Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami

Plzeň, 2019 Petra Štumpfová

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: **2018/2019**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Petra ŠTUMPFOVÁ**
Osobní číslo:	**A15B0230P**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obor:	**Matematika a její aplikace**
Název tématu:	**Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování:

1. Nastudujte známé postupy analytických konstrukcí Fučíkova spektra pro obyčejné diferenciální operátory druhého řádu.
2. Proveďte analytickou konstrukci Fučíkova spektra operátoru druhého řádu, který odpovídá okrajové úloze s následujícími okrajovými podmínkami:
   $u(0) = 0$ a $\int_0^1 \int_0^x u(t)dtdx = 0$.
3. Pro operátor z předešlého bodu popište kvalitativní vlastnosti Fučíkova spektra.

Rozsah grafických prací:	**dle potřeby**
Rozsah kvalifikační práce:	**cca 20 stran**
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná**

Seznam odborné literatury:

- **Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).**
- **Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).**
- **Sergejeva, N.: On some problems with nonlocal integral condition. Math. Model. Anal. 15 (2010), no. 1, 113-126.**

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Petr Nečesal, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2017**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2019**

Radová

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka

Západočeská univerzita v Plzni
L.S.
Fakulta aplikovaných věd

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami vypracovala pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne ....

Petra Štumpfová

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování panu Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. nejen za cenné rady a odborný dohled nad mou prací, ale i za ochotu, vstřícnost a trpělivost při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat své rodině, blízkým a především svému příteli za psychickou podporu a trpělivost při vytváření této práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje studiu Fučíkova spektra pro diferenciální rovnici druhého řádu s nelokální integrální podmínkou

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in C^2\langle 0,1\rangle$ a $y^{\pm}(x) := \max\{\pm y(x), 0\}$.

Nejprve je nalezen analytický popis Fučíkova spektra jakožto nultá hladina funkce dvou proměnných v α, β. Díky jinému, vhodnějšímu přístupu k integrální podmínce, je pak možné nalézt parametrizaci části Fučíkova spektra.

Klíčová slova

Fučíkovo spektrum, okrajová úloha, nelokální okrajová úloha, počáteční úloha.

Abstract

This Bachelor Thesis dedicates to the study of Fučík spectrum for the second order boundary value problem with a non-local boundary condition

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \end{cases}$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in C^2\langle 0,1\rangle$ a $y^{\pm}(x) := \max\{\pm y(x), 0\}$.

At first there is found an analytic description of Fučík spectrum as zero level of two dimensional function at α, β. Thanks to different, worthier access to the integral condition, it is allowed to find a parametrization of a part of Fučík spectrum.

Key words

The Fučík spectrum, the boundary value problem, the non-local boundary value problem, the initial value problem.

Obsah

Úvod

Cílem této práce je studium úlohy

$$
\begin{cases}
y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\
y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t = 0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in C^2\langle 0,1\rangle$ a $y^\pm(x) := \max\{\pm y(x), 0\}$.

Budeme zkoumat množinu

$$\Sigma = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (1) má netriviální řešení}\},$$

kterou nazveme Fučíkovo spektrum pro úlohu (1).

V první kapitole se krátce budeme zabývat řešením počáteční úlohy, která již byla dříve zkoumána v několika pracech, např. [3], nebo [4]. Také krátce shrneme řešitelnost obecné kubické rovnice, kterou využijeme dále.

V druhé kapitole najdeme analytický popis Fučíkova spektra Σ pro úlohu (1), ve které se budeme snažit vyjádřit integrální podmínku jiným, vhodnějším způsobem. Celý tento postup bude inspirován článkem [5]. Množina Σ pak bude popsána jako nultá hladina funkce dvou proměnných v α, β. Dále bude představena implementace tohoto popisu v programu Wolfram Mathematica, a to v příloze A.

Třetí kapitola se bude věnovat parametrizaci Fučíkova spektra pro úlohu (1) ve čtvrtém kvadrantu a kvalitativním vlastnostem Fučíkova spektra. K této parametrizaci využijeme transformace souřadnic pomocí zobrazení $\phi = \phi(a,b)$, kde $\sqrt{\alpha} = a$ a $\sqrt{\beta} = b$, které je definováno následujícím způsobem

$$
\phi : \begin{cases}
k = \frac{b}{a}, \\
s = b - \frac{b\pi}{a}.
\end{cases}
$$

Při parametrizaci Fučíkova spektra pro úlohu (1) se omezíme pro jednoduchost pouze na množinu

$$\Omega^+ = (\pi^2, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle.$$

Kapitola 1

Základní poznatky

V této kapitole zformulujeme počáteční úlohu pro nelineární diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž řešení je již známé a využijeme jej v další části této práce. Dále shrneme řešitelnost obecné kubické rovnice, jež bude užitečná v poslední kapitole.

1.1 Počáteční úloha

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Funkce $y(x) = \mathrm{e}^{zx}$ je řešením rovnice (1.1), pokud z je kořenem tzv. charakteristického polynomu

$$z^2 + \lambda = 0 \tag{1.2}$$

diferenciální rovnice (1.1).

Pro $\lambda > 0$ má řešení charakteristické rovnice (1.2) tvar komplexního čísla $z = \pm\sqrt{\lambda}\mathrm{i}$, kde i je imaginární jednotka. Obecné řešení rovnice (1.1) pro $\lambda > 0$ má tedy tvar

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Pro $\lambda = 0$ má diferenciální rovnice v (1.1) tvar $y''(x) = 0$ a její obecné řešení je

$$y(x) = c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Pro $\lambda < 0$ je obecné řešení diferenciální rovnice (1.1) ve tvaru

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Dále uvažujme počáteční úlohu pro nelineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = p, \end{cases} \tag{1.6}$$

kde $p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kladná část funkce y je definována jako $y^+(x) := \max\{y(x), 0\}$ a záporná jako $y^-(x) := \max\{-y(x), 0\}$. Platí vztah $y(x) = y^+(x) - y^-(x)$.

Uvažujeme-li parametry α, β nelineární diferenciální rovnice v (1.6) stejné, tedy $\alpha = \beta = \lambda$, získáváme lineární diferenciální rovnici (1.1). Počáteční úloha pro tuto lineární rovnici má tvar

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = p, \end{cases} \tag{1.7}$$

kde $p, \lambda \in \mathbb{R}$. Řešení počáteční úlohy (1.7) má pro $p \in \mathbb{R}$ tvar

$$y(x) = \begin{cases} \frac{p}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad \lambda > 0, \\ px, \quad \lambda = 0, \\ \frac{p}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda} x), \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Pro $p = 0$ má úloha (1.6) pouze triviální řešení $y(x) \equiv 0$.

Pro počáteční úlohu (1.6) s $p > 0$ uveďme tvar jejího řešení pro různá nastavení parametrů α a β pomocí souhrnné tabulky (viz Tabulka 1.1).

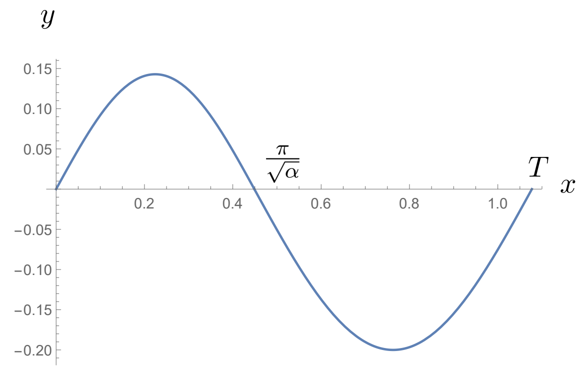
$\alpha > 0 \quad \beta > 0$	$\frac{p}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} x), \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \rangle$	$\frac{p}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})), \quad x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, T\rangle$
$\alpha > 0 \quad \beta = 0$	$\frac{p}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} x), \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \rangle$	$p(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}), \quad x > \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$
$\alpha > 0 \quad \beta < 0$	$\frac{p}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} x), \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \rangle$	$\frac{p}{\sqrt{-\beta}} \sinh(\sqrt{-\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})), \quad x > \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$
$\alpha = 0 \quad \beta \in \mathbb{R}$	$px, \quad x \in \mathbb{R}$	
$\alpha < 0 \quad \beta \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{\sqrt{-\alpha}} \sinh(\sqrt{-\alpha} x), \quad x \in \mathbb{R}$	

Tabulka 1.1: Přehled řešení úlohy (1.6) pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kde $T = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$ a pro $\alpha, \beta > 0$ je řešení y T-periodické.

Jestliže y je řešením počáteční úlohy (1.6) pro $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ a $p = p_0 > 0$, potom $u(x) = -y(x)$ je řešením počáteční úlohy (1.6) pro $\alpha = \beta_0$, $\beta = \alpha_0$ a $p = -p_0 < 0$.

Tedy počáteční úloha (1.6) má pro $\alpha, \beta > 0$ a $p > 0$ (viz obrázek 1.1) právě jedno T-periodické řešení (viz [4]), které lze vyjádřit na základě intervalové periodicity $\langle 0, T \rangle$ jako

$$y(x) = \begin{cases} \frac{p}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \\ -\frac{p}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})), \quad \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} < x \le T = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \end{cases} \tag{1.9}$$



Obrázek 1.1: Graf řešení počáteční úlohy (1.6) na intervalu $\langle 0, T\rangle$ pro $\alpha = 49, \beta = 25$ a $p = 1$.

1.2 Řešení kubické rovnice

V této podkapitole se zabývejme obecnou kubickou rovnicí, jejíž řešení využijeme v další části této práce.

Řešitelnost obecné kubické rovnice

$$c_3k^3 + c_2k^2 + c_1k + c_0 = 0, \tag{1.10}$$

kde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, závisí na znaménku diskriminantu

$$D = 18c_3c_2c_1c_0 - 4c_2^3c_0 + c_2^2c_1^2 - 4c_3c_1^3 - 27c_3^2c_0^2. \tag{1.11}$$

Pro $D > 0$ existují tři různá reálná řešení.

Pro $D = 0$ má rovnice buď jeden trojnásobný reálný kořen nebo jeden dvojnásobný a jeden jednoduchý reálný kořen.

Pro $D < 0$ má obecná kubická rovnice právě jedno reálné řešení a dvě imaginární řešení, která jsou komplexně sdružená, viz [6].

Poznámka 1. *Dle [6] vyjádřeme analyticky kořeny kubické rovnice. Obecnou kubickou rovnici* (1.10) *vydělme koeficientem* c_3. *Redukovaná rovnice bez kvadratického členu vznikne použitím substituce* $k = t - \frac{c_2}{3c_3}$, *tato redukovaná rovnice má tvar:*

$$t^3 + \mathcal{P}t + \mathcal{Q} = 0,$$

kde

$$\mathcal{P} = \frac{3c_3c_1 - c_2^2}{3c_3^2}$$

a

$$\mathcal{Q} = \frac{2c_2^3 - 9c_3c_2c_1 + 27c_3^2c_0}{27c_3^3}.$$

Pro redukovanou kubickou rovnici $t^3 + \mathcal{P}t + \mathcal{Q} = 0$ *lze řešení vyjádřit pomocí Cardanových vzorců ve tvaru*

$$t_0 = \sqrt[3]{-\frac{\mathcal{Q}}{2} + \sqrt{\frac{\mathcal{Q}^2}{4} + \frac{\mathcal{P}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\mathcal{Q}}{2} - \sqrt{\frac{\mathcal{Q}^2}{4} + \frac{\mathcal{P}^3}{27}}}. \tag{1.12}$$

Pokud má rovnice (1.10) *jedno reálné řešení, tedy* $D < 0$, *je možné vyjádřit řešení pomocí hyperbolických funkcí, viz [8] a [9], pro*

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{Q}}{2}\left(\frac{3}{|\mathcal{P}|}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{1.13}$$

jako

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh}\mathcal{C}\right), \quad \mathcal{C} \geq 1. \tag{1.14}$$

Pro $\mathcal{C} < 1$ *by kubická rovnice* (1.10) *měla jiná řešení, tuto možnost ale nebudeme potřebovat. Řešení obecné kubické rovnice* (1.10) *má tedy tvar*

$$k = t_0 - \frac{c_2}{3c_3}.$$

Kapitola 2

Okrajová úloha s nelokální okrajovou podmínkou

V této kapitole se budeme zabývat okrajovou úlohou s nelokální okrajovou podmínkou integrálního typu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $y^\pm(x) := \max\{\pm y(x), 0\}$. Cílem této práce je najít všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tak, že úloha (2.1) má netriviální řešení $y \in C^2\langle 0,1\rangle$. Integrální podmínka v úloze (2.1) má tvar

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2}$$

a lze ji také zapsat jako

$$\int\limits_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0, \tag{2.3}$$

kde jsme označili $F(t) := \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x$ pro $0 \leq t \leq 1$. Funkce F je tedy primitivní funkce k funkci y na intervalu $(0,1)$, pro kterou platí $F(0) = 0$. Integrální podmínka (2.3) tedy znamená, že střední hodnota primitivní funkce F je na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nulová.

Definice 1. *Fučíkovo spektrum pro úlohu* (2.1) *je množina*

$$\Sigma = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \textit{úloha } (2.1) \textit{ má netriviální řešení}\}.$$

Dále definujme podmnožiny Fučíkova spektra Σ jako

$$\Sigma^{+} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \textit{úloha } (2.1) \textit{ má netriviální řešení } y,\ y'(0) > 0\},$$

$$\Sigma^{-} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \textit{úloha } (2.1) \textit{ má netriviální řešení } y,\ y'(0) < 0\}.$$

Platí $\Sigma = \Sigma^{+} \cup \Sigma^{-}$, neboť pro $y'(0) = 0$ má úloha (2.1) pouze triviální řešení $y(x) \equiv 0$. Jestliže y je řešením úlohy (2.1) pro $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ a $\beta = \beta_0 \in \mathbb{R}$, potom i $u(x) = -y(x)$ je řešením úlohy (2.1) pro $\alpha = \beta_0$ a $\beta = \alpha_0$. Dvojice $(\alpha,\beta) \in \Sigma^{+}$ právě tehdy, když dvojice $(\beta,\alpha) \in \Sigma^{-}$ (viz [4]), tedy Fučíkovo spektrum Σ je symetrické vzhledem k diagonále $\alpha = \beta$. Dále tedy stačí zkoumat jen množinu Σ^{+}.

Lemma 1. *Jestliže y je netriviální řešení úlohy* (2.1) *s $y'(0) > 0$, potom $\alpha > \pi^2$.*

Důkaz. Proveďme důkaz sporem a rozdělme jej do tří částí:

1. Uvažujme nejprve $\alpha < 0$, pak je řešení y počáteční úlohy (1.6) pro $p = y'(0)$ ve tvaru
$$y(x) = \frac{p}{\sqrt{-\alpha}}\sinh(\sqrt{-\alpha}x).$$
Jestliže je y řešení úlohy (2.1), potom platí pro $t \geq 0$
$$\int_0^t y(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sinh(\sqrt{-\alpha}x)\mathrm{d}x = \frac{p - p\cos(\sqrt{\alpha}t)}{\alpha}.$$
Střední hodnota primitivní funkce $\int_0^t y(x)\mathrm{d}x$ je na intervalu $\langle 0,1\rangle$ pak rovna
$$\int_0^1\int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{p - p\cos(\sqrt{\alpha}t)}{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{p(\sqrt{\alpha} - \sin\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha^3}},$$
tedy pro $\alpha < 0$ je nenulová a to je spor s (2.2).

2. Pro $\alpha = 0$ je řešení y počáteční úlohy (1.6) pro $p = y'(0) > 0$ lineární funkcí $y(x) = px$, pro kterou platí
$$\int_0^1\int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^t px\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{pt^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{p}{6} > 0$$
a to je spor s (2.2).

3. Nakonec pro $0 < \alpha \leq \pi^2$ je y řešení počáteční úlohy (1.6) pro $p = y'(0) > 0$ ve tvaru (1.9). První kladný nulový bod je $x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$. Pro $0 < \alpha \leq \pi^2$ platí, že $x_0 \geq 1$. To ale znamená, že podmínku (2.2) nelze splnit, neboť řešení y pro $x_0 \geq 1$ a $p > 0$ nabývá pouze kladných hodnot na intervalu $(0, 1)$, tedy

$$\int_0^1 \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^t \frac{p\sin(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{p(1-\cos(\sqrt{\alpha}t))}{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{p(\sqrt{\alpha} - \sin\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha^3}} > 0,$$

jelikož $\sin\sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha}$, a to je spor s (2.2).

Pro všechna $\alpha \leq \pi^2$ jsme došli ke sporu, musí tedy platit $\alpha > \pi^2$. $\square$

Jestliže y je řešením úlohy (2.1), potom i $u(x) = c \cdot y(x)$, kde $c > 0$, je řešením úlohy (2.1). Proto stačí uvažovat pouze řešení y, které vyhovuje podmínce $y'(0) = 1$.

Rozdělme řešitelnost okrajové úlohy (2.1) do tří případů.

2.1 Popis množiny Σ^+ pro $\beta < 0$

Pro případ $\alpha > \pi^2$ a $\beta < 0$, kde $\alpha = a^2$, $a > \pi$, a $\beta = -b^2, b < 0$, má úloha (2.1) tvar

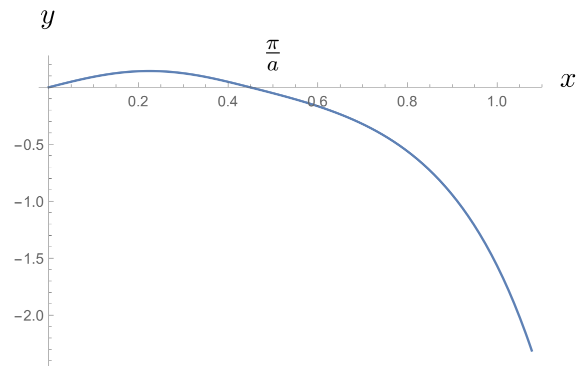
$$\begin{cases} y''(x) + a^2y^+(x) + b^2y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int_0^1 \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Pak má v tomto případě řešení y počáteční úlohy

$$\begin{cases} y''(x) + a^2y^+(x) + b^2y^-(x) = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = p, \end{cases} \tag{2.5}$$

pro $p > 0$ tvar (viz obrázek 2.1)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{p}{a}\sin(ax), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{a}, \\ -\frac{p}{b}\sinh(b(x - \frac{\pi}{a})), \quad \frac{\pi}{a} < x. \end{cases} \tag{2.6}$$



Obrázek 2.1: Graf řešení počáteční úlohy (1.6) pro $a = 7, b = -5$ a $p = 1$.

Lemma 2. *Okrajová úloha (2.4) má pro $a > \pi$ a $b < 0$ netriviální řešení y s $y'(0) > 0$ právě tehdy, když*

$$\frac{2b^3}{a^2} + b - \frac{b^3\pi}{a^3} - \frac{b\pi}{a} - \sinh\left(b - \frac{b\pi}{a}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Důkaz. Pro $a > \pi$ je $\frac{\pi}{a} < 1$ (platí nutná podmínka v lemmatu 1). Pro řešení y počáteční úlohy (2.5) dané v (2.6) máme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \int_0^t \frac{p\sin(ax)}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{a}}^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{p\sin(ax)}{a}\mathrm{d}x + \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{a}}^t -\frac{p\sinh(b(x-\frac{\pi}{a}))}{b}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{p - p\cos(at)}{a^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{a}}^1 \Big(\frac{2p}{a^2} + \frac{p - p\cosh(b(t-\frac{\pi}{a}))}{b^2}\Big)\mathrm{d}t = \\
&= p\Big(\frac{\pi}{a^3} + \frac{2}{a^2} - \frac{2\pi}{a^3} + \frac{1}{b^2} - \frac{\pi}{ab^2} - \frac{\sinh(b - \frac{b\pi}{a})}{b^3}\Big),
\end{aligned}$$

a tedy

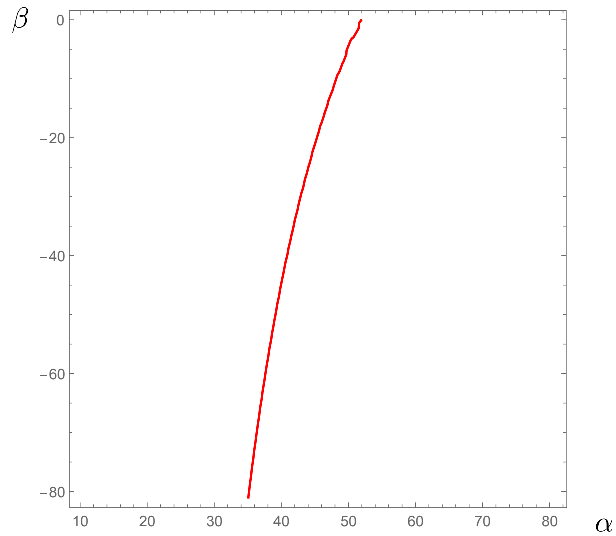
$$\frac{b^3}{p}\int_0^1 \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{2b^3}{a^2} + b - \frac{b^3\pi}{a^3} - \frac{b\pi}{a} - \sinh\left(b - \frac{b\pi}{a}\right).$$

Integrální podmínka (2.2) má tedy tvar (2.7). $\square$

Fučíkovým spektrem pro úlohu (2.1) pro $\beta < 0$ je tedy nultá hladina funkce dvou proměnných

$$(\alpha, \beta) \mapsto \frac{2\sqrt{-\beta^3}}{\alpha} + \sqrt{-\beta} - \frac{\sqrt{-\beta^3}\pi}{\sqrt{\alpha^3}} - \frac{\sqrt{-\beta}\pi}{\sqrt{\alpha}} - \sinh\left(\sqrt{-\beta} - \frac{\sqrt{-\beta}\pi}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

která je znázorněna na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Fučíkovo spektrum úlohy (2.1) v $\alpha\beta$ rovině pro $\alpha > \pi^2, \beta < 0$.

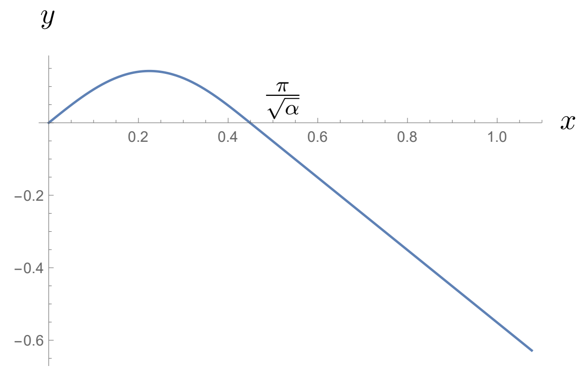
2.2 Popis množiny Σ^+ pro $\beta = 0$

Uvažujme $\beta = 0$, pak má úloha (2.1) tvar

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

kde $\alpha > \pi^2$, neboť platí nutná podmínka uvedená v lemmatu 1. Jestliže y je řešením počáteční úlohy (1.6) pro $\beta = 0$, potom má pro $p = 1$ řešení y tvar (viz obrázek 2.3)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} x) \quad \text{pro } 0 \le x \le \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \\ \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - x \quad \text{pro } \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} < x. \end{cases} \tag{2.9}$$



Obrázek 2.3: Graf řešení počáteční úlohy (1.6) pro $\alpha = 49$ a $\beta = 0$.

Lemma 3. *Okrajová úloha* (2.8) *má netriviální řešení* y *s* $y'(0) > 0$ *právě tehdy, když*

$$12\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha^3} - 6\pi + 3\alpha\pi - 3\sqrt{\alpha}\pi^2 + \pi^3 = 0. \tag{2.10}$$

Důkaz. Pro řešení úlohy (1.6) dané v (2.9) máme

$$\int_0^1\int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}\int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \frac{\sin(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^t \Big(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - x\Big)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \frac{1-\cos(\sqrt{\alpha}t)}{\alpha}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^1 \Big(\frac{2}{\alpha} + \Big[\frac{\pi x}{\sqrt{\alpha}} - \frac{x^2}{2}\Big]_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^t\Big)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}} \frac{1-\cos(\sqrt{\alpha}t)}{\alpha}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}^1 \Big(\frac{2}{\alpha} - \frac{\pi^2}{2\alpha} + \frac{\pi t}{\sqrt{\alpha}} - \frac{t^2}{2}\Big)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^3}} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^3}} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi^2}{2\alpha} + \frac{\pi^3}{6\sqrt{\alpha^3}},$$

tedy

$$6\sqrt{\alpha^3}\int_0^1\int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 12\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha^3} - 6\pi + 3\alpha\pi - 3\sqrt{\alpha}\pi^2 + \pi^3.$$

□

Pro $a = \sqrt{\alpha}$ lze (2.10) zapsat ve tvaru

$$a^3 - 3\pi a^2 + (3\pi^2 - 12)a - \pi^3 + 6\pi = 0. \tag{2.11}$$

Diskriminant kubické rovnice (2.11) $D = 6912 - 972\pi^2$ je záporný pro všechna a, tedy existuje právě jeden reálný kořen, viz poznámka 1, který má tvar

$$a = t_0 + \pi,$$

kde t_0 dané vztahem (1.12) pro $\mathcal{P} = -12$ a $\mathcal{Q} = -6\pi$ je

$$t_0 = \sqrt[3]{3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 64}} + \sqrt[3]{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 64}}.$$

Právě jeden reálný kořen rovnice (2.11) má tvar

$$a_0 = \pi + \sqrt[3]{3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 64}} + \sqrt[3]{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 64}}, \tag{2.12}$$

vraťme se k původní proměnné α a označme

$$\alpha_0 = a_0^2.$$

Do množiny Σ^+ pak patří dvojice $(\alpha_0, 0)$. Hledaná hodnota α_0 je reálné řešení rovnice (2.10), jehož přibližná hodnota je $\alpha_0 \doteq 52,1103$.

2.3 Popis množiny Σ^+ pro $\beta > 0$

Věnujme se nyní popisu části Fučíkova spektra, a to množině Σ^+, pro $\beta > 0$. Zaveďme substituci $\alpha = a^2$, $a > \pi$, a $\beta = b^2$, $b > 0$. Úloha (2.1) má pro $a, b > 0$ tvar

$$\begin{cases} y''(x) + a^2 y^+(x) - b^2 y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Počáteční úloha (1.6) má pro $\alpha = a^2 > 0$ a $\beta = b^2 > 0$ právě jedno T-periodické řešení, $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$, které má pro $p > 0$ tvar

$$y(x) = \begin{cases} \frac{p}{a}\sin(ax), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{a}, \\ -\frac{p}{b}\sin(b(x - \frac{\pi}{a})), \quad \frac{\pi}{a} < x \le T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Definice 2. *Definujme množinu $\mathcal{M}$ pro úlohu* (2.13)

$$\mathcal{M} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \textit{úloha } (2.13) \textit{ má netriviální řešení } y \textit{ s } y'(0) > 0.\}.$$

Platí, že pokud dvojice (a, b) patří do množiny $\mathcal{M}$, pak dvojice (a^2, b^2) patří do množiny Σ. Naopak pokud patří dvojice (α, β) do množiny Σ pro $\alpha, \beta > 0$, potom dvojice $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ nebo $(\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha})$ patří do $\mathcal{M}$.

Definice 3. *Pro $a, b > 0$ definujme*

$$F(t) := \int_0^t y(x)\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

kde y je řešení počáteční úlohy (1.6) pro $\alpha = a^2 > 0, \beta = b^2 > 0$ a $p > 0$.

Lemma 4. *Pro funkci F definovanou v (2.15) platí*

$$\forall t \in \mathbb{R} : F(t + T) = F(t) + F(T),$$

kde $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$. Navíc funkce F je periodická právě tehdy, když $a = b$.

Důkaz. Pokud je y T-periodická funkce, pak

$$F(t+T) = \int_0^t y(x)\mathrm{d}x + \int_t^{t+T} y(x)\mathrm{d}x = F(t) + \int_0^T y(x)\mathrm{d}x = F(t) + F(T)$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Dále pro y v (2.14) máme

$$\begin{aligned} \frac{F(T)}{T} &= \frac{1}{T}\int_0^T y(x)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{ab}{\pi(a+b)}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{p\sin(ax)}{a}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{a}}^T \frac{-p\sin(b(x-\frac{\pi}{a}))}{b}\mathrm{d}x\Big) = \\ &= \frac{ab}{\pi(a+b)}\Big(\frac{2p}{a^2} + \Big[\frac{p\cos(\frac{b\pi}{a} - bx)}{b^2}\Big]_{\frac{\pi}{a}}^T\Big) = \\ &= \frac{ab}{\pi(a+b)}\Big(\frac{2p}{a^2} - \frac{2p}{b^2}\Big) = \\ &= \frac{2p}{\pi}\frac{b-a}{ab}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

A tedy $a = b$ právě tehdy, když $F(T) = 0$. □

Lemma 5. *Mějme libovolnou T-periodickou funkci $\widetilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $T > 0$. Dále označme $\widetilde{F}(t) = \int_0^t \widetilde{y}(x)\mathrm{d}x$, $t \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $A(t) = \widetilde{F}(t) - \frac{\widetilde{F}(T)}{T}t$ je T-periodická funkce.*

Důkaz. Chceme dokázat, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí $A(t+T) = A(t)$.

$$A(t+T) = \widetilde{F}(t+T) - \frac{\widetilde{F}(T)}{T}(t+T).$$

V lemmatu 4 jsme již pro funkci F definovanou v (2.15) dokázali $F(t+T) = F(t) + F(T)$. Využili jsme toho, že funkce $\widetilde{y} = y$ je T-periodická. Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$A(t+T) = \widetilde{F}(t) + \widetilde{F}(T) - \frac{\widetilde{F}(T)}{T}t - \widetilde{F}(T) = A(t).$$

□

V následujících definicích uvedeme funkce, díky kterým bude možné integrální podmínku (2.2) vyjádřit jako nultou hladinu funkce dvou proměnných.

Definice 4. *Pro $a, b > 0$ definujme*

$$G(z) := \int_0^z \Big(F(t) - \frac{F(T)}{T}t\Big)\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

kde $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$ a F je definováno v (2.15).

Zřejmě platí

$$G(z) = \int_0^z \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{F(T)}{T}\frac{z^2}{2}.$$

Definice 5. *Pro $a, b > 0$ definujme*

$$H(z) := G(z) - \frac{G(T)}{T}z, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

kde $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$ a G je definováno v (2.17).

Navíc

$$H(z) = \int_0^z \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{F(T)}{T}\frac{z^2}{2} - \frac{G(T)}{T}z. \tag{2.19}$$

Poznamenejme, že výrazy $\frac{F(T)}{T}$ a $\frac{G(T)}{T}$ jsou funkční hodnoty daných funkcí závislé pouze na a, b. Pomocí (2.19) vyjádřeme tedy

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= H(1) + \int_0^1 \frac{F(T)}{T}t\mathrm{d}t + \frac{G(T)}{T} = \\ &= H(1) + \frac{F(T)}{2T} + \frac{G(T)}{T}.\end{aligned}$$

Integrální podmínku (2.2) lze pak zapsat jako

$$H(1) + \frac{F(T)}{2T} + \frac{G(T)}{T} = 0. \tag{2.20}$$

Lemma 6. *Funkce H definovaná v (2.18) je T-periodická, kde $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$.*

Důkaz. S využitím lemmatu 5 je funkce $F(t) - \frac{F(T)}{T}t$ T-periodická díky T-periodicitě y v (2.14) pro $\widetilde{y}(x) = y(x)$ a $\widetilde{F}(t) = F(t) = \int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x$. Funkce H je s využitím lemmatu 5 pak díky T-periodicitě $F(x) - \frac{F(T)}{T}x$ také T-periodická pro $\widetilde{y} = F(x) - \frac{F(T)}{T}x$ a $\widetilde{F}(t) = \int\limits_0^t \Big(F(x) - \frac{F(T)}{T}x\Big)\mathrm{d}x = G(t)$. $\square$

Platí

$$\begin{aligned}
\frac{G(T)}{T} &= \frac{1}{T}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x dt - \frac{F(T)}{T}\frac{T^2}{2}\Big) = \qquad (2.21)\\
&= \frac{1}{T}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}}\int\limits_0^t \frac{p\sin(ax)}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{\pi}{a}}^T\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{p\sin(ax)}{a}\mathrm{d}x + \\
&\quad + \int\limits_{\frac{\pi}{a}}^t \frac{-p\sin(b(x-\frac{\pi}{a}))}{b}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t\Big) - \frac{F(T)}{2} = \\
&= \frac{ab}{\pi(a+b)}\Big(\frac{p\pi}{a^3} + \int\limits_{\frac{\pi}{a}}^T\Big(\frac{2p}{a^2} - \frac{p(1-\cos(b(t-\frac{\pi}{a})))}{b^2}\Big)\mathrm{d}t\Big) - \frac{p(b^2-a^2)}{a^2b^2} = \\
&= \frac{ab}{\pi(a+b)}\Big(\frac{p\pi}{a^3} + \frac{2p\pi}{a^2b} - \frac{p\pi}{b^3}\Big) - \frac{p(b^2-a^2)}{a^2b^2} = \\
&= \frac{p}{ab}.
\end{aligned}$$

V následující definici uvedeme funkci $\mathcal{H} = \mathcal{H}(k, x)$, která je 2π-periodická v druhé proměnné.

Definice 6. *Definujme funkci* $P : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jako*

$$P(k,x) := \frac{1-k^2}{2k\pi}x^2 - x$$

a funkci $\mathcal{H} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, která je* 2π*-periodická v druhé proměnné*

$$\forall k > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{H}(k, x + 2\pi) = \mathcal{H}(k, x)$$

a je dána pro $k > 0$ *a* $x \in [0, 2\pi]$ *jako*

$$\mathcal{H}(k,x) := \begin{cases} kx - \frac{2k^2}{1+k}\sin(\frac{1+k}{2k}x) + P(k,x), & 0 \le x \le \frac{2k\pi}{1+k}, \\ 2\pi(1-k) + 2kx - \frac{1}{k}x + \frac{2}{k(1+k)}\sin(\frac{1+k}{2}x - k\pi) + P(k,x), & \frac{2k\pi}{1+k} < x \le 2\pi. \end{cases}$$

V následující větě zformulujme nutnou a postačující podmínku pro dvojici (a, b) tak, aby byla v množině $\mathcal{M}$. Tato podmínka obsahuje funkci $\mathcal{H}$, kterou lze přímo implementovat pomocí operace $x \pmod{2\pi}$. Více v příloze B.

Věta 1. *Dvojice* (a, b) *patří do množiny* $\mathcal{M}$ *právě tehdy, když* $a > 0$, $b > 0$ *a platí*

$$\mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\Big) = \frac{2ab(a-b-\pi)}{(a+b)\pi}. \tag{2.22}$$

Důkaz. Nechť y je řešení počáteční úlohy (1.6) pro $\sqrt{\alpha} = a, \sqrt{\beta} = b > 0$. Potom integrální podmínku (2.2) lze ekvivalentně zapsat jako (2.20), kde funkce H je dána v (2.18). Tvrdíme, že

$$\forall z \in \mathbb{R} : \quad H(z) = \frac{p(a+b)}{2a^2b^2} \cdot \mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}z\Big), \tag{2.23}$$

z čehož plyne, že rovnost (2.20) je stejná jako (2.22), neboť

$$H(1) + \frac{F(T)}{2T} + \frac{G(T)}{T} = H(1) + \frac{p(b-a)}{\pi ab} + \frac{p}{ab} = 0$$

a díky (2.23) je

$$H(1) = \frac{p(a+b)}{2a^2b^2} \cdot \mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\Big) = \frac{p(a-b)}{\pi ab} - \frac{p}{ab}$$

$$\mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}\Big) = \Big(\frac{a-b}{\pi ab} - \frac{1}{ab}\Big) \cdot \frac{2a^2b^2}{a+b} = \frac{2ab(a-b-\pi)}{(a+b)\pi}.$$

Funkce H je totiž závislá na parametru p a bude potřeba tento parametr vhodně zvolit.

Zbývá dokázat (2.23). Položme $k := \frac{b}{a}$, potom lze (2.23) ekvivalentně zapsat jako $H(z) = \mathcal{H}(k, \frac{2\pi}{T}z)$, kde $T = \frac{a+b}{ab}\pi$. Proto stačí ověřit, že

$$\forall z \in \langle 0, T\rangle \quad H(z) = \frac{p(a+b)}{2a^2b^2} \cdot \mathcal{H}\Big(k, \frac{2\pi}{T}z\Big), \tag{2.24}$$

kde H je T-periodická funkce a $\mathcal{H}$ je 2π-periodická funkce ve druhé proměnné.

Zaprvé s využitím (2.21), (2.18) a (2.17) máme

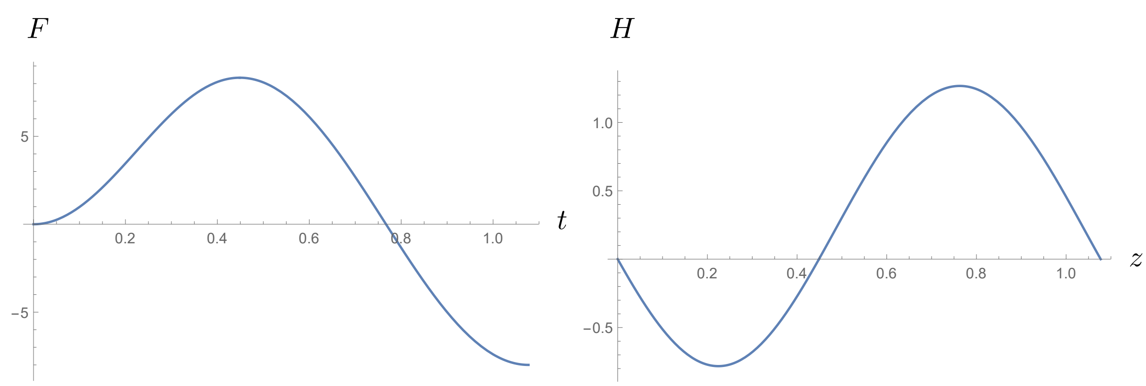
$$\begin{aligned} H(z) &= G(z) - \tfrac{p}{ab}z = \int\limits_0^z F(t)\mathrm{d}t - \int\limits_0^z \tfrac{F(T)}{T}t\mathrm{d}t - \tfrac{p}{ab}z = \\ &= \int\limits_0^z F(t)\mathrm{d}t + \tfrac{2p}{\pi}\tfrac{b-a}{ab}z^2 - \tfrac{p}{ab}z = \int\limits_0^z\int\limits_0^t y(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \tfrac{2p}{\pi}\tfrac{b-a}{ab}z^2 - \tfrac{p}{ab}z, \end{aligned} \tag{2.25}$$

dále s využitím (2.14) je

$$F(t) = \begin{cases} \frac{p}{a^2}(1-\cos(at)), & 0 \le t \le \frac{\pi}{a}, \\ \frac{2p}{a^2} - \frac{p}{b^2}(1-\cos(b(t-\frac{\pi}{a}))), & \frac{\pi}{a} < t \le T, \end{cases} \tag{2.26}$$

zdůrazněme ve vyjádření funkce H hodnotu p, tedy

$$H(z) = \begin{cases} p\cdot(\frac{1}{a^3}(az-\sin(az)) + \frac{(a-b)z^2}{\pi ab} - \frac{z}{ab}), & 0 \le z \le \frac{\pi}{a}, \\ p\cdot(\frac{\pi}{a^3} + \frac{2az-2\pi}{a^3} - \frac{1}{ab^3}(abz - b\pi - a\sin(b(z-\frac{\pi}{a}))) + \\ \quad + \frac{(a-b)z^2}{\pi ab} - \frac{z}{ab}), & \frac{\pi}{a} < z \le T. \end{cases} \tag{2.27}$$



Obrázek 2.4: Graf funkce F v (2.26) (vlevo) a H v (2.27) (vpravo) pro $a = 7, b = 5$ na intervalu $\langle 0, T\rangle$ pro $p = \frac{2a^2b^2}{a+b}$.

Zadruhé, pokud $z \in \langle 0, \frac{\pi}{a})$, platí

$$0 \leq x := \frac{2\pi}{T} z = \frac{2ab}{a+b} z < \frac{2b\pi}{a+b} = \frac{2k\pi}{1+k}$$

a

$$\begin{aligned} H(z) &= H\Big(\frac{a+b}{2ab} x\Big) \\ &= p \cdot \Big(\frac{a+b}{2a^3 b} x - \frac{1}{a^3} \sin\Big(\frac{a+b}{2b} x\Big) + \frac{(a-b)(a+b)^2}{4a^3 b^3 \pi} x^2 - \frac{a+b}{2a^2 b^2} x\Big) \\ &= p \cdot \frac{1+k}{2a^2 bk} \cdot \Big(kx - \frac{2k^2}{1+k} \sin\Big(\frac{1+k}{2k} x\Big) + \frac{1-k^2}{2k\pi} x^2 - x\Big). \end{aligned}$$

Zvolme nyní hodnotu $p > 0$ tak, aby součin $p \cdot \frac{1+k}{2a^2 bk}$ byl roven jedné, tj. volme $p = \frac{2a^2 bk}{1+k}$, jelikož $k = \frac{b}{a}$ máme $p = \frac{2a^2 b^2}{a+b} > 0$, dále

$$\begin{aligned} H(z) &= H\Big(\frac{a+b}{2ab} x\Big) \\ &= kx - \frac{2k^2}{1+k} \sin\Big(\frac{1+k}{2k} x\Big) + P(k, x) \\ &= \mathcal{H}(k, x). \end{aligned}$$

Zatřetí, pokud $z \in \langle \frac{\pi}{a}, T \rangle$, máme

$$\frac{2k\pi}{1+k} \leq x := \frac{2\pi}{T} z \leq 2\pi$$

a

$$\begin{aligned} H(z) &= H\Big(\frac{a+b}{2ab} x\Big) \\ &= \frac{2a^2 b^2}{a+b} \cdot \Big(\frac{\pi}{a^3} + \frac{(a+b)x - b\pi}{a^3 b} - \frac{a+b}{2ab^3} x + \frac{\pi}{ab^2} + \\ &\quad + \frac{1}{b^3} \sin\Big(b\Big(\frac{a+b}{2ab} x - \frac{\pi}{a}\Big)\Big) + \frac{(a-b)(a+b)^2}{4a^3 b^3 \pi} x^2 - \frac{a+b}{2a^2 b^2} x\Big) \\ &= \frac{2a^2 bk}{1+k} \cdot \frac{1+k}{2a^2 bk} \cdot \Big(kx - \frac{2k^2}{1+k} \sin\Big(\frac{1+k}{2k} x\Big) + \frac{1-k^2}{2k\pi} x^2 - x\Big) \\ &= 2kx + 2\pi(1-k) - \frac{1}{k} x + \frac{2}{k(1+k)} \sin\Big(\frac{1+k}{2} x - k\pi\Big) + P(k, x) \\ &= \mathcal{H}(k, x). \end{aligned}$$

Tedy platí

$$H(z) = \frac{p(a+b)}{2a^2b^2} \cdot \mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}z\Big) = \frac{2a^2b^2}{a+b}\frac{a+b}{2a^2b^2} \cdot \mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}z\Big) = \mathcal{H}\Big(\frac{b}{a}, \frac{2ab}{a+b}z\Big),$$

čímž jsme dokázali (2.24), a tím je důkaz hotov. □

Důsledek 1. *Dvojice* $(a, b) \in \mathcal{M}$ *právě tehdy, když*

$$a = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\frac{x}{2\pi}, \quad b = (1+k)\frac{x}{2\pi} \tag{2.28}$$

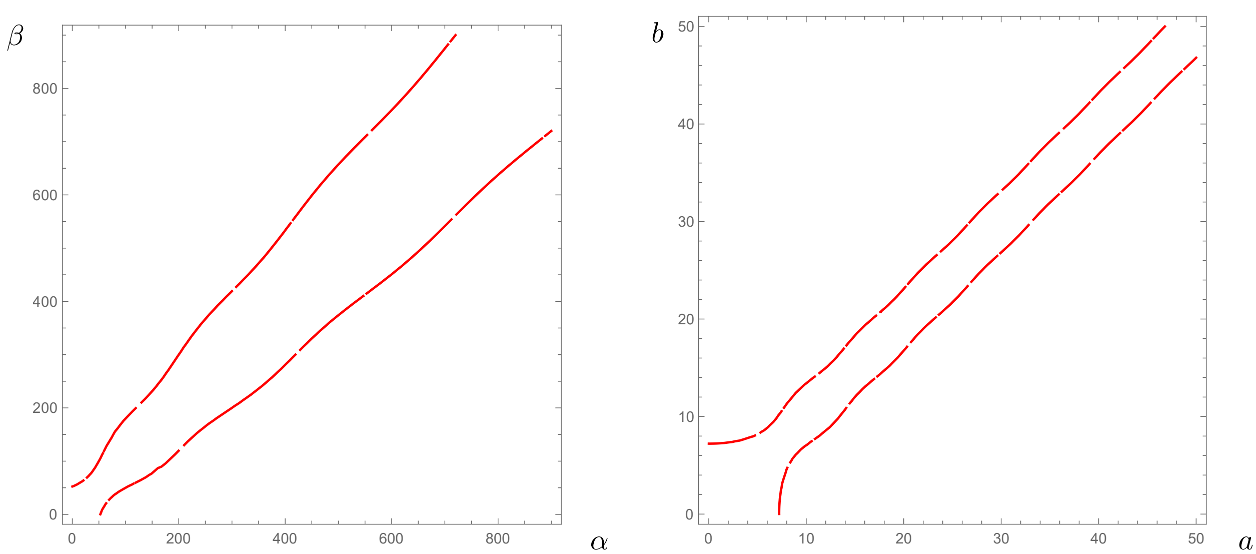
a

$$\mathcal{H}(k, x) = P(k, x). \tag{2.29}$$

Důkaz. Podmínku (2.22) ve větě 1 lze psát jako $\mathcal{H}(k, x) = P(k, x)$, kde

$$k = \frac{b}{a}, \quad x = \frac{2ab}{a+b}, \quad a, b > 0. \tag{2.30}$$

Platí, že $P(k, x) = \frac{1-k^2}{2k\pi}x^2 - x = \left(\frac{a-b}{\pi ab} - \frac{1}{ab}\right) \cdot \frac{2a^2b^2}{a+b} = \frac{2ab(a-b-\pi)}{(a+b)\pi}$. Inverzní transformace pro transformaci proměnných (2.30) má tvar (2.28), tedy máme $\frac{x}{2\pi} = \frac{ak}{1+k}$, vzhledem k $b = ka$. □



Obrázek 2.5: Fučíkovo spektrum Σ v $\alpha\beta$ rovině (vlevo) a v ab rovině (vpravo).

Implementace Fučíkova spektra Σ v programu Wolfram Mathematica je v příloze A.

Kapitola 3

Parametrizace Fučíkova spektra Σ

Zkoumejme dále Fučíkovo spektrum Σ, věnujme se jeho parametrizaci a kvalitativním vlastnostem.

Definice 7. *Definujme množinu Ω^+ jako*

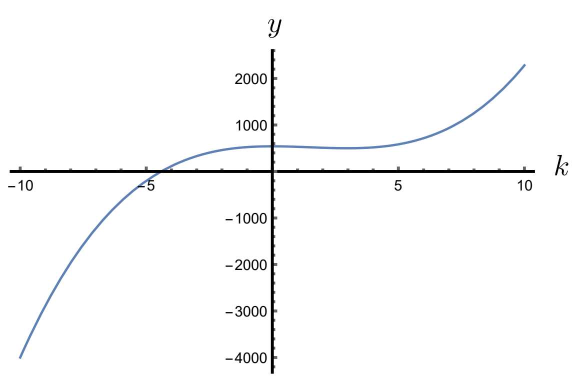
$$\Omega^+ = (\pi^2, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle.$$

Při hledání parametrizace množiny Σ se pro jednoduchost omezme právě na množinu Ω^+. Nejprve však vyřešme následující kubickou rovnici. Obecné kubické rovnici jsme se věnovali v kapitole 1.

Lemma 7. *Pro každé $s \in \mathbb{R}$ má kubická rovnice*

$$\pi k^3 + 2sk^2 + s - \sinh s = 0 \tag{3.1}$$

právě jedno reálné řešení, které je pro $s \leq 0$ navíc záporné nebo nulové.



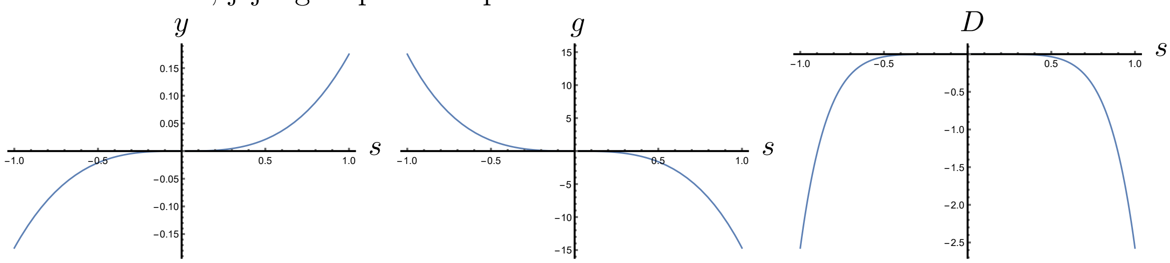
Obrázek 3.1: Graf funkce $y = \pi k^3 + 2sk^2 + s - \sinh s$ pro $s = -7$.

Důkaz. Řešitelnost obecné kubické rovnice (1.10) jsme shrnuli v kapitole 1. Koeficienty kubické rovnice (3.1) jsou $c_3 = \pi, c_2 = 2s, c_1 = 0$ a $c_0 = s - \sinh s$. Diskriminant rovnice (3.1) má tedy tvar

$$D = D(s) = -4c_2^3 - 27c_3^2c_0^2 = (32s^3 + 27\pi^2(s - \sinh s))(\sinh s - s), \tag{3.2}$$

neboť členy $18c_3c_2c_1c_0$, $c_2^2c_1^2$ a $-4c_3c_1^3$ v (1.11) jsou pro rovnici (3.1) nulové.

Výraz $\sinh s - s$ nabývá pro $s < 0$ pouze záporných hodnot a pro $s > 0$ pouze kladných hodnot. Derivace $\cosh s - 1$ je totiž pro $s \in \mathbb{R}$ nezáporná funkce, tedy $\sinh s - s$ je funkce rostoucí, jejíž graf prochází počátkem.



Obrázek 3.2: Grafy funkcí $y = \sinh s - s$(vlevo), g dané v (3.3) (uprostřed) a $D(s)$ dané v (3.2) (vpravo).

Ukažme, že diskriminant $D \leq 0$. Definujme funkci

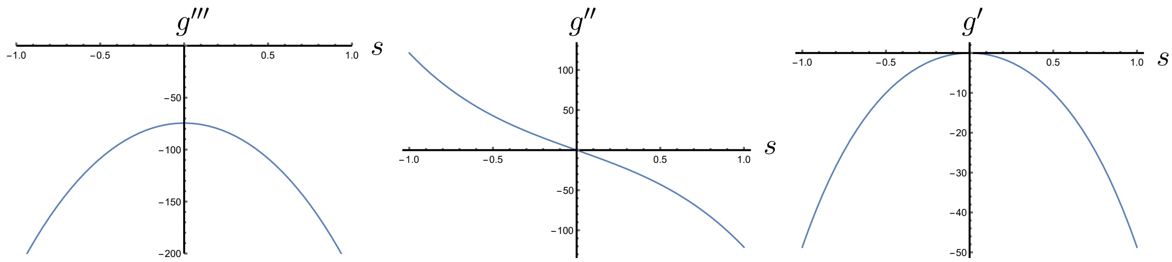
$$g(s) = 32s^3 + 27\pi^2(s - \sinh s), \tag{3.3}$$

která je definována na celém $\mathbb{R}$. Diskriminant (3.2) má tvar $D = g(s) \cdot (\sinh s - s)$. Pro $s < 0$ je diskriminant D záporný právě tehdy, když funkce g nabývá kladných hodnot. Naopak pro $s > 0$ je D záporný právě tedy, když funkce g nabývá záporných hodnot.

Vyšetřeme průběh funkce g, která je lichá funkce, tedy se omezíme pouze na $s < 0$.

Derivace funkce g mají tvar

$$\begin{aligned} g'(s) &= 96s^2 + 27\pi^2 - 27\pi^2 \cosh s, \\ g''(s) &= 192s - 27\pi^2 \sinh s, \\ g'''(s) &= 192 - 27\pi^2 \cosh s. \end{aligned}$$



Obrázek 3.3: Grafy funkcí (zleva) g''', g'' a g'.

Třetí derivace g''' nabývá pouze záporných hodnot na intervalu $(-\infty, 0)$, protože $192 < 27\pi^2$, z čehož dostáváme, že g'' je ostře klesající funkce. Jelikož dále $g''(0) = 0$, je funkce g'' na intervalu $(-\infty, 0)$ kladná.

Proto je g' na intervalu $(-\infty, 0)$ ostře rostoucí. Navíc $g'(0) = 0$, tedy funkce g' je na intervalu $(-\infty, 0)$ záporná.

Funkce g je pro na intervalu $(-\infty, 0)$ tedy ostře klesající a platí $g(0) = 0$, nabývá tak pouze kladných hodnot.

Ukázali jsme, že lichá funkce g pro $s < 0$ nabývá kladných hodnot, tedy pro $s > 0$ je funkce g záporná. Pro $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je diskriminant D v (3.2) záporný, a tedy kubická rovnice (3.1) má právě jedno reálné řešení k. Pro $s = 0$ má rovnice (3.1) tvar $\pi k^3 = 0$, tedy řešením je trojnásobný reálný kořen $k = 0$.

Zbývá ukázat, že řešení k rovnice (3.1) je pro $s < 0$ záporné. Vyjádřeme tedy analyticky kořen kubické rovnice (3.1). Pro rovnici (3.1) zaveďme substituci $k = t - \frac{2s}{3\pi}$, abychom získali redukovanou rovnici, více v kapitole 1. Navíc $\mathcal{P} = \frac{3\pi - 4s^2}{3\pi^2}$ a $\mathcal{Q} = \frac{16s^3 + 27\pi^2(s - \sinh s)}{27\pi^3}$.

Řešení (3.1) má pak tvar
$$k = t_0 - \frac{2s}{3\pi},$$
kde t_0 je dáno vztahem (1.12) nebo (1.14). Pro tento případ bude vhodnější zvolit vyjádření pomocí (1.14). Kořen kubické rovnice (3.1) je pak

$$\begin{aligned} k &= -\frac{2s}{3\pi} + t_0 = \\ &= -\frac{2s}{3\pi} + 2\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}} \cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} \mathcal{C}\right), \quad \mathcal{C} \geq 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Abychom dokázali zápornost reálného řešení kubické rovnice (3.1) k, které je závislé na parametru $s < 0$, definujme funkci $\mathcal{K}$. Pro každé $s < 0$ platí

$$\pi\mathcal{K}^3(s) + 2s\mathcal{K}^2(s) + s - \sinh s = 0,$$

kde
$$\mathcal{K}(s) := \frac{s}{\pi}\Big(\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3}\Big), \quad s < 0, \tag{3.5}$$
kde funkce $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ mají tvar
$$\mathcal{F}(s) := \frac{27\pi^2}{16}\Big(\frac{\sinh s}{s} - 1\Big)\frac{1}{s^2} - 1,$$
$$\mathcal{G}(y) := \frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} y\Big) - \frac{1}{3}.$$
Toto vyjádření jsme získali úpravou (3.4) jako
$$k = -\frac{2s}{3\pi} + 2\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{|\mathcal{P}|}} \cdot \frac{2s}{3\pi}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh}\Big(\mathcal{C}\cdot\Big(\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}}\cdot\frac{-3\pi}{2s}\Big)^3\Big)\Big),$$
kde
$$\mathcal{C}\cdot\Big(\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}}\cdot\frac{-3\pi}{2s}\Big)^3 = \frac{\mathcal{Q}}{2}\Big(\frac{3}{|\mathcal{P}|}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\sqrt{\frac{|\mathcal{P}|}{3}}\cdot\frac{-3\pi}{2s}\Big)^3 \geq 1,$$
tedy
$$\frac{16s^3 + 27\pi^2(s - \sinh s)}{2\cdot 27\pi^3}\cdot\frac{-27\pi^3}{8s^3} = \frac{27\pi^2}{16}\Big(\frac{\sinh s}{s} - 1\Big)\frac{1}{s^2} - 1 = F(s) \geq 1$$
a
$$K(s) = \frac{s}{\pi}\Big(\frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} F(s)\Big) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big) = -\frac{2s}{3\pi} - \frac{4s}{3\pi}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} F(s)\Big) = k.$$
Ověřme, zda $F(s) \geq 1$ pro $s < 0$ a $G(y) > 1$ pro $y < 1$.
$$\begin{aligned} F(s) &\geq 1 \\ \frac{27\pi^2}{16}\Big(\frac{\sinh s}{s} - 1\Big)\frac{1}{s^2} - 2 &\geq 0 \\ 32s^3 + 27\pi^2(s - \sinh s) &\geq 0 \\ g(s) &\geq 0, \end{aligned}$$
kde pro funkci g danou v (3.3) jsme již ukázali, že pro $s < 0$ je $g(s) > 0$. Dále
$$\begin{aligned} G(y) &> 1 \\ \frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} y\Big) &> \frac{4}{3} \\ \cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} y\Big) &> 1, \end{aligned}$$

funkce cosh nabývá vždy pouze hodnot větších než 1. Nyní je již snadné pro $s < 0$ dokázat $\mathcal{K}(s) < 0$

$$\mathcal{K}(s) = \frac{\overbrace{s}^{<0}}{\pi} \overbrace{\left(\underbrace{\mathcal{G}(\underbrace{\mathcal{F}(s)}_{\geq 1})}_{>1} - \frac{1}{3} \right)}^{>0} < 0.$$

$\square$

Dále definujme zobrazení $\phi : (a, b) \mapsto (k, s)$ pro $a > \pi$ a $b < 0$ jako

$$\phi = \phi(a, b) : \begin{cases} k = \frac{b}{a}, \\ s = b - \frac{b\pi}{a}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Inverzní zobrazení k ϕ má tvar

$$\phi^{-1} = \phi^{-1}(k, s) : \begin{cases} a = \frac{s}{k} + \pi, \\ b = s + k\pi, \end{cases} \tag{3.7}$$

kde $k < 0$ a $s < 0$.

Lemma 8. *Zobrazení ϕ je transformace souřadnic.*

Důkaz. Ukažme, že zobrazení ϕ je regulární pro $a > \pi$ a $b < 0$, tedy prvky Jacobiho matice J_ϕ jsou spojité funkce a jakobián je nenulový, viz [7],

$$J_\phi = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a} \\ \\ \frac{b\pi}{a^2} & 1 - \frac{\pi}{a} \end{pmatrix}.$$

Všechny prvky matice J_ϕ jsou spojité funkce a jakobián $\det J_\phi = \frac{-b}{a^2} \neq 0$ pro $a > \pi$ a $b < 0$. Transformace ϕ tedy zobrazuje prvky množiny $(\pi, +\infty) \times (-\infty, 0)$.

Ukažme, že pro $a > \pi$ a $b < 0$ je $\frac{s}{k} > 0$ a $s < -k\pi$. Nerovnost $\frac{s}{k} > 0$ platí pro $s, k < 0$ nebo $s, k > 0$. Ale $s < -k\pi$ splňuje pouze $s, k < 0$. Obor hodnot ϕ, tedy definiční obor zobrazení ϕ^{-1}, je celá množina $(-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$.

Protože J_ϕ je regulární, existuje inverzní matice a tedy inverzní transformace ve tvaru (3.7). $\square$

Definice 8. *Definujme množinu $\mathcal{N}$*

$$\mathcal{N} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- : \textit{úloha (2.4) má netriviální řešení } y \textit{ s } y'(0) > 0.\}.$$

Platí, že pokud dvojice (a,b) patří do množiny $\mathcal{N}$, pak dvojice $(a^2,-b^2)$ patří do množiny Σ. Naopak pokud patří dvojice (α,β) do množiny Σ pro $\alpha > 0$ a $\beta < 0$, potom dvojice $(\sqrt{\alpha},\sqrt{-\beta})$ nebo $(\sqrt{-\beta},\sqrt{\alpha})$ patří do $\mathcal{N}$.

Věta 2. *Množina $\mathcal{N}$ je spojitá křivka η s parametrizací $\eta(s) = (\eta_1(s),\eta_2(s)), s \leq 0$, kde funkce η_1,η_2 jsou definovány*

$$\eta_1(s) := \begin{cases} \frac{s}{\mathcal{K}(s)} + \pi & \text{pro } s < 0, \\ \pi + \sqrt[3]{3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 64}} + \sqrt[3]{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 64}} & \text{pro } s = 0. \end{cases}$$

a

$$\eta_2(s) := \begin{cases} s + \pi\mathcal{K}(s) & \text{pro } s < 0, \\ 0 \quad \text{pro } s = 0, \end{cases}$$

a funkce $\mathcal{K}$ je definována vztahem (3.5).

Důkaz. Dokázali jsme, že platí lemma 2 pro $a > \pi$ a $b < 0$, tedy integrální podmínku (2.2) lze ekvivalentně zapsat

$$\frac{2b^3}{a^2} - \frac{b^3\pi}{a^3} + b - \frac{b\pi}{a} - \sinh(b - \frac{b\pi}{a}) = 0. \tag{3.8}$$

Rovnici (3.8) transformujeme pomocí ϕ do nových souřadnic k a s,

$$\begin{aligned} \frac{2b^3}{a^2} - \frac{b^3\pi}{a^3} + b - \frac{b\pi}{a} - \sinh(b - \frac{b\pi}{a}) &= 0 \\ \frac{2ab^3}{a^3} - \frac{b^3\pi}{a^3} - \frac{b^3\pi}{a^3} + \frac{b^3\pi}{a^3} + s - \sinh(s) &= 0 \\ 2\frac{ab^3 - b^3\pi}{a^3} + k^3\pi + s - \sinh(s) &= 0 \\ 2\frac{b^2}{a^2}\frac{b(a-\pi)}{a} + k^3\pi + s - \sinh(s) &= 0 \\ 2k^2(b - \frac{b\pi}{a}) + k^3\pi + s - \sinh(s) &= 0 \\ k^3\pi + k^2 2s + s - \sinh s &= 0, \end{aligned}$$

získáme tím rovnici (3.1). V lemmatu 7 jsme dokázali, že rovnice (3.1) má právě jedno řešení v $\mathbb{R}$. Reálný kořen má tvar (3.5). Užitím inverzní transformace souřadnic, tedy ϕ^{-1}, získáme pro pro $s < 0$ a $\mathcal{K}$ dané vztahem (3.5)

$$a = \frac{s}{\mathcal{K}(s)} + \pi = \eta_1(s), \quad b = s + \pi\mathcal{K}(s) = \eta_2(s)$$

Pro $a > 0$ a $b = 0$ lze integrální podmínku (2.2) vyjádřit jako (2.11), potom do Fučíkova spektra patří dvojice $(a_0, 0)$ pro a_0 v (2.12), tedy $a_0 = \pi + \sqrt[3]{3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 64}} + \sqrt[3]{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 64}}$.

Zbývá dokázat, že $\mathcal{N}$ je spojitá křivka. S využitím l'Hospitalova pravidla máme

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^-} \mathcal{F}(s) &= \lim_{s\to 0^-} \Big(\frac{27\pi^2}{16}\Big(\frac{\sinh s}{s} - 1\Big)\frac{1}{s^2} - 1\Big) \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \lim_{s\to 0^-} \Big(\frac{\sinh s - s}{s^3}\Big) - 1 \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \lim_{s\to 0^-} \Big(\frac{\cosh s - 1}{3s^2}\Big) - 1 \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{3} \lim_{s\to 0^-} \frac{\sinh s}{2s} - 1 \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{6} \lim_{s\to 0^-} \frac{\cosh s}{1} - 1 \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \cdot \frac{\cosh 0}{6} - 1 \\
&= \frac{9\pi^2}{32} - 1.
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to \frac{9\pi^2}{32}-1} \mathcal{G}(y) &= \lim_{y\to \frac{9\pi^2}{32}-1} \frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh} y\Big) - \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh}\Big(\frac{9\pi^2}{32} - 1\Big)\Big) - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Limitní případy a a b pro $s \to 0^-$ jsou

$$a = \lim_{s\to 0^-}\Big(\frac{s}{\mathcal{K}(s)} + \pi\Big) = \lim_{s\to 0^-} \frac{s}{\frac{s}{\pi}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3})} + \pi = \lim_{s\to 0^-} \frac{\pi}{\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3}} + \pi,$$

porovnejme tedy

$$\frac{\pi}{\frac{4}{3}\cosh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{argcosh}\Big(\frac{9\pi^2}{32} - 1\Big)\Big) - \frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 64}} + \sqrt[3]{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 64}} \doteq 4,07716,$$

neboť nezáleželo na tom, zda jsme použili pro vyjádření kořene t_0 v (1.12) nebo (1.14),

$$b = \lim_{s\to 0^-}(s + \pi\mathcal{K}(s)) = \lim_{s\to 0^-}\Big(s + \pi \cdot \frac{s}{\pi}\Big(\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3}\Big)\Big) = \Big(1 + \Big(\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3}\Big)\Big)\lim_{s\to 0^-} s = 0.$$

□

V následujícím lemmatu uvedeme asymptotu pro Fučíkovo spektrum ve čtvrtém kvadrantu.

Lemma 9. *Křivka $\mathcal{N}$ se pro $s \to -\infty$ asymptoticky blíží k přímce*

$$a = \pi.$$

Důkaz. Pro $s \to -\infty$ máme

$$a = \lim_{s \to -\infty} \eta_1(s).$$

Zaprvé

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to -\infty} \mathcal{F}(s) &= \lim_{s \to -\infty} \left(\frac{27\pi^2}{16} \left(\frac{\sinh s}{s} - 1 \right) \frac{1}{s^2} - 1 \right) \\
&= \frac{27\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{6} \lim_{s \to 0^-} \frac{\cosh s}{1} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

zadruhé

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to +\infty} \mathcal{G}(y) &= \lim_{y \to +\infty} \frac{4}{3} \cosh \left(\frac{1}{3} \operatorname{argcosh} y \right) - \frac{1}{3} \\
&= \lim_{y \to +\infty} \frac{4}{3} \underbrace{\cosh \left(\frac{1}{3} \underbrace{\operatorname{argcosh} y}_{\to +\infty} \right)}_{\to +\infty} - \frac{1}{3} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{s \to -\infty} \frac{s}{K(s)} + \pi \\
&= \lim_{s \to -\infty} \frac{s}{\frac{s}{\pi} \left(\mathcal{G}(\mathcal{F}(s)) - \frac{1}{3} \right)} + \pi \\
&= \lim_{s \to -\infty} \frac{\pi}{\underbrace{\mathcal{G}(\mathcal{F}(s))}_{\to +\infty} - \frac{1}{3}} + \pi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

$\square$

Závěr

V této bakalářské práci jsme shrnuli řešení již dříve zkoumané počáteční úlohy. Dále jsme uvedli krátký přehled řešitelnosti obecné kubické rovnice. Úspěšně jsme prozkoumali úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \int\limits_0^t y(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in C^2\langle 0, 1\rangle$ a $y^{\pm}(x) := \max\{\pm y(x), 0\}$.

Našli jsme analytické vyjádření Fučíkova spektra pro úlohu (3.9) a ve čtvrtém kvadrantu se nám podařilo nalézt parametrizaci Fučíkova spektra. Taktéž jsme popsali některé kvalitativní vlastnosti Fučíkova spektra

Velice podobným postupem by bylo možné parametrizovat Fučíkovo spektrum i v prvním kvadrantu, tato část zatím zůstává neprozkoumána.

Literatura

[1] Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).

[2] Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).

[3] Sergejeva, N.: On some problems with nonlocal integral condition. Math. Model. Anal. 15 (2010), no. 1, 113-126.

[4] Kadlec, J.: Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami. Bakalářská práce, ZČU, Plzeň (2018).

[5] Kadlec, J.; Nečesal P.: The Fučík spectrum as two regular curves. Přijato do tisku v Springer Proceedings in Mathematics & Statistics: NABVP-2018, (2018).

[6] Seifert, L.; Kubické a bikvadratické problémy. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, (1951). 102 s.

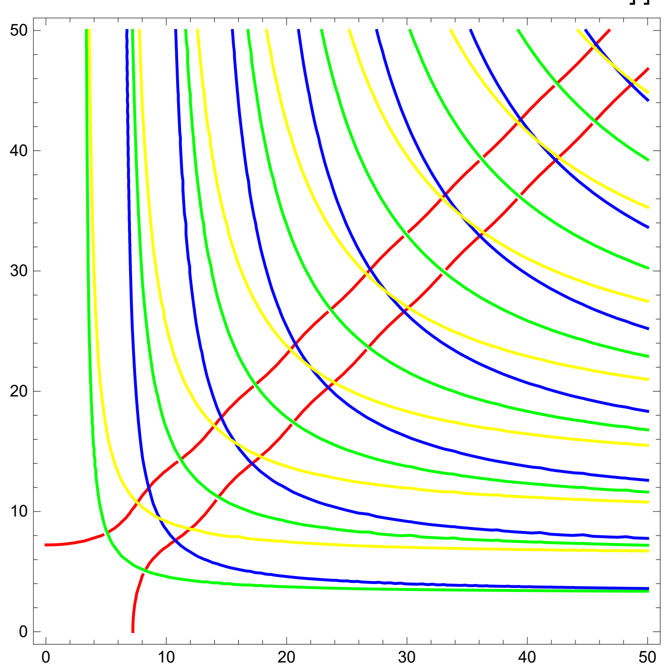
[7] Tomiczek, P.; Matematická analýza II. Plzeň: Západočeská univerzita, (2006). 141 s.

[8] Holmes, 86.70,G. C.; The Use of Hyperbolic Cosines in Solving Cubic Polynomials, The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 507 (Nov., 2002), pp. 473-477

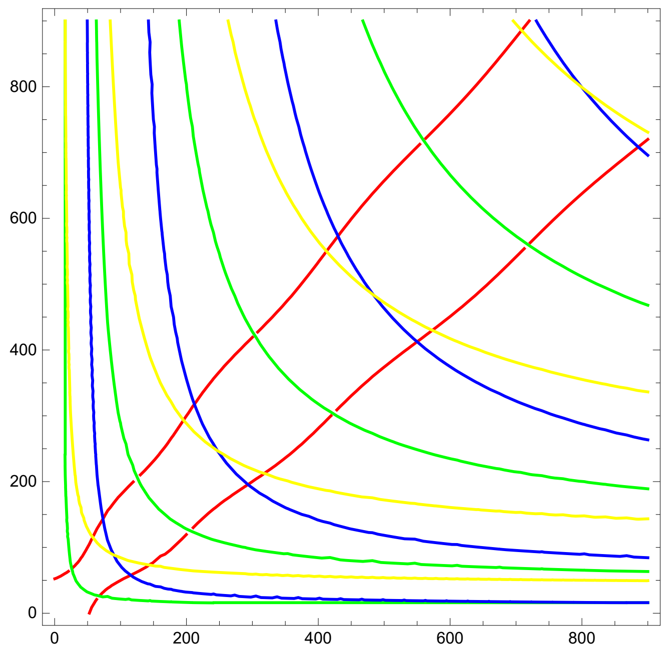
[9] Weisstein, Eric W; "Cubic Formula."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html

Příloha A

```
T[a_, b_] := π / a + π / b
f[z_, a_, b_] := Piecewise[{{(a z - Sin[a z])/a^3 + ((a - b) z^2)/(π a b) - z/(a b), 0 ≤ z < π / a},
   {-π/a^3 + π/(a b^2) + (2 z)/a^2 - z/b^2 - Sin[(b π)/a - b z]/b^3 + ((a - b) z^2)/(π a b) - z/(a b), π / a < z ≤ π / a + π / b}}]
f1[y_, a_, b_] := f[Mod[y, T[a, b]], a, b]
p[z_, a_, b_] := ((a - b) z^2)/(π a b) - z/(a b)
M[n_, a_, b_] := n π / a + n π / b

M[n_, a_, b_] := n π / a + n π / b
Evaluate@Table[M[n, a, b] == 1, {n, 1, 10}];

Evaluate@Table[M[n, a, b] + π/a == 1, {n, 1, 10}];

spektrum =
 Show[ContourPlot[f1[1, a, b] == p[1, a, b], {a, 0, 50}, {b, 0, 50}, ContourStyle → {Red}],
  ContourPlot[f1[1, b, a] == p[1, b, a], {a, 0, 50}, {b, 0, 50}, ContourStyle → {Red}],
  ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, a, b] == 1, {n, 1, 10}],
   {a, 0, 50}, {b, 0, 50}, ContourStyle → {Green}],
  ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, a, b] + π/a == 1, {n, 1, 10}], {a, 0, 50}, {b, 0, 50},
   ContourStyle → {Blue}], ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, a, b] + π/b == 1, {n, 1, 10}],
   {a, 0, 50}, {b, 0, 50}, ContourStyle → {Yellow}]]
```



```
spektrum999 = Show[ContourPlot[f1[1, Sqrt[a], Sqrt[b]] == p[1, Sqrt[a], Sqrt[b]],
   {a, 0, 30^2}, {b, 0, 30^2}, PlotRange → All, ContourStyle → {Red}],
  ContourPlot[f1[1, Sqrt[b], Sqrt[a]] == p[1, Sqrt[b], Sqrt[a]],
   {a, 0, 30^2}, {b, 0, 30^2}, PlotRange → All, ContourStyle → {Red}],
  ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, Sqrt[a], Sqrt[b]] == 1, {n, 1, 10}],
   {a, 0, 30^2}, {b, 0, 30^2}, ContourStyle → {Green}],
  ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, Sqrt[a], Sqrt[b]] + π/Sqrt[a] == 1, {n, 1, 10}],
   {a, 0, 30^2}, {b, 0, 30^2}, ContourStyle → {Blue}],
  ContourPlot[Evaluate@Table[M[n, Sqrt[a], Sqrt[b]] + π/Sqrt[b] == 1, {n, 1, 10}],
   {a, 0, 30^2}, {b, 0, 30^2}, ContourStyle → {Yellow}]]
```



Příloha B

```
P[k_, x_] := ((1 - k^2) (x)^2)/(2 k π) - x

H[k_, x_] := Piecewise[{{k x - (2 k^2)/(1 + k) Sin[((1 + k) x)/(2 k)] + P[k, x], 0 ≤ x < (2 k π)/(1 + k)},
    {2 π (1 - k) + 2 k x - 1/k x + 2/(k (1 + k)) Sin[(1 + k)/2 x - k π] + P[k, x], (2 k π)/(1 + k) < x ≤ 2 π}}]

H1[k_, y_] := H[k, Mod[y, 2 π]]

Manipulate[Plot[{H1[k, x], P[k, x]}, {x, 0, 20}], {k, 0.1, 1.5}]
```