

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE ZPOŽDĚNÍM

Eliška Brabcová

2018

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně a s použitím informačních pramenů, které jsou v práci citovány.

V Plzni dne

.....

Eliška Brabcová

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za návrh tématu bakalářské práce, rady i připomínky a hlavně za velice klidný přístup v průběhu celého zpracování.

Abstrakt

Předmětem této práce jsou diferenciální rovnice se zpožděním. Je zde definováno zpoždění, systém diferenciálních rovnic se zpožděním, počáteční podmínka a počáteční úloha pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním. Uvedeny jsou také kvalitativní vlastnosti řešení a metody pro řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním. Dále jsou zde popsány příklady modelů v oblasti biologie. Model dravec-kořist je řešen pomocí metody kroků a následně ověřen numerickým výpočtem pomocí softwaru Wolfram Mathematica.

Klíčová slova: diferenciální rovnice se zpožděním, zpoždění, kvalitativní vlastnosti řešení, konstantní zpoždění, metoda kroků, Laplaceova transformace, modely populací, model dravec-kořist

Abstract

The subject of this thesis are delay differential equations. Delay, system of delay differential equations, initial condition and initial value problem are defined here. The qualitative theory and solution methods for constant delay differential equations are also mentioned. Furthermore, examples of biological models are described. The predator-prey model is solved using the method of steps and subsequently verified by a numerical calculation using the Wolfram Mathematica software.

Keywords: delay differential equations, delay, qualitative theory, constant delay, method of steps, Laplace transform, population models, predator-prey model

Úvod

V této práci se věnujeme diferenciálním rovnicím se zpožděním a jejich aplikacím. V první kapitole je představeno zpoždění v jeho různých podobách. U každého takového druhu zpoždění je kromě zápisu diferenciální rovnice a systému diferenciálních rovnic uveden příklad reálného modelu se zaměřením na oblast biologie. Dále je definován systém diferenciálních rovnic se zpožděním, počáteční podmínka a následně počáteční úloha pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním včetně odvození a vysvětlení zápisů.

Druhá kapitola je věnována kvalitativním vlastnostem řešení diferenciálních rovnic s omezeným zpožděním. V její první části definujeme spojitost a lipschitzovskost, ve druhé části se pak zabýváme existencí a jednoznačností řešení.

Ve třetí kapitole jsou uvedeny metody řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním. Přibližujeme zde metodu kroků a Laplaceovu transformaci a také jsou zde uvedeny příklady.

V poslední kapitole jsou sepsány poznatky ohledně modelování vývoje jednodruhových a dvoudruhových populací. Nejprve je odvozena diferenciální rovnice popisující populaci a následně je zavedeno zpoždění. Jsou zde uvedeny základní typy vzájemné interakce dvoudruhových populací, z nichž byl pro detailnější zkoumání zvolen vztah dravec-kořist. Systém diferenciálních rovnic se zpožděním modelující vztah dravec-kořist je odvozen, zpracován metodou kroků pro zjednodušené počáteční nastavení a dále řešen pomocí numerického softwaru Wolfram Mathematica. Výsledky výpočtu se s numerickým výpočtem shodují a navíc je sepsaný program vhodný pro výpočty dlouhodobějšího vývoje.

Použité značení

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
τ	zpoždění
$ \cdot $	absolutní hodnota
$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$	vektor
$\ \mathbf{x}\ = \sum_{i=1}^n x_i $	norma vektoru
$\ \Psi\ _\tau = \sup_{-\tau \leq \sigma \leq 0} \ \Psi(\sigma)\ $	τ -norma spojité funkce Ψ (Ψ z $[-\tau, 0]$ do D)
$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	přímá Laplaceova transformace, kde:
$x(t)$	originál,
$X(s)$	obraz originálu,
\mathcal{L}	operátor přímé Laplaceovy transformace.
$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	inverzní Laplaceova transformace, kde:
\mathcal{L}^{-1}	inverzní Laplaceův operátor

Obsah

1	Základní definice	1
1.1	Zpoždění	1
1.1.1	Konstantní zpoždění	1
1.1.2	Diskrétní zpoždění	2
1.1.3	Zpoždění závislé na čase	3
1.1.4	Distribované zpoždění	3
1.1.5	Další typy zpoždění	5
1.2	Úlohy se zpožděním	5
1.2.1	Diferenciální rovnice se zpožděním, počáteční úloha	5
2	Kvalitativní vlastnosti řešení	10
2.1	Úvodní definice a věty	10
2.1.1	Spojitosť	10
2.1.2	Grönwallovo lemma	11
2.1.3	Lipschitzovskost	11
2.2	Existence a jednoznačnost řešení	12
3	Řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním	15
3.1	Metoda kroků	15
3.1.1	Popis metody kroků	15
3.1.2	Příklad 1, metoda kroků	16
3.1.3	Příklad 2, metoda kroků	18
3.2	Laplaceova transformace	20
3.2.1	Popis Laplaceovy transformace	20
3.2.2	Příklad, Laplaceova transformace	21

4	Modelování vývoje populací	23
4.1	Modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic	23
4.1.1	Spojité deterministické modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním	26
4.1.2	Diskrétní deterministické modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním	26
4.2	Modely dvoudruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním	28
4.2.1	Modely dravec-kořist	28
4.2.2	Model dravec-kořist, metoda kroků	30
4.2.3	Model dravec-kořist a Wolfram Mathematica	32

Kapitola 1

Základní definice

1.1 Zpoždění

Zpožděním $\tau(t)$ je obecně funkce, která v praxi nejčastěji vyjadřuje časovou prodlevu potřebnou k započatí děje či reakce. Zpoždění můžeme dělit do několika druhů. Příklady různých druhů zpoždění jsou uvedeny níže.

Se zpožděním se můžeme setkat například u růstu mikroorganismů, reprodukce vyšších organismů, chemických reakcí nebo třeba u reakce imunitního systému živočicha na infekci. Ke každému druhu zpoždění je zde uvedený reálný příklad užití diferenciální rovnice (případně systému diferenciálních rovnic) v praxi, dokonce vždy v oboru biologie.

1.1.1 Konstantní zpoždění

Je takové zpoždění, kde $\tau(t) = \tau = \text{konst.}$ Diferenciální rovnici s konstantním zpožděním pak lze zapsat jako:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0, \quad (1.1)$$

kde $t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ je hledaná funkce, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t - \tau)$ hledaná funkce se zpožděným argumentem a f funkce z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} .

Systém rovnic s konstantním zpožděním pak zapisujeme jako:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad \tau > 0, \quad (1.2)$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Příklad

Reálným příkladem diferenciální rovnice s konstantním zpožděním je Mackey-Glassův model krvetvorby (viz [6]):

$$x'(t) = \beta \frac{x(t-\tau)}{1+x(t-\tau)^n} - \gamma x(t), \quad (1.3)$$

kde byly parametry β, γ a n zvoleny tak, aby odpovídaly experimentálním datům (podle Mackeyho a Glasse např: $\beta = 0, 2, \gamma = 0, 1$ a $n = 10$), a kde τ vyjadřuje časové zpoždění mezi počátkem buněčné produkce v kostní dřeni a konečným uvolněním zralých buněk do krevního oběhu.

1.1.2 Diskrétní zpoždění

System rovnice s více konstantními zpožděními nazýváme systémem s diskrétním zpožděním. Zapisujeme jej ve tvaru:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau_1), \mathbf{x}(t-\tau_2), \dots, \mathbf{x}(t-\tau_n)), \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n, \quad (1.4)$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklad nalezneme v modelování cirkadiánního rytmu savců, tedy endogenního (vnitřního) rytmu, který ovlivňuje zhruba dvacetičtyřhodinový cyklus aktivity a pasivity organismu. Tento rytmus je modelován pomocí systému rovnic (viz [8]):

$$B'(t) = \frac{v_s k_1^{n_1}}{k_1^{n_1} + R(t-\tau_3)^{n_1}} + \frac{v_d P_f(t-\tau_2)}{k_2 + P_f(t-\tau_2)} - k_3 B, \quad (1.5)$$

$$P'(t) = \frac{v_m k_5^{n_2}}{k_5^{n_2} + P_f(t-\tau_2)^{n_2}} + \frac{v_p B(t-\tau_1)}{k_4 + B(t-\tau_1)} - k_6 P, \quad (1.6)$$

$$R'(t) = \frac{v_r k_7^{n_3}}{k_7^{n_3} + P_f(t-\tau_2)^{n_3}} + \frac{v_c B(t-\tau_1)}{k_8 + B(t-\tau_1)} - k_9 R, \quad (1.7)$$

kde $B(t), P(t), R(t)$ vyjadřují koncentraci proteinu BMAL1, komplexu CRY-PER a proteinu REV-ERB α a kde P_f je volný komplex PER-CRY, pro který platí: $P_f = P - B$

a $P_f = 0$ pokud $P < B$, $v_{s,p,r,c,d,m}$ jsou rychlosti syntézy bílkovin, $k_{1,2,4,5,7,8}$ jsou Michaelisovy konstanty, $n_{1,2,3}$ jsou Hillovy koeficienty, které charakterizují míru kooperativnosti represivních procesů a $k_{3,6,9}$ jsou degradační konstanty B , P a R prvního řádu .

Hodnota τ_1 vyjadřuje zpoždění vazby od BMAL1 k zahájení syntézy proteinu PER-CRY a zároveň od BMAL1 k zahájení syntézy proteinu REV-ERB α , τ_2 je zpoždění proteinu PER-CRY k aktivaci a potlačení BMAL1 a REV-ERB α a k potlačení vlastní produkce a τ_3 je zpoždění proteinu REV-ERB α k potlačení produkce BMAL1.

1.1.3 Zpoždění závislé na čase

Rovnici se zpožděním závislým na čase zapíšeme jako:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \quad (1.8)$$

kde zpoždění $\tau(t)$ je tentokrát funkcí závislou na čase t .

Příklad

Takové zpoždění se například vyskytuje v rovnicích modelujících dvoudruhové populace (tzv. model Lotka - Volterra), kterým je věnována část 4.2.

Obecný systém těchto rovnic (viz [7]) pak má tvar:

$$x'_1(t) = x_1(t)[r_1 - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_1(t - \tau_1(t)) - a_{13}x_2(t - \tau_2(t))], \quad (1.9)$$

$$x'_2(t) = x_2(t)[r_2 - a_{21}x_2(t) - a_{22}x_2(t - \tau_3(t)) - a_{23}x_1(t - \tau_4(t))], \quad (1.10)$$

kde $a_{ij} \geq 0$ pro $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$, $r_k \geq 0$ pro $k = 1, 2$, $\tau_l(t) \geq 0$ pro $l = 1, 2, 3, 4$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na $\langle 0, +\infty \rangle$ a $x_m(t)$ pro $m = 1, 2$ vyjadřuje velikost m -tého druhu populace v čase t .

1.1.4 Distribuované zpoždění

1.1.4.1 Omezené distribuované zpoždění

Na rozdíl od předchozích typů není tento systém závislý na spočetně mnoha minulých stavech, ale je zde nutné znát všechny předchozí stavy na intervalu $I = \langle t, t - \tau \rangle$. Z

těchto předchozích zpoždění následně počítáme vážený průměr. Systém rovnic s omezeným distribuovaným zpožděním má tvar:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \int_0^\tau k(s)\mathbf{x}(t-s)ds), \quad \infty > \tau > 0, \quad (1.11)$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $k(s)$ je váhová funkce a interval I je zde omezený, tedy události ve vzdálené minulosti nemají na současnost vliv.

1.1.4.2 Neomezené distribuované zpoždění

V tomto případě nastává změna v omezenosti zpoždění τ . Systém rovnic s neomezeným distribuovaným zpožděním má tedy tvar:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \int_0^\infty k(s)\mathbf{x}(t-s)ds), \quad (1.12)$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $k(s)$ je opět váhová funkce a interval I je zde neomezený, tedy na současnost mají vliv i události ze vzdálené minulosti.

Příklad

S distribuovaným zpožděním se můžeme setkat například při modelování infekce HIV (viz [9]), kde je systém rovnic zanedbávající odpověď adaptivní imunity modelován následovně:

$$x'(t) = \lambda - \delta x(t) - \beta x(t)v(t), \quad (1.13)$$

$$y'(t) = \beta \int_0^h f(\tau)e^{-m\tau}x(t-\tau)v(t-\tau)d\tau - ay(t), \quad (1.14)$$

$$v'(t) = ky(t) - \mu v(t), \quad (1.15)$$

kde $x(t)$, $y(t)$ a $v(t)$ označují koncentraci neinfikovaných buněk, infikovaných buněk a volných částic viru v čase t .

Neinfikované buňky jsou produkovány konstantou λ , umírají rychlostí δx a jsou infikovány volným virem rychlostí βxv .

Infikované buňky zanikají rychlostí ay .

Volné viry jsou produkovány infikovanými buňkami rychlostí ky a odumírají rychlostí μv . Dále předpokládáme, že neinfikované buňky jsou kontaktovány částicemi viru v čase $t - \tau$ a stanou se infikovanými v čase t , kde τ je náhodná veličina s distribučním rozdělením

pravděpodobnosti a hustotou pravděpodobnosti $f(\tau)$ v intervalu $[0, h]$ a kde h je limes superior tohoto zpoždění. Toto rozdělení pravděpodobnosti uvažujeme pro zjednodušení jako kladnou integrovatelnou funkci na $[0, h]$ splňující $\int_0^h f(\tau)d\tau = 1$. Výraz $e^{-m\tau}$ znázorňuje pravděpodobnost přežití od času $t - \tau$ do času t , kde m je rychlost hynutí buněk, které jsou infikované, ale ještě neprodukují viry.

1.1.5 Další typy zpoždění

Existuje mnoho typů zpoždění, která v předchozím výčtu nejsou zahrnuta a samozřejmě také úlohy s kombinacemi různých typů zpoždění.

Mezi další typy zpoždění, o kterých jsme zde zatím nehovořili můžeme zařadit například tzv. neutrální zpoždění (viz [10]). Diferenciální rovnice s neutrálním zpožděním je potom taková rovnice, kde se v pravé části objeví derivovaný člen se zpožděním v argumentu, např. takto: $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x'(t - \tau_2))$.

Dále lze definovat například diferenciální rovnici se zpožděním závislým na stavu systému, kde je zpoždění definováno jako: $\tau(t) = \tau(t, \mathbf{x}(t))$, kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

1.2 Úlohy se zpožděním

1.2.1 Diferenciální rovnice se zpožděním, počáteční úloha

Diferenciální rovnici se zpožděním nazýváme takovou diferenciální rovnici, která vyjadřuje derivaci proměnné x podle času t pomocí x (a derivací x nižšího řádu) v čase t a v dřívějších okamžicích. Tedy v argumentu neznámé funkce se vyskytuje zpoždění $\tau(t)$. Je pak zřejmé, že při zápisu diferenciální rovnice se zpožděním není možné vynechávat argumenty neznámé funkce.

Nyní je třeba zavést obecné značení diferenciální rovnice se zpožděním pro různé typy zpoždění. Předpis definujeme pro systém takových rovnic.

Definice 1. (Systém diferenciálních rovnic se zpožděním)

Nechť je **systém diferenciálních rovnic se zpožděním** dán rovností:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(g_1(t)), \dots, \mathbf{x}(g_m(t))), \quad (1.16)$$

kde $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá zpožděný argument a platí: $g_j(t) \leq t$ pro $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, kde velmi často $g_1(t) = t$. Dále J je interval v \mathbb{R} , D je otevřená množina v \mathbb{R}^n a $\mathbf{f} : J \times D^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Poznámka 1. Lze také používat značení $t - \tau_j(t)$ místo $g_j(t)$, kde jsou nezáporné veličiny $\tau_j(t)$ zpožděními.

Dále předpokládejme, že $\exists \gamma, t_0, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \leq t_0$ takové, že:

$$\forall j = 1, \dots, m : \quad \gamma \leq g_j(t) \leq t \quad \text{pro} \quad t_0 \leq t < \beta.$$

Nyní definujme počáteční podmínku. Poznamenejme, že oproti obyčejným diferenciálním rovnicím nám pro jednoznačné řešení diferenciální rovnice se zpožděním nestačí počáteční podmínka dána specifikací systému v čase t_0 .

Definice 2. (Počáteční podmínka)

Počáteční podmínkou pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním rozumíme rovnost:

$$\mathbf{x}(t) = \Theta(t), \quad \text{pro} \quad \gamma \leq t \leq t_0, \quad (1.17)$$

kde Θ je daná počáteční funkce $\Theta : [\gamma, t_0] \rightarrow D$.

Definice 3. (Počáteční úloha)

Počáteční úlohou pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním rozumíme systém (1.16) spolu s počáteční podmínkou (1.17):

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(g_1(t)), \dots, \mathbf{x}(g_m(t))) & \text{pro} \quad t_0 \leq t < \beta, \\ \mathbf{x}(t) = \Theta(t) & \text{pro} \quad \gamma \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Kvůli častému odkazování na systém (1.16) definujeme ještě zkrácený zápis systému diferenciálních rovnic se zpožděním.

Definice 4. (Zkrácený zápis systému diferenciálních rovnic se zpožděním)

Zkrácený zápis systému diferenciálních rovnic se zpožděním je dán rovnicí:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t), \quad (1.19)$$

kde $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t) = f(t, \mathbf{x}(g_1(t)), \dots, \mathbf{x}(g_m(t)))$.

Definice 5. (Zkrácený zápis počáteční úlohy)

Zkrácený zápis počáteční úlohy pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním je dán vztahy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t) & \text{pro } t_0 \leq t < \beta, \\ \mathbf{x}(t) = \Theta(t), & \text{pro } \gamma \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Definice 6. (Řešení počáteční úlohy)

Řešením počáteční úlohy (1.29) je taková spojitá funkce $\mathbf{x} : [\gamma, \beta_1) \rightarrow D$, která pro libovolné $\beta_1 \in (t_0, \beta]$ splňuje:

- $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t)$ pro $t_0 \leq t < \beta_1$,
- $\mathbf{x}(t) = \Theta(t)$ pro $\gamma \leq t \leq t_0$.

Definice 7. (Jednoznačné řešení)

Řekneme, že řešení je dáno **jednoznačně**, pokud pro každá dvě řešení $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, kde $\mathbf{x}_1(t) : [\gamma, \beta_1) \rightarrow D$, $\mathbf{x}_2(t) : [\gamma, \beta_1) \rightarrow D$, platí:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \text{pro } t \in [\gamma, \beta_1). \quad (1.21)$$

Definice 8. (Systém diferenciálních rovnic s omezeným zpožděním)

Jestliže existuje $\tau \geq 0$ takové, že platí:

$$t - \tau \leq g_j(t) \leq t \quad \text{pro } t \geq t_0, j = 1, \dots, m, \quad (1.22)$$

pak o systému diferenciálních rovnic (1.16) hovoříme jako o **systému diferenciálních rovnic s omezeným zpožděním**.

Definice 9. (Počáteční podmínka pro systém s omezeným zpožděním)

Počáteční podmínka pro systém diferenciálních rovnic s omezeným zpožděním je dána vztahem:

$$\mathbf{x}(t) = \Theta(t), \quad \text{pro } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (1.23)$$

kde $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$.

Definice 10. Necht' je χ funkce definovaná alespoň na $[t - \tau, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak definujeme novou funkci $\chi_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako:

$$\chi_t(\sigma) = \chi(t + \sigma) \quad \text{pro } -\tau \leq \sigma \leq 0. \quad (1.24)$$

Tedy pro získání χ_t nejprve uvažujeme $\chi(s)$ na intervalu $t - \tau \leq s \leq t$ a tuto část poté převedeme na interval $[-\tau, 0]$.

Pokud χ je spojitou funkcí, pak χ_t je spojitou funkcí na $[-\tau, 0]$.

Poznámka 2. Zde je úmyslně použito značení χ , abychom \mathbf{x} značili takovou funkcí, která splňuje systém diferenciálních rovnic.

Značení

Označme $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ množinu všech spojitých funkcí z $[-\tau, 0]$ do \mathbb{R}^n . Dále značíme $\mathcal{C}_D = C([-\tau, 0], D)$ množinu všech spojitých funkcí z $[-\tau, 0]$ do D .

Platí, že pokud $\chi : [t - \tau, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce na $[t - \tau, t]$, potom $\chi_t \in \mathcal{C}_D$.

Aby byly zápisy (1.16) a (1.19) ekvivalentní pro \mathbf{f} definovanou na $J \times D^m$, pak potřebujeme, aby $\mathbf{F}(t, \chi_t)$ dávala smysl pro $t \in J$ a $\chi_t \in \mathcal{C}_D$. Tedy definujeme \mathbf{F} jako:

$$\mathbf{F} : J \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Počáteční podmínku (1.23) můžeme dále upravit do tvaru:

$$\mathbf{x}(t_0 + \sigma) = \Theta(t_0 + \sigma) \quad \text{pro } -\tau \leq \sigma \leq 0 \quad (1.25)$$

a následně do zkráceného tvaru:

$$\mathbf{x}_{t_0} = \Theta_{t_0}. \quad (1.26)$$

Zavedením rovnosti $\Phi = \Theta_{t_0}$ dostáváme tvar:

$$\mathbf{x}_{t_0} = \Phi. \quad (1.27)$$

Tento zápis vyjadřuje $\mathbf{x}(t_0 + \sigma) = \Phi(\sigma)$, případně pro $t = t_0 + \sigma$ dostáváme:

$$\mathbf{x}_t = \Phi(t - t_0) \quad \text{pro } t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (1.28)$$

Poznamenejme také, že $\mathbf{x}(t_0) = \Phi(0)$.

Definice 11. (Zkrácený zápis počáteční úlohy s omezeným zpožděním)

Zkrácený zápis počáteční úlohy pro systém diferenciálních rovnic s omezeným zpožděním definujeme jako:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}_{t_0} = \Phi, \end{cases} \quad (1.29)$$

kde $\Phi \in \mathcal{C}_D$, $\mathbf{F} : J \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde $J = [t_0, \beta)$ pro $\beta > t_0$, a kde $D \subset \mathbb{R}^n$.

Kapitola 2

Kvalitativní vlastnosti řešení

2.1 Úvodní definice a věty

Tato kapitola se zabývá diferenciálními rovnicemi s omezeným zpožděním. Vybudovat teorii pro diferenciální rovnice s neomezeným zpožděním je obecně náročnější a více je možné dohledat například v knize [1]. Než přejdeme k větám o existenci a jednoznačnosti řešení, je třeba zavést několik základních pojmů.

2.1.1 Spojitost

Definice 12. (Podmínka spojitosti)

Řekneme, že je splněna **podmínka spojitosti**, pokud $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_t)$ je spojitá funkce vzhledem k t na $J = [t_0, \beta)$ pro každou spojitou funkci $\mathbf{x} : [t_0 - \tau, \beta) \rightarrow D$.

Věta 1. (Řešení a spojitost)

Pokud $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti z definice 12, potom je spojitá funkce $\mathbf{x} : [t_0 - \tau, \beta_1) \rightarrow D$ pro libovolné $\beta_1 \in (t_0, \beta)$ řešením (1.29) právě tehdy, když platí:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \Phi(t - t_0) & \text{pro } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \Phi(0) + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}_s) ds & \text{pro } t_0 \leq t < \beta_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.2 Grönwallovo lemma

Lemma 1. (Grönwall)

Nechť $C \geq 0$ je konstanta, $C \in \mathbb{R}$, u, v jsou nezáporné spojitě definované na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a $t_0 \in J$ takové, že platí:

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds \quad \text{pro všechna } t \in J, \quad (2.2)$$

potom platí:

$$u(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t v(s) ds} \quad \text{pro všechna } t \in J. \quad (2.3)$$

2.1.3 Lipschitzovskost

Definice 13. (τ -norma)

Pro $\Psi \in \mathcal{C}_D$ definujeme τ -normu jako: $\|\Psi\|_\tau = \sup_{-\tau \leq \sigma \leq 0} \|\Psi(\sigma)\|$.

Definice 14. (Lipschitzovskost)

Nechť $\mathbf{F} : J \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ a necht' \mathcal{M} je podmnožinou $J \times \mathcal{C}_D$. Jestliže existuje $K \geq 0$ takové, že platí:

$$\|\mathbf{F}(t, \Psi) - \mathbf{F}(t, \tilde{\Psi})\| \leq K \|\Psi - \tilde{\Psi}\|_\tau \quad (2.4)$$

kde (t, Ψ) a $(t, \tilde{\Psi}) \in \mathcal{M}$, potom říkáme, že \mathbf{F} je **lipschitzovská** na \mathcal{M} s lipschitzovskou konstantou K .

Definice 15. (Lokální lipschitzovskost)

Funkce $\mathbf{F} : J \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je **lokálně lipschitzovská**, jestliže pro každé zadané $(\bar{t}, \bar{\Psi}) \in J \times \mathcal{C}_D$ existují čísla $a > 0$, $b > 0$ taková, že množina \mathcal{M}_{ab} dána:

$$\mathcal{M}_{ab} = ([\bar{t} - a, \bar{t} + a] \cap J) \times \{\Psi \in \mathcal{C}_D : \|\Psi - \bar{\Psi}\|_\tau \leq b\} \quad (2.5)$$

je podmnožinou $J \times \mathcal{C}_D$ a \mathbf{F} je lipschitzovská na \mathcal{M}_{ab} .

2.2 Existence a jednoznačnost řešení

Lemma 2. Nechť je funkce $\chi : [t_0 - \tau, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá. Potom pro libovolné zadané $\tilde{t} \in [t_0 - \tau, \beta)$ a $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že:

$$\|\chi_t - \chi_{\tilde{t}}\|_\tau < \epsilon \quad \text{právě tehdy, když } t \in [t_0, \beta) \text{ a } |t - \tilde{t}| < \delta.$$

Věta 2. (Jednoznačnost)

Nechť $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti (viz definice 12) a nechť je lokálně lipschitzovská. Potom pro každou počáteční podmínku $\Phi \in \mathcal{C}_D$ má počáteční úloha (1.29) nejvýše jedno řešení na $[t_0 - \tau, \beta_1)$ pro libovolné $\beta_1 \in (t_0, \beta)$.

Důkaz. (Sporem)

Předpokládejme, že pro libovolné $\beta_1 \in [t_0, \beta)$ existují dvě řešení $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$, kde $\mathbf{x} : [t_0 - \tau, \beta_1) \rightarrow D$, $\tilde{\mathbf{x}} : [t_0 - \tau, \beta_1) \rightarrow D$, taková že $\mathbf{x} \neq \tilde{\mathbf{x}}$.

Nechť: $t_1 = \inf\{t \in (t_0, \beta_1) : \mathbf{x} \neq \tilde{\mathbf{x}}\}$. Potom $t_0 \leq t_1 < \beta$ a $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ pro $t_0 - \tau \leq t \leq t_1$. Jelikož $(t_1, \mathbf{x}_{t_1}) \in [t_0, \beta_1) \times \mathcal{C}_D$, existují čísla $a > 0$, $b > 0$ tak, že množina

$$\mathcal{M} = [t_1, t_1 + a] \times \{\Phi \in \mathcal{C} : \|\Phi - \mathbf{x}_{t_1}\|_\tau \leq b\}$$

je obsažena v $[t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D$ a \mathbf{F} je Lipschitzovská na \mathcal{M} .

Na základě lemmatu 2 existuje $\delta \in (0, a]$ tak, že $(t, \mathbf{x}_t) \in \mathcal{M}$ a $(t, \tilde{\mathbf{x}}_t) \in \mathcal{M}$ pro $t_1 \leq t < t_1 + \delta$. Navíc \mathbf{x} a $\tilde{\mathbf{x}}$ splňují podmínku spojitosti pro $t_0 - \tau \leq t < t_1 + \delta$.

Tedy pro $t_1 \leq t < t_1 + \delta$ platí:

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{F}(s, \mathbf{x}_s) - \mathbf{F}(s, \tilde{\mathbf{x}}_s)] ds \right\| \leq \int_{t_1}^t K \|\mathbf{x}_s - \tilde{\mathbf{x}}_s\|_\tau ds.$$

Pravá strana rovnosti je rostoucí funkcí proměnné t a zároveň platí $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ pro $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$. Z toho plyne:

$$\|\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t\|_\tau \leq \int_{t_1}^t K \|\mathbf{x}_s - \tilde{\mathbf{x}}_s\|_\tau ds \quad \text{pro } t_1 \leq t < t_1 + \delta$$

Použitím Grönwallovo lemmatu 1 zjišťujeme, že $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ na intervalu $[t_1, t_1 + \delta)$, čímž docházíme ke sporu. \square

Věta 3. (Spojitá závislost řešení na počáteční funkci)

Nechť $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti a nechť je (globálně) lipschitzovská. Nechť jsou dány $\Phi, \tilde{\Phi} \in \mathcal{C}_D$ a nechť jsou $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$ jednoznačnými řešeními (1.19) pro $\mathbf{x}_{t_0} = \Phi$ a $\tilde{\mathbf{x}}_{t_0} = \tilde{\Phi}$.

Jestliže mají \mathbf{x} i $\tilde{\mathbf{x}}$ smysl na $[t_0 - \tau, \beta_1)$, potom platí:

$$\|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq \|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{\tau} e^{K(t-t_0)} \quad \text{pro } t_0 \leq t \leq \beta_1 \quad (2.6)$$

Důkaz. viz [1].

Věta 4. (Lokální existence)

Nechť $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti a nechť je lokálně lipschitzovská. Potom pro každou $\Phi \in \mathcal{C}_D$ má počáteční úloha (1.29) jednoznačné řešení na $[t_0 - \tau, t_0 + \Delta)$ pro $\Delta > 0$.

Důkaz. viz [1].

Definice 16. (Prodlužování řešení)

Nechť je \mathbf{x} řešení úlohy (1.29) na intervalu $[t_0 - \tau, \beta_1)$ a \mathbf{y} řešení té samé úlohy na intervalu $[t_0 - \tau, \beta_2)$. Pokud je $\beta_2 > \beta_1$, říkáme, že \mathbf{y} je **prodloužením** \mathbf{x} , neboli že \mathbf{x} může být prodlouženo na interval $[t_0 - \tau, \beta_2)$.

Řešení \mathbf{x} rovnice (1.29) je **úplné**, pokud neexistuje řešení, které je jeho prodloužením.

Definice 17. (Kvazi-omezená funkce)

Říkáme, že funkce $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je **kvazi-omezená**, pokud \mathbf{F} je omezená na každé množině ve tvaru: $[t_0, \beta_1] \times \mathcal{C}_A$, kde $t_0 < \beta_1 < \beta$ a A je uzavřená omezená podmnožina D .

Věta 5. (Prodloužená existence řešení)

Nechť $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti, nechť je lokálně lipschitzovská a kvazi-omezená. Potom pro každé $\Phi \in \mathcal{C}_D$ má soustava (1.29) **úplné jednoznačné řešení** \mathbf{x} na intervalu $[t_0 - \tau, \beta_1]$.

Důkaz. viz [1] .

Věta 6. (Globální existence)

Nechť $D = \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{F} : [t_0, \beta) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku spojitosti a nechť je lokálně lipschitzovská. Dále předpokládejme, že

$$\|\mathbf{F}(t, \Psi)\| \leq M(t) + N(t) \|\Psi\|_\tau \quad \text{na } [t_0, \beta) \times \mathcal{C},$$

kde M a N jsou kladné spojité funkce na $[t_0, \beta)$.

Potom existuje úplné jednoznačné řešení na celém intervalu $[t_0 - \tau, \beta)$

Důkaz. viz [1] .

Kapitola 3

Řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním

3.1 Metoda kroků

3.1.1 Popis metody kroků

Metoda kroků využívá lokální transformaci dané diferenciální rovnice se zpožděním na obyčejnou diferenciální rovnici. Jedno takové částečné řešení pak nazýváme jedním krokem.

Na intervalu $[t_0 - \tau, t_0]$ máme zadanou počáteční funkci Θ tak, že

$$x(t) = \Theta(t) \quad \text{pro } t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

V prvním kroku hledáme prodloužení tohoto řešení na interval I_1 délky τ , tedy pro všechna t kde $t \in I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$, vyřešením obyčejné diferenciální rovnice. Toto řešení, tedy řešení x v prvním kroku, označíme jako x_1 .

Pro druhý interval opět délky τ , tedy $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ využíváme řešení x_1 z intervalu I_1 . Ve druhém kroku tedy hledáme prodloužené řešení x_2 (které je prodloužením řešení x_1) na intervalu I_2 .

Takto pokračujeme do libovolného kroku, kde jsme schopni diferenciální rovnice řešit a kde má takové řešení smysl. Můžeme také objevit v dílčích řešeních nějaký řád a získat tak předpis řešení pro libovolný krok.

Výsledné řešení definujeme pomocí jednotlivých kroků jako:

$$x(t) = \begin{cases} \Theta(t) & \text{pro } t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ x_1(t) & \text{pro } t \in [t_0, t_0 + \tau], \\ x_2(t) & \text{pro } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau], \\ \vdots & \\ x_k(t) & \text{pro } t \in [t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau], \\ \vdots & \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2 Příklad 1, metoda kroků

Uvažujme rovnici:

$$x'(t) = 2x(t - 5) \quad (3.2)$$

s počáteční podmínkou: $\Theta(t) = 1$, pro $t \in [-5, 0]$.

Zpoždění je tedy konstantní a jeho velikost je $\tau(t) = 5$. Toto také použijeme při volbě subintervalů v jednotlivých třech ukázkových krocích této metody.

1) $t \in \langle 0, 5 \rangle$: $x'_1(t) = 2 \cdot \Theta(t - 5) = 2 \cdot 1 = 2$.

Obecné řešení: $x_1(t) = 2t + c_1$.

Počáteční podmínka pro $t = 0$: $1 = 2 \cdot 0 + c_1$, z toho vyjádříme $c_1 = 1$ a dostáváme partikulární řešení: $x_1(t) = 2t + 1$.

Nyní je třeba vypočítat hodnotu $x_1(t)$ pro $t = 5$. Tu pak použijeme jako počáteční podmínku ve druhém kroku, tedy platí $x_1(5) = 11$.

2) $t \in \langle 5, 10 \rangle$: $x'_2(t) = 2 \cdot x_1(t - 5) = 2(2(t - 5) + 1) = 4t - 18$.

Obecné řešení: $x_2(t) = 2t^2 - 18t + c_2$.

Počáteční podmínka: $11 = 2 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + c_2$, tedy $c_2 = 51$.

Partikulární řešení: $x_2(t) = 2t^2 - 18t + 51$,

$x_2(10) = 71$.

3) $t \in \langle 10, 15 \rangle$: $x'_3(t) = 2 \cdot x_2(t - 5) = 2(2(t - 5)^2 - 18(t - 5) + 51) = 4t^2 - 76t + 382$.

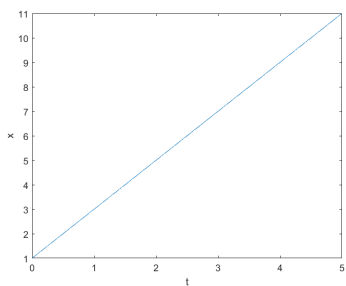
Obecné řešení: $x_3(t) = \frac{4}{3}t^3 - 38t^2 + 382t + c_3$.

Počáteční podmínka: $71 = \frac{4}{3} \cdot 10^3 - 38 \cdot 10^2 + 382 \cdot 10 + c_3$, tedy $c_3 = -1282,3$.

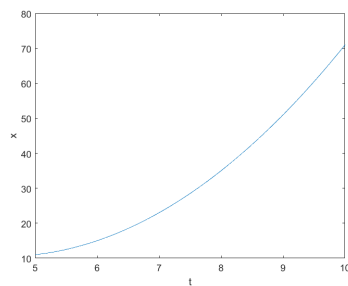
Partikulární řešení: $x_3(t) = \frac{4}{3}t^3 - 38t^2 + 382t - 1282,3$.

⋮

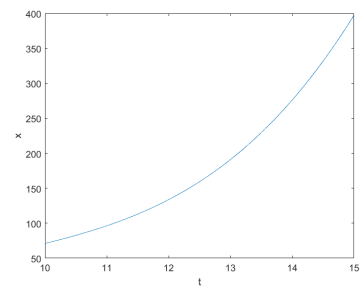
Na obrázcích níže jsou vykreslena řešení tří předchozích kroků a celkové řešení pro $t \in \langle 0, 15 \rangle$.



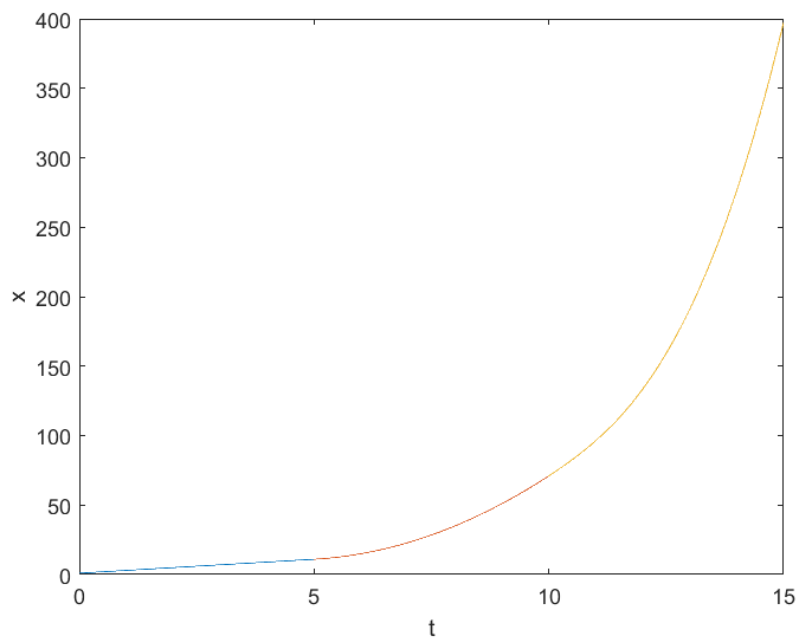
Obrázek 3.1: $t \in \langle 0, 5 \rangle$



Obrázek 3.2: $t \in \langle 5, 10 \rangle$



Obrázek 3.3: $t \in \langle 10, 15 \rangle$



Obrázek 3.4: $t \in \langle 0, 15 \rangle$

3.1.3 Příklad 2, metoda kroků

Uvažujme rovnici:

$$x'(t) = 3x(t - \pi) \quad (3.3)$$

s počáteční podmínkou: $\Theta(t) = \cos(t)$ pro $t \in \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zpoždění $\tau(t) = \pi$ je tedy opět konstantní.

Ve třech krocích metody kroků budeme zkoumat interval $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$.

1) $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$:

$$x'_1(t) = 3 \cdot \Theta(t - \pi) = 3 \cos(t - \pi) = -3 \cos t.$$

Obecné řešení: $x_1(t) = -3 \sin t + c_1$.

Počáteční podmínka: $\Theta(\frac{\pi}{2}) = x_1(\frac{\pi}{2})$,

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = -3 \sin(\frac{\pi}{2}) + c_1, \text{ z toho: } c_1 = 3$$

Partikulární řešení: $x_1(t) = -3 \sin(t) + 3$.

$$x_1(\frac{3\pi}{2}) = 6.$$

2) $t \in \langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle$:

$$x'_2(t) = 3 \cdot x_1(t - \pi) = 3(-3 \sin(t - \pi) + 3) = -9 \sin(t - \pi) + 9 = 9 \sin t + 9.$$

Obecné řešení: $x_2(t) = -9 \cos t + 9t + c_2$.

Počáteční podmínka: $x_1(\frac{3\pi}{2}) = x_2(\frac{3\pi}{2})$,

$$6 = -9 \cos(\frac{3\pi}{2}) + 9t + c_2, \text{ z toho: } c_2 = 6 - (\frac{27\pi}{2})$$

Partikulární řešení: $x_2(t) = -9 \cos t + 9t + 6 - (\frac{27\pi}{2})$.

$$x_2(\frac{5\pi}{2}) = 6 + 9\pi.$$

3) $t \in \langle \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$:

$$x'_3(t) = 3 \cdot x_2(t + \pi) = 3(-9 \cos(t + \pi) + 9(t + \pi) + 6 - \frac{27\pi}{2}) = -27 \cos(t + \pi) + 27(t + \pi) + 18 - \frac{81\pi}{2} = 27 \cos t + 27t + 18 - \frac{27\pi}{2}$$

Obecné řešení: $x_3(t) = 27 \sin t + \frac{27t^2}{2} + 18t - \frac{27\pi t}{2} + c_3$.

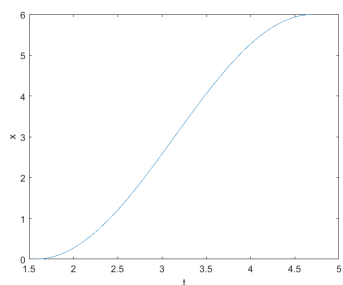
Počáteční podmínka: $x_2(\frac{5\pi}{2}) = x_3(\frac{5\pi}{2})$,

$$6 + 9\pi = 27 \sin(\frac{5\pi}{2}) + \frac{27(\frac{5\pi}{2})^2}{2} + 18(\frac{5\pi}{2}) - \frac{27\pi(\frac{5\pi}{2})}{2} + c_3, \text{ z toho: } c_3 = -21 - 36\pi - (\frac{405\pi^2}{8})$$

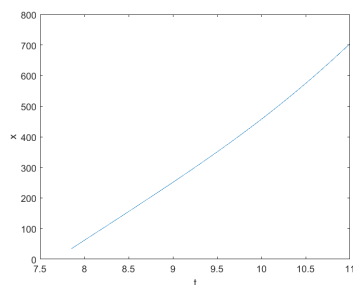
Partikulární řešení: $x_3(t) = 27 \sin t + \frac{27}{2}t^2 + (18 - \frac{27\pi}{2})t - 21 - 36\pi - (\frac{405\pi^2}{8})$.

⋮

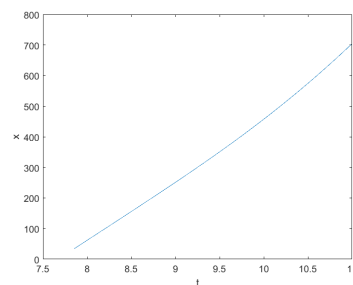
Na obrázcích níže jsou opět vykreslena řešení tří kroků a celkové řešení pro $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$.



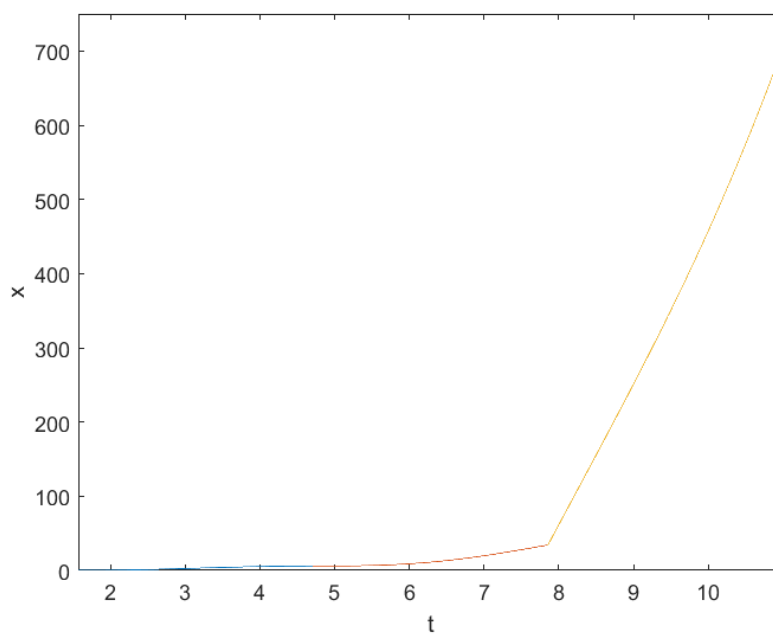
Obrázek 3.5: $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$



Obrázek 3.6: $t \in \langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle$



Obrázek 3.7: $t \in \langle \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$



Obrázek 3.8: $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$

3.2 Laplaceova transformace

3.2.1 Popis Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace je častou metodou pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Můžeme ji ale využít i při řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním. Hlavní myšlenkou je získat pomocí Laplaceovy transformace algebraickou rovnici, vyřešit ji a pomocí zpětné transformace získat původní řešení. V této části je čerpáno z [11] a [12].

3.2.1.1 Přímá Laplaceova transformace

Přímá Laplaceova transformace převádí reálnou funkci definovanou v časové oblasti (tzv. *originál* nebo také *předmět*) na komplexní funkci (tzv. *obraz*) definovanou v oblasti komplexní proměnné.

Přímou Laplaceovu transformaci definujeme vztahem:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (3.4)$$

kde $s = \alpha + i\beta$ je komplexní proměnná: α je reálná složka komplexní proměnné s , β je imaginární složka komplexní proměnné s , t je reálná proměnná (čas), $x(t)$ je originál, tedy reálná funkce definovaná v časové oblasti pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $X(s)$ je obraz originálu, tedy komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné s a \mathcal{L} je operátor přímé Laplaceovy transformace.

3.2.1.2 Inverzní Laplaceova transformace

Inverzní (nebo také *zpětná*) Laplaceova transformace je již podle názvu zpětným krokem přímé Laplaceovy transformace, tedy převádí obraz (komplexní funkci definovanou v oblasti komplexní proměnné) na originál (reálnou funkci definovanou v časové oblasti).

Inverzní Laplaceovu transformaci definujeme vztahem:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X(s)e^{st} ds, \quad (3.5)$$

kde \mathcal{L}^{-1} je inverzní Laplaceův operátor a c je libovolné reálné číslo ležící v oblasti konvergence obrazu X .

3.2.1.3 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Derivování originálu pro první derivaci: $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$.

Derivování originálu pro n-tou derivaci: $\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} \frac{d^{j-1}x(0)}{dt^{j-1}}$.

Integrovaní originálu: $\mathcal{L}\{\int_0^t x(\sigma)d\sigma\} = \frac{1}{s}X(s)$.

Počáteční a koncová hodnota:

$$\begin{aligned}x(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \\x(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)\end{aligned}$$

Posunutí (zpoždění) originálu:

$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as}X(s)$, kde $a \geq 0, x(t-a) = 0$ pro $t < a$.

Posunutí (útlum) obrazu: $\mathcal{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$.

Podobnost (změna měřítka):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{x\left(\frac{t}{a}\right)\right\} &= aX(as), \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{X\left(\frac{s}{a}\right)\right\} &= ax(at).\end{aligned}$$

3.2.2 Příklad, Laplaceova transformace

Uvažujeme počáteční úlohu:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t - \tau) \\ \Theta(t) = 1, \quad \text{pro } t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (3.6)$$

kde $\tau = 5$.

Na obě strany diferenciální rovnice aplikujeme Laplaceovu transformaci $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$.

Získáme tedy rovnici:

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = 2 \int_0^{\infty} x(t - \tau)e^{-st} dt$$

a jednotlivé integrály označíme velkými písmeny I_i , $i = 1, 2$:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt}_{I_1} = 2 \underbrace{\int_0^{\infty} x(t - \tau)e^{-st} dt}_{I_2}.$$

Oba integrály upravíme.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = sX(s) - \Theta(t) \\ I_2 &= 2 \int_0^{\infty} x(t - \tau)e^{-st} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u=t-\tau \\ du=dt \end{array} \right| = 2 \int_{-\tau}^{\infty} x(u)e^{-s(u+\tau)} du = \\ &= 2 \int_{-\tau}^0 x(u)e^{-s(u+\tau)} du + 2 \int_0^{\infty} x(u)e^{-s(u+\tau)} du = \\ &= 2e^{-s\tau} \Theta(t) \int_{-\tau}^0 e^{-su} du + 2e^{-s\tau} X(s) = \\ &= 2\Theta(t) \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} + 2e^{-s\tau} X(s) \end{aligned}$$

Tímto jsme převedli diferenciální rovnici se zpožděním na algebraickou rovnici s neznámou $X(s)$ ve tvaru:

$$sX(s) - \Theta(t) = 2\Theta(t) \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} + 2e^{-s\tau} X(s).$$

Po vyjádření $X(s)$ dostaneme rovnici ve tvaru:

$$X(s) = \frac{2\Theta(t)(1 - e^{-s\tau}) + s\Theta(t)}{s(s - 2e^{-s\tau})}$$

a po dosazení $\Theta(t) = 1$, $\tau = 5$:

$$X(s) = \frac{2(1 - e^{-5s}) + s}{s(s - 2e^{-5s})}.$$

Nyní by bylo třeba aplikovat zpětnou Laplaceovu transformaci a získali bychom řešení $x(t)$.

Kapitola 4

Modelování vývoje populací

Abychom co nejlépe pochopili reálný systém (ať už biologický nebo jiný), všechny jeho pochody a vnitřní vazby, používáme **matematické modelování**. Výsledkem tohoto modelování je abstraktní zjednodušený popis původního reálného systému.

Základem pro matematický model reálného systému jsou rovnice (včetně počátečních podmínek), které tento systém popisují. Sestavujeme je pomocí známých parametrů modelu s danými počátečními hodnotami a pomocí souborů experimentálních dat. Tímto se pak dostáváme k diferenciálním rovnicím.

V této kapitole čerpáme z textu [3].

4.1 Modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic

Při popisu jednodruhové populace pokládáme za její charakteristickou vlastnost **velikost populace**.

Tuto velikost lze vyjádřit počtem jedinců dané populace žijících v určitém vymezeném prostoru nebo například hustotou osídlení tohoto prostoru.

Definice 18. (Základní rovnice pro popis jednodruhové populace)

Základní rovnici pro popis jednodruhové populace zapisujeme ve tvaru:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m, \quad (4.1)$$

kde $x(t)$ označuje velikost populace v závislosti na čase t , a pak tedy $x(t + \Delta t)$ je velikost populace v čase $t + \Delta t$.

Dále Δx_b značí přírůstek v důsledku porodnosti za dobu Δt , Δx_d úbytek zapříčiněný úmrtností a Δx_m ostatní změny ve velikosti populace (zapříčiněné jinými vlivy).

Ve zjednodušené situaci se můžeme soustředit pouze na změny velikosti populace v závislosti na porodnosti a úmrtnosti a rovnici tedy zapsat jako:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d. \quad (4.2)$$

Počet narozených jedinců Δx_b v celé populaci za dobu Δt lze zapsat ve tvaru:

$$\Delta x_b = B(x, t)\Delta t,$$

kde $B(x, t)$ pak nazýváme porodnost, která vyjadřuje počet jedinců narozených za jednotku času.

Obdobně můžeme vyjádřit úmrtnost $D(x, t)$ jako:

$$\Delta x_d = D(x, t)\Delta t.$$

Pokud uvedenou porodnost a úmrtnost vztáhneme ke stavu populace, dostaneme potom relativní porodnost:

$$b(x, t) = \frac{B(x, t)}{x(t)}$$

a relativní úmrtnost:

$$d(x, t) = \frac{D(x, t)}{x(t)}.$$

Rovnici jednodruhé populace pak můžeme zapsat jako:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (b(x, t) - d(x, t))x(t)\Delta t. \quad (4.3)$$

Neboli:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \gamma(x, t)x(t), \quad (4.4)$$

kde $\gamma(x, t) = b(x, t) - d(x, t)$ vyjadřuje rozdíl relativní porodnosti a relativní úmrtnosti.

Pro limitní případ $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$x'(t) = \gamma(x, t)x(t), \quad (4.5)$$

kterou označujeme jako **obecné deterministické vyjádření dynamiky stavu populace**.

Pokud lze tento stav popsat spojitou funkcí, používáme **spojité deterministické modely**.

Z biologického hlediska lze tento stav popsat spojitou funkcí pokud platí, že populace $x(t)$ je dostatečně velká, abychom nemuseli počítat s jednotlivci a zároveň jsou všichni jedinci populace bez věkového rozlišení (tzn. populace je jednotná z hlediska jedinců v produkčním věku).

Pokud není některá z výše uvedených podmínek splněna, nemůžeme použít spojité modely. Lze pak použít některý z diskrétních modelů.

Příklad

Jednoduchým příkladem použití spojitých deterministických modelů může být rovnice, kde položíme:

$$\gamma(x, t) = 1.$$

Dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$x'(t) = x(t).$$

Řešením této rovnice je pak

$$x(t) = Ce^t, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Přidáním počáteční podmínky

$$x(0) = 100$$

získáme konkrétní hodnotu konstanty C vyjádřením z rovnice:

$$x(0) = Ce^0,$$

tedy

$$C = 100.$$

Řešením počáteční úlohy je pak:

$$x(t) = 100e^t.$$

4.1.1 Spojité deterministické modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním

U modelů jednodruhových populací podle rovnice:

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (4.6)$$

předpokládáme, že jednotlivci populace jsou schopni reprodukce ihned v okamžiku svého narození. V realitě se ale naopak často setkáváme s tím, že daný jednotlivec potřebuje po svém zrození určitý časový interval k dosažení schopnosti reprodukce. Tedy je rychlost rozmnožování často ovlivněna stavem v minulosti rozdílné o střední dobu τ potřebnou k získání reprodukční schopnosti.

Tím se pak dostáváme ke zpoždění, které do rovnice jednodruhové populace začleníme.

Definice 19. (Jednodruhová populace pomocí diferenciální rovnice se zpožděním)

Model jednodruhové populace pomocí diferenciální rovnice se zpožděním zapisujeme ve tvaru:

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)). \quad (4.7)$$

4.1.2 Diskrétní deterministické modely jednodruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním

U populací, kde se vyskytují jedinci pouze z jedné generace užíváme diskrétních hodnot, které vyjadřují stav populace v určité části vývoje (jako je zárodek, mládě, dospělý jedinec atd.). Tyto hodnoty jsou definovány pomocí časového intervalu doby, která uplyne od zrození zárodku po dospělost.

Definice 20. (Diskrétní model jednodruhové populace)

Diskrétní model jednodruhové populace zapisujeme pomocí diferenční rovnice:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (4.8)$$

kde $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$ a x_{n+1} je počet jedinců n plus první generace, x_n počet jedinců zkoumané generace, x_{n-1} počet jedinců předchozí generace atd.

Počet jedinců následující generace je tedy určen $k + 1$ po sobě jdoucími předcházejícími generacemi.

V jednodušším případě lze následující generaci vyjádřit pomocí funkce počtu jedinců pouze předcházející generace:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (4.9)$$

V případě, že v dané populaci potřebujeme zahrnout dospívání delší než základní časový krok měřítka, potřebujeme opět zahrnout časové zpoždění τ generací.

Dynamiku takových populací potom zapíšeme pomocí diferenční rovnice.

Definice 21. (Diskrétní model jednodruhové populace se zpožděním)

Diskrétní model jednodruhové populace se zpožděním definujeme rovnicí ve tvaru:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-\tau}). \quad (4.10)$$

4.2 Modely dvoudruhových populací pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním

V situaci, kdy žije v jedné oblasti více druhů, bývá vzájemným soužitím ovlivněna dynamika každé z těchto populací. V nejjednodušším případě se zaměříme na situace, kde jsou takové druhy dva, tedy tzv. **dvoudruhové populace**.

Klasifikovat poté můžeme i vzájemný vliv těchto dvou populací. Jednoduchým rozdělením vlivu na kladný, záporný a neutrální můžeme vytvořit základní typy vzájemné interakce, jako například:

- *mutualismus*, kde žijí obě populace ve vzájemné symbióze (každá má na druhou kladný vliv, mají tedy ze soužití prospěch),
- opačnou *konkurenci*, kde mají obě populace vzájemně špatný vliv na druhou,
- *neutralismus*, kde je vzájemný vztah neutrální,
- nebo velmi častý typ *dravec-kořist*, kde jedna populace prospívá na úkor druhé.

4.2.1 Modely dravec-kořist

Označme $(\Delta x)_n$ počet kořistí narozených v časovém intervalu $\langle t, t + \Delta t \rangle$.

Předpokládáme-li úměru mezi $(\Delta x)_n$, počtem kořistí $x(t)$ v čase t , délkou časového intervalu Δt a relativní porodností $k_1 > 0$, můžeme přírůstek populace kořisti vyjádřit jako:

$$(\Delta x)_n = k_1 x(t) \Delta t. \quad (4.11)$$

Dále označme $(\Delta x)_u$ počet kořistí ulovených počtem dravců $y(t)$ v časovém intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$. Pak je $(\Delta x)_u$ úměrný délce intervalu Δt , počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a pravděpodobnosti $k_2 > 0$ setkání dravce s kořistí, které skončí záhoubou kořisti.

Potom $(\Delta x)_u$ můžeme zapsat do rovnosti jako:

$$(\Delta x)_u = k_2 x(t) y(t) \Delta t. \quad (4.12)$$

Celkovou změnu stavu kořistí za dobu Δt můžeme zapsat jako rozdíl:

$$\Delta x = (\Delta x)_n - (\Delta x)_u = k_1 x(t) \Delta t - k_2 x(t) y(t) \Delta t = \Delta t (k_1 x(t) - k_2 x(t) y(t)). \quad (4.13)$$

Obdobně předpokládejme úměru mezi počtem dravců $(\Delta y)_n$ narozených za dobu Δt , počtem vzájemných setkání dravců s kořistí, dobou Δt a konstantou $k_p > 0$, vyjadřující účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce. Konstantu $k_3 > 0$ pak vyjádříme jako $k_2 \cdot k_p$.

Pak můžeme zapsat rovnost:

$$(\Delta y)_n = k_3 x(t) y(t) \Delta t. \quad (4.14)$$

Stejným principem vyjádříme úměru úbytku v populaci dravců $(\Delta y)_u$ jako:

$$(\Delta y)_u = k_4 y(t) \Delta t, \quad (4.15)$$

kde $y(t)$ je populace dravců v čase t a $k_4 > 0$ konstanta vyjadřující relativní úmrtnost dravců.

Nyní můžeme celkovou změnu v populaci dravců vyjádřit vztahem:

$$\Delta y = (\Delta y)_n - (\Delta y)_u = k_3 x(t) y(t) \Delta t - k_4 y(t) \Delta t = \Delta t (k_3 x(t) y(t) - k_4 y(t)) \quad (4.16)$$

Pro limitní případ $\Delta t \rightarrow 0$ pak dostáváme obecný tvar rovnice dravec-kořist.

Definice 22. (Model dravec-kořist)

Model dravec-kořist obecně vyjadřujeme pomocí systému diferenciálních rovnic ve tvaru:

$$x'(t) = k_1 x(t) - k_2 x(t) y(t) \quad (4.17)$$

$$y'(t) = k_3 x(t) y(t) - k_4 y(t). \quad (4.18)$$

Lze tedy vidět, že pokud je počet dravců $y(t)$ nulový, populace kořisti neomezeně roste, jelikož předpokládáme, že konstanty k_1, k_2, k_3, k_4 jsou kladná čísla. Naopak pokud je nulový počet kořisti $x(t)$, hyne populace dravců.

4.2.1.1 Model dravec-kořist pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním

U výše uvedené soustavy diferenciálních rovnic nyní předpokládáme, že růst populace predátorů odpovídá změnám počtu dravců a kořisti se zpožděním τ . Po přidání konstanty K značící kapacitu prostředí dostáváme rovnice ve tvaru (viz [1]).

Definice 23. (Model dravec-kořist pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním)

$$x'(t) = k_1 \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t) - k_2 x(t)y(t) \quad (4.19)$$

$$y'(t) = k_3 x(t - \tau)y(t - \tau) - k_4 y(t). \quad (4.20)$$

4.2.2 Model dravec-kořist, metoda kroků

V této části je uveden výpočet rovnic metody dravec-kořist analyticky pomocí metody kroků. V knize [1] je u výše zmíněného tvaru rovnice poznamenáno, že metodou kroků řešit lze.

Počáteční podmínky jsou zjednodušeny. Ve výpočtu je tedy uvažováno: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, navíc je zanedbán vliv kapacity prostředí na kořist, tedy i celý výraz $\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ uvažujeme rovný 1.

Tedy dostáváme soustavu ve tvaru:

$$x'(t) = x(t) - x(t)y(t), \quad (4.21)$$

$$y'(t) = x(t - \tau)y(t - \tau) - y(t). \quad (4.22)$$

Dále uvažujeme konstantní zpoždění:

$$\tau = 2$$

a počáteční podmínky:

$$x(t) = 10, \quad t \leq 0, \quad (4.23)$$

$$y(t) = 5, \quad t \leq 0. \quad (4.24)$$

Nyní už následuje řešení pomocí metody kroků:

1) $t \in \langle 0, 2 \rangle$:

$$y_1'(t) = 10 \cdot 5 - y_1 = 50 - y_1$$

$$\int \frac{1}{50-y_1} dy = \int 1 dt$$

$$-\ln |50 - y_1| = t + c_1, \quad \text{kde } c_1 \in \mathbb{R}$$

Obecné řešení: $y_1 = ce^{-t} + 50$, $c \in \mathbb{R}$

Počáteční podmínka: $y_1(0) = 5 = c + 50$, z toho: $c = -45$

Partikulární řešení: $y_1(t) = -45e^{-t} + 50$.

$$y_1(2) = -45e^{-2} + 50 = 43,9 \text{ (zaokrouhleno).}$$

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_1(t)(-45e^{-t} + 50) = x_1(1 + 45e^{-t} - 50)$$

$$\int \frac{1}{x_1} dx = \int (1 + 45e^{-t} - 50) dt$$

$$\ln|x_1| = -49t - 45e^{-t} + c_1, \text{ kde } c_1 \in \mathbb{R}$$

Obecné řešení: $x_1 = ce^{-49t-45e^{-t}}$, $c \in \mathbb{R}$

Počáteční podmínka: $x_1(0) = 10 = ce^{-45}$, z toho: $c = 3,49 \cdot 10^{20}$ (zaokrouhleno).

Partikulární řešení: $x_1(t) = 3,49 \cdot 10^{20} e^{-49t-45e^{-t}}$.

$$x_1(2) = 34,9e^{-98-45e^{-2}} = 2,2 \cdot 10^{-44} \text{ (zaokrouhleno).}$$

2) $t \in \langle 2, 4 \rangle$:

$$y_2'(t) = x_2(t-2)y_2(t-2) - y_2(t) =$$

$$3,49 \cdot 10^{20} e^{-49(t-2)-45e^{-(t-2)}} \cdot (-45e^{-t} + 50) - y_2$$

Tuto rovnici neumíme vyřešit analyticky.

4.2.3 Model dravec-kořist a Wolfram Mathematica

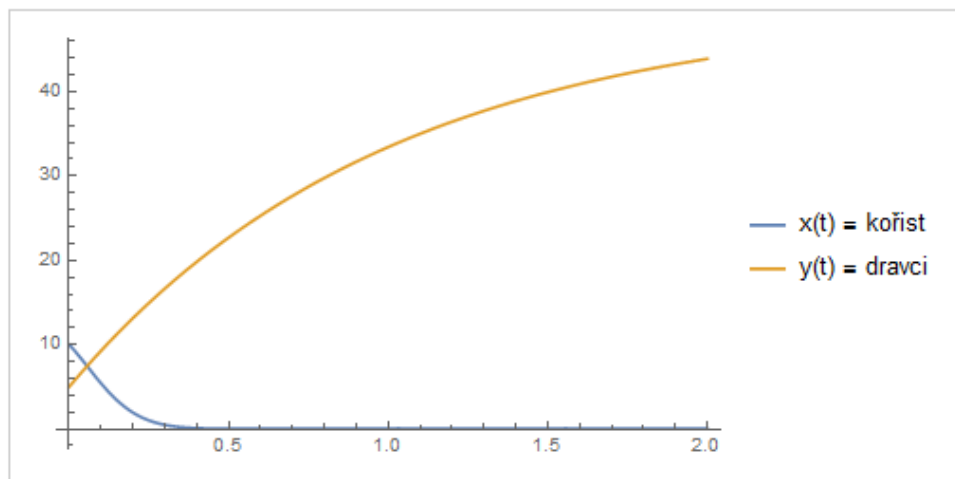
V této části je uveden kód k výpočtu výše řešeného (zjednodušeného) tvaru modelu dravec-kořist v softwaru Wolfram Mathematica. Celý kód viz obrázek 4.1.

```
Manipulate[
Module[{t, x, y, sol},
sol = First[NDSolve[{
x'[t] == k1x[t] - k2x[t] y[t], x[t /; t <= 0] == pocetx, y[t /; t <= 0] == pocety,
y'[t] == k3 x[t - τ] y[t - τ] - k4y[t]},
{x, y}, {t, 0, 2}]];
Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 2}, WorkingPrecision -> 10,
PlotLegends -> {"x(t) = kořist", "y(t) = dravci"}],
{{pocetx, 10}, 1, 20},
{{pocety, 5}, 1, 20},
{{τ, 2}, 0, 10},
{{k1, 1}, 0, 5},
{{k2, 1}, 0, 5},
{{k3, 1}, 0, 5},
{{k4, 1}, 0, 5}]
```

Obrázek 4.1: Kód

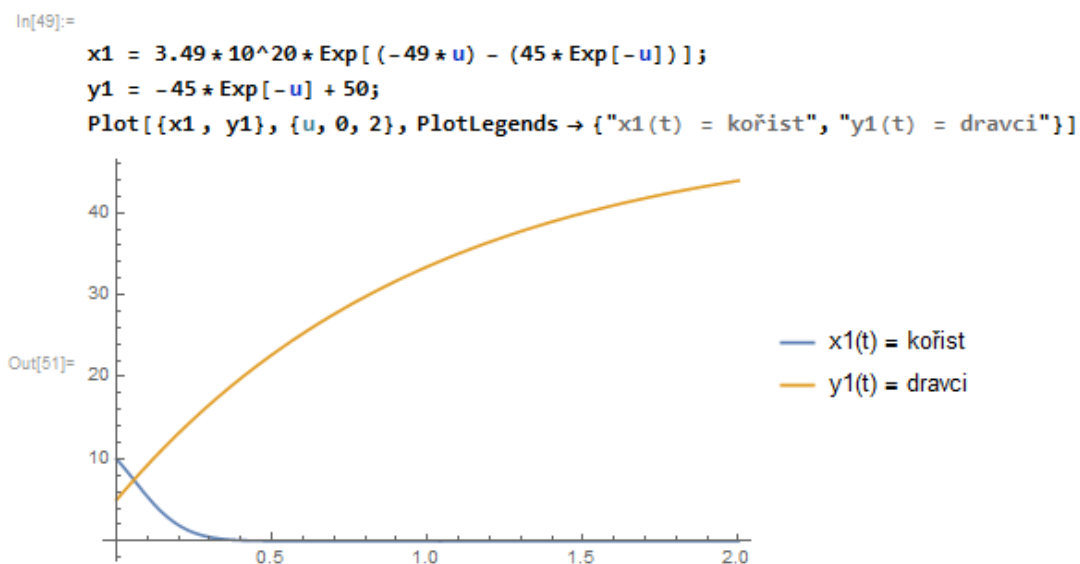
Jednotlivé parametry jsou po spuštění programu nastavitelné pomocí posuvných lišt v rámci definovaných mezí. Tedy například *pocetx* vyjadřující počáteční velikost populace kořisti je na začátku nastaven na hodnotu počáteční podmínky, tedy $pocetx = x(t) = 10$, pro $t \leq 0$, ale je možné pohybovat se v rozmezí $x(t) = 1$ až $x(t) = 20$, případně nastavit jiné rozmezí jednoduchou změnou kódu.

Pro naši volbu vstupních parametrů dostáváme graf viz obrázek 4.2.



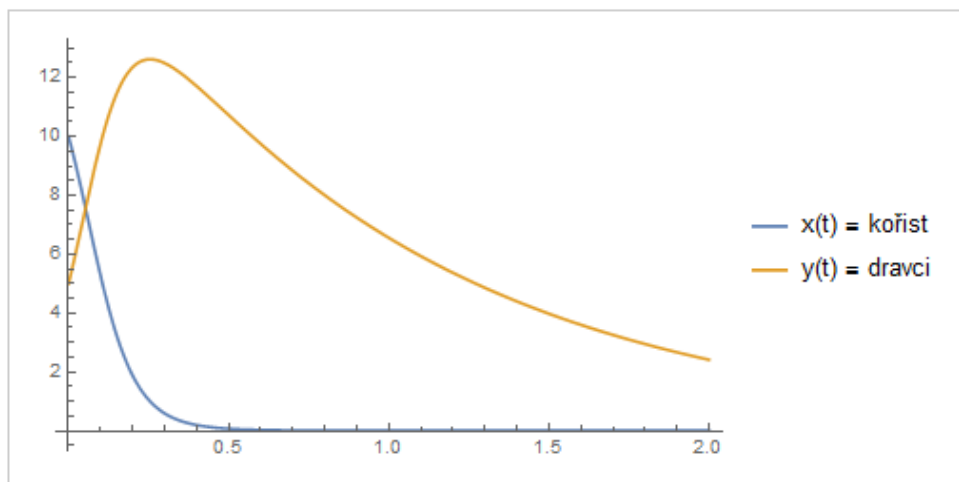
Obrázek 4.2: Výsledek pro základní nastavení parametrů na intervalu $[0, 2]$

Pro kontrolu vypočteného výsledku z části 4.2.2 je v obrázku 4.3 vykreslen výsledek metody kroků.



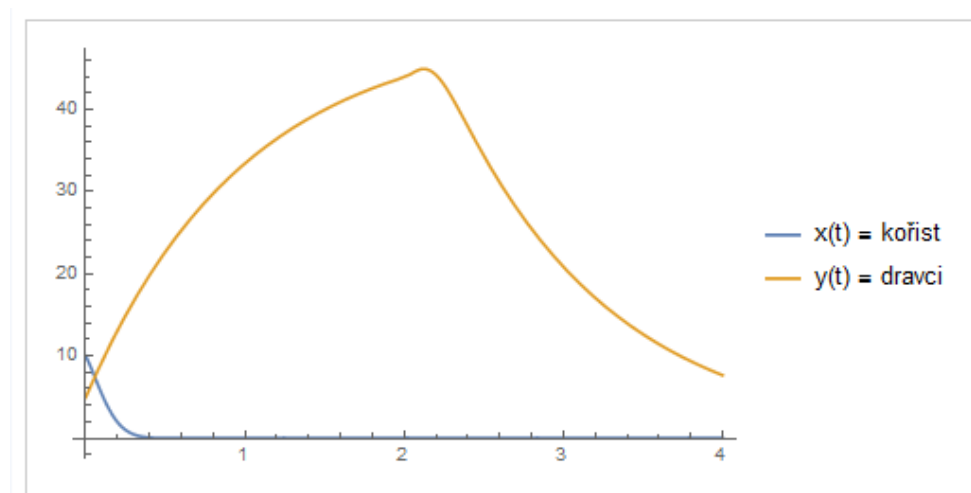
Obrázek 4.3: Porovnání výsledků

Po zhlédnutí obrázku 4.3 bychom mohli váhat, zda tento model odpovídá realitě, především zvážíme-li rostoucí populaci dravců v době, kdy je kořist na pokraji vyhynutí. Můžeme se tedy podívat na stejný vývoj bez zpoždění τ , resp. s $\tau = 0$, viz obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Výsledek pro základní nastavení parametrů na intervalu $[0, 2]$ bez zpoždění τ

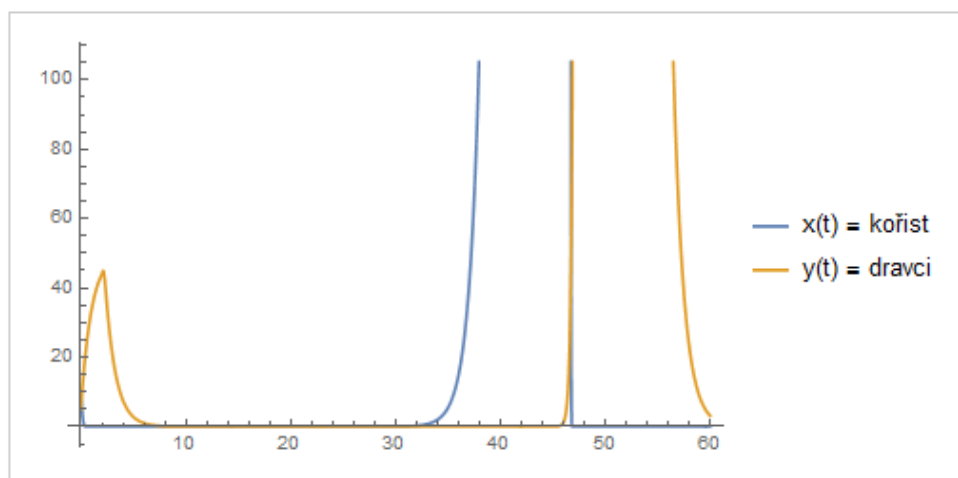
Pokud bychom vykreslili vývoj původního modelu se zpožděním i pro nedopočtený krok $t \in \langle 2, 4 \rangle$, dostali bychom výsledek viz 4.5.



Obrázek 4.5: Výsledek pro základní nastavení parametrů na intervalu $[0, 4]$

Po porovnání výsledků z obrázků 4.4 a 4.5 je viditelné, že po zavedeném zpoždění rostla populace dravců déle, přestože již nebyl dostatek kořisti. Tato změna je způsobena právě zpožděním τ , v tomto případě s hodnotou $\tau = 2$.

Program nám umožňuje sledovat vývoj do mnohem vyšších časů, než jsme schopni vypočítat. Například tedy můžeme pro původní nastavení parametrů zobrazit vývoj pro $t = 0$ až $t = 60$, viz obrázek 4.6.



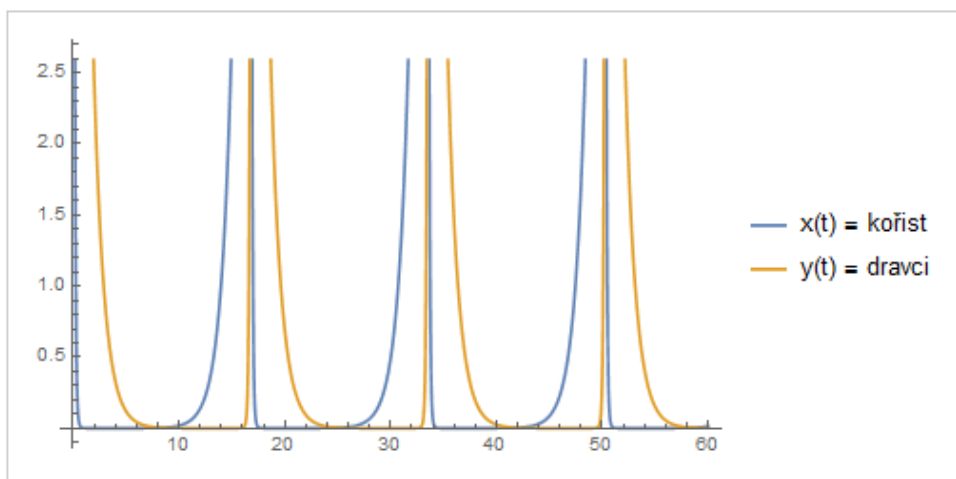
Obrázek 4.6: Delší časový vývoj

Pro vysoké t (např. $t = 167$) při těchto vstupních parametrech vypisuje program chybovou hlášku. Výpočet této soustavy diferenciálních rovnic se zpožděním je pro vysoké časy pro program Wolfram Mathematica náročný, tedy ani při jeho použití nemůžeme očekávat výsledky pro libovolné t . Pokud by šlo jen o několik málo hodnot, kdy program NDSolve hlásí singularity v matici v průběhu numerického výpočtu, předpokládám, že by se tyto hodnoty daly ošetřit např. použitím příkazu *WhenEvent* a v těchto několika časech hodnotu proměnných nevykreslit.

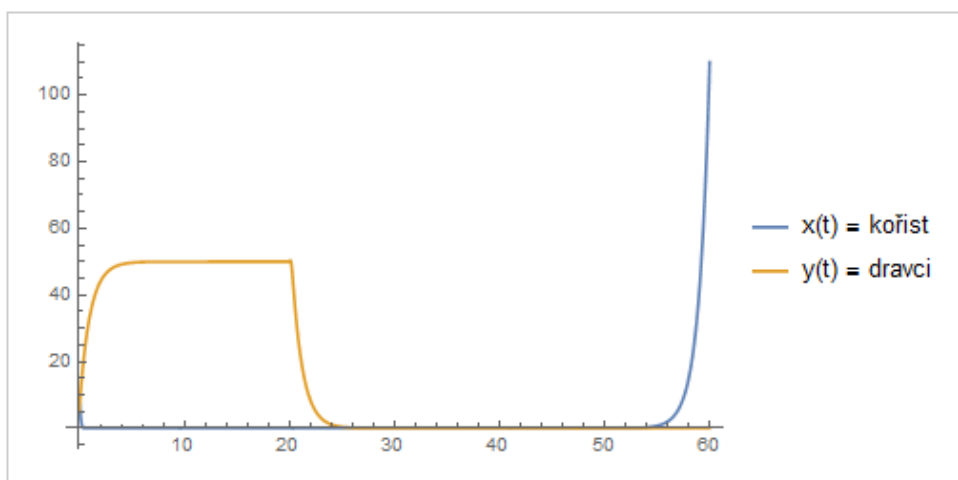
Opět by nás mohlo zajímat, jak bude vypadat tento dlouhodobější vývoj pro nulové zpoždění a pro zpoždění relativně velké.

Pro $\tau = 0$ se nárůst a vymírání populací značně zrychluje. Tento cyklus se na stejném časovém intervalu $t \in [0, 60]$ odehraje dokonce tři a půlkrát. Vývoj pro $\tau = 0$ je vykreslen na obrázku 4.7.

Pro $\tau = 20$ je nárůst a vymírání populací naopak výrazně zpomaleno. Vývoj pro $\tau = 20$ je vykreslen na obrázku 4.8.



Obrázek 4.7: Delší časový vývoj pro $\tau = 0$



Obrázek 4.8: Delší časový vývoj pro $\tau = 20$

Tento model jistě neodpovídá realitě, uvážíme-li nekonečné velikosti populací zachycené na obrázku 4.6. Toto je dáno zjednodušením modelu a zanedbanou kapacitou prostředí. Pokud se vrátíme k původní soustavě rovnic (4.19), můžeme kód (viz obrázek 4.1) upravit do podoby viz obrázek 4.9.

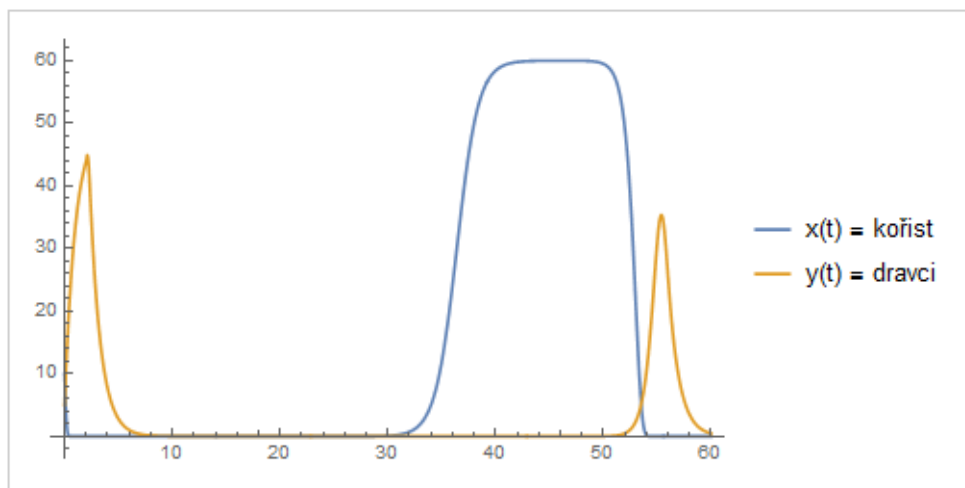
```

Manipulate[
Module[{t, x, y, sol},
sol = First[NDSolve[{
x'[t] == k1 (1 - x[t] / c) x[t] - k2 y[t] x[t], x[t /; t <= 0] == pocetx, y[t /; t <= 0] == pocety,
y'[t] == k3 x[t - τ] y[t - τ] - k4 y[t]},
{x, y}, {t, 0, 60}]];
Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 60}, WorkingPrecision -> 10,
PlotLegends -> {"x(t) = kořist", "y(t) = dravci"}],
{{pocetx, 10}, 1, 20},
{{pocety, 5}, 1, 20},
{{τ, 2}, 0, 10},
{{k1, 1}, 0, 5},
{{k2, 1}, 0, 5},
{{k3, 1}, 0, 5},
{{k4, 1}, 0, 5},
{{c, 60}, 1, 200}]

```

Obrázek 4.9: Kód s kapacitou prostředí

Hodnoty původních parametrů tedy zůstaly stejné: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $\tau = 2$, $pocetx = 10$ $pocety = 5$. Vložili jsme ale zpět výraz $\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$, tedy kapacita prostředí není zanedbána. Proměnná K je v kódu kvůli interním pravidlům softwaru značena c a je nastavena na hodnotu $c = 60$. Obrázek 4.10 zachycuje model pro toto nastavení parametrů se započítanou kapacitou prostředí. V porovnání s obrázkem 4.6 tento model zachycuje realitu o poznání lépe.



Obrázek 4.10: Model se započtenou kapacitou prostředí

Závěr

Cílem této práce bylo popsat diferenciální rovnice se zpožděním, čemuž byla detailně věnována první kapitola od představení zpoždění v různých podobách po odvození a definování pojmu systém diferenciálních rovnic se zpožděním, počáteční podmínka a počáteční úloha pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním. Zároveň byl v této kapitole splněn požadavek na uvedení biologických modelů popsaných pomocí diferenciálních rovnic nebo jejich soustav. Detailněji popsané modely včetně odvození byly následně uvedeny ve čtvrté kapitole.

Dalším cílem práce bylo popsání teorie existence řešení úloh se zpožděním. Této problematice byla věnována kapitola druhá, kde byly definovány podmínky existence a jednoznačnosti řešení pro systém diferenciálních rovnic se zpožděním.

Ve třetí kapitole byly sepsány poznatky o řešení diferenciálních rovnic s konstantním zpožděním. Byly zde nastíněny dvě metody, Metoda kroků a Laplaceova transformace, spočívající v (lokální) transformaci diferenciální rovnice se zpožděním na obyčejnou diferenciální rovnici. Zároveň zde byly představeny příklady řešené odpovídající metodou.

Poslední kapitola otevřela téma modelování vývoje populací. Jsou zde odvozeny modely vývoje jednodruhové a dvoudruhové populace. U dvoudruhových populací byly uvedeny základní typy vzájemné interakce, z nichž byl detailněji zkoumán vztah dravec-kořist. Pro tento model byl proveden výpočet metodou kroků. Následně byl splněn poslední z cílů, řešení příkladu pomocí počítače. Pro stejný model byl sepsán kód v softwaru Wolfram Mathematica, který umožňuje (pomocí posuvných lišt) měnit nastavení konstant a počátečních podmínek v definovaném rozsahu. Výsledky výpočtu metodou kroků se pro stejná počáteční nastavení s výsledkem software shodují. Navíc je sepsaný program vhodný pro výpočty dlouhodobějšího vývoje.

Vhodným rozšířením této práce by bylo zkoumání dalších metod pro řešení diferenciálních rovnic se zpožděním, případně hlubší průzkum uvedených reálných modelů v první kapitole práce. Kód ve čtvrté kapitole by mohl být velmi jednoduše upraven pro jiné hodnoty, či jejich větší rozmezí, i pro kompletně jiné modely. Dále by bylo možné dodat k práci historická data týkající se uvedených modelů a celé disciplíny diferenciálních rovnic se zpožděním.

Literatura

- [1] Driver Rodney David, Ordinary and Delay differential equations, New York, Springer, 1977, ISBN- 0-387-90231-7.
- [2] Smolinková Petra, Lineární diferenciální rovnice se zpožděním, Diplomová práce, Brno, Masarykova univerzita, 2015.
- [3] Holčík Jiří, Fojt Otakar, Modelování biologických systémů (vybrané kapitoly), první vydání, Brno, Vysoké učení technické v Brně, 2001, ISBN- 80-214-2023-5.
- [4] Kráčmar Jiří, Diferenciální rovnice se zpožděním, Bakalářská práce, Brno, Vysoké učení technické v Brně, 2011.
- [5] Mácha Václav, Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním, Bakalářská práce, Praha, Univerzita Karlova, 2006.
- [6] Lucio Tavernini, Continuous-Time Modeling and Simulation, CRC Press, 1996, ISBN- 2884492232.
- [7] Qun Liu, The effects of time-dependent delays on global stability of stochastic Lotka-Volterra competitive model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 420, 2015, Pages 108-115, ISSN 0378-4371, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.10.083>.
- [8] K. Sriram and Gilles Bernot and B François Képès A and François Képès and S. Karger Ag, Discrete Delay Model for the Mammalian Circadian Clock, *Complexus* 2006;3:185–199, Published online: August 31, 2006, DOI:10.1159/000095479
- [9] Brahim EL Boukari, Khalid Hattaf, and Noura Yousfi, A Discrete Model for HIV Infection with Distributed Delay, *International Journal of Differential Equations*, vol. 2014, Article ID 138094, 6 pages, 2014. doi:10.1155/2014/138094

- [10] Tony Humphries, Delay Differential Equations, 2016 NZMRI Summer School, Continuation Methods in Dynamical Systems, Raglan, New Zealand [online]. Copyright © [cit. 17.04.2018]. Dostupné z: <https://www.math.auckland.ac.nz/~hinke/meetings/NZMRI/materials/NZMRI16-Tony2.pdf>
- [11] Laplaceova transformace, [online], stránku zpracoval: Navrátil Pavel, pracoviště: UTB ve Zlíně, IIT, Fakulta aplikované informatiky, Poslední modifikace: 01.07.2008, Dostupné z: http://195.178.94.43/CAAC_PHP/CAAC/cesky/analyza/ltransform/ltransform.php
- [12] E. Nováková, M. Hyánková a L. Průcha, Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu „Matematika - 2.“ [online]. Copyright © [cit. 26.03.2018]. Dostupné z: <https://math.feld.cvut.cz/prucha/m2c/ltru.pdf>