, q \in [0,1]$. Nejdříve jsme řešili okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \ \int_0^1 u(t)\,dt = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

jejíž Fučíkovo spektrum jsme hledali vlastním způsobem. Ten spočíval v tom, že jsme využili řešení počáteční úlohy, které by pro vhodné α, β řešilo též úlohu (5.2), k vytvoření ekvivalentní úlohy. Tu jsme pak převedli na hledání hladiny funkce dvou proměnných.

V další kapitole jsme zkonstruovali tři různé odhady spektra. Hranice první množiny byla tvořena jednoduchou transcendentní křivkou. Hranice druhé množiny už byla tvořena jednoduchou algebraickou křivkou. Nakonec hranice třetí množiny byla dána po částech algebraickou křivkou. V závěru této kapitoly je srovnání hranic všech tří konstruovaných odhadů, na kterém si lze všimnout, že každá z hranic je v určitých oblastech ke spektru blíže než hranice ostatní. Ale žádný z těchto odhadů nelze považovat za jednoznačně nejlepší.

V poslední kapitole jsme řešili úlohu (5.2) u které jsme našli Fučíkovo spektrum pro dvě zvolená nastavení parametrů p, q. Pro tato dvě spektra jsme pak též nalezli odhady pomocí množin ze třetí kapitoly, které byly ohraničeny algebraickými křivkami.

Literatura

[1] Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).

[2] Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).

[3] Sergejeva, N.: On nonlinear spectra for some nonlocal boundary value problems. Math. Model. Anal. 13 (1) (2008) 87-97.