

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Proplétací polynom

Jakub Hofman

Vedoucí: Přemysl Holub

2017/2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma "Proplétací polynom" zpracoval samostatně pod dohledem vedoucího bakalářské práce. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použitých zdrojů.

V Plzni dne

.....

podpis autora

Poděkování

Předně bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Doc. RNDr. Přemyslu Holubovi Ph.D., jehož vstřícnost, obětavost a ochota byly velkou pomocí při tvorbě této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodině a přátelům za psychickou podporu.

Abstrakt

Předmětem práce je grafový invariant známý jako proplétací polynom. Byl definován jako zobecnění funkce, díky které bylo možno spočítat všechny Eulerovské tahy v "2-in, 2-out" orientovaných grafech. Odtud plyne jeho biologická významnost, neboť ze znalosti počtu Eulerovských tahů těchto grafů lze určit počet všech možných rekonstrukcí řetězce DNA, jehož menší podřetězce představují grafové vrcholy. Nejprve se podíváme na okolnosti vedoucí k jeho vzniku a poté popíšeme jeho základní vlastnosti s pomocí dříve publikovaných článků. Nakonec se pokusíme zjednodušit počítání polynomu pro grafy, které obsahují volnou cestu a najít iterativní předpis polynomu pro třídu "šestiúhelníkových" grafů.

Klíčová slova

Teorie grafů, Eulerovský tah, grafový invariant, proplétací polynom

Abstract

The subject of this bachelor thesis is the graph invariant known as the interlace polynomial. It was defined as a generalization of a function used to calculate the number of Eulerian circuits in "2-in, 2-out" digraphs. Herein lies its significance in biology, because with the knowledge of the number of Eulerian circuits in these graphs we can determine the number of all possible reconstructions of a DNA string, if its substrings are represented as the graphs' vertices. We will first take a look at the circumstances that led to its creation, before describing its basic properties using previously-published articles. We will then try to simplify the computation of the polynomial for graphs that include a free path and find the iterative formula of the polynomial for the class of "hexagonal" graphs.

Keywords

Graph theory, Eulerian circuit, graph invariant, interlace polynomial

Obsah

1	Úvod	5
2	Motivace	5
3	Základní definice	6
4	Proplétací polynom	9
4.1	Proplétání a pivotace	9
4.2	Definice a základní poznatky	11
4.3	Extrémní vlastnosti proplétacího polynomu	13
4.4	Proplétací polynomy základních tříd grafů a "žebříkových" grafů	14
5	Vlastní výsledky	20
5.1	Cesta v grafu	20
5.2	Zkoumání "šestiúhelníkových" grafů S_n	21
6	Závěr	30

1 Úvod

V této práci se budeme zabývat pojmem proplétací polynom, což jeden z grafových invariantů. V následujících dvou kapitolách se podíváme na okolnosti vedoucí k jeho vzniku a jeho význam v biologii a následně budeme definovat některé základní pojmy z teorie grafů, které budou důležité k pochopení problematiky. V kapitole 4 se podrobněji zaměříme na pojem proplétacího polynomu a grafové operace, které se využívají k jeho definici. Dále se podíváme na vzhled, vlastnosti a některé zajímavé hodnoty polynomu a zrekapitulujeme výsledky z jiných publikací, kde byly mimo jiné nalezeny tvary polynomů pro některé základní třídy grafů. V kapitole 5 shrneme vlastní výsledky, konkrétně proplétací polynom grafů obsahujících volnou cestu a proplétací polynomy "šestiúhelníkových" grafů.

2 Motivace

U zrození myšlenky o proplétacím polynomu stojí článek od *Arratii, Bollobáse a spol.* [5] o sekvencování DNA pomocí hybridizace, ve kterém byla popsána metoda rekonstrukce dlouhých řetězců DNA, tedy nalezení sekvence nukleotidů těchto řetězců pomocí znalostí o jejich kratších podřetězcích. Jednoznačná rekonstrukce údajně není vždy možná a celkový počet rekonstrukcí je dán pořadím opakujících se podřetězců. Jelikož se každý podřetězec může opakovat maximálně dvakrát, tak se posloupnost podřetězců dá popsat tzv. *dvojicováním*: řadou symbolů o délce $2n$, kde se každý symbol objevuje právě dvakrát.

Tato dvojicování obsahující "propletené" symboly indukují grafy typu "2-in, 2-out", tedy orientované grafy, jejichž každý vrchol má vstupní i výstupní stupeň roven 2. U nich je důležitý počet jejich Eulerovských tahů, což jsou u orientovaných grafů takové tahy, ve kterých se vyskytnou všechny hrany daného grafu právě jednou. Bylo totiž zjištěno, že počet všech možných rekonstrukcí řetězce DNA pro zadané párování je stejný jako počet Eulerovských tahů v daném 2-in, 2-out grafu.

Existují metody, které jsou schopny spočítat Eulerovské tahy grafů v polynomiálním čase. Ty ale neposkytují potřebné strukturní informace, které by byly pro zpětnou rekonstrukci důležité. Byla tedy snaha o řešení opačného problému, tedy najít všechny možné rekonstrukce řetězců, pokud byl znám celkový počet Eulerovských tahů příslušného grafu.

Díky tomuto přístupu byl definován tzv. proplétací polynom, který je schopný nejen spočítat Eulerovské tahy 2-in, 2-out grafů, ale i počet všech možných řezů rozdělujících graf na k komponent, pro libovolné nezáporné k .

3 Základní definice

Téma, kterým se v této práci zabýváme, spadá tématicky do teorie grafů, a proto je nutné nejprve definovat některé důležité pojmy, které by čtenáři nemusely být známy. Nejprve je důležité definovat, co je to graf.

Definice 1 [1]. Neorientovaný graf G je dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina nazývaná množina vrcholů a $E \subset \binom{V}{2}$ se nazývá množina hran, přičemž

$$\binom{V}{2} = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V . Orientovaný graf (také digraf, z anglického *directed graph*) D je dvojice $D = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subset V \times V$ je množina hran.

Nebude-li uvedeno jinak, budeme v této práci pracovat s grafy, které jsou prosté. Znamená to, že neobsahují násobné hrany ani smyčky (hrany, pro které je počáteční vrchol stejný jako koncový vrchol). Dále zmíníme, že v teorii grafů je obvyklé značit hrany $\{x, y\}$ zkráceně xy a i v této práci se budeme této notaci držet. Rovněž, pokud nebude uvedeno jinak, symbolem G budeme značit graf neorientovaný a D graf orientovaný.

Následující definice se budou týkat důležitých vlastností vrcholů grafu.

Definice 2 [1]. Stupeň vrcholu v grafu G je počet hran grafu G , které obsahují vrchol v . Značí se $d_G(v)$. Vstupní stupeň $d_D^+(u)$ vrcholu u v orientovaném grafu D je počet hran, které končí ve vrcholu u , tedy počet dvojic $(x, u) \in E(D)$, kde $x \in V(D)$. Podobně výstupní stupeň $d_D^-(u)$ je počet dvojic $(u, x) \in E(D)$.

Definice 3 [1]. Graf G se nazývá k -regulární, pokud mají všechny jeho vrcholy stupeň k .

Definice 4 [1]. Vrchol v grafu G se nazývá izolovaným vrcholem, pokud platí $d_G(v) = 0$, tedy pokud jej neobsahuje žádná hrana grafu G .

Pro správné určení polynomu v pozdějších kapitolách je důležitá práce s podgrafy, tedy s částmi původního grafu.

Definice 5 [1]. Graf H je podgrafem grafu G (psáno $H \subset G$), pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$. Graf H je indukovaným podgrafem grafu G , pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Graf H je faktorem grafu G , pokud $V(H) = V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$.

Počítání proplétacího polynomu je prováděno pomocí rekurze, ve které se pracuje s grafy, které vzniknou z původního grafu odstraněním daných vrcholů. Je nutné proto znát, co tato operace obnáší.

Definice 6 [1]. *Nechť v je vrchol grafu G . Graf $G - v$, vzniklý odstraněním vrcholu v , je definován jako indukovaný podgraf grafu G na množině $V(G) \setminus \{v\}$.*

V teorii grafů se často zabýváme otázkou, zda existuje posloupnost hran, kterými bychom byli schopni se dostat z jednoho vrcholu grafu do druhého. Následující definice se budou týkat této problematiky.

Definice 7 [1]. *Sled v grafu G je libovolná posloupnost v_0, v_1, \dots, v_k , kde v_i jsou vrcholy grafu G a pro každé $i = 1, \dots, k$ je $v_{i-1}v_i$ hranou grafu G . Délka sledu je rovna k .*

Tah v grafu G je sled, ve kterém se mohou opakovat vrcholy, ale hrany $v_{i-1}v_i$ jsou pro rozdílné hodnoty i různé.

Cesta v grafu G je sled, ve kterém se každý vrchol v_i objevuje pouze jednou.

Kružnice v grafu G je uzavřená cesta, ve které platí $v_0 = v_k$.

Poznamenejme, že v orientovaných grafech se analogicky definují orientovaný sled, orientovaný tah a orientovaná cesta. Orientovanou uzavřenou cestu nazýváme cyklus.

Definice 8 [1]. *Graf G je souvislý, pokud pro každé dva vrcholy x, y existuje v grafu G cesta mezi x a y .*

Definice 9 [1]. *Komponenta grafu G je maximální souvislý podgraf grafu G .*

Definice 10 [1]. *Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.*

Kromě stromů existují ještě další speciální třídy grafů, se kterými se v teorii grafů často pracuje díky jejich vlastnostem. V následující definici si ukážeme ty z nich, které pro nás budou v následujících kapitolách relevantní.

Definice 11 [1].

- *cesta P_n : $V(P_n) = \{v_0, \dots, v_n\}$, $E(P_n) = \{v_{i-1}v_i, i = 1, \dots, n\}$*
- *kružnice C_n : $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $E(C_n) = \{v_{i-1}v_i, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_{n-1}v_0\}$*
- *diskrétní graf E_n : $V(E_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $E(E_n) = \emptyset$*
- *úplný graf K_n : $V(K_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $E(K_n) = \binom{V(E_n)}{2}$*

- hvězda S_n : $V(S_n) = \{v_0, \dots, v_n\}$, $E(S_n) = \{v_0 v_1, \dots, v_0 v_n\}$

Definice 12 [4]. Graf G nazýváme bipartitním grafem, pokud platí $V(G) = V_1 \cup V_2$, kde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a $E(G) \subset \{xy : x \in V_1 \wedge y \in V_2\}$. Pokud $E(G) = V_1 \times V_2$, potom je graf úplným bipartitním grafem a značíme ho $K_{m,n}$, kde $m = |V_1|$ a $n = |V_2|$.

Analogicky pro $k > 2$ nazýváme G k -partitním grafem, pokud $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, kde $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $E(G) \subset \{xy : x \in V_i \wedge y \in V_j \wedge i \neq j\}$. Pokud $E(G) = \{xy : x \in V_i \wedge y \in V_j \wedge i \neq j\}$, potom je graf úplným k -partitním grafem a značíme ho K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , kde $n_i = |V_i|$ pro $i = 1, 2, \dots, k$.

Z definice lze odvodit, že hvězdy S_n můžeme také definovat jako úplné bipartitní grafy $K_{1,n}$.

Nakonec budeme definovat pojmy nezávislá množina, nezávislost a párování, které budou důležité pro určování některých vlastností proplétacího polynomu.

Definice 13 [2]. Necht G je graf. Množina $S \subseteq V$ se nazývá nezávislá množina, pokud $\forall x, y \in S : xy \notin E(G)$. Nezávislost $\alpha(G)$ grafu G je číslo, které je rovno velikosti největší nezávislé množiny grafu G .

Definice 14 [3]. Necht G je graf. Párování v grafu G je libovolný 1-regulární podgraf H grafu G . Pokud je H 1-regulárním faktorem grafu G , nazýváme ho perfektním párováním.

4 Proplétací polynom

V této kapitole budeme nejprve definovat operace, které jsou nutné k zavedení pojmu proplétací polynom a následně se podíváme na vznik polynomu, jeho vlastnosti a zajímavé hodnoty po dosazení. Nakonec popíšeme vzhled polynomu pro některé základní třídy grafů.

4.1 Proplétání a pivotace

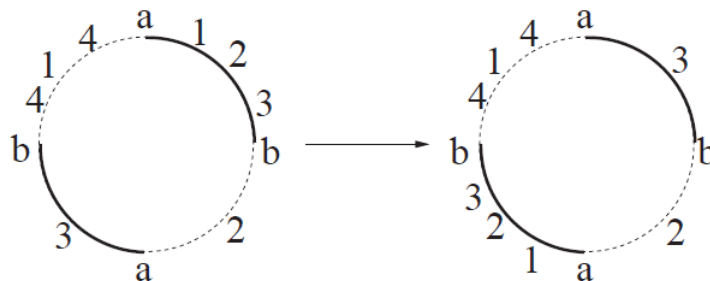
Definujme nejprve pojem "2-in, 2-out" grafu. Jedná se o orientovaný graf, v němž má každý vrchol vstupní i výstupní stupeň roven 2 [6]. U 2-in, 2-out grafů nás zajímá počet Eulerovských tahů a vlastnosti, které lze z jejich počtu odvodit. Eulerovským tahem přitom míníme orientovaný tah v D procházející všemi hranami D . K tomuto výpočtu se využívá vlastnosti dvojice vrcholů, které se říká propletenost.

Definice 15 [6]. (*Propletenost a proplétací graf*)

Nechť D je orientovaný 2-in, 2-out graf a C je jeho libovolný Eulerovský tah. O vrcholech $a, b \in V(D)$ říkáme, že jsou propleteny, pokud je C prochází v pořadí $\dots a \dots b \dots a \dots b \dots$. Proplétací graf $H = H(C)$ příslušný k C je neorientovaný graf s $V(H) = V(D)$ a množinou hran tvořenou hranami ab , kde vrcholy a a b jsou propleteny v C .

Propletení dvou vrcholů lze jednoduše pochopit, pokud si Eulerovský tah C představíme jako samostatný "cyklus", v němž budou hrany mezi vrcholy určené pořadím, ve kterém C tyto vrcholy navštívuje. Vrcholy a a b budou propleteny, pokud cesta mezi oběma instancemi vrcholu a bude mít alespoň jednu společnou hranu s cestou mezi instancemi vrcholu b .

Definice 16 [6]. Nechť C je Eulerovský tah, ve kterém jsou vrcholy a a b propleteny. Transpozicí podle dvojice ab budeme rozumět úpravu, kterou vznikne nový tah C^{ab} tak, že se vymění jedna hranová sekvence z a do b s druhou.



Obrázek 1: [6] Ukázka transpozice. Tah C (vlevo) ukazuje průchod grafem s vrcholy $\{a, b, 1, 2, 3, 4\}$ ve směru hodinových ručiček. Při použití transpozice podle ab vznikne tah C^{ab} (vpravo). Tučně jsou vyznačeny cesty z a do b .

Alternativně můžeme tuto definici chápat tak, že v a i b máme dvě dvojice hran, přičemž v každé dvojici je jedna hrana vstupní a druhá výstupní a hrany ve společné dvojici jsou v tahu C navštíveny po sobě. Transpozicí dojde k přehození koncových hran z jedné dvojice do druhé. Popišme si tento proces na obrázku 1. V tahu C je vrchol a navštíven dvakrát, nejprve hranami $(4, a)$ dovnitř a $(a, 1)$ ven a později hranami $(2, a)$ dovnitř a $(a, 3)$ ven. Transpozicí podle ab vznikne tah C^{ab} , který navštěvuje a hranami $(4, a)$ dovnitř a $(a, 3)$ ven a později hranami $(2, a)$ dovnitř a $(a, 1)$ ven. Jak obrázek demonstruje, tak po transpozici zůstávají vrcholy a a b propleteny. Také platí, že vrcholy, které byly propleteny s a , ale ne s b , budou po transpozici propleteny s b , ale ne s a , a naopak.

Nyní budeme definovat operaci pivotace, která libovolnému grafu G přiřadí příslušný graf G^{ab} .

Definice 17 [6]. (*Pivotace*)

Nechť G je libovolný neorientovaný graf a a, b jsou dva jeho různé vrcholy. Dále necht' všechny vrcholy z $V(G) \setminus \{a, b\}$ jsou rozděleny do skupin následovně:

- (1) *vrcholy sousedící s a , ale nikoliv s b ,*
- (2) *vrcholy sousedící s b , ale nikoliv s a ,*
- (3) *vrcholy sousedící s a i b , a*
- (4) *vrcholy nesousedící ani s a , ani s b .*

Pivotací grafu G nazýváme graf G^{ab} , který vznikne následujícím postupem. Polož $G^{ab} = G$. Dále pro každou dvojici vrcholů xy , kde x náleží jedné ze skupin (1 – 3) a y náleží jiné ze skupin (1 – 3) než x , "přepni" dvojici xy : jsou-li tyto vrcholy spojené hranou, odstraň tuto hranu z $E(G)$ a pokud spolu nesousedí, přidej hranu xy do $E(G)$.

Z definice vyplývá, že $G^{ab} = G^{ba}$. Pivotace je sice definována pro libovolnou dvojici vrcholů ab , ale my ji budeme používat pouze v případě, že ab je hranou. Dále budeme potřebovat ještě jednu operaci.

Definice 18 [6]. (*Záměna značení*)

Mějme libovolný označený graf G a jeho libovolnou dvojici vrcholů s označením a a b . Grafem G_{ab} budeme rozumět ten samý graf, ve kterém však byla zaměněna označení a a b .

Následující lemma nám dokazuje, že pro proplétací grafy má operace pivotace podle hrany ab stejný význam jako transpozice na Eulerovském tahu C příslušném k danému grafu podle stejné hrany.

Lemma 19 [6]. *Nechť D je orientovaný 2-in, 2-out graf, C je jeho libovolný Eulerovský tah a $H = H(C)$ je proplétací graf příslušný k C . Dále necht' H obsahuje hranu ab (tedy necht' vrcholy a a b jsou propleteny v C). Potom $H^{ab} = (H(C^{ab}))_{ab}$.*

Se znalostí příslušných operací se dostáváme k samotnému počítání Eulerovských tahů.

Definice 20 [6]. *Pro libovolný orientovaný graf D , necht' $r_1(D)$ značí počet Eulerovských tahů grafu D .*

Všechny Eulerovské tahy 2-in, 2-out grafu D lze vygenerovat pomocí transpozic aplikovaných na libovolný Eulerovský tah C , kterým odpovídají pivotace na proplétacím grafu. Znamená to tedy, že celkový počet Eulerovských tahů grafu D lze vypočítat z proplétacího grafu $H(C)$ pro libovolný Eulerovský tah C . Na základě této myšlenky byla vyslovena následující věta.

Věta 21 [6]. *Existuje funkce q_1 , zobrazující množinu proplétacích grafů do množiny přirozených čísel, taková, že pro libovolný 2-in, 2-out graf D s Eulerovským tahem C je celkový počet jeho Eulerovských tahů $r_1(D)$ roven $q_1(H(C))$, kde $H(C)$ je proplétací graf příslušný Eulerovskému tahu C . Navíc je q_1 jednoznačně definovaná následujícím rekurzivním předpisem:*

$$q_1(G, x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } E(H) = \emptyset, \\ q_1(H - a) + q(H^{ab} - b) & \text{pokud } ab \in E(H). \end{cases}$$

Zaměříme se nyní na jiné vlastnosti pivotace. Víme již, že $G^{ab} = G^{ba}$. Dále platí, že tato operace je involucí (zobrazením, které je samo sobě inverzní), a tedy $G^{(ab)(ab)} = G$, přičemž zápisem $G^{(ab)(cd)}$ značíme postupnou pivotaci $(G^{ab})^{cd}$. Dále lze dokázat i jiné, již ne tak očividné vlastnosti.

Lemma 22 [6]. *Necht' a, b, c jsou odlišné vrcholy grafu G , přičemž $ab, ac \in E(G)$. Potom*

- (i) $G^{(ab)(ac)(ab)} = G_{bc}$
- (ii) $G^{(ab)(ac)} = (G^{ac})_{bc}$

Tvrzení 23 [6]. *Pokud je G souvislý graf, tak pro libovolnou hranu ab je G^{ab} také souvislý.*

4.2 Definice a základní poznatky

Definovali jsme funkci $q_1(G)$ pro proplétací grafy, která jim přiřazuje přirozené číslo. Můžeme ji však zobecnit pro libovolné grafy zavedením grafového polynomu o jedné proměnné, který nazveme *proplétací polynom* $q(G, x)$. Lze také používat značení $q(G)$ nebo q_G bez významového rozdílu. Tento polynom bude navíc splňovat podmínku, že pokud G bude proplétací graf, tak potom $q_1(G) = q(G, 1)$.

Proplétací polynom je definován iteračně s pomocí pivotací podle existujících hran v grafu.

Definice 24 [6]. (*Proplétací polynom*)

Nechť G je neorientovaný graf bez smyček a násobných hran o n vrcholech. Potom proplétací polynom $q(G, x)$ grafu G je definován jako:

$$q(G, x) = \begin{cases} x^n & \text{pokud } E(G) = \emptyset, \\ q(G - a, x) + q(G^{ab} - b, x) & \text{pokud } ab \in E(G). \end{cases}$$

Jak bylo dokázáno v [6], tak tímto předpisem je polynom dobře definovaný na prostých grafech. To znamená, že polynom je pro ně definován jednoznačně a nezávisí na pořadí hran použitých při rozkladu. Z této definice vyplývají následující vlastnosti.

Lemma 25 [6]. *Nechť G_1 a G_2 jsou neorientované grafy, pro které je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Dále mějme graf $G_1 \cup G_2$, kde $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ a $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Potom platí, že $q(G_1 \cup G_2, x) = q(G_1, x) \cdot q(G_2, x)$.*

Tvrzení 26 [6]. *Nechť G je prostý graf a $n = |V(G)|$. Pokud $n \geq 1$, tak $q(G, x)$ nemá konstantní člen.*

Tvrzení 27 [6]. *Nechť pro všechny vrcholy $a, b \in G$ jsou $q(G - a, x)$ a $q(G^{ab} - b, x)$ dobře definované a $q^{ab}(G, x) := q(G - a, x) + q(G^{ab} - b, x)$. Potom platí:*

(i) *Pokud je ab hrana v G , potom $q^{ab}(G, x) = q^{ba}(G, x)$.*

(ii) *Pokud jsou ab, ac hrany v G , potom $q^{ab}(G, x) = q^{ac}(G, x)$.*

Tvrzení 28 [6]. *Pro libovolný graf G a jeho libovolnou hranu ab platí $q(G^{ab}, x) = q(G, x)$.*

Jedna ze zajímavých vlastností polynomu $q(G, x)$ je jeho hodnota v $x = 2$.

Tvrzení 29 [6]. *Pro libovolný graf na n vrcholech platí $q(G, 2) = 2^n$.*

Následující tvrzení nám poskytuje odhad stupně polynomu pomocí nezávislosti grafu.

Tvrzení 30 [6]. *Nechť G je graf a H jeho libovolný podgraf. Potom $\deg(q(G, x)) \geq \deg(q(H, x))$. Navíc platí, že $\deg(q(G, x)) \geq \alpha(G)$, kde $\alpha(G)$ je nezávislost grafu G , tedy velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu G .*

Tvrzení 31 [6]. Je-li v $q(G, x)$ člen $a_i x^i$ členem s nejnižší mocninou, potom je $i = k(G)$, kde $k(G)$ je počet komponent v grafu G .

Poslední tvrzení této kapitoly pracuje s pojmem matice sousednosti, což je jeden ze způsobů maticového zobrazení grafu.

Definice 32 [1]. Necht' G je graf na vrcholech $\{v_1, \dots, v_n\}$. Matice sousednosti grafu G je reálná matice A o rozměrech $n \times n$, definovaná předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro $i, j = 1, \dots, n$.

Tvrzení 33 [10]. Necht' A je matice sousednosti grafu G řádu n a r je hodnota matice $I + A$ v aritmetice modulo 2, přičemž I je jednotková matice řádu n . Potom $q(G, -1) = (-1)^r 2^{n-r} = (-1)^n (-2)^{n-r}$.

4.3 Extrémní vlastnosti proplétacího polynomu

V této kapitole se budeme zabývat odhadem extrémních hodnot stupně proplétacího polynomu, jeho hodnoty v 1 a počtu nenulových členů ve spojitosti s počtem vrcholů a hran daného grafu.

Pomocí následujících dvou tvrzení můžeme odhadnout stupeň proplétacího polynomu.

Tvrzení 34 [6]. Pro libovolný graf G s n vrcholy je $\deg(q(G)) \leq n$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $G = E_n$. Dále platí $q(G, 1) \geq 1$, přičemž rovnost znovu platí právě tehdy, když $G = E_n$.

Tvrzení 35 [6]. Pokud je $q(G)$ ryze lineární polynom, potom je graf G úplný.

Nyní se zaměříme na dolní a horní odhady hodnoty $q(G, x)$ pro $x = 1$.

Lemma 36 [6]. Pro libovolný strom G s n vrcholy platí $q(G, 1) \leq F_{n+1}$, kde F_{n+1} je $(n+1)$ -ní Fibonacciho číslo. Rovnost nastává právě tehdy, když G je cesta P_{n-1} .

Následující dvě tvrzení dávají horní a dolní odhad hodnoty $q(G, 1)$ s využitím počtu hran grafu. Následující lemmata pracují s pojmem tripartitních grafů. Poznamenejme, že mezi úplné tripartitní grafy budeme řadit také diskrétní grafy a úplné bipartitní grafy s tím, že jednu nebo více partitních množin množiny vrcholů povolíme prázdné.

Tvrzení 37 [6]. Pro libovolný graf G je $q(G, 1) \geq |E(G)| + 1$, přičemž rovnost platí právě tehdy, když se G skládá z úplného tripartitního grafu a izolovaných vrcholů.

Tvrzení 38 [6]. Pro souvislý graf G s m hranami je $q(G, 1) \leq F_{m+2}$, přičemž rovnost je splněna pouze pro cestu P_m . Dále pokud se G skládá z komponent G_i s m_i hranami, potom je $q(G, 1) \leq \prod F_{m_i+2}$. Navíc vždy platí, že pokud G má m hran, potom $q(G, 1) \leq 2^m$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když se G skládá z m hran, které nemají po dvojicích žádný společný vrchol, a izolovaných vrcholů.

V následujících dvou tvrzeních odhadneme hodnotu $q(G, 1)$ s pomocí řádu grafu.

Tvrzení 39 [6]. Nechť G je graf s n vrcholy, přičemž žádný z nich není izolovaný. Potom je $q(G, 1) \geq n$ a rovnost nastává právě tehdy, když je G hvězdou nebo grafem na 4 vrcholech se dvěma vrcholově disjunktními hranami.

Tvrzení 40 [6]. Pro libovolný graf G s n vrcholy je $q(G, 1) \leq 2^{n-1}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $G = K_n$.

Následující tvrzení se týká počtu nenulových členů proplétacího polynomu.

Tvrzení 41 [6]. Pokud má graf G alespoň 3 vrcholy a polynom $q(G)$ má $n - 1$ nenulových členů, potom $q(G) = 2x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ a graf G je hvězda S_n .

Proplétací polynom v sobě skrývá nejen důležité strukturní informace pro rekonstrukci řetězců DNA, ale i jiné grafové invarianty, například Eulerovské tahy, nezávislost nebo počet komponent. Lze je určit pomocí dosazování různých hodnot do polynomu.

Tvrzení 42 [7, 9, 10]. Nechť G je graf bez násobných hran a $n = |V(G)|$.

1. $q(G, 1)$ je roven počtu indukovaných podgrafů G s lichým počtem perfektních párování.
2. Pokud G je prostý graf, potom $q(G, 0) = 0$ pokud $n \geq 1$.
3. $q(G, 3) = k \cdot q(G, -1)$ pro nějaké liché k .

4.4 Proplétací polynomy základních tříd grafů a "žebříkových" grafů

V této kapitole se podíváme na strukturu polynomů některých základních tříd grafů.

Tvrzení 43 [6]. Proplétací polynomy následujících tříd grafů vypadají takto:

1. (úplné grafy K_n) $q(K_n, x) = 2^{n-1}x$,
2. (hvězdy S_n) $q(S_n, x) = 2x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ pro $n \geq 2$,

3. (úplné bipartitní grafy $K_{m,n}$)
 $q(K_{m,n}, x) = (1 + x + \dots + x^{m-1})(1 + x + \dots + x^{n-1}) + x^m + x^n - 1,$
4. (cesty P_n s n hranami) $q(P_1, x) = 2x$, $q(P_2, x) = x^2 + 2x$ a pro $n \geq 3$ je
 $q(P_n, x) = q(P_{n-1}, x) + xq(P_{n-2}, x),$
5. (kružnice C_n) $q(C_3, x) = 4x$, dále pro $n \geq 4$ a $y = \sqrt{1 + 4x}$,

$$q(C_n, x) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^n + \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + \frac{y^4 - 10y^2 - 7}{16} \text{ pro sudé } n,$$

$$q(C_n, x) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^n + \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + \frac{y^2 - 5}{4} \text{ pro liché } n.$$

Předpisy většiny grafů z předcházejícího tvrzení lze jednoduše najít i pro velké hodnoty n . V případě cest, které v předpisech využívají rekurzi a kružnic, ve kterých se objevuje substituce za odmocninu, už však může být odvození tvaru polynomu složité i pro malé hodnoty n . V následující tabulce jsou proto znázorněny předpisy proplétacích polynomů cest a kružnic pro hodnoty $n = 1, \dots, 10$ vypočtené s pomocí programu Wolfram Mathematica.

n	$q(P_n, x)$	$q(C_n, x)$
1	$2x$	-
2	$x^2 + 2x$	-
3	$3x^2 + 2x$	$4x$
4	$x^3 + 5x^2 + 2x$	$3x^2 + 2x$
5	$4x^3 + 7x^2 + 2x$	$5x^2 + 6x$
6	$x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2x$	$2x^3 + 10x^2 + 4x$
7	$5x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 2x$	$7x^3 + 14x^2 + 8x$
8	$x^5 + 14x^4 + 25x^3 + 13x^2 + 2x$	$2x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 6x$
9	$6x^5 + 30x^4 + 36x^3 + 15x^2 + 2x$	$9x^4 + 30x^3 + 27x^2 + 10x$
10	$x^6 + 20x^5 + 55x^4 + 49x^3 + 17x^2 + 2x$	$2x^5 + 25x^4 + 50x^3 + 36x^2 + 8x$

Tabulka 1: Proplétací polynomy pro cesty P_n a kružnice C_n v závislosti na délce n .

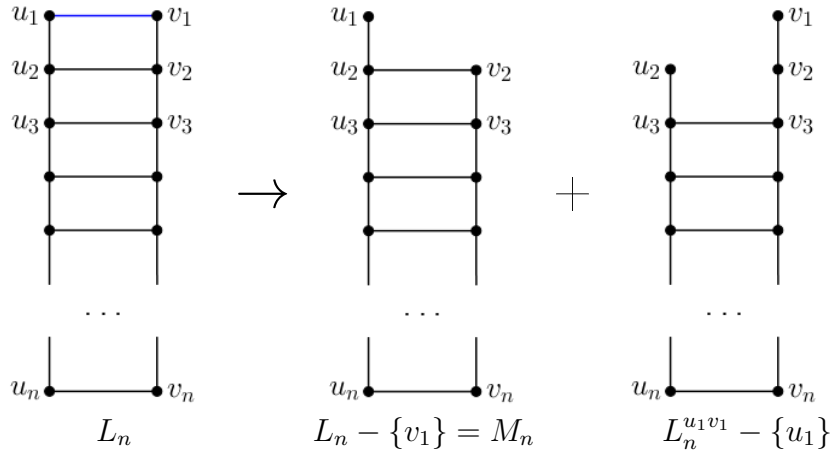
Hlavní motivací pro vznik této práce byl článek od *A. Li* a *Q. Wu* [8], kde je zkoumán tvar a vlastnosti proplétacího polynomu pro třídu tzv. žebříkových grafů. Tyto grafy nejsou regulární, ale mají blízko k tomu, aby byly 3-regulární.

Definice 44 [8]. Necht L_n je graf s $2n$ vrcholy a $3n - 2$ hranami s následující strukturou:

$$V(L_n) = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\},$$

$$E(L_n) = \{u_1v_1, \dots, u_nv_n, u_iu_{i+1}, v_iv_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Tento graf L_n budeme nazývat n -příčkový žebříkový graf.



Obrázek 2: [8] Rozklad 1 - Pivotace žebříkového grafu L_n

Dále je v článku obdobně definován graf $M_n = L_n - \{u_1\}$. Oba tyto grafy vidíme v obrázku 2.

Z definice lze jednoduše ověřit, že $L_1 = P_1$, $L_2 = C_4$ a $M_2 = P_2$. Díky tomu lze najít předpis polynomu pro L_n a M_n , pokud je n malé.

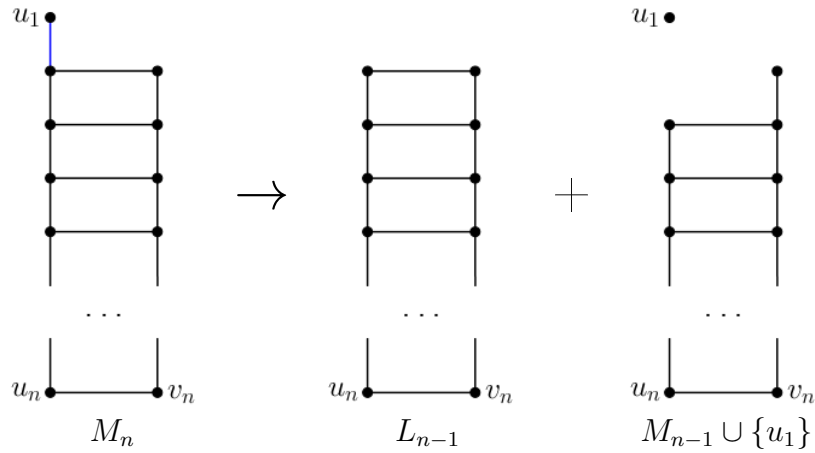
Lemma 45 [8]. *Mějme žebříkový graf L_n . Potom*

1. $q(L_1, x) = 2x$, $q(L_2, x) = 3x^2 + 2x$;
2. $q(L_3, x) = 2x^3 + 10x^2 + 4x$;
3. $q(M_2, x) = x^2 + 2x$, $q(M_3, x) = x^3 + 5x^2 + 2x$.

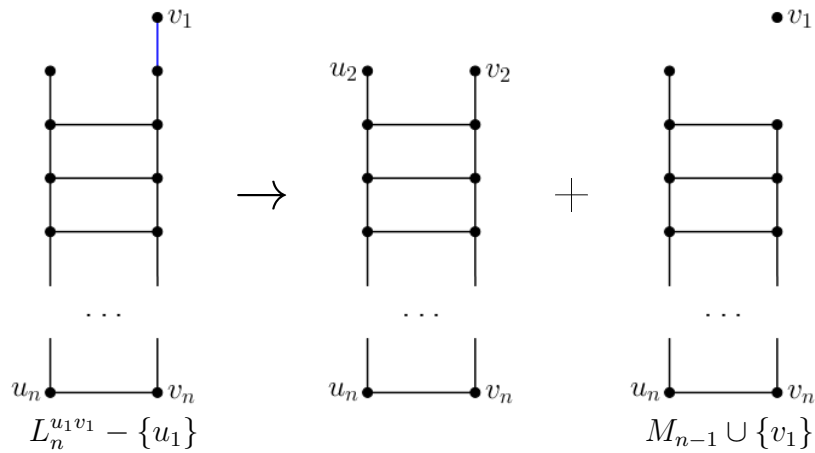
Následně byly zjištěny vztahy mezi proplétacími polynomy grafů L_n a M_n , které lze dokázat pomocí postupných rozkladů, které vidíme na obrázcích 2 až 6.

Lemma 46 [8]. *Pro $n > 3$ platí*

1. $q(L_n, x) = q(M_n, x) + x q(M_{n-1}, x) + q(M_{n-1}, x) + x q(M_{n-2}, x) + x^2 q(L_{n-3}, x)$;
2. $q(M_n, x) = q(L_{n-1}, x) + x q(M_{n-1}, x)$;
3. $q(M_n, x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-2} x^k L_{n-k-1}$.



Obrázek 3: [8] Rozklad 2 - Pivotace grafu M_n



Obrázek 4: [8] Rozklad 3

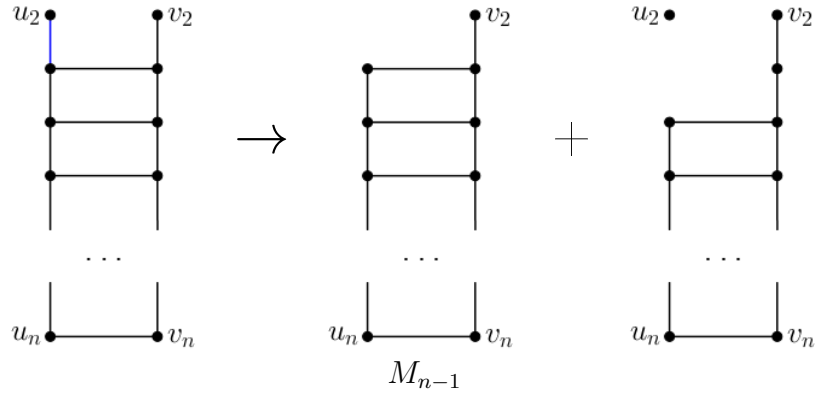
Díky těmto vztahům lze sestavit iterativní předpis pro $q(L_n, x)$.

Tvrzení 47 [8]. Pro $n > 3$ platí

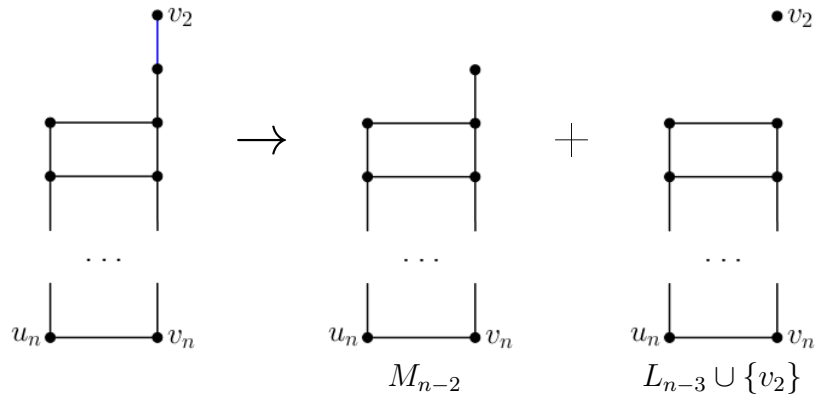
$$q(L_n, x) = 2(1+x) \left(x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} x^{n-k-2} q(L_k, x) \right) + q(L_{n-1}, x) - q(L_{n-2}, x) + x^2 q(L_{n-3}, x). \quad (1)$$

Lze také najít opakující se vzory pro určité hodnoty nebo koeficienty $q(L_n, x)$. Podle lematu 45 je stupeň $q(L_i, x)$ roven i pro $i = 1, 2, 3$.

Tvrzení 48 [8]. Nechť L_n je n -příčkový žebříkový graf. Potom $q(L_n)$ je stupně n .



Obrázek 5: [8] Rozklad 4



Obrázek 6: [8] Rozklad 5

Předchozí tvrzení lze dokázat použitím matematické indukce na předpisu z tvrzení 47.

Definice 49 [8]. Mějme polynom $q(L_n, x)$. Definujme následující koeficienty:

$$a_n = q(L_n, -1), \quad b_n = q(L_n, 2).$$

Dále označme $\text{lc}(L_n)$ jako leading coefficient $q(L_n, x)$, tedy koeficient u členu s největší mocninou x , c_n jako koeficient u členu s druhou největší mocninou x a d_n jako koeficient u lineárního členu.

S využitím této definice můžeme proplétací polynom $q(L_n, x)$ přepsat jako

$$q(L_n, x) = \text{lc}(L_n) x^n + c_n x^{n-1} + \dots + d_n x.$$

Tvrzení 50 [8]. Mějme žebříkový graf L_n . Pro $n \geq 1$ platí:

1. $\text{lc}(L_1) = 2, \text{lc}(L_2) = 3$. Pro $n > 2$ je $\text{lc}(L_n) = 2$;
2. $\{a_n\}_{n \geq 1}$ je posloupnost s periodou 4 tvořená opakující se sekvencí $-2, 1, 4, 1$.
Explicitně lze jednotlivé prvky posloupnosti napsat jako

$$a_n = 1 + 3 \cdot i^{n+1} \cdot \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2};$$

3. $b_n = 4^n = 2^{|\mathcal{V}(L_n)|}$;
4. Necht x je liché číslo. Potom $q(L_n, x)$ je sudý, když n je liché a $q(L_n, x)$ je lichý, když n je sudé. Navíc pokud x je sudé, tak i $q(L_n, x)$ je sudý;
5. $c_n = 4n = 2|\mathcal{V}(L_n)|$ pro $n \geq 4$;
6. $d_n = 2F_n$, kde F_n je n -té Fibonacciho číslo.

5 Vlastní výsledky

5.1 Cesta v grafu

V této části se budeme zabývat problematikou vzhledu proplétacího polynomu u grafů, ve kterých existuje tzv. *volná cesta*. Mějme graf G , jehož podgrafem je cesta P délky alespoň 2 s koncovými vrcholy x a y taková, že $d_G(y) = 1$, $d_G(x) > 2$ a $d_G(u) = 2 \quad \forall u \in V(P) \setminus \{x, y\}$. Nazvěme takovou cestu volnou cestou v G . Dále zaveďme značení G_n pro graf obsahující volnou cestu délky n .

Tvrzení 51. *Nechť G_n je graf s volnou cestou P délky $n \geq 2$. Potom*

$$q(G_n, x) = a_n \cdot q(G_0, x) + b_n \cdot q(G_1, x)$$

kde

$$a_n = x \cdot b_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-1}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 1,$$

přičemž graf G_0 vznikne z G_n odstraněním všech vrcholů u cesty P s $d_P(u) \leq 2$, a G_1 vznikne z G_n nahrazením cesty P hranou.

Důkaz. Označme $p_0 p_1 \dots p_n$ vrcholy cesty P tak, že $d_G(p_0) \geq 3$ a $p_i p_{i+1} \in H(G)$, kde $i = 0, \dots, n-1$. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n .

1. Pro $n = 2$ můžeme provést pivotaci grafu G_2 podle hrany $p_1 p_2$. Touto operací dostaneme vyjádření $q(G_2, x) = x q(G_0, x) + q(G_1, x)$, což znamená, že $a_2 = x = x \cdot 1 = x \cdot b_1$ a $b_2 = 1 = 0 + 1 = a_1 + b_1$. Oba výrazy tedy vyhovují tvrzení.
2. Nechť tedy pro všechna $k < n$ platí $q(G_k, x) = (x \cdot b_{k-1}) q(G_0, x) + (a_{k-1} + b_{k-1}) q(G_1, x)$.
3. Dokážeme, že tvrzení platí pro libovolné $n > 2$. Provedeme pivotaci grafu G_n podle hrany $p_{n-1} p_n$. Dostaneme tím předpis $q(G_n, x) = x q(G_{n-2}, x) + q(G_{n-1}, x)$. Bude tedy platit, že $a_n = x \cdot a_{n-2} + a_{n-1}$ a $b_n = x \cdot b_{n-2} + b_{n-1}$. Pro graf G_{n-2} známe výrazy a_{n-2} a b_{n-2} . Z indukčního předpokladu víme, že pro graf G_{n-1} vyjdou výrazy $a_{n-1} = x \cdot b_{n-2}$ a $b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2}$. Dosazením do rovnic výrazů a_n a b_n dostaneme $a_n = x \cdot a_{n-2} + a_{n-1} = x \cdot a_{n-2} + x \cdot b_{n-2} = x \cdot (a_{n-2} + b_{n-2}) = x \cdot b_{n-1}$, a podobně $b_n = x \cdot b_{n-2} + b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}$. \square

k	a_k	b_k
0	1	0
1	0	1
2	x	1
3	x	$x + 1$
4	$x^2 + x$	$2x + 1$
5	$2x^2 + x$	$x^2 + 3x + 1$
6	$x^3 + 3x^2 + x$	$3x^2 + 4x + 1$
7	$3x^3 + 4x^2 + x$	$x^3 + 6x^2 + 5x + 1$
8	$x^4 + 6x^3 + 5x^2 + x$	$4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$
9	$4x^4 + 10x^3 + 6x^2 + x$	$x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1$
10	$x^5 + 10x^4 + 15x^3 + 7x^2 + x$	$5x^4 + 20x^3 + 21x^2 + 8x + 1$

Tabulka 2: Výrazy a_k a b_k pro malá k .

5.2 Zkoumání "šestiúhelníkových" grafů S_n

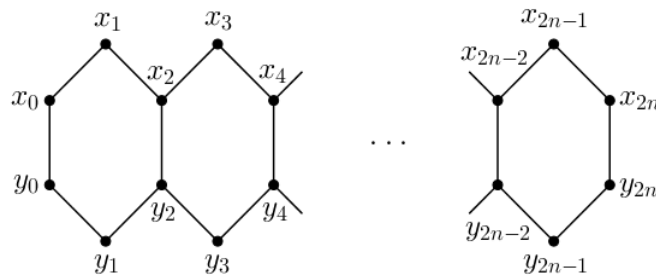
V této části budeme zkoumat tvar a vlastnosti proplétacího polynomu pro "šestiúhelníkové" grafy S_n .

Graf S_n budeme definovat jako graf s $4n+2$ vrcholy a $5n+1$ hranami s následující strukturou:

$$V(S_n) = \{x_0, x_1, \dots, x_{2n}, y_0, y_1, \dots, y_{2n}\},$$

$$E(S_n) = \{x_0x_1, \dots, x_{2n-1}x_{2n}, y_0y_1, \dots, y_{2n-1}y_{2n}\} \cup \{x_{2i}y_{2i}, i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Číslo n zde bude vyjadřovat počet stěn grafu, které jsou ohraničeny kružnicí délky 6. Námi vytvořený graf bude tedy vypadat následovně:



Obrázek 7: Graf S_n

Značení vrcholů na obrázku budeme v následujícím textu dodržovat. Obdobně definujeme grafy C_n , kde $V(C_n) = V(S_n) \cup \{x_{2n+1}\}$ a $E(C_n) = E(S_n) \cup \{x_{2n}x_{2n+1}\}$, a H_n , kde $V(H_n) = V(S_n) \cup \{x_{2n+1}, y_{2n+1}\}$ a $E(H_n) = E(S_n) \cup \{x_{2n}x_{2n+1}, y_{2n}y_{2n+1}\}$.

Věta 52. Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$q(S_n, x) = x^2 q(S_{n-2}, x) + (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + (x^2 + 2x) q(C_{n-2}, x) + q(H_{n-1}, x) + (x + 1) q(H_{n-2}, x), \quad (2)$$

kde

$$q(C_n, x) = q(S_n, x) + x^2 q(C_{n-1}, x) + x q(H_{n-1}, x), \quad (3)$$

$$q(H_n, x) = q(C_n, x) + (x^2 + x) q(H_{n-1}, x) + x^2 q(C_{n-1}, x). \quad (4)$$

Důkaz. Pivotací grafu S_n podle hrany $x_{2n} y_{2n}$ získáme grafy A_{n-1} a B , viz obrázek 8. Dále pivotujeme B podle hrany $x_{2n-1} y_{2n-1}$ a postupem vyobrazeným v obrázcích 9-13 získáme grafy $C_{n-1} \cup \{x_{2n}\}$, C_{n-1} , $A_{n-2} \cup \{x_{2n}\}$, A_{n-2} , $S_{n-2} \cup \{x_{2n-2}, y_{2n-2}\}$ a $C_{n-2} \cup \{x_{2n-2}\}$. V obrázku 15 pivotací A_{n-1} podle hrany $y_{2n} y_{2n-1}$ dostaneme grafy $C_{n-1} \cup \{y_{2n}\}$ a H_{n-1} . Nyní můžeme sestavit předpis pro S_n .

$$\begin{aligned} q(S_n, x) &= q(A_{n-1}, x) + q(B, x) = q(A_{n-1}, x) + x q(C_{n-1}, x) + q(D, x) \\ &= x q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + x q(C_{n-1}, x) + q(D, x) \\ &= 2x q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + q(C_{n-1}, x) + q(E, x) \\ &= (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + x q(A_{n-2}, x) + q(F, x) \\ &= (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + x q(A_{n-2}, x) + \\ &\quad + q(A_{n-2}, x) + x q(G, x) \\ &= (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + (x + 1) q(A_{n-2}, x) + \\ &\quad + x [x q(S_{n-2}, x) + q(C_{n-2}, x)] \\ &= x^2 q(S_{n-2}, x) + (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + q(H_{n-1}, x) + \\ &\quad + (x^2 + x) q(C_{n-2}, x) + (x + 1) q(H_{n-2}, x) + x q(C_{n-2}, x) \\ &= x^2 q(S_{n-2}, x) + (2x + 1) q(C_{n-1}, x) + (x^2 + 2x) q(C_{n-2}, x) + \\ &\quad + q(H_{n-1}, x) + (x + 1) q(H_{n-2}, x). \end{aligned}$$

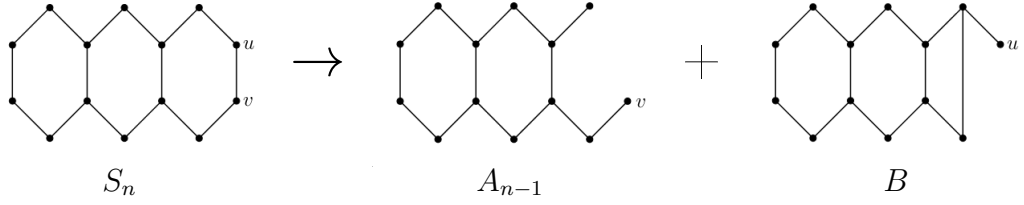
Předpis pro C_n získáme z obrázku 14, kde pivotací C_{n-1} podle hrany $y_{2n-2} y_{2n-1}$ získáme grafy $A_{n-2} \cup \{y_{2n-1}\}$ a S_{n-1} . Z obrázku 15 již víme, jak dopadne pivotace A_{n-2} . Pokud budeme uvažovat index n místo $n - 1$, tak můžeme sestavit předpis pro C_n .

$$\begin{aligned} q(C_{n-1}, x) &= x q(A_{n-2}, x) + q(S_{n-1}, x) \\ &= q(S_{n-1}, x) + x^2 q(C_{n-2}, x) + x q(H_{n-2}, x), \\ q(C_n, x) &= q(S_n, x) + x^2 q(C_{n-1}, x) + x q(H_{n-1}, x). \end{aligned}$$

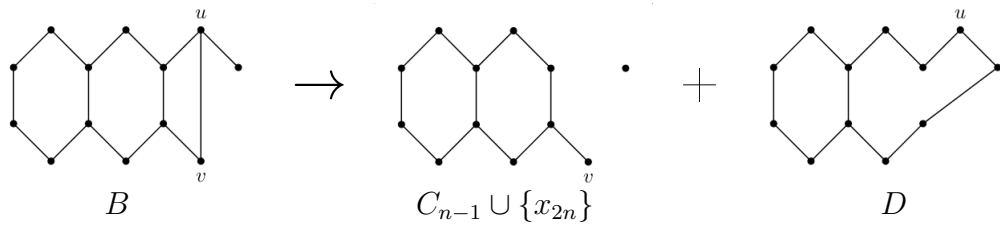
Předpis pro H_n získáme z obrázku 16, kde pivotací H_{n-1} podle hrany $y_{2n-2} y_{2n-1}$ získáme grafy C_{n-1} a I . Graf I potom v obrázku 17 pivotujeme podle hrany $x_{2n-2} x_{2n-1}$, čímž získáme grafy $H_{n-2} \cup \{x_{2n-1}\}$ a A_{n-2} . Znovu využijeme rozkladu 8 k pivotaci A_{n-2} . Pokud budeme uvažovat index n místo $n - 1$, tak můžeme sestavit předpis pro H_n .

$$\begin{aligned} q(H_{n-1}, x) &= q(C_{n-1}, x) + x q(I, x) \\ &= q(C_{n-1}, x) + x [x q(H_{n-2}, x) + q(A_{n-2}, x)] \\ &= q(C_{n-1}, x) + x [(x + 1) q(H_{n-2}, x) + x q(C_{n-2}, x)] \\ &= q(C_{n-1}, x) + (x^2 + x) q(H_{n-2}, x) + x^2 q(C_{n-2}, x), \\ q(H_n, x) &= q(C_n, x) + (x^2 + x) q(H_{n-1}, x) + x^2 q(C_{n-1}, x). \end{aligned}$$

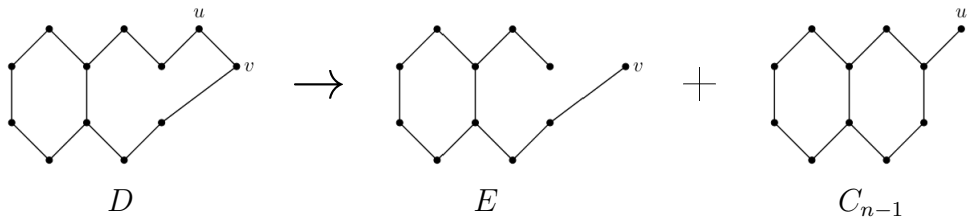
□



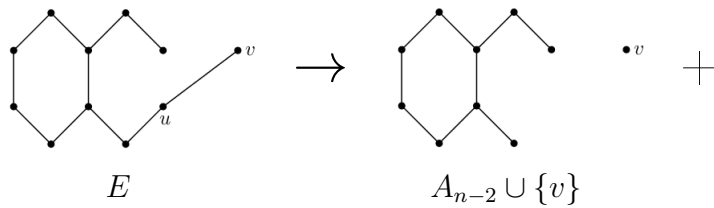
Obrázek 8: Rozklad 1



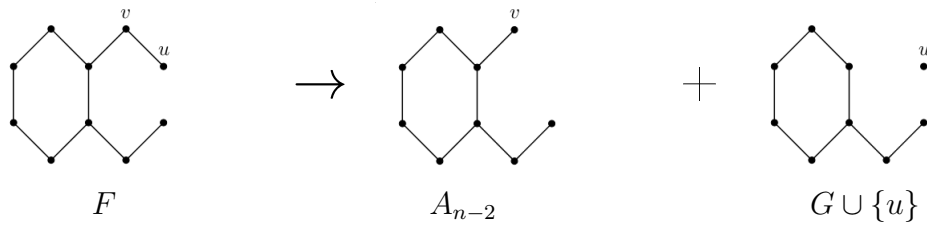
Obrázek 9: Rozklad 2



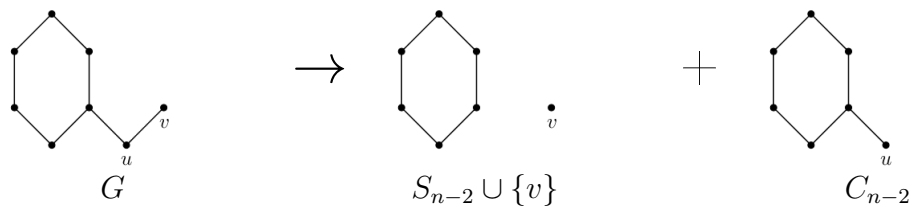
Obrázek 10: Rozklad 3



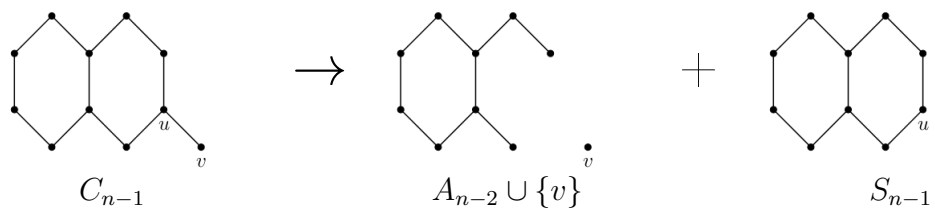
Obrázek 11: Rozklad 4



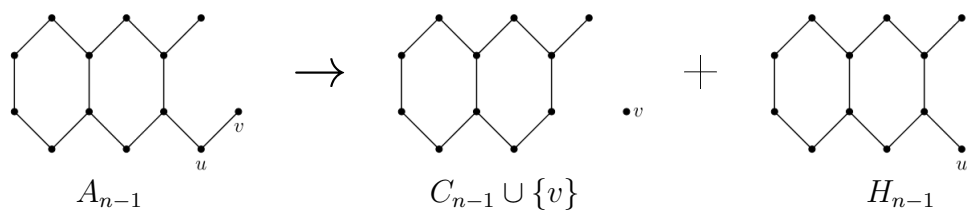
Obrázek 12: Rozklad 5



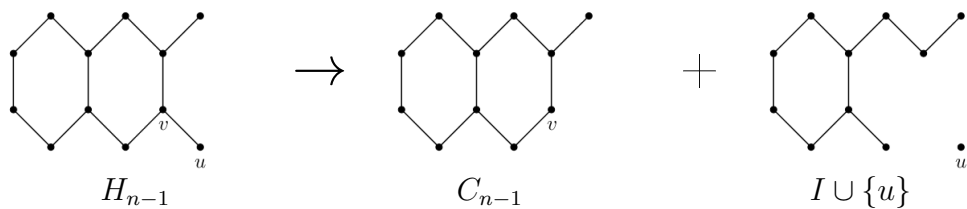
Obrázek 13: Rozklad 6



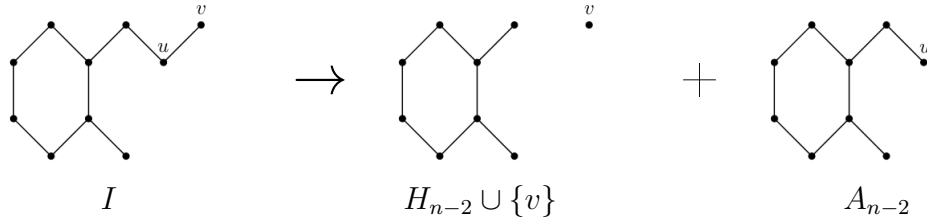
Obrázek 14: Rozklad 7



Obrázek 15: Rozklad 8



Obrázek 16: Rozklad 9



Obrázek 17: Rozklad 10

V následujícím příkladě uvedeme předpisy polynomů $q(S_n, x)$, $q(C_n, x)$ a $q(H_n, x)$ pro malé hodnoty n .

Příklad 5.1. $q(S_0, x) = q(P_1, x) = 2x$,
 $q(S_1, x) = 2x^3 + 10x^2 + 4x$,
 $q(S_2, x) = 2x^5 + 21x^4 + 54x^3 + 43x^2 + 10x$,
 $q(S_3, x) = 2x^7 + 37x^6 + 164x^5 + 329x^4 + 316x^3 + 144x^2 + 24x$,
 $q(C_0, x) = q(P_2, x) = x^2 + 2x$,
 $q(C_1, x) = x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 4x$,
 $q(C_2, x) = x^6 + 14x^5 + 47x^4 + 72x^3 + 47x^2 + 10x$,
 $q(C_3, x) = x^8 + 23x^7 + 124x^6 + 323x^5 + 474x^4 + 381x^3 + 154x^2 + 24x$,
 $q(H_0, x) = q(P_3, x) = 3x^2 + 2x$,
 $q(H_1, x) = 5x^4 + 14x^3 + 14x^2 + 4x$,
 $q(H_2, x) = 7x^6 + 40x^5 + 87x^4 + 94x^3 + 51x^2 + 10x$,
 $q(H_3, x) = 9x^8 + 84x^7 + 298x^6 + 576x^5 + 666x^4 + 452x^3 + 164x^2 + 24x$.

Poznámka: V dalším textu budeme pro přehlednost a šetření místa používat místo $q(G, x)$ označení $q(G)$.

Pro další práci s proplétacími polynomy grafů bude nutné zjistit jejich stupeň v závislosti na hodnotě čísla n .

Tvrzení 53. Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí:

$$\begin{aligned} \deg(q(S_n)) &= 2n + 1, \\ \deg(q(C_n)) &= 2n + 2, \\ \deg(q(H_n)) &= 2n + 2. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n .

- Pro $n = 0$ můžeme tvrzení ověřit s využitím předpisů z příkladu 5.1.

$$\begin{aligned} \deg(q(S_0)) &= \deg(2x) = 1 = 2 \cdot 0 + 1, \\ \deg(q(C_0)) &= \deg(x^2 + 2x) = 2 = 2 \cdot 0 + 2, \\ \deg(q(H_0)) &= \deg(3x^2 + 2x) = 2 = 2 \cdot 0 + 2. \end{aligned}$$

- Nechť tedy pro všechna $k < n$ platí $\deg(q(S_k)) = 2k + 1$,
 $\deg(q(C_k)) = 2k + 2$, $\deg(q(H_k)) = 2k + 2$.

3. Dokážeme, že tvrzení platí pro n s využitím předpisů (1) - (3).

Pro stupeň S_n bude platit

$$\deg(q(S_n)) = \max\{\deg(q(S_{n-2})) + 2, \deg(q(C_{n-1})) + 1, \deg(q(C_{n-2})) + 2, \deg(q(H_{n-1})), \deg(q(H_{n-2})) + 1\}.$$

S využitím indukčního předpokladu dosadíme a dostaneme

$$\deg(q(S_n)) = \max\{2n - 1, 2n + 1, 2n, 2n, 2n - 1\} = 2n + 1.$$

Analogicky pro C_n bude platit

$$\deg(q(C_n)) = \max\{\deg(q(S_n)), \deg(q(C_{n-1})) + 2, \deg(q(H_{n-1})) + 1\}.$$

$$\text{Znovu dosadíme a získáme } \deg(q(C_n)) = \max\{2n + 1, 2n + 2, 2n - 1\} = 2n + 2.$$

Analogicky pro H_n bude platit

$$\deg(q(H_n)) = \max\{\deg(q(C_n)), \deg(q(H_{n-1})) + 2, \deg(q(C_{n-1})) + 2\}.$$

$$\text{Ještě jednou dosadíme a dostaneme } \deg(q(H_n)) = \max\{2n + 2, 2n + 2, 2n + 2\} = 2n + 2. \quad \square$$

S rostoucí hodnotou čísla n můžeme také pozorovat jisté vzory, kterými se řídí vybrané koeficienty v proplétacích polynomech. Můžeme například zkoumat, jak se vyvíjí leading coefficient $\text{lc}(G)$.

Tvrzení 54. *Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí:*

$$\text{lc}(S_n) = 2,$$

$$\text{lc}(C_n) = 1,$$

$$\text{lc}(H_n) = 2n + 3.$$

Důkaz. Koeficient u největší mocniny budou ovlivňovat pouze mnohočleny, které mají maximální stupeň. S použitím tvrzení 53 určíme stupně jednotlivých sčítanců v předpisech (1) - (3). Z předpisu (2) tímto pro graf C_n získáme:

$$\left. \begin{array}{l} \deg(q(S_n)) = 2n + 1 \\ \deg(x^2 q(C_{n-1})) = 2n + 2 \\ \deg(x q(H_{n-1})) = 2n + 1 \end{array} \right\} \text{lc}(C_n) = \text{lc}(C_{n-1}).$$

Vidíme, že maximální stupeň má pouze mnohočlen $x^2 q(C_{n-1})$. Znamená to, že leading coefficient u grafu C_n bude stejný jako u grafu C_{n-1} . Pokud budeme postupně snižovat hodnotu n , tak dospějeme k $\text{lc}(C_0)$, který je roven 1. Dostáváme tedy, že $\forall n \geq 0 : \text{lc}(C_n) = \text{lc}(C_{n-1}) = \dots = \text{lc}(C_1) = \text{lc}(C_0) = 1$.

Nyní určíme stejným způsobem z (3) leading coefficient pro graf H_n :

$$\left. \begin{array}{l} \deg(q(C_n)) = 2n + 2 \\ \deg(x^2 q(H_{n-1})) = 2n + 2 \\ \deg(x q(H_{n-1})) = 2n + 1 \\ \deg(x^2 q(C_{n-1})) = 2n + 2 \end{array} \right\} \text{lc}(H_n) = \text{lc}(C_n) + \text{lc}(H_{n-1}) + \text{lc}(C_{n-1}).$$

Vidíme, že maximálního stupně nabývají mnohočleny $q(C_n)$, $x^2 q(H_{n-1})$ a $x^2 q(C_{n-1})$. To znamená, že leading coefficient grafu H_n bude součtem leading coefficientů grafů

C_n, H_{n-1} a C_{n-1} . My už však víme, že leading coefficienty jsou u C_n a C_{n-1} stejné a jsou oba rovny 1. Postupným snižováním hodnoty n provedeme následující výpočet:

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 0 : \text{lc}(H_n) &= \text{lc}(C_n) + \text{lc}(H_{n-1}) + \text{lc}(C_{n-1}) \\
&= \text{lc}(H_{n-1}) + 2 \cdot \text{lc}(C_{n-1}) \\
&= \text{lc}(H_{n-1}) + 2 \cdot 1 \\
&= \text{lc}(H_{n-2}) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\
&= \text{lc}(H_0) + 2n \cdot 1 = 3 + 2n \cdot 1 = 2n + 3.
\end{aligned}$$

Nakonec použijeme (1) a najdeme leading coefficient pro graf S_n :

$$\left. \begin{array}{l}
\text{deg}(x^2 q(S_{n-2})) = 2n - 3 + 2 = 2n - 1 \\
\text{deg}(2x q(C_{n-1})) = 2n + 1 \\
\text{deg}(q(C_{n-1})) = 2n \\
\text{deg}(x^2 q(C_{n-2})) = 2n - 2 + 2 = 2n \\
\text{deg}(2x q(C_{n-2})) = 2n - 2 + 1 = 2n - 1 \\
\text{deg}(q(H_{n-1})) = 2n \\
\text{deg}(x q(H_{n-2})) = 2n - 2 + 1 = 2n - 1 \\
\text{deg}(q(H_{n-2})) = 2n - 2
\end{array} \right\} \text{lc}(S_n) = 2 \cdot \text{lc}(C_{n-1}).$$

Zde má maximální stupeň pouze mnohočlen $2x q(C_{n-1})$. Leading coefficient grafu S_n tedy bude dvojnásobkem leading coefficientu u C_{n-1} . Stejným postupem jako u C_n tedy zjistíme, že $\forall n \geq 0 : \text{lc}(S_n) = 2 \cdot \text{lc}(C_{n-1}) = \dots = 2 \cdot \text{lc}(C_0) = 2 \cdot 1 = 2$. \square

I u lineárních členů proplétacích polynomů zkoumaných grafů můžeme určit hodnotu jejich koeficientů $\text{lin}(C_n)$, $\text{lin}(H_n)$ a $\text{lin}(S_n)$ v závislosti na hodnotě n .

Tvrzení 55. *Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí:*

$$\text{lin}(S_n) = \begin{cases} 2 & n = 0, \\ 4 & n = 1, \\ 2 \cdot \text{lin}(S_{n-1}) + \text{lin}(S_{n-2}) & n \geq 2. \end{cases}$$

Navíc platí $\text{lin}(C_n) = \text{lin}(H_n) = \text{lin}(S_n)$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme s využitím indukce podle n . Pro $n = 0, 1$ vyplývá tvrzení z předpisů v příkladě 5.1.

Pro $n > 2$: grafy, kterými se v této práci zabýváme, jsou souvislé a mají tedy jednu komponentu. Z tvrzení 31 proto vyplývá, že nemají žádný konstantní člen a mají vždy lineární člen. Pro graf S_n lze hodnotu lineárního členu vyčíst z předpisu (1), přičemž bereme v potaz pouze polynomy grafů, které jsou násobeny konstantou. Z (1) tedy dostaneme $\text{lin}(S_n) = \text{lin}(C_{n-1}) + \text{lin}(H_{n-1}) + \text{lin}(H_{n-2})$.

Dále stejným způsobem určíme z (3), že $\text{lin}(H_n) = \text{lin}(C_n)$ a z (2), že $\text{lin}(C_n) = \text{lin}(S_n)$, a proto i $\text{lin}(H_n) = \text{lin}(S_n)$. Tím jsme mimo jiné dokázali platnost druhé části tvrzení. S těmito znalostmi zpětně dosadíme a získáme $\text{lin}(S_n) = \text{lin}(S_{n-1}) + \text{lin}(S_{n-1}) + \text{lin}(S_{n-2}) = 2 \cdot \text{lin}(S_{n-1}) + \text{lin}(S_{n-2})$. \square

Dále budeme zkoumat vývoj hodnoty $q(G, -1)$, jejíž význam a vztah k matici sousednosti byl zmíněn například v [10].

Tvrzení 56. *Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí:*

$$q(S_n, -1) = \begin{cases} -2 & n \text{ je sudé,} \\ 4 & n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Důkaz. I zde dokážeme tvrzení pomocí indukce podle n .

Pro $n = 0$ s využitím příkladu 5.1 dostaneme $q(S_0, -1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

Pro $n = 1$ obdobně získáme $q(S_1, -1) = -2 + 10 - 4 = 4$.

Pro $n \geq 2$: Dosazením do (1) dostaneme $q(S_n, -1) = (-1)^2 \cdot q(S_{n-2}, -1) + (-2 + 1) \cdot q(C_{n-1}, -1) + ((-1)^2 - 2) \cdot q(C_{n-2}, -1) + q(H_{n-1}, -1) + (-1 + 1) \cdot q(H_{n-2}, -1) = q(S_{n-2}, -1) - q(C_{n-1}, -1) - q(C_{n-2}, -1) + q(H_{n-1}, -1)$. Z (3) získáme $q(H_n, -1) = q(C_n, -1) + ((-1)^2 - 1) \cdot q(H_{n-1}, -1) + (-1)^2 \cdot q(C_{n-1}, -1) = q(C_n, -1) + q(C_{n-1}, -1)$. Pokud použijeme tento vztah pro $n - 1$ a zpětně dosadíme, dostaneme $q(S_n, -1) = q(S_{n-2}, -1) - q(C_{n-1}, -1) - q(C_{n-2}, -1) + q(C_{n-1}, -1) + q(C_{n-2}, -1) = q(S_{n-2}, -1)$. Platí tedy $q(S_n, -1) = q(S_{n-2}, -1)$.

Pro sudá n platí $q(S_n, -1) = q(S_0, -1) = -2$. Pro lichá n platí $q(S_n, -1) = q(S_1, -1) = 4$. \square

Nakonec se podívejme na délku trvání výpočtu proplétacích polynomů definovaných v této kapitole v závislosti na číslu n (viz tabulka 3). K výpočtu jsme využili program Wolfram Mathematica verze 11.0.1.0, ve kterém jsme sestavili následující skript:

```
Cecko[n_] := x^2 * Cecko[n - 1] + x * Hacko[n - 1] + Esko[n];
Hacko[n_] := Cecko[n] + x^2 * Cecko[n - 1] + (x^2 + x) * Hacko[n - 1];
Esko[n_] := x^2 * Esko[n - 2] + (2x + 1) * Cecko[n - 1] + (x^2 + 2x) * Cecko[n - 2] +
  Hacko[n - 1] + (x + 1) * Hacko[n - 2];
```

```
Cecko[0] = x^2 + 2x;
Hacko[0] = 3x^2 + 2x;
Esko[0] = 2x;
Esko[1] = 2x^3 + 10x^2 + 4x;
pocet = 10;
```

```
For[i = 0, i < pocet + 1, i ++, Print[Timing[Simplify[Cecko[i]];]]]
For[i = 0, i < pocet + 1, i ++, Print[Timing[Simplify[Hacko[i]];]]]
For[i = 0, i < pocet + 1, i ++, Print[Timing[Simplify[Esko[i]];]]]
```

Funkce *Cecko*, *Hacko* a *Esko* s parametrem n jsou uživatelem definované funkce, které vypočítají proplétací polynom pro grafy C_n , H_n a S_n . Jelikož pracují rekurzivně, tak je nutné definovat výrazy *Cecko*[0], *Hacko*[0], *Esko*[0] a *Esko*[1]. V případech, kdy funkce *Timing*, která měří čas výpočtu, vracela hodnotu 0., byla tato

hodnota nahrazena hodnotou 0.0156001 jakožto nejnižší zaznamenaný časový okamžik programem Wolfram Mathematica.

Výpočty byly provedeny na přenosném počítači Dell Inspiron 7520 s operačním systémem Windows 7, procesorem Intel Core i7-3612QM s 8GB paměti RAM. Poznamenejme, že pro větší hodnoty n zmíněné polynomy obsahují větší množství členů a jednotlivé koeficienty velmi rychle rostou, jak je patrné z příkladu 5.1. Proto je zde neuvádíme.

n	C_n	H_n	S_n
0	-	-	-
1	0.0156001	0.0156001	-
2	0.0156001	0.0156001	0.0156001
3	0.0156001	0.0156001	0.0156001
4	0.0156001	0.0156001	0.0156001
5	0.01872012	0.0312002	0.01872012
6	0.14352092	0.2028013	0.08424054
7	0.79872512	1.08888698	0.44928288
8	5.16675312	6.9264444	2.34313502
9	27.20345438	36.71639536	15.00105616
10	146.4942991	198.2959911	80.26875454

Tabulka 3: Výpočetní čas potřebný k nalezení předpisu pro proplétací polynomy grafů C_n , H_n a S_n programem Wolfram Mathematica v sekundách

6 Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s pojmem proplétacího polynomu, popsat jeho základní vlastnosti a určit jeho tvar pro vybranou třídu šestiúhelníkových grafů. V druhé kapitole jsme se zaměřili na historii polynomu a problém, k jehož vyřešení byl stvořen. Dále jsme ho ve čtvrté kapitole podrobněji definovali a poukázali na jeho vlastnosti. V druhé části čtvrté kapitoly jsme zkoumali hodnoty polynomu při dosazení za proměnnou a sepsali jeho tvary pro některé základní třídy grafů, jako například cesty nebo kružnice. Také jsme zkoumali chování proplétacího polynomu žebříkových grafů, což byla problematika, která nás inspirovala k vytvoření této práce. V páté kapitole jsme prezentovali vlastní výsledky. Nejprve jsme se pokusili najít rekurzivní formuli, která by usnadnila hledání polynomu u grafů, které obsahují volnou cestu. Dále jsme našli předpis proplétacího polynomu pro šestiúhelníkové grafy v závislosti na počtu šestiúhelníků v daném grafu. Nakonec jsme popsali jeho vlastnosti, konkrétně jeho stupeň, leading coefficient, lineární člen a jeho hodnotu v $x = -1$.

Tato problematika je ve srovnání s ostatními tématy teorie grafů relativně nová, neboť článek, ve kterém *Arratia, Bollobás a spol.* polynom definovali, byl vydán v roce 2000. Existuje proto mnoho směrů, do kterých se můžeme ve výzkumu tohoto grafového invariantu vydat. Bylo by například možné se pokusit najít polynomy grafů, které jsou podobné žebříkovým, ale používají jako základ kružnice jiné délky, například $2k$ pro $k > 3$.

Reference

- [1] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček. Diskrétní matematika. Plzeň : Západočeská univerzita, 170 s. ISBN: 80-7082-939-7, 2004.
- [2] Ryjáček, Z.; Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost 1 [online], Západočeská univerzita v Plzni, (2014), Available at: <http://cam.zcu.cz/ryjacek/students/ps/TGD1.pdf>
- [3] Ryjáček, Z.; Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost 2 [online], Západočeská univerzita v Plzni, (2016), Available at: <http://cam.zcu.cz/ryjacek/students/ps/TGD2.pdf>
- [4] Matoušek, J.; Kapitoly z diskrétní matematiky. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0084-6.
- [5] Arratia, R.; Bollobás, B.; Coppersmith, D.; Sorkin, G.B.; Euler circuits and DNA sequencing by hybridization. *Discrete Applied Mathematics*, **104 (1-3)**, (2000), 63–96.
- [6] Arratia, R.; Bollobás, B.; Sorkin, G.B.; The interlace polynomial of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B.*, **92 (2)**, (2004), 199–233.
- [7] Morse, A.; The Interlace Polynomial[online], 12.1.2016 [cit. 29.3.2018]. Available at: <https://arxiv.org/abs/1601.03003>
- [8] Li, A.; Wu, Q.; Interlace Polynomials of Ladder Graphs. *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences*, **35 (1-2)**, (2010), 243–255.
- [9] Aigner, M.; van der Holst, H.; Interlace polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, **377**, (2004), 11–30.
- [10] Balister, P.; Bollobás, B.; Cutler, J.; Pebody, L.; The interlace polynomial of graphs at -1. *European Journal of Combinatorics*, **23 (7)**, (2002), 761–767.