

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY

Bakalářská práce

Plzeň, 2022

Milan Šnajdr

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY

Bakalářská práce

MODELOVÁNÍ A ANALÝZA ROVINNÝCH
MECHANICKÝCH SYSTÉMŮ NA BÁZI TENSEGRIT

Plzeň, 2022

Milan Šnajdr

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

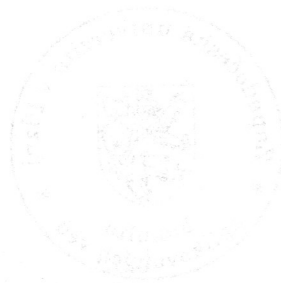
ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Milan ŠNAJDR**
Osobní číslo: **A19B0650P**
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**
Studijní obor: **Počítačové modelování**
Téma práce: **Modelování a analýza rovinných mechanických systémů na bázi tensegrit**
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Seznámení se se základními principy, klasifikací a popisem tensegrit.
2. Zpracování základních metod tzv. form-findingu.
3. Vypracování vlastního řešení pro statickou a dynamickou analýzu.
4. Ověření získaného řešení pomocí profesionálního softwaru.



Rozsah bakalářské práce: **min. 20 – 40 stran A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. SLAVÍK, Jaromír, STEJSKAL Vladimír a ZEMAN Vladimír. Základy dynamiky strojů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.
2. GAN, Buntara Sthenly. Computational Modeling of Tensegrity Structures. Cham: Springer, 2020. ISBN 978-3-030-17835-2.
3. SHABANA, Ahmed A. Computational dynamics. 3rd. ed. New York: John Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-68615-7.
4. BALON, Aleš. Optimalizace a řízení mechatronické tensegrity pro robotiku. Diplomová práce. Praha: ČVUT, 2019.

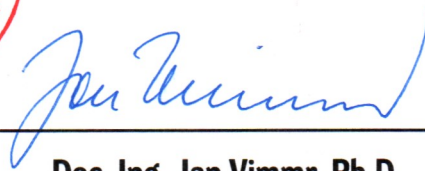
Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.**
Katedra mechaniky

Konzultant bakalářské práce: **Ing. Radek Bulín, Ph.D.**
Nové technologie pro informační společnost

Datum zadání bakalářské práce: **18. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2022**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 30. května

.....
podpis

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval své rodině a přátelům za podporu a trpělivost, kterou mi prokázali během studia.

Také bych chtěl poděkovat doc. Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph. D. za čas věnování vedení této práce a Ing. Radku Bulínovi, Ph. D. za spolupráci na této práci. Oběma děkuji za poskytnutí rad, které mi pomohly k jejímu vypracování.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na matematické modelování a dynamickou analýzu tensegritních soustav. První dvě kapitoly shrnují motivaci pro zkoumání těchto soustav a popisují jejich historii a praktické využití. Dále je představena problematika určování předpětí v lanech a je zpracováno základní řešení této úlohy pomocí metody form-finding. V další kapitole jsou odvozeny pohybové rovnice tensegritní soustavy včetně detailního výpočtu sil v lanech. Ověření získaných výsledků je provedeno porovnáním s výsledky vypočítanými profesionálním softwarem Adams. Využití vlastního implementovaného programového vybavení je ukázáno na několika vybraných příkladech tensegritních systémů. Závěrem je vyzkoušeno, zda je možné navrhovaný způsob využít i pro výpočet aktivních tensegrit.

Klíčová slova: tensegrity, form-finding, předpětí, pohybové rovnice, Lagrangeovy rovnice, Matlab

ABSTRACT

This bachelor thesis focuses on mathematical modeling and dynamic analysis of tensegrity-based systems. The first two chapters briefly summarize the motivation for the study of these systems and describe their history and practical usage. The problem of determining the preload in cables is introduced and simple solution is proposed by a method of form-finding. In next chapter, motion equations of a tensegrity system are derived including the detailed expressions of forces in cables. The verification of the results is then accomplished by comparing them to the results calculated by Adams professional software. The usage of the implemented in-house software is shown by means of chosen examples of tensegrity systems. Finally, it is tested whether it is possible to use the proposed method on active tensegrity systems.

Keywords: tensegrity, form-finding, preload, motion equations, Lagrange's equations, Matlab

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Cíle práce	3
1.2	Struktura práce	3
2	O tensegritách	4
2.1	Historie	4
2.2	Definice	5
2.3	Tensegrity v umění a architektuře	6
2.4	Tensegrity v přírodě, v biologii	8
3	Form-finding	9
3.1	Sestrojení matice hustoty sil	9
3.2	Algoritmus pro form-finding	11
3.3	Výpočet volných délek lan	12
3.4	Ukázka aplikace form-findingu	13
4	Dynamický model rovinné tensegrity	14
4.1	Pohybové rovnice jedné tyče	14
4.2	Pohybové rovnice systému tyčí	17
4.3	Stabilizace numerického řešení	18
4.4	Určení sil v lanech	19
4.5	Aplikace dynamického modelu	21
4.5.1	Dvojkyvadlo	21
4.5.2	X tensegrita	22
5	Aplikace	24
5.1	Vstupní data	24
5.2	Ověření výpočtu pomocí programu Adams	26
5.3	Aplikace na vybrané příklady tensegrit	29
5.3.1	Osmiúhelníková tensegrita	29
5.3.2	Osmiúhelníková tensegrita s přidanými diagonálními lany	31
5.3.3	Třípatrová tensegrita s pravoúhlými lany	33
5.3.4	Třípatrová tensegrita s diagonálními lany	35

5.3.5	Třípatrová tensegrita třídy 2	37
5.4	Velikost sil v lanech	39
5.5	Změna tvaru tensegrity zkracováním lana	41
6	Závěr	45
	Literatura	46

Kapitola 1

Úvod

Tensegritní struktury jsou soustavy prvků namáhaných v tlaku (tyče) a prvků namáhaných v tahu (lana), které vzájemně tvoří staticky neurčitou konstrukci ve stabilní poloze. Označení tensegrity vychází z angličtiny ze spojení slov *tension* a *integrity*, tedy napětí a integrita (celistvost). Tento název poměrně dobře vystihuje jejich charakter, tedy struktury stabilizované pomocí předpětí v lanech.

Ačkoliv mají tensegritní struktury řadu dobrých vlastností, jejich praktické využití nenabývá plného potenciálu. Motivací této bakalářské práce je zpracování programu pro automatické řešení pohybových rovnic na základě konfigurace tensegrity, což může usnadnit praktické využití tensegritních systémů pro průmyslové aplikace.

1.1 Cíle práce

Cíle této bakalářské práce jsou

- Seznámení se základními koncepty tensegrit, jejich klasifikací, definicemi a popisem.
- Seznámení se s problematikou hledání předpětí lan pomocí metody *form-finding* a zpracování jednoduché metody pro její řešení.
- Vypracování a implementace matematického modelu popisujícího dynamické vlastnosti tensegrity a ověření získaného řešení pomocí profesionálního softwaru.

1.2 Struktura práce

V kapitole 2 jsou shrnuty některé základní poznatky o historii tensegrit, jejich definice a využití. V kapitole 3 je popsána metoda *form-finding* pro nalezení předpětí lan tensegrity. V kapitole 4 jsou řešeny dynamický model tensegrity. V kapitole 5 je popsán vytvořený program a jsou porovnávána data získaná tímto programem s daty získanými profesionálním softwarem. Následuje několik příkladů získaných řešení.

Kapitola 2

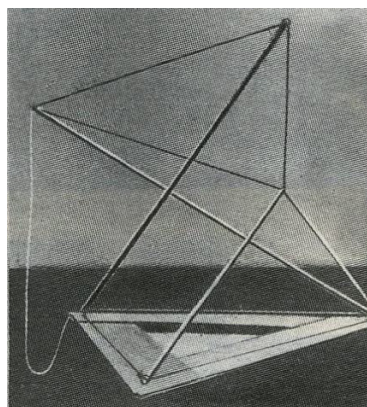
O tensegritách

2.1 Historie

Objevitele tensegrit můžeme nazývat tři osoby, v [2], [3], [4] jsou zmiňováni Richard Buckminster Fuller, David Georges Emmerich a Kenneth D. Snelson. Fuller byl profesorem na Black Mountain College v USA a Snelson byl studentem umění. A byl to právě Snelson, který v roce 1948 vymyslel a sestavil první model tensegritní konstrukce, Obr. 2.1, a ukázal ho svému učiteli. Fuller jako první pro tento typ struktury použil pojem *tensegrity*. Nejdříve na dalším výzkumu pracovali společně, ale Fuller posléze ve svých pracích přestal autorství Snelsona zmiňovat a kvůli tomu mezi nimi vznikl spor, který nebyl nikdy vyřešen. Nezávisle na nich Emmerich začal studovat tensegrity inspirován prací Karla Iogansona z roku 1920, Obr. 2.2. Fuller, Snelson i Emmerich dospěli k velmi podobným výsledkům a obdrželi patenty v rozmezí několika let.



Obrázek 2.1: X-piece tensegrita, převzato z [14]



Obrázek 2.2: První proto-tensegritní struktura, převzato z [13]

Jako první se o struktury těchto vlastností zajímali především umělci, konkrétně sochaři. Postupně se tento koncept přesunul přes umění do architektury, stavebního inženýrství, robotiky, leteckého a vesmírného průmyslu. Právě zde totiž vyniknou výhodné vlastnosti takových struktur, především jejich nízká hmotnost a skladnost, další výhody jsou podrobněji diskutovány v [2]. Tyče a lana nedosahují při skladování takového objemu a hmotnosti jako konvenční materiály. Skladovat a přepravovat lze buď rozložené, nebo v takové konfiguraci, která má malý objem. Příklady nejčastějšího využití jsou antény, stožáry a solární panely.

2.2 Definice

Většího výzkumu se tensegrity dočkaly na konci 20. století. Uvedeme několik definic z tohoto období zmíněných v [2].

Definice 1 (Tensegritní systém, Motro, 2003) *Tensegritní systémy jsou diskrétní prostorové systémy ve stavu vnitřního napětí. Všechny jejich prvky jsou stejného tvaru a velikosti. Prvky v tahu mají nulovou tuhost v tlaku a tvoří souvislou množinu. Pevné prvky namáhané v tlaku tvoří nesouvislou množinu. Každý uzel obsahuje nanejvýš jeden stlačený prvek.*

Definice 1 jasně rozlišuje dvě množiny prvků, jednu, ve které jsou prvky namáhány pouze v tlaku, a druhou, ve které jsou prvky namáhány pouze v tahu. Zároveň striktně předepisuje, že se pevné prvky nesmí dotýkat a musí mít stejnou velikost.

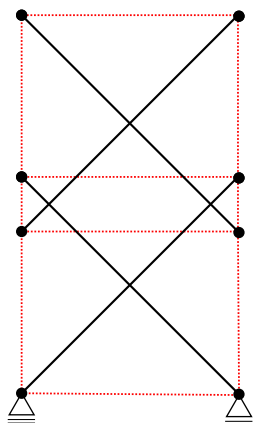
Definice 2 (Hanaor, 1994) *Tensegritní systémy jsou vnitřně předpjaté, bez vnější podpory stojící systémy prvků s kloubovými spoji. V těchto systémech jsou kabely nebo lana napínána proti systému tyčí nebo vzpěr.*

Definice 2 je oproti definici 1 více benevolentní a pokouší se o obecnější popis, kde navíc dovoluje, že se pevné prvky mohou dotýkat a nemusí tvořit nesouvislou množinu.

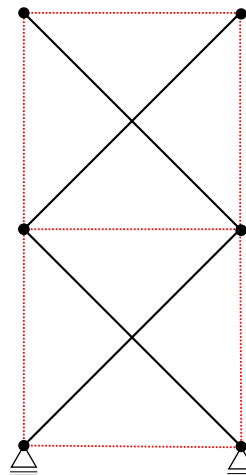
Definice 3 (Skelton a kolektiv, 2001) *Tensegrita třídy k (anglicky class- k) je taková tensegrita, ve které se v jednom uzlu setkává nejvýše k tyčí.*

Tato definice je rozšířením předchozích definic, díky které lze tensegritické struktury rozdělit do tříd. S ohledem na tuto definici je nejjednodušším typem tensegrita třídy 1, kde

je v každém uzlu pouze jeden konec tyče, a žádné tyče tedy nejsou v kontaktu. Na Obr. 2.3 a Obr. 2.4 je ukázán rozdíl tensegrity třídy 1 a tensegrity třídy 2.



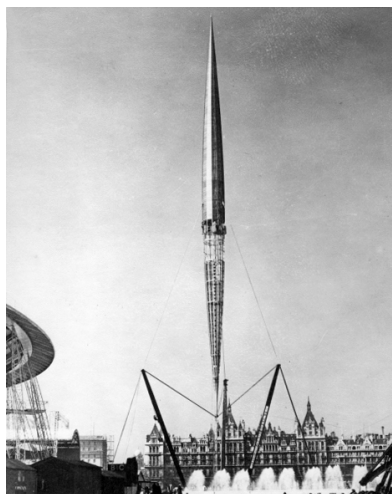
Obrázek 2.3: Tensegrita třídy 1



Obrázek 2.4: Tensegrita třídy 2

2.3 Tensegrity v umění a architektuře

Mezi první díla patří například v [5] popisovaný "the Skylon", Obr. 2.5, z roku 1951 autorů Hidalgo Moya, Philip Powell a Felix Samuely. Šlo o vysokou štíhlou tensegritu, která byla postavena v Londýně u řeky Temže. Dalším typickým příkladem zmiňovaným v [2] a [3] je skulptura od Kennetha Snelsona z roku 1968 zvaná "Needle tower", Obr. 2.6.



Obrázek 2.5: The Skylon, převzato z [11]



Obrázek 2.6: Needle Tower, převzato z [10]

Výhodou tensegrit v porovnání s tradičními strukturami je výrazně nižší hmotnost a objem materiálu bez ztráty tuhosti a pevnosti. Díky tomu se princip tensegrit začal využívat v architektuře, například při stavbě zavěšených střech u velkých budov, zejména sportovních stadionů. Za příklad lze uvést Gymnastickou arénu pro Olympijské hry v Seoulu 1988, The Georgia Dome pro Olympijské hry v Atlantě 1996 nebo fotbalový stadion v Seogwipo Jeju pro Mistrovství světa ve fotbale 2002 v Jižní Koreji, Obr. 2.7. První hybridní tensegritní most, Obr. 2.8, byl postaven v roce 2009 v Queenslandu, Austrálii, jde o most Kurilpa přes řeku Brisbane.



Obrázek 2.7: Fotbalový stadion v Seogwipo Jeju, Jižní Korea, převzato z [12]



Obrázek 2.8: Most Kurilpa, Austrálie, převzato z [9]

2.4 Tensegrity v přírodě, v biologii

Jako tensegritní strukturu můžeme chápat i anatomii lidského nebo zvířecího těla. Kostí představují prvky namáhané v tlaku a svaly, vazy a šlachy zase prvky namáhané v tahu. Díky adekvátní změně napětí ve svalech lze celou strukturou flexibilně hýbat do potřebné polohy a měnit její tvar.

Nemusíme se však pohybovat pouze na makroskopické úrovni. Popis pomocí tensegrit se uplatnil i v biochemii a mikrobiologii, například při tvorbě modelu buňky. Donald E. Ingber, profesor patologie na Harvard Medical School, přišel s hypotézou, že organické buňky je možné modelovat s využitím konceptu tensegrit. V [5] je popsáno, že pomocí lan a tyčí lze modelovat prvky buněčného cytoskeletonu, konkrétně mikrotubuly, mikrofilamenty a intermediární filamenta. Experimenty potvrdily, že takto vytvořený tensegritní model se při interakci s okolím chová stejně jako organická buňka.

Kapitola 3

Form-finding

Jednou z hlavních úloh při navrhování tensegritních struktur je *form-finding*. Jedná se o proces nalezení předpětí lan tak, aby struktura byla ve stabilním předepjatém stavu. Tento výpočet provedeme pomocí metody silové hustoty (*force density method*). Hlavní myšlenka metody navržené v [1] a [3] je založena na sestrojení matice hustoty sil \mathbf{D} a její následné analýze.

3.1 Sestrojení matice hustoty sil

Pro tensegritu s n uzly a m prvky (přičemž prvky rozumíme jak tyče, tak lana) má matice hustoty sil \mathbf{D} velikost $n \times n$ a pro její prvky platí

$$\mathbf{D} = [d_{ij}] = \begin{cases} \sum_{k \in S} q_k & \text{pro } i = j, \\ -q_k & \text{pokud jsou uzly } i \text{ a } j \text{ spojeny prvkem } k, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.1)$$

kde S je množina všech prvků sousedících s uzlem i , k je číslo prvku, který spojuje uzly $\{i, j\}$. Navíc platí, že silové hustoty q_k jsou kladné pro lana a záporné pro tyče.

Matici \mathbf{D} můžeme dostat jednodušším způsobem s využitím konfigurační matice \mathbf{C} . Ta má velikost $m \times n$ a pro její prvky platí

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{cases} -1 & \text{pokud } i \text{ je počáteční uzel prvku } j, \\ 1 & \text{pokud } i \text{ je koncový uzel prvku } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Potom matice \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \cdot \text{diag}\{\mathbf{q}\} \cdot \mathbf{C}, \quad (3.3)$$

kde \mathbf{q} je vektor silových hustot jednotlivých prvků tensegrity délky n . Dále pro druhý člen platí

$$\text{diag}\{\mathbf{q}\} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Pro jednoduchou X tensegritu na Obr. 3.1 bude matice \mathbf{C} vypadat tímto způsobem

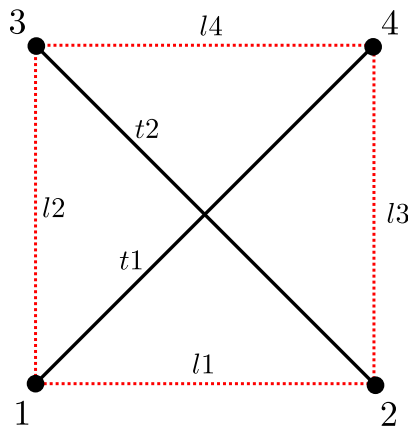
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

V kombinaci s jednotkovým vektorem \mathbf{q}

$$\mathbf{q} = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], \quad (3.6)$$

bude matice \mathbf{D} pro tuto tensegritu ve tvaru

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$



Obrázek 3.1: Schéma X tensegrity

Pro tensegrity je zaváděn pojem super-stabilita. V [8] je definován takto

Definice (Super-stabilita) *Pokud je tensegritní systém v rovnovážném stavu, tedy ve stavu s minimální celkovou potenciální energií, vždy nezávisle na předpětí a materiálových vlastnostech, pak je tento systém super-stabilní.*

V [1], [3] je popsáno, že pro to, aby byla tensegrita super-stabilní, musí být matice \mathbf{D} pozitivně semi-definitní a pro rovinnou tensegritu musí být tři nejmenší vlastní čísla nulová (pro prostorovou tensegritu by to musela být čtyři nejmenší vlastní čísla). To ale pro složitější tensegrity nemusí být vždy možné, a proto budeme hledat vektor \mathbf{q} tak, aby byla tato vlastní čísla minimální.

3.2 Algoritmus pro form-finding

Form-finding provedeme pomocí optimalizačního algoritmu, v němž využijeme cílovou funkci tvořenou funkcemi α a β .

Funkci α definujeme jako

$$\alpha = \sum_{j=1}^3 |\lambda_j|, \quad (3.8)$$

kde λ_j jsou vlastní čísla matice \mathbf{D} seřazená $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Funkci β definujeme jako

$$\beta = \sum_{i=1}^M \frac{1}{|q_i|}. \quad (3.9)$$

Dává smysl rozdělit jednotlivé prvky do skupin podle symetrie a zredukovat počet hledaných silových hustot z m na M , kde M je počet symetricky zatížených skupin.

Optimalizační úlohu pak definujeme jako minimalizaci součinu $\alpha \cdot \beta$, kde navíc platí podmínky

$$\begin{aligned} -1 \leq q_i < 0 & \quad \text{pro tyče,} \\ 0 < q_i \leq 1 & \quad \text{pro lana.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

V [1] je navrhovaným způsobem optimalizace genetický algoritmus. V rámci jednoduché implementace využijeme metodu diferenciální evoluce popsanou v [6], která pracuje s podobnými principy.

- Nejdříve vytvoříme počáteční generaci P s počtem jedinců (bodů, vektorů) N . Každý jedinec je vektor délky M , kde pro prvek odpovídající tyči náhodně vygeneruje hodnotu v rozmezí $[-1, 0]$ a pro prvek odpovídající lanu hodnotu v rozmezí $[0, 1]$.
- Novou generaci dostaneme tak, že pro každý vektor \mathbf{x}_i ze staré generace vytvoříme potenciačního konkurenta \mathbf{y} , rozhodeme, pro který z vektorů \mathbf{x}_i , \mathbf{y} obdržíme nižší hodnotu cílové funkce, a tento vektor pak zařadíme do nové populace Q .

- Pro každý vektor \mathbf{x}_i vygenerujeme vektor \mathbf{u} podle vztahu

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + F(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3), \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ jsou náhodně vybrané navzájem různé vektory z generace P odlišné od aktuálního vektoru \mathbf{x}_i , $F > 0$ je vstupní parametr algoritmu.

- Vektor \mathbf{y} získáme křížením vektorů \mathbf{x}_i, \mathbf{u} . To provedeme tak, že pro všechna $j=1,2,\dots,M$ prvek x_{ij} nahrazujeme prvkem u_j s pravděpodobností C . C je vstupní parametr algoritmu volený v intervalu $[0, 1]$.
- Pro optimalizační algoritmus je třeba ještě připojit zastavovací podmínky. Ty použijeme dvě, první z nich bude maximální počet iterací označená vstupním parametrem *maxevals*, a druhá bude velikost rozdílu mezi maximální a minimální hodnotou cílové funkce v celé populaci, tuto podmínku označíme vstupním parametrem *my eps*.

Vstupní parametry pro algoritmus genetického algoritmu byly zvoleny jako

$$\begin{aligned} N &= 10 \cdot M, \\ F &= 0.8, \\ C &= 0.7, \\ \text{max evals} &= 10^4, \\ \text{my eps} &= 10^{-10}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Z důvodu, že úloha má velké množství lokálních minim, provedeme celý algoritmus vícekrát, v našem případě deset opakování, a vybereme z nich nejlepší řešení \mathbf{x}_{BEST} . Vektor \mathbf{x}_{BEST} má délku M a je třeba přejít zpět na vektor délky m . To je hledaný vektor silových hustot \mathbf{q} .

3.3 Výpočet volných délek lan

Po nalezení vektoru silových hustot \mathbf{q} použijeme postup navržený v [3]. Převědeme hodnoty silových hustot na volné délky jednotlivých předepnutých lan. Pro m -té lano platí

$$q_m = \frac{k_n \cdot (L_m - L_{m0})}{L_m}, \quad (3.13)$$

kde L_m je délka lana, respektive vzdálenost uzlů, které lano spojuje, L_{m0} je volná délka lana a k_n je návrhová tuhost.

Na tomto místě nelze použít skutečnou tuhost, kterou později použijeme ve výpočtu dynamiky, protože silové hustoty jsme také nevypočítaly skutečné. Tím, že jsme pro optimalizaci nastavili jejich rozmezí na $[-1,1]$, známe jen jejich zobrazení do tohoto intervalu. Výpočet dává dobré výsledky pro $5 < k_n < 50$. Pro další výpočty ponecháme k_n na dolní hranici, tedy $k_n = 5$.

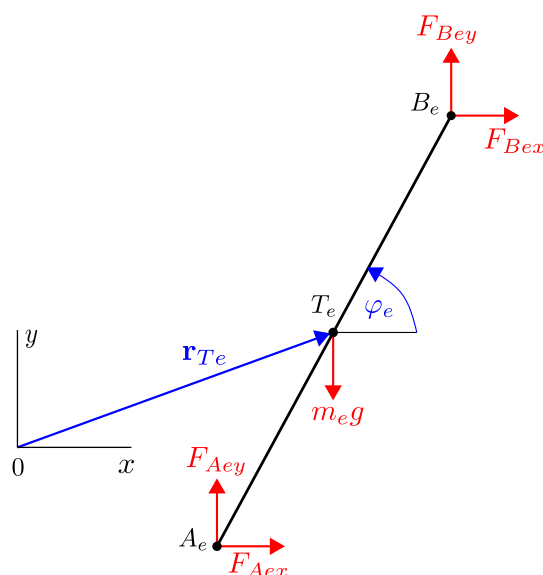
Kapitola 4

Dynamický model rovinné tensegrity

Pro provedení simulace je třeba nejdříve sestavit pohybové rovnice, s jejichž pomocí popíšeme dynamiku systému. Z důvodu, že tyče jsou namáhány jen v tlaku a v ohybu, lze poměrně dobře sestavit rovnice popisující tensegritické struktury. Při sestavování matematického modelu zanedbáme pasivní účinky.

4.1 Pohybové rovnice jedné tyče

Předpokládáme, že tyče jsou dokonale tuhá tělesa. Tyč e lze popsat pomocí tří zobecněných souřadnic, složky vektoru $\mathbf{r}_{T_e} = [x_{T_e}, y_{T_e}]$ udávající polohu těžiště tyče a úhlu natočení φ_e . Na Obr. 4.1 jsou tyto souřadnice zakresleny.



Obrázek 4.1: Zobecněné souřadnice tyče e

K sestavení matematického modelu jedné tyče využijeme Lagrangeovy rovnice smíšeného typu. Ty lze formulovat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \right) - \frac{\partial E_{ke}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \Phi_e^T}{\partial \mathbf{s}} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e, \quad (4.1)$$

kde E_{ke} je kinetická energie tyče e , $\mathbf{s} = [x_{Te}, y_{Te}, \varphi_e]^T$ je vektor zobecněných souřadnic, $\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}}$ je Jacobiho matice vazeb, $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů a \mathbf{Q}_e je vektor zobecněných sil působících na tyč e .

Kinetickou energii E_{ke} tyče vyjádříme jako

$$E_{ke} = \frac{1}{2} m_e v_{Te}^2 + \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}_e^2, \quad (4.2)$$

kde m_e je hmotnost tyče e , I_e je moment setrvačnosti tyče e ke ose kolmé na rovinu XY procházející těžištěm T_e , v_{Te} je rychlost těžiště T_e , kterou lze jednoduše zapsat jako

$$v_{Te}^2 = \dot{x}_{Te}^2 + \dot{y}_{Te}^2. \quad (4.3)$$

Dosazením (4.3) do (4.2) dostaneme kinetickou energii ve tvaru

$$E_{ke} = \frac{1}{2} m_e \dot{x}_{Te}^2 + \frac{1}{2} m_e \dot{y}_{Te}^2 + \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}_e^2. \quad (4.4)$$

Některé tyče mohou být připojeny k rámu nebo k jiným tyčím rotačními nebo obecnými vazbami. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že jsou zadány tak, že se vazba nachází v bodě A_e . Rotační vazbu vyjádříme dvěma vazbovými rovnicemi zapsanými ve vektoru Φ_r , obecnou vazbu vyjádříme jednou vazbovou rovnicí Φ_o .

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Te} - \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e - A_{ex} \\ y_{Te} - \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e - A_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\Phi_o = y_{Te} - \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e - A_{ey} = 0. \quad (4.6)$$

Rovnice (4.1) pro tyče, které nejsou připojeny žádnými vazbami, neobsahuje třetí člen odpovídající vazbovým silám a Lagrangeovým multiplikátorům a jejich pohybové rovnice přejdou do tvaru Lagrangeových rovnic druhého druhu.

První člen rovnice (4.1) lze vyjádřit jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \right) = \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{s}}, \quad (4.7)$$

kde \mathbf{M}_e je matice hmotnosti tyče e . Tato matice má tvar

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_e & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

druhý člen rovnice (4.1) je nulový

$$\frac{\partial E_{ke}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Jacobiho matici vazeb označme jako $\Phi_{\mathbf{s}}$. Lze ji napsat jako matici 2×3 v případě rotační vazby, nebo jako matici 1×3 v případě obecné vazby

$$\Phi_{\mathbf{s}} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_T} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_T} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_T} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_T} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\Phi_{\mathbf{s}} = \frac{\partial \Phi_o}{\partial \mathbf{s}} = \left[\frac{\partial \Phi_o}{\partial x_T} \quad \frac{\partial \Phi_o}{\partial y_T} \quad \frac{\partial \Phi_o}{\partial \varphi} \right]. \quad (4.11)$$

Vektor zobecněných sil \mathbf{Q}_e má 3 složky. První je součet sil působících na těžiště tyče e ve směru x , druhá je součet sil působících na těžiště tyče e ve směru y a třetí je součet momentů sil k těžišti T_e

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} F_{Aex} + F_{Bex} \\ -m_e g + F_{Aey} + F_{Bey} \\ (F_{Aex} - F_{Bex}) \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e + (F_{Bey} - F_{Aey}) \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

kde g je tíhové zrychlení a $F_{Aex}, F_{Bex}, F_{Aey}, F_{Bey}$ jsou složky sil působících v bodech A_e, B_e viz Obr. 4.1.

Soustavu diferenciálních rovnic reprezentujících podmínky dynamické rovnováhy tyče lze pro tyč e napsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{s}} + \Phi_{e\mathbf{s}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e. \quad (4.13)$$

V případě, že je tyč spojena s rámem nebo jinou tyčí pomocí rotační či obecné vazby, je třeba přidat vazbové podmínky

$$\Phi_e = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

Vazbové podmínky je pro další výpočet výhodné dvakrát zderivovat

$$\dot{\Phi}_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

$$\ddot{\Phi}_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \mathbf{s}^2} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2 + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \right) \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Vzhledem k tomu, že vazby jsou v tomto případě skleronomní (nejsou explicitně závislé na čase), budou poslední dva členy ve vztahu (4.16) nulové. Druhý člen rovnice (4.16) označíme

$$\mathbf{b}_e = - \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \mathbf{s}^2} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2. \quad (4.17)$$

Vztah (4.16) tedy můžeme přepsat jako

$$\ddot{\Phi}_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}}_e - \mathbf{b}_e = 0. \quad (4.18)$$

Spojením vztahů (4.13), (4.18) získáme soustavu algebro-diferenciálních rovnic, kterou maticově zapíšeme jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \Phi_{es}^T \\ \Phi_{es} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{b}_e \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

4.2 Pohybové rovnice systému tyčí

System složený z k tyčí má $m = 3 \cdot k$ zobecněných souřadnic, z nichž n je nezávislých. Celkový počet vazbových podmínek je $r = m - n$. Globální matice \mathbf{M} bude diagonální matice rozměrů $m \times m$ a vznikne uspořádáním lokálních matic \mathbf{M}_e na diagonálu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M}_k \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Globální Jakobiho matice vazeb Φ_s má rozměry $r \times m$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial s_1} & \frac{\partial \Phi_r}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_r}{\partial s_m} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Globální vektor zobecněných sil \mathbf{Q} má délku m a vznikne uspořádáním lokálních vektorů zobecněných sil \mathbf{Q}_e pod sebe. Globální vektor \mathbf{b} má délku r .

Soustava algebro-diferenciálních rovnic pro celý systém má stejný tvar jako soustava rovnic pro jednu tyč, maticově ji zapíšeme jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Pro numerické řešení této soustavy je vhodné tento vztah upravit. Maticovou rovnici (4.22) rozepíšeme do dvou rovnic

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \Phi_s^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}, \quad (4.23)$$

$$\Phi_s \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{b}. \quad (4.24)$$

Z rovnice (4.23) vyjádříme $\ddot{\mathbf{s}}$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} - \Phi^T \boldsymbol{\lambda}), \quad (4.25)$$

dosadíme (4.25) do (4.24) a vyjádříme $\boldsymbol{\lambda}$

$$\Phi \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} - \Phi^T \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{b} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = (\Phi \mathbf{M}^{-1} \Phi^T)^{-1}(\Phi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{b}). \quad (4.26)$$

Dosadíme (4.26) zpět do (4.23) a získáme

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{s}} + \Phi^T (\Phi \mathbf{M}^{-1} \Phi^T)^{-1} (\Phi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{b}) = \mathbf{Q}. \quad (4.27)$$

Druhý člen levé strany vztahu (4.27) převedeme na pravou stranu a následně celou rovnici vynásobíme zleva maticí \mathbf{M}^{-1} a dostaneme

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{Q} - \Phi^T (\Phi \mathbf{M}^{-1} \Phi^T)^{-1} (\Phi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{b})]. \quad (4.28)$$

4.3 Stabilizace numerického řešení

Pro některé případy může být řešení numericky nestabilní a může tak docházet k porušení vyzbových podmínek. Proto využijeme Baumgartovu stabilizaci popsanou v [7]. Rovnici vazbové podmínky (4.16) modifikujeme přidáním stabilizujících členů. Modifikovaná rovnice bude mít tvar

$$\ddot{\Phi}_e + 2\alpha \dot{\Phi}_e + \beta^2 \Phi_e = 0, \quad (4.29)$$

kde α, β jsou vhodně zvolené konstanty. V našem případě jsou použité konstanty $\alpha = 1, \beta = \sqrt{2}$. Po dosazení bude mít rovnice (4.29) tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \mathbf{s}^2} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2 + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \right) \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial t^2} + \\ + 2\alpha \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \right) + \beta^2 \Phi_e = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Vektor \mathbf{b} pak ve výsledném výrazu nahradíme vektorem $\bar{\mathbf{b}}$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - 2\alpha \dot{\Phi} - \beta^2 \Phi. \quad (4.31)$$

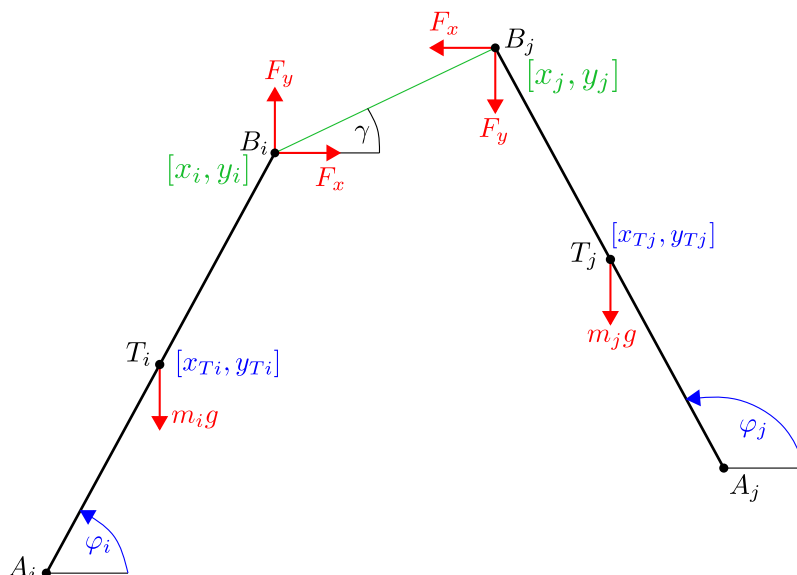
Dosazením do (4.28) dostaneme výsledný vztah

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{Q} - \Phi^T (\Phi \mathbf{M}^{-1} \Phi^T)^{-1} (\Phi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{b}})], \quad (4.32)$$

což je vztah, který využijeme při numerickém výpočtu zobecněných souřadnic, které popisují polohu všech tyčí systému.

4.4 Určení sil v lanech

Lana zjednodušeně modelujeme jako pružiny s tuhostí k a tlumením b . Každé lano spojuje dva koncové body tyčí, z nichž každý leží na jiné tyči. Označme tyto tyče i a j a souřadnice bodu ležícího na i , respektive na j , označme x_i, y_i , respektive x_j, y_j .



Obrázek 4.2: Dvě tyče spojené lanem

Souřadnice bodů v závislosti na zobecněných souřadnicích tyče počítáme podle toho, zda se jedná o bod A nebo B dané tyče

$$\begin{aligned}
 x_{Ae} &= x_{Te} - \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e, \\
 y_{Ae} &= y_{Te} - \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e, \\
 x_{Be} &= x_{Te} + \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e, \\
 y_{Be} &= y_{Te} + \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

a stejně tak vyjádříme rychlosti těchto bodů

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{Ae} &= \dot{x}_{Te} + \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e \cdot \dot{\varphi}_e, \\
 \dot{y}_{Ae} &= \dot{y}_{Te} - \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e \cdot \dot{\varphi}_e, \\
 \dot{x}_{Be} &= \dot{x}_{Te} - \frac{l_e}{2} \sin \varphi_e \cdot \dot{\varphi}_e, \\
 \dot{y}_{Be} &= \dot{y}_{Te} + \frac{l_e}{2} \cos \varphi_e \cdot \dot{\varphi}_e.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Délku lana L_{ij} lze vypočítat jako

$$L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (4.35)$$

a v závislosti na volné délce lana L_0 můžeme vypočítat prodloužení lana jako

$$\Delta L = L_{ij} - L_0. \quad (4.36)$$

Prodloužení lana ΔL zderivujeme podle času

$$\frac{d\Delta L}{dt} = \frac{(x_j - x_i)(\dot{x}_j - \dot{x}_i) + (y_j - y_i)(\dot{y}_j - \dot{y}_i)}{L_{ij}}. \quad (4.37)$$

Nyní můžeme vypočítat sílu v laně jako sílu pružiny F_p a sílu tlumení F_t .

$$F_p = \begin{cases} k \cdot \Delta L & \text{pro } \Delta L > 0, \\ 0 & \text{pro } \Delta L \leq 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$F_t = \begin{cases} b \cdot \frac{d\Delta L}{dt} & \text{pro } \Delta L > 0, \\ 0 & \text{pro } \Delta L \leq 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Je ale třeba si uvědomit, že lano působí silou pouze v tahu, takže pro záporné prodloužení budou tyto síly rovny nule.

Dále vypočítáme síly F_x, F_y , což jsou složky síly v laně promítnuté do směrů x, y

$$\begin{aligned} F_x &= (F_p + F_t) \cdot \cos \gamma, \\ F_y &= (F_p + F_t) \cdot \sin \gamma. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Na Obr. 4.2 je vyznačen úhel γ udávající orientaci lana. S pomocí (4.33), (4.34) a (4.35) můžeme vypočítat sinus a kosinus tohoto úhlu jako

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{x_j - x_i}{L_{ij}}, \\ \sin \gamma &= \frac{y_j - y_i}{L_{ij}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dosazením (4.41) do (4.40) dostaneme

$$\begin{aligned} F_x &= (F_p + F_t) \cdot \frac{x_j - x_i}{L_{ij}}, \\ F_y &= (F_p + F_t) \cdot \frac{y_j - y_i}{L_{ij}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

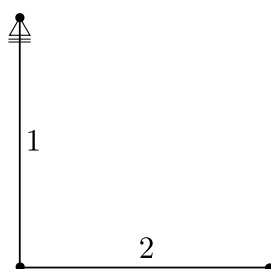
Takto získané síly přičteme k silám v příslušném směru na bodu tělesa i a odečteme od sil bodu tělesa j .

4.5 Aplikace dynamického modelu

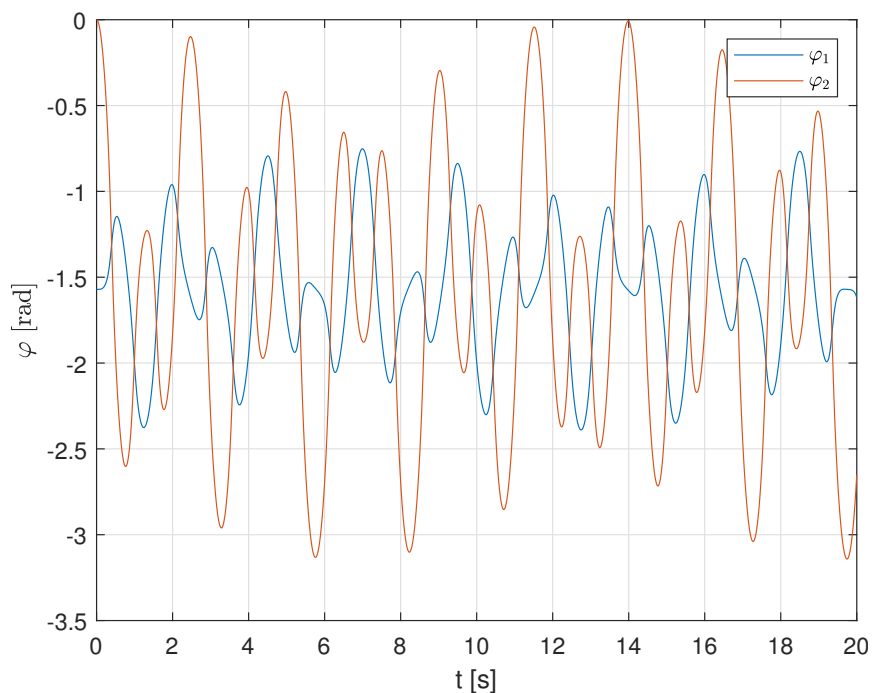
Realizaci provedeme v programu MATLAB pomocí funkce pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic *ode45*.

4.5.1 Dvojkyvadlo

Výše popsaný matematický model otestujeme na případě dvojkyvadla s tyčemi délky 1 m a hmotnosti 1 kg. Počáteční poloha dvojkyvadla je ukázána na Obr. 4.3. Průběh natočení tyčí je ukázán na Obr. 4.4. Průběh polohy obou tyčí a jejich natočení je zobrazen na Obr. 4.6.



Obrázek 4.3: Počáteční poloha dvojkyvadla



Obrázek 4.4: Průběh úhlů tyčí dvojkyvadla

4.5.2 X tensegrita

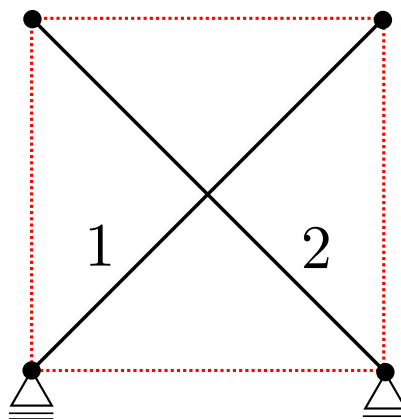
Druhým příkladem je jednoduchá X tensegrita, která vlivem vlastní tíhy přejde z počáteční polohy, Obr. 4.5, do rovnovážného stavu. Souřadnice popisující polohu tyčí seřadíme do vektoru zobecněných souřadnic $\mathbf{s} = [x_{T1}, y_{T1}, \varphi_1, x_{T2}, y_{T2}, \varphi_2]^T$. Simulaci spustíme s parametry tyčí

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg}, \\ l &= 1.4142 \text{ m}, \end{aligned} \tag{4.43}$$

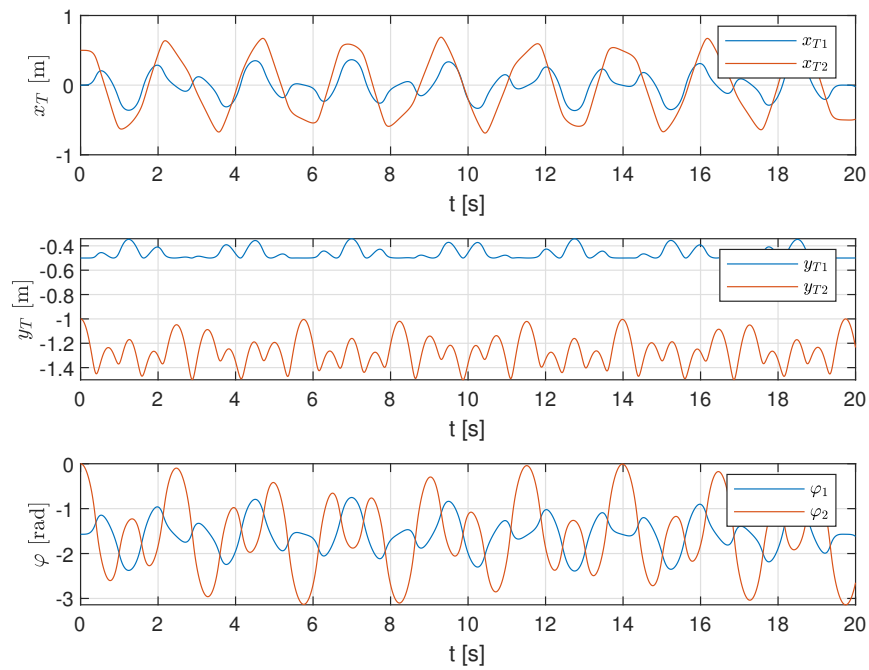
a parametry lan

$$\begin{aligned} L_0 &= 0.5 \text{ m}, \\ k &= 100 \text{ N} \cdot \text{m}^1, \\ b &= 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

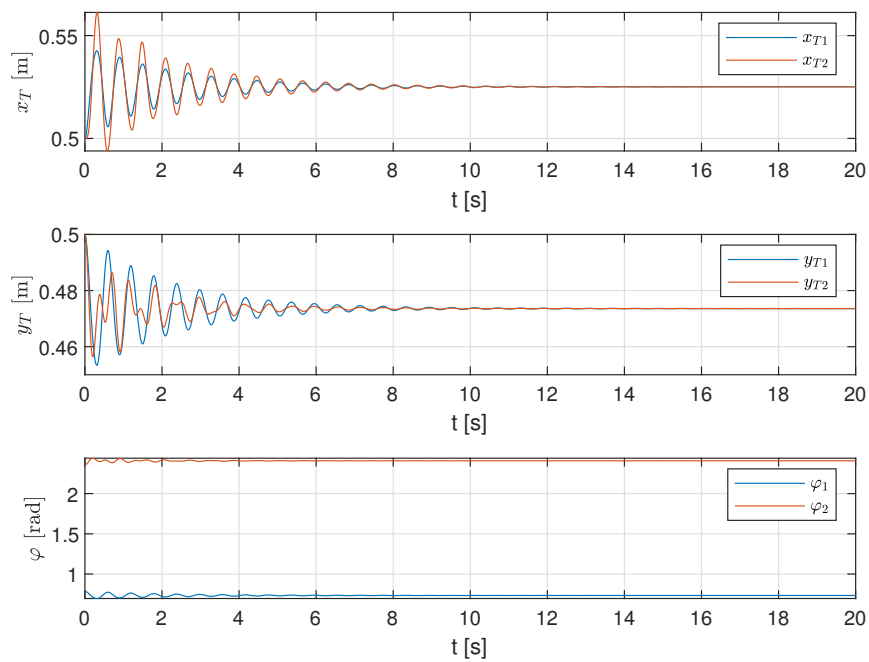
Průběh polohy obou tyčí a jejich natočení je zaneseno do grafu na Obr. 4.7.



Obrázek 4.5: Počáteční poloha X tensegrity



Obrázek 4.6: Průběh polohy tyčí dvojkyvadla



Obrázek 4.7: Průběh polohy tyčí X tensegrity

Kapitola 5

Aplikace

V MATLABu vytvořený program kombinuje výpočet volných délek pomocí *form-findingu* a následného dynamického řešení rovinných tensegrit sestavených z jednoduchých tyčových prvků a pružných lan. Program je navržen tak, že lze volitelně spustit i bez provádění *form-findingu*.

5.1 Vstupní data

- **nodes**

Jako vstupní data potřebujeme v matici **nodes** zadat polohu všech uzlových bodů, tj. koncových bodů tyčí, v daném souřadnicovém systému. Je vhodné jeden z uzlů umístit do počátku souřadnicového systému.

- **members**

Potřebujeme vědět, jaké dva uzly jsou propojeny jednotlivými prvky. To zadáme v matici **members** s tím, že navíc ještě pro každý prvek označíme zda se jedná o tyč (1), nebo lano (0).

- **symetrie**

Pro potřeby *form-findingu* zadáme ve vektoru **symetrie** rozdělení prvků do skupin, které mají být symetricky zatížené.

- **constraints**

Ve vektoru **constraints** je třeba zadat vazby, kterými jsou tyče připojeny k rámu, případně k dalším tyčím. Jedná se vždy o vazbu v uzlu, který je v matici **members** uveden v příslušném řádku jako první. Žádná vazba je označena (0), obecná vazba k rámu je označena (1), rotační vazba k rámu je označena (2) a rotační vazba k jiné tyči je označena (3).

- (volnedelky)

V případě, že nechceme provádět form-finding, je možné zadat navíc vektor **volnedelky**, kam zapíšeme volné délky lan.

Například pro osmiúhelníkovou tensegritu, Obr. 3.2, budou vstupní data v podobě

$$\mathbf{nodes} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{members} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{symetrie} = [1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3], \quad (5.3)$$

$$\mathbf{constraints} = [2, 1, 0, 0]. \quad (5.4)$$

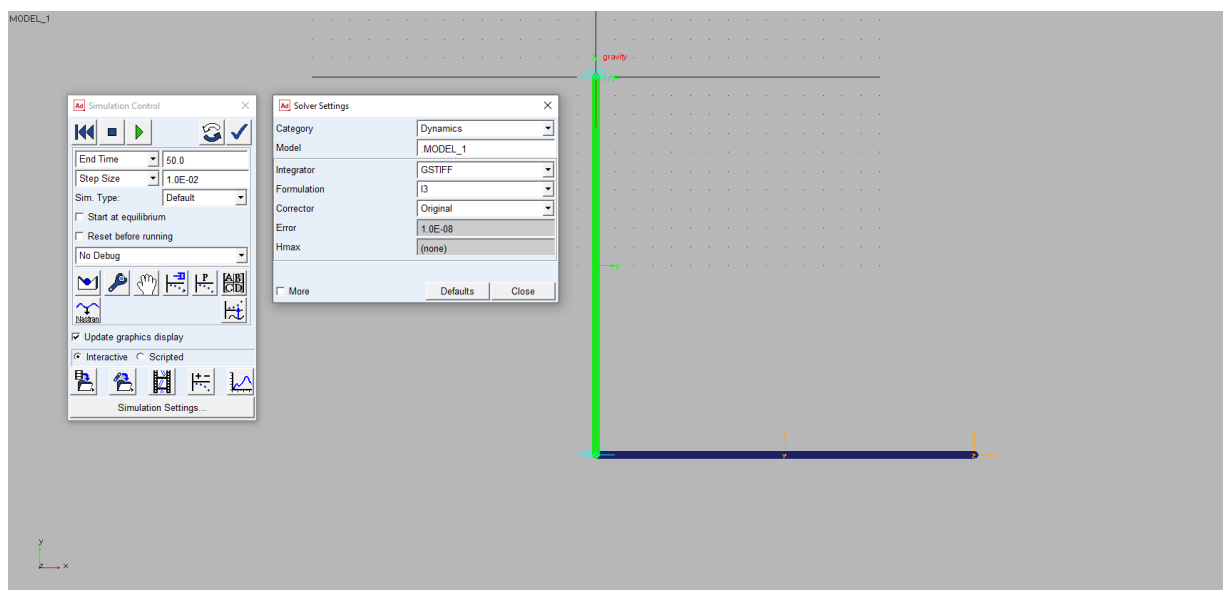
Pro výpočet všech následujících příkladů jsou použité tyto fyzikální parametry

$$\begin{aligned} g &= 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \\ \rho &= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ k &= 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \\ b &= 50 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

kde g je gravitační zrychlení, ρ je hustota, pomocí které počítáme hmotnost tyčí, k je tuhost pružin, kterými modelujeme lana, a b je tlumení těchto pružin.

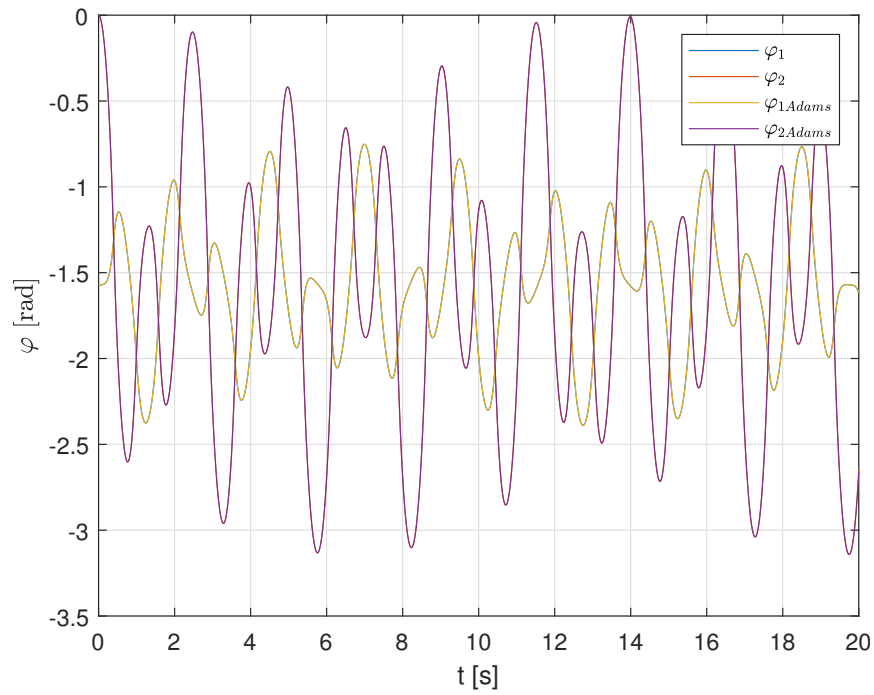
5.2 Ověření výpočtu pomocí programu Adams

Kontrolu správnosti výpočtu programu provedeme porovnáním výsledků s profesionálním softwarem Adams. Srovnání provedeme na dvou systémech, první bude dvojkyvadlo, druhý bude osmiúhelníková tensegrita. Na Obr. 5.1 je ukázána konfigurace dvojkyvadla, ze které spouštíme výpočet v programu Adams, a nastavení parametrů výpočtu.

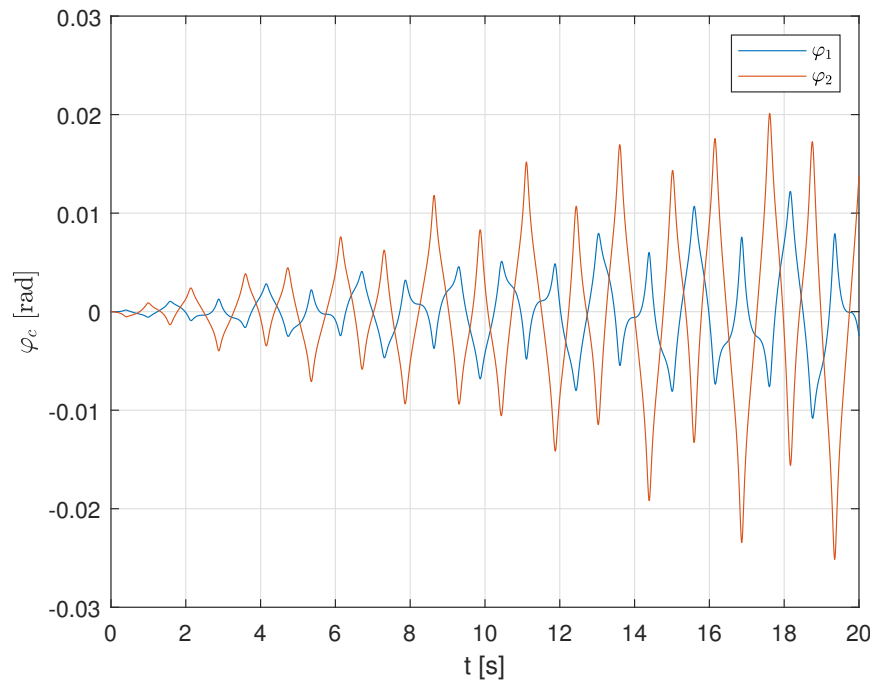


Obrázek 5.1: Dvojkyvadlo v programu Adams

Na Obr. 5.2 je zobrazeno porovnání průběhu natočení tyčí vypočítaného oběma programy. Vzhledem k tomu, že rozdíl není na první pohled zřejmý, vykreslíme rozdíl mezi hodnotami získanými z obou programů. Na Obr. 5.3 je zobrazen vývoj chyby φ_c , udávající rozdíl mezi úhly natočení získanými oběma způsoby výpočtu. V numerickém výpočtu velmi závisí na výběru funkcí pro výpočet diferenciálních rovnic a nastavení tolerance v obou programech, výchozích hodnot jsme změnilí povolenou chybu jak v programu Adams, tak v nastavení funkce *ode45* v MATLABU na 10^{-8} . Pro dvojkyvadlo se rozdíl mezi daty získanými oběma způsoby výpočtu průběhem času zvětšuje, zřejmě vlivem numerického tlumení v jednom z programů. Vzhledem k tomu, že se relativní chyba pohybuje nejvýše v řádu jednotek procent, lze říct, že navržený program dává téměř stejné výsledky jako Adams.

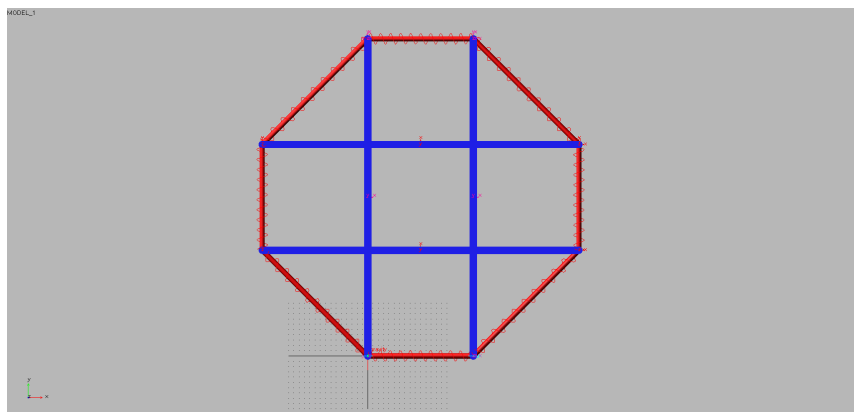


Obrázek 5.2: Průběh natočení obou tyčí

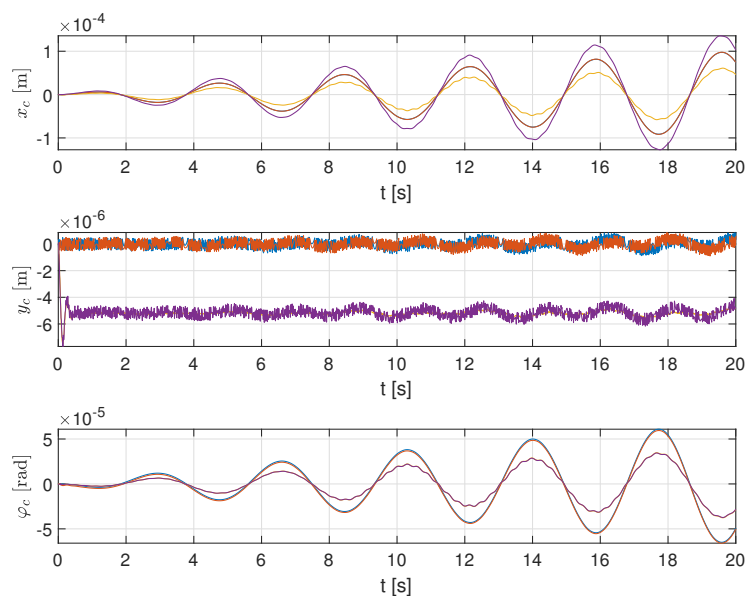


Obrázek 5.3: Průběh chyby výpočtu natočení

Přidáním pružin namodelujeme v programu Adams osmiúhelníkovou tensegritu v předepsané poloze, Obr. 5.4, nastavíme volné délky pružin tak, jak jsme je dostali z form-findingu, a budeme sledovat průběh polohy a sil v čase, ve kterém přejde do rovnovážné polohy. Na Obr. 5.5 je zobrazen vývoj chyb při výpočtu souřadnic polohy tyčí tensegrity. Stejně jako v předchozím případě je relativní chyba v řádu jednotek procent.



Obrázek 5.4: Osmiúhelníková tensegrita v programu Adams



Obrázek 5.5: Průběh chyby výpočtu souřadnic tyčí tensegrity

5.3 Aplikace na vybrané příklady tensegrit

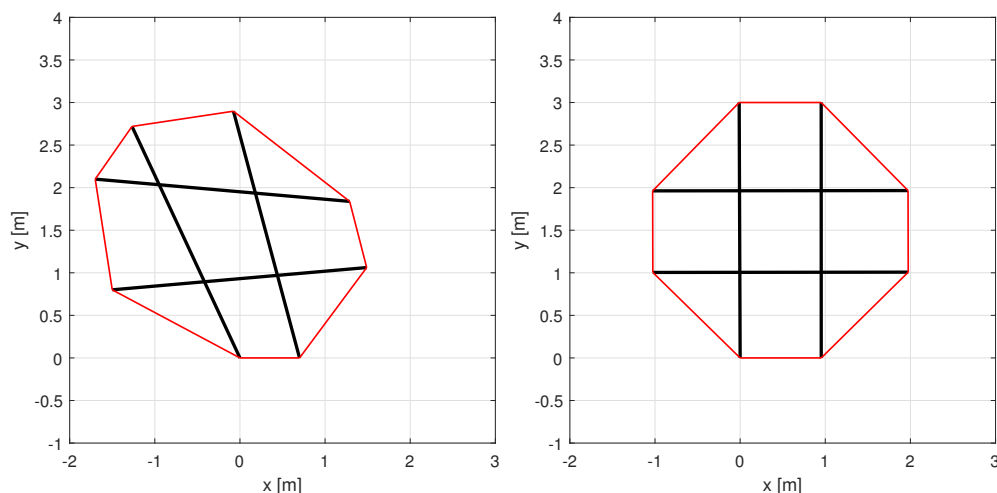
V navrženém programu spustíme form-finding a výpočet dynamiky několika tensegrit. Postup spuštění programu je nejdříve v **nodes** nastavit polohy uzlů v požadované poloze, spustit program s form-findingem a vygenerovat tak vektor volných délek. Následně změnit polohy uzlů do deformované polohy a spustit program bez form-findingu. Výstupem programu je vizualizace ukazující změnu tvaru tensegrity v čase, data udávající souřadnice polohy tyčí a jejich rychlosti, a data udávající vývoj sil v lanech v čase.

Zkoumanými tensegritami budou osmiúhelníková tensegrita, její modifikace s přidáním lany, dva typy třípatrové tensegrity třídy 1 a třípatrová tensegrita třídy 2.

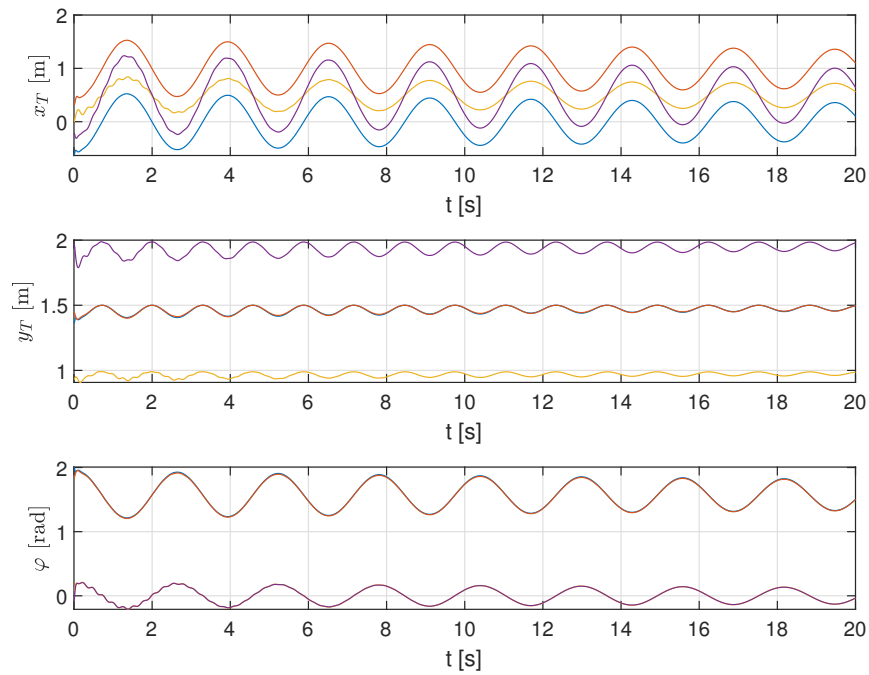
5.3.1 Osmiúhelníková tensegrita

Na Obr. 5.6 je ukázána počáteční a rovnovážná poloha osmiúhelníkové tensegrity. Na Obr. 5.7 je vykreslen průběh polohy těžišť tyčí a jejich úhel natočení v čase. Rychlosti těchto souřadnic jsou vykresleny na a Obr. 5.8. Na Obr. 5.9 je vykreslen průběh sil v lanech.

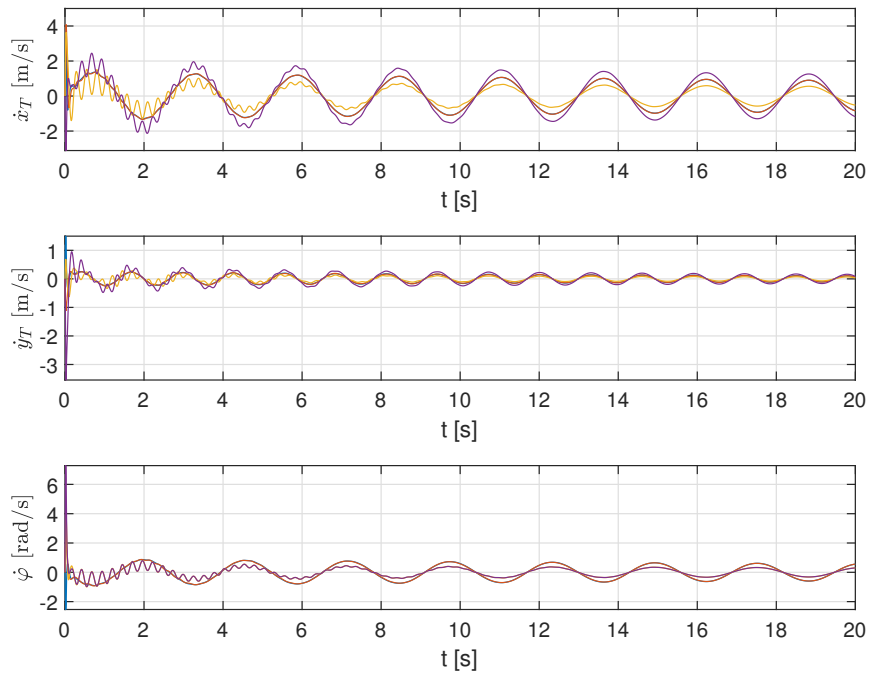
Lana spojující tyče tímto způsobem dokáží udržet tensegritu v požadovaném tvaru, nicméně po vychýlení z rovnovážné polohy má toto předpětí problém dostat ji zpět. Je vidět, že tensegrita v této konfiguraci po deformaci kmitá kolem rovnovážné polohy a ustálení trvá velmi dlouho, cca 600 sekund. V dalším příkladu ukážeme, jak lze kmitání tensegrity utlumit přidáním diagonálních lan.



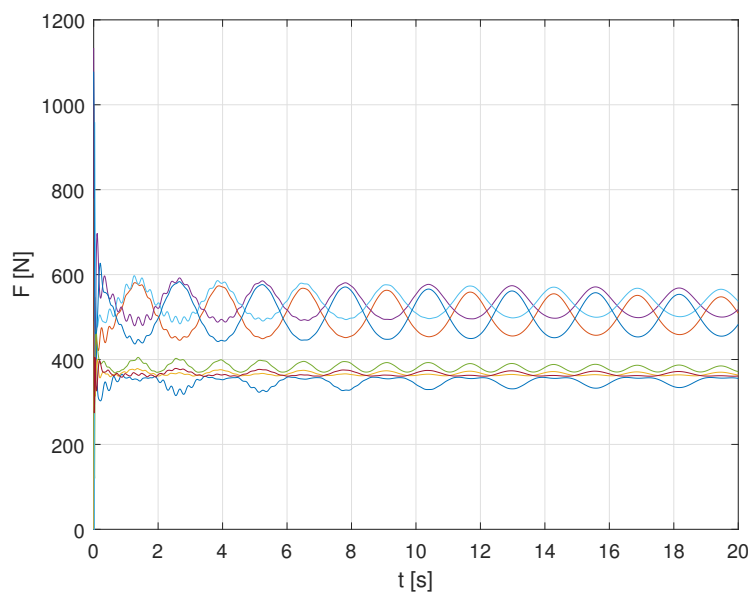
Obrázek 5.6: Počáteční a rovnovážná poloha osmiúhelníkové tensegrity



Obrázek 5.7: Průběh polohy osmiúhelníkové tensegrity



Obrázek 5.8: Průběh rychlosti osmiúhelníkové tensegrity

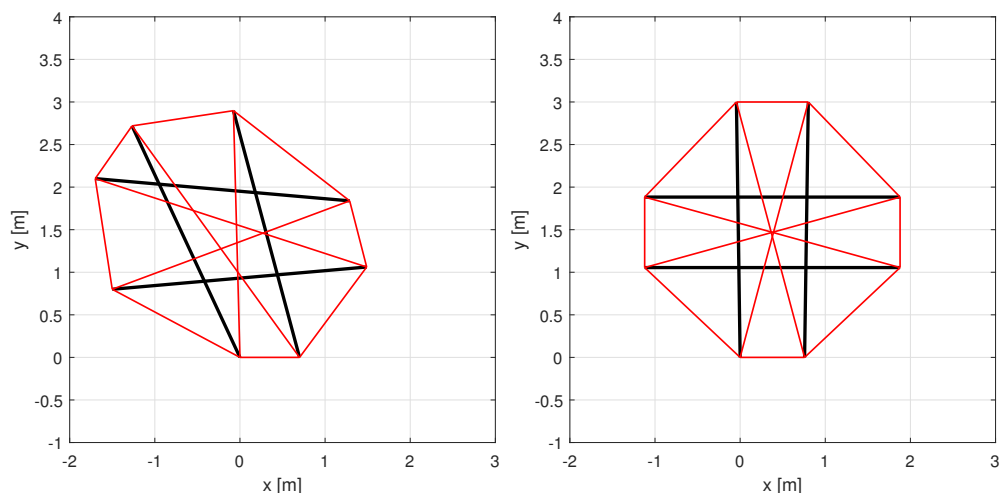


Obrázek 5.9: Průběh sil v lanech u osmiúhelníkové tensegrity

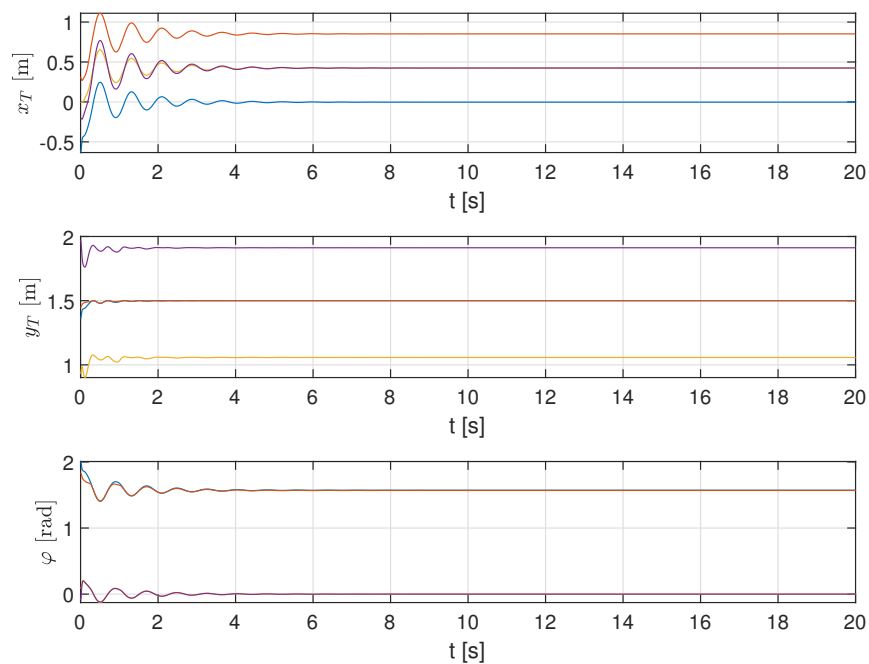
5.3.2 Osmiúhelníková tensegrita s přidanými diagonálními lany

Počáteční a rovnovážná poloha osmiúhelníkové tensegrity s přidanými diagonálními lany je zobrazena na Obr. 5.10. Na Obr. 5.11, respektive Obr. 5.12 je vykreslen průběh polohy těžišť tyčí a jejich úhel natočení v čase, respektive rychlosti těchto souřadnic.

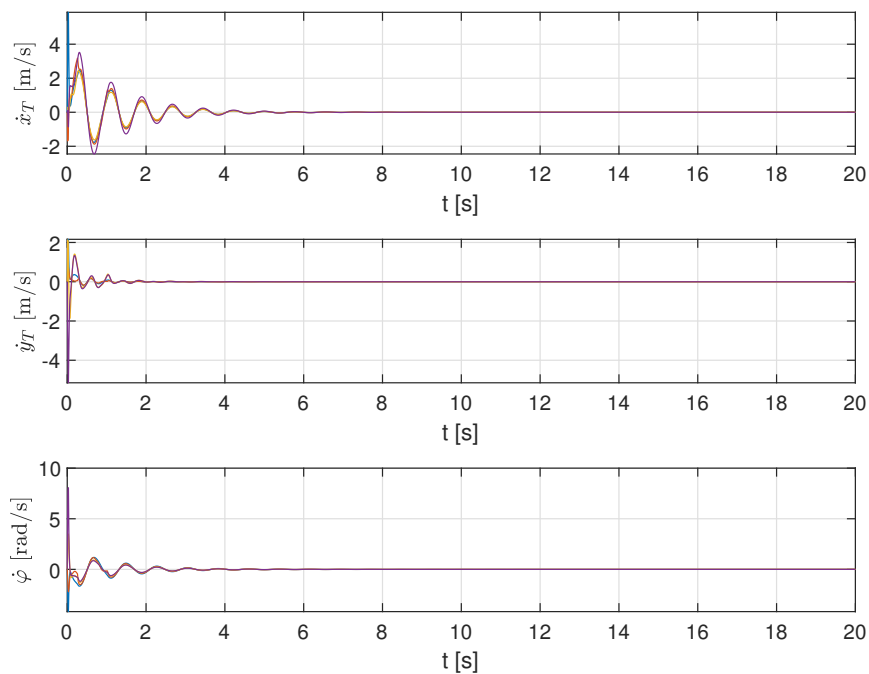
Přidáním lan jsme dokázali pohyb soustavy do velké míry utlumit. V porovnání s předchozím příkladem se tensegrita v této konfiguraci ustálí podstatně rychleji, tj. do 10 sekund v porovnání s 600 sekundami bez diagonálních lan. Průběh sil v lanech je zobrazen na Obr. 5.13.



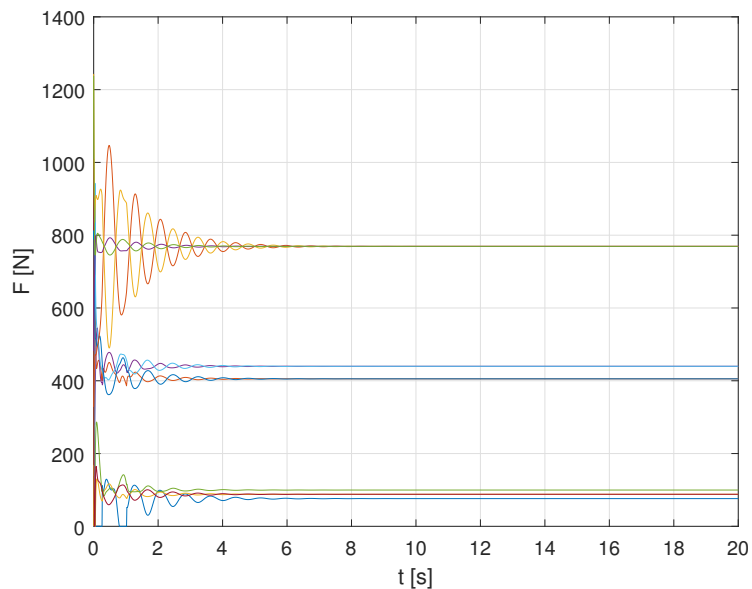
Obrázek 5.10: Počáteční a rovnovážná poloha osmiúhelníkové tensegrity s přidanými lany



Obrázek 5.11: Průběh polohy osmiúhelníkové tensegrity s přidanými lany



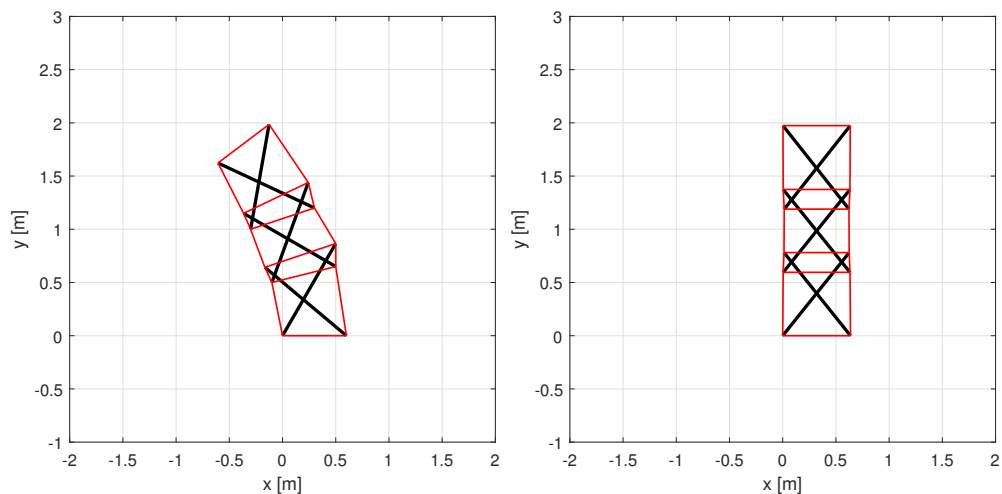
Obrázek 5.12: Průběh rychlosti osmiúhelníkové tensegrity s přidanými lany



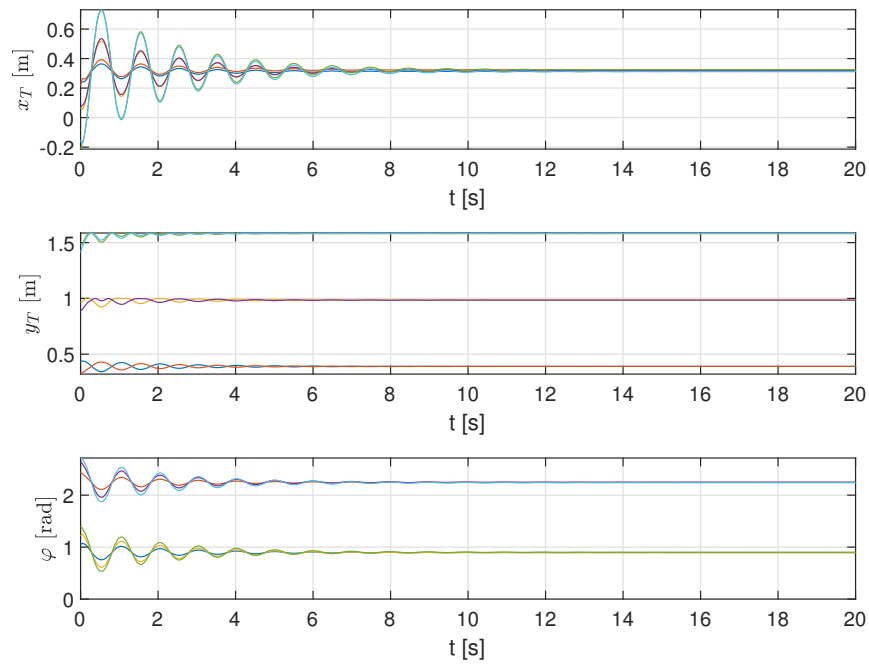
Obrázek 5.13: Průběh sil v lanech u osmiúhelníkové tensegrity s přidanými lany

5.3.3 Třípatrová tensegrita s pravoúhlými lany

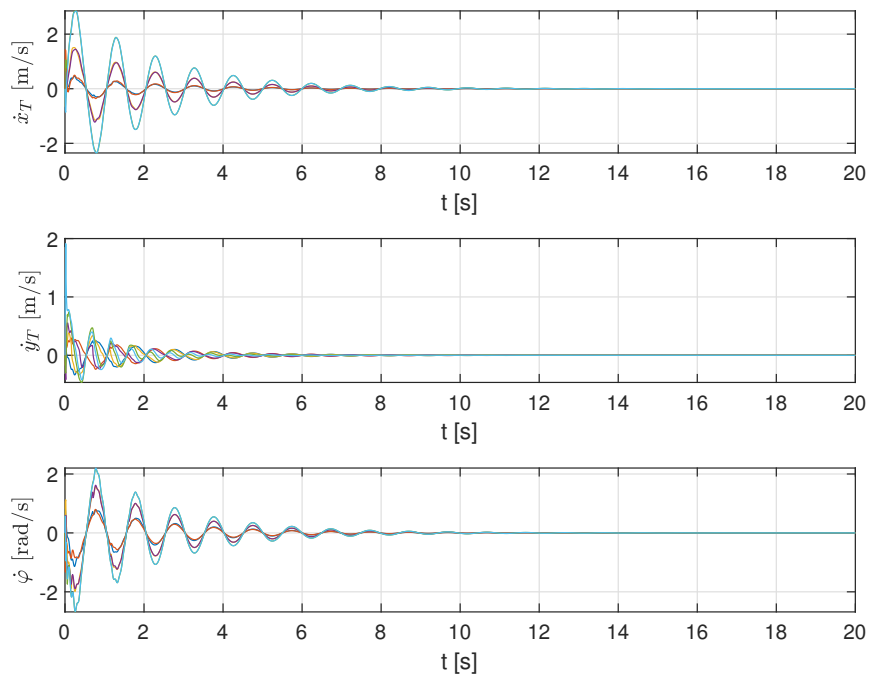
Jde o tensegritu třídy 1 složenou ze tří X tensegrit, které jsou spojeny lany způsobem naznačeným na Obr. 5.14, který zobrazuje jak deformovanou, tak rovnovážnou polohu. Výstupem simulace je průběh polohy těžišť tyčí, jejich úhel natočení a rychlosti v čase, výstup je zobrazen na Obr. 5.15 a Obr. 5.16. Graf na Obr. 5.17 ukazuje síly v lanech.



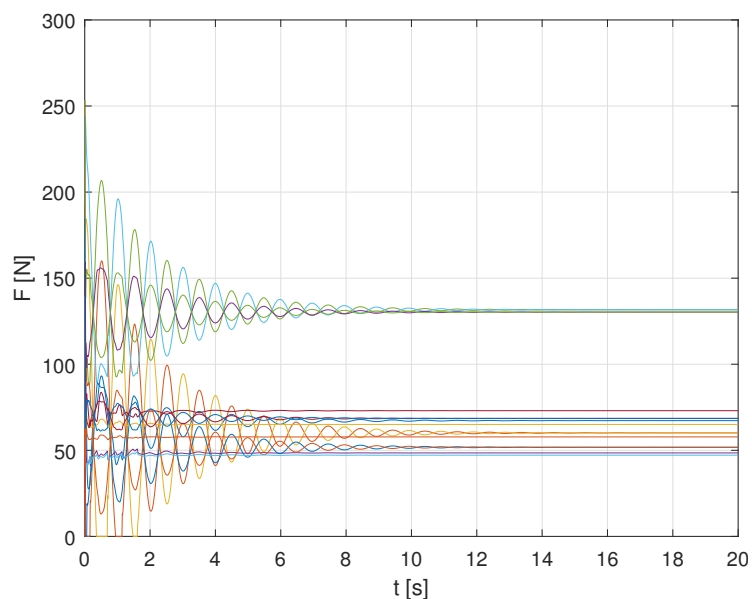
Obrázek 5.14: Počáteční a rovnovážná poloha třípatrové tensegrity s pravoúhlými lany



Obrázek 5.15: Průběh polohy třípatrové tensegrity s pravoúhlými lany



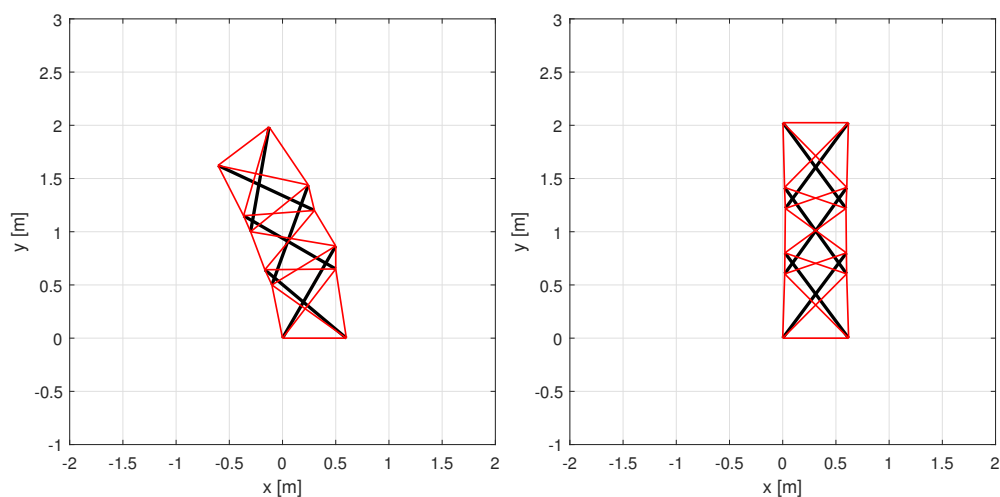
Obrázek 5.16: Průběh rychlosti třípatrové tensegrity s pravoúhlými lany



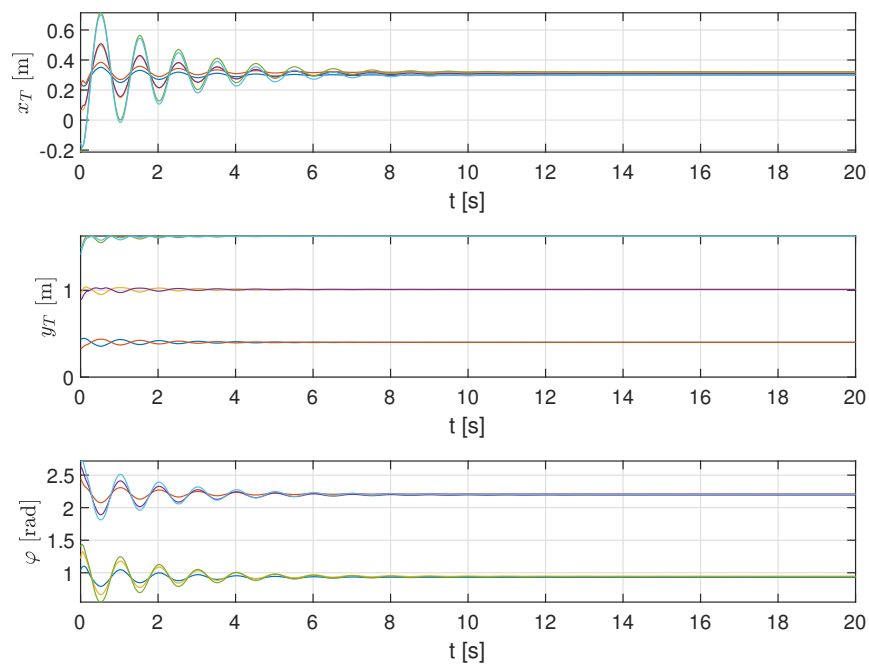
Obrázek 5.17: Průběh sil v lanech u třípatrové tensegrity s pravouhlými lany

5.3.4 Třípatrová tensegrita s diagonálními lany

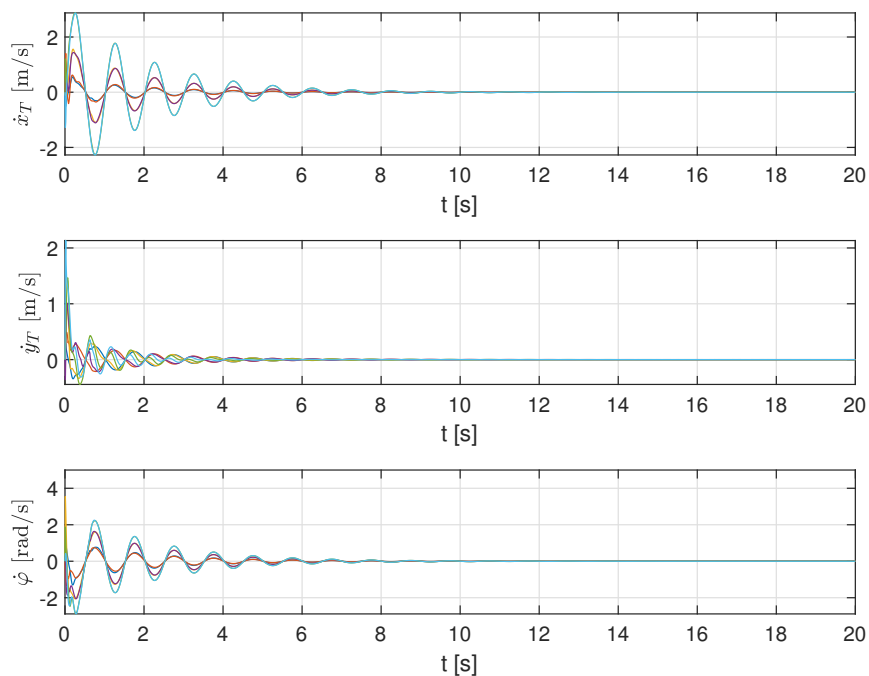
Stejně jako v předchozím příklad jde o tensegritu složenou ze tří X tensegrit, které jsou tentokrát spojeny diagonálními lany. Na Obr. 5.18 je ukázána počáteční a rovnovážná poloha této tensegrity. Na Obr. 5.19 je vykreslen průběh polohy těžišť tyčí a jejich úhel natočení v čase. Rychlosti těchto souřadnic jsou vykresleny na a Obr. 5.20. V simulaci vypočítané síly v lanech jsou zobrazeny na Obr. 5.21.



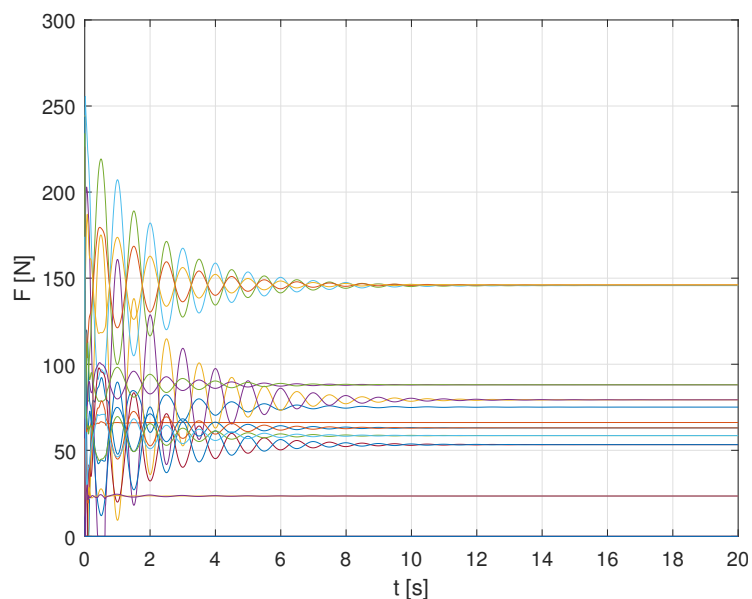
Obrázek 5.18: Počáteční a rovnovážná poloha třípatrové tensegrity s diagonálními lany



Obrázek 5.19: Průběh polohy třípatrové tensegrity s diagonálními lany



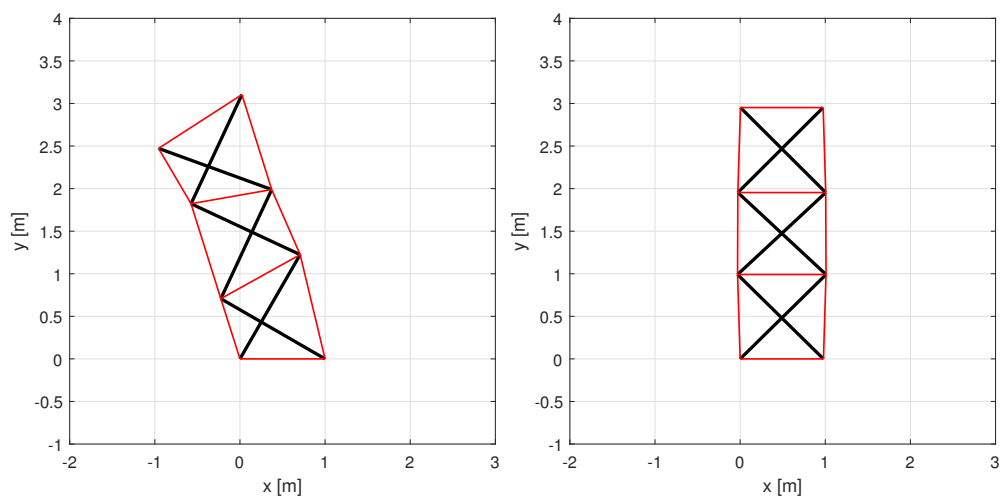
Obrázek 5.20: Průběh rychlosti třípatrové tensegrity s diagonálními lany



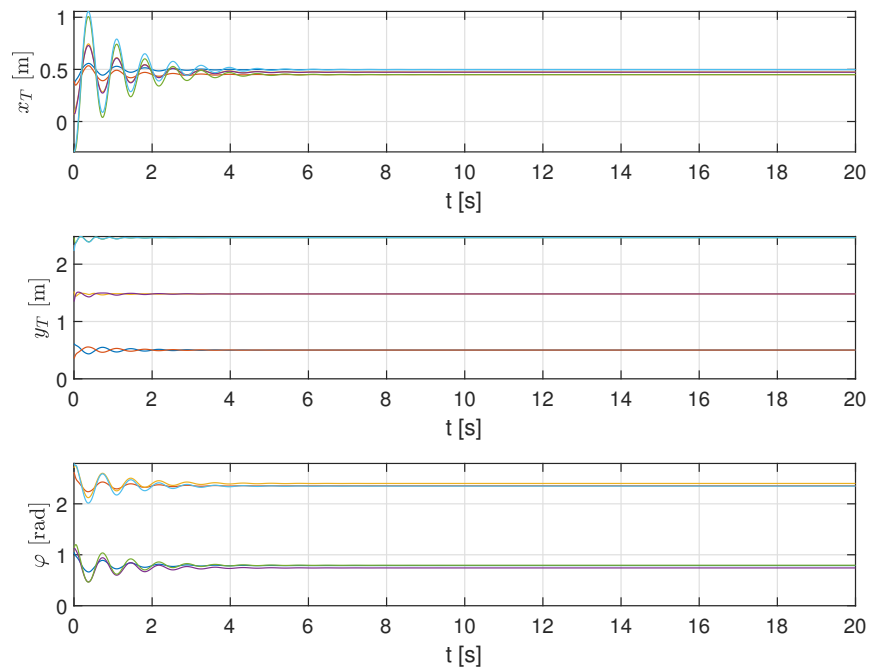
Obrázek 5.21: Průběh sil v lanech u třípatrové tensegrity s diagonálními lany

5.3.5 Třípatrová tensegrita třídy 2

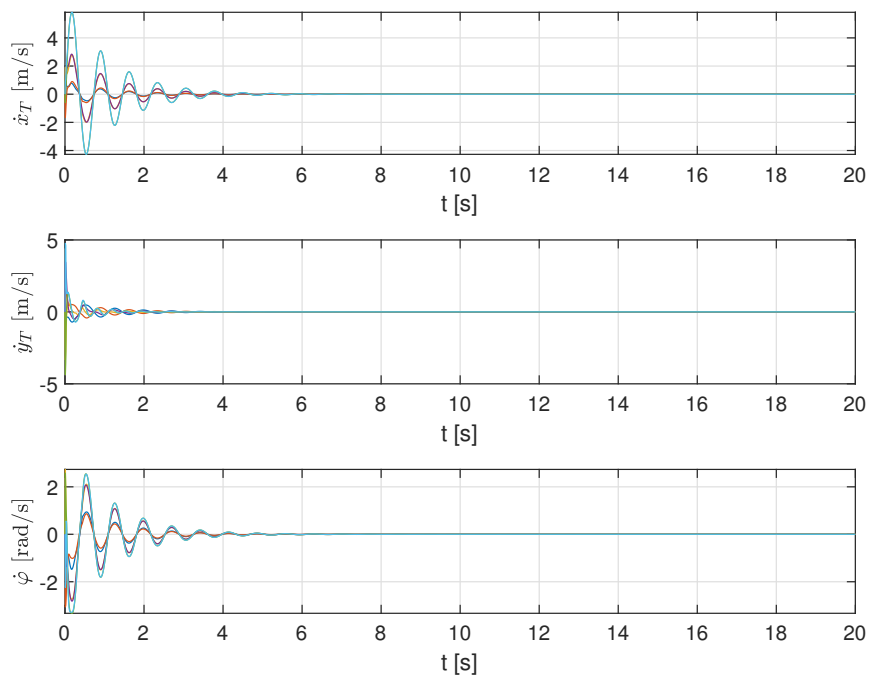
Jde o tensegritu třídy 2, tedy takovou, kde jsou některé tyče mezi sebou spojeny rotačními vazbami. Z deformované počáteční polohy přejde systém do počáteční polohy, obě tyto polohy jsou ukázány na Obr. 5.22. Průběhy polohy a rychlostí tyčí jsou vykresleny v grafech na Obr. 5.23 a Obr. 5.24. Průběh sil v lanech je zobrazen na Obr. 5.13.



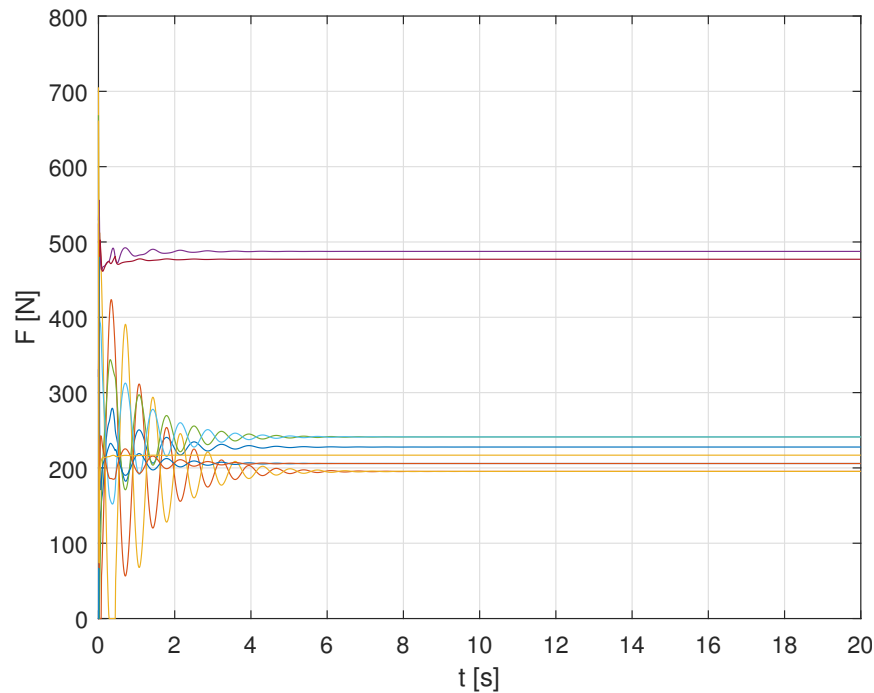
Obrázek 5.22: Počáteční a rovnovážná poloha třípatrové tensegrity třídy 2



Obrázek 5.23: Průběh polohy třípatrové tensegrity třídy 2



Obrázek 5.24: Průběh rychlosti třípatrové tensegrity třídy 2



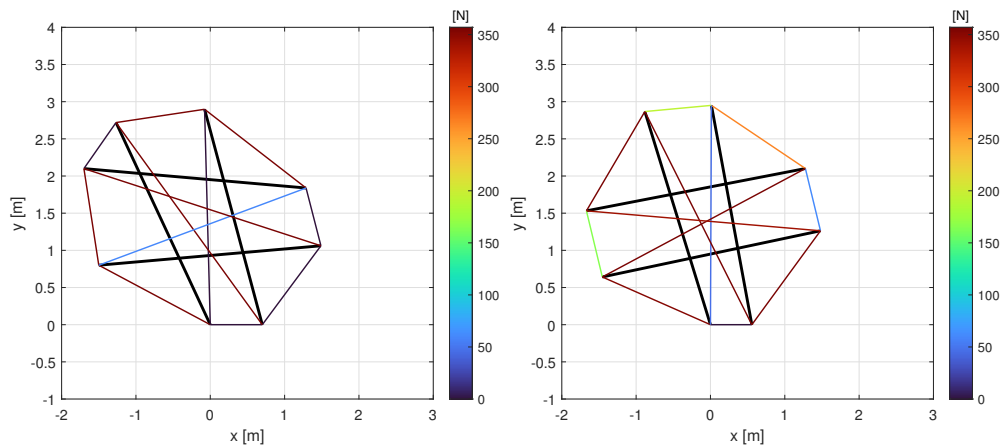
Obrázek 5.25: Průběh sil v lanech u třípatrové tensegrity třídy 2

Na příkladech v sekcích 5.3.3, 5.3.4 jsme ukázali, že existuje více možných konfigurací lan, pro které bude tensegrita při stejném rozložení tyčí stabilní. Velmi podobně oběma předchozím konfiguracím se chová i tensegrita třídy 2 zkoumaná v sekci 5.3.5

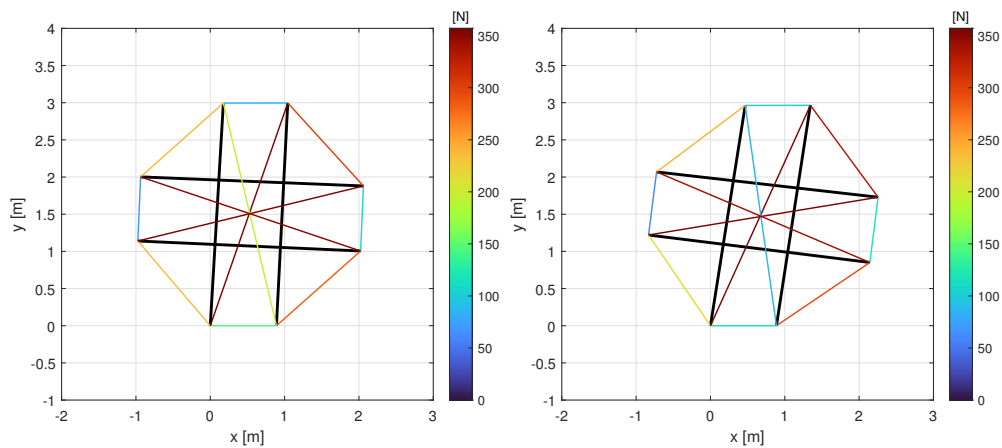
5.4 Velikost sil v lanech

Grafy na Obr. 5.9, Obr. 5.13, Obr. 5.17, Obr. 5.21 a Obr. 5.13 je obtížné interpretovat. Ukažme si tedy na příkladu osmiúhelníkové tensegrity s přidáním diagonálními lany jejich průběh vizuálně.

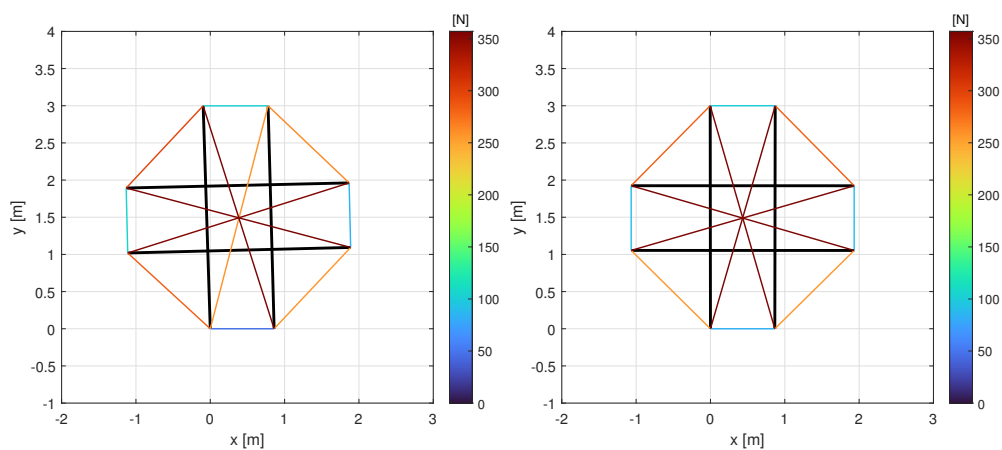
V deformovaném stavu na Obr. 5.26 je vidět, že pro tuto tensegritu jsou síly buď velmi vysokých hodnot (tmavě červená barva), nebo jsou naopak nulové v případě, že se lano nepropne. Soustava poměrně rychle změní svůj tvar a většina sil se začíná zmenšovat. Na Obr. 5.27 má tensegrita už tvar blízcí se tomu, který má v rovnovážné poloze, ale stále se pohybuje. Pověsimně si rozdíl v silách diagonálních lan při naklonění vlevo a vpravo. Postupem času se kmitání zmenšuje a síly se přibližují k hodnotám, které mají v rovnovážné poloze. Velikosti sil v rovnovážné poloze jsou ukázány vpravo na Obr. 5.28. Největší síly v rovnovážné poloze působí v diagonálních lanech.



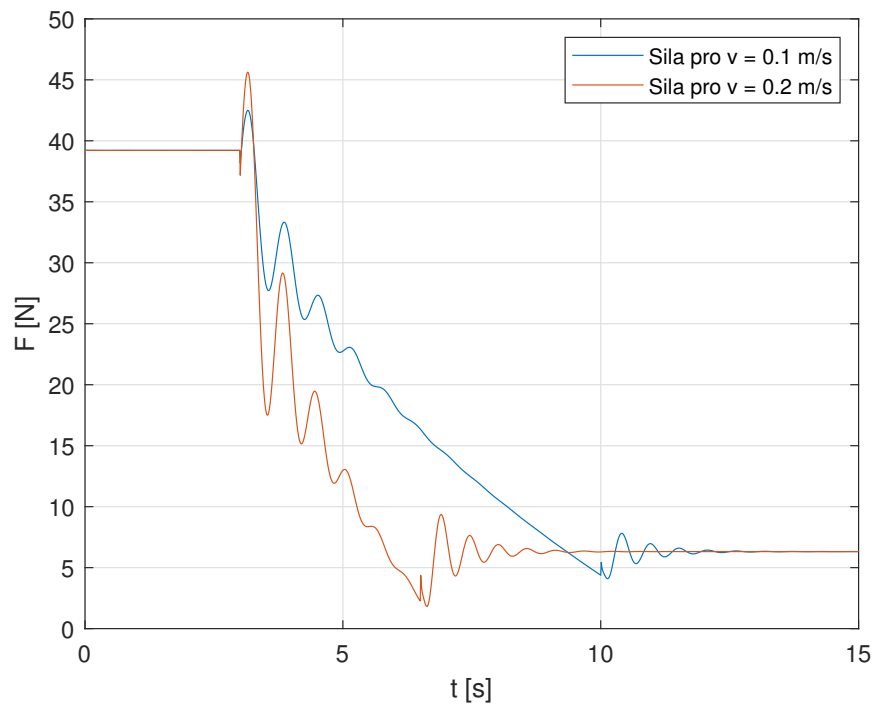
Obrázek 5.26: Velikosti sil v lanech v čase $t = 0$ s, $t = 0.05$ s



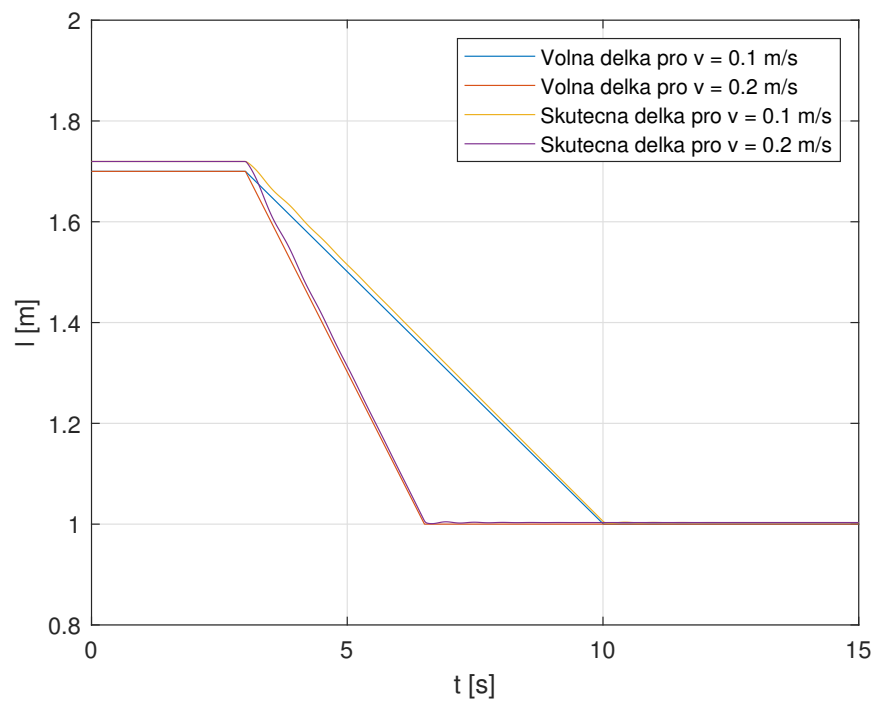
Obrázek 5.27: Velikosti sil v lanech v čase $t = 0.3$ s, $t = 0.4$ s



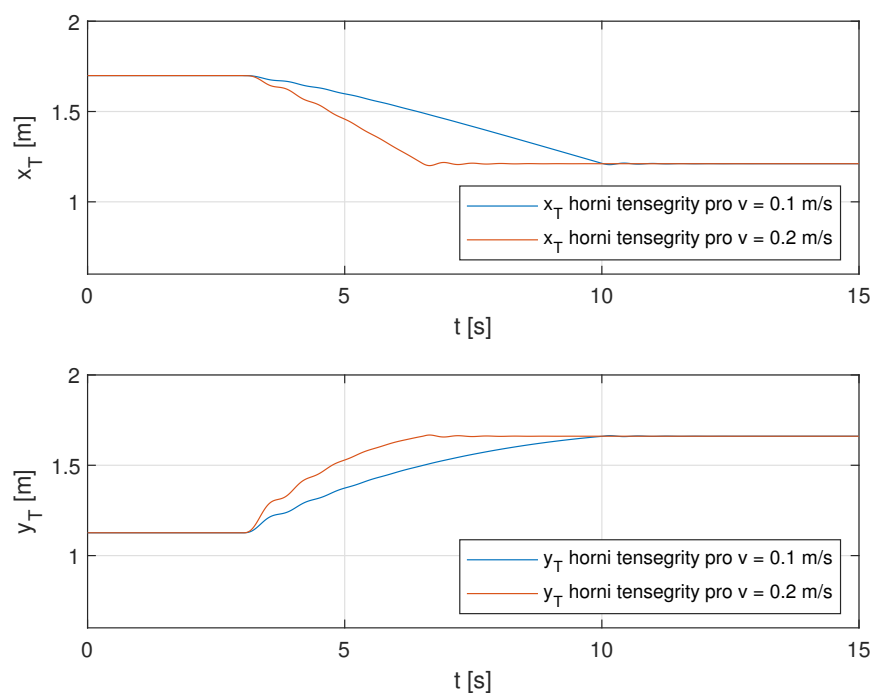
Obrázek 5.28: Velikosti sil v lanech v čase $t = 0.5$ s, $t = 10$ s



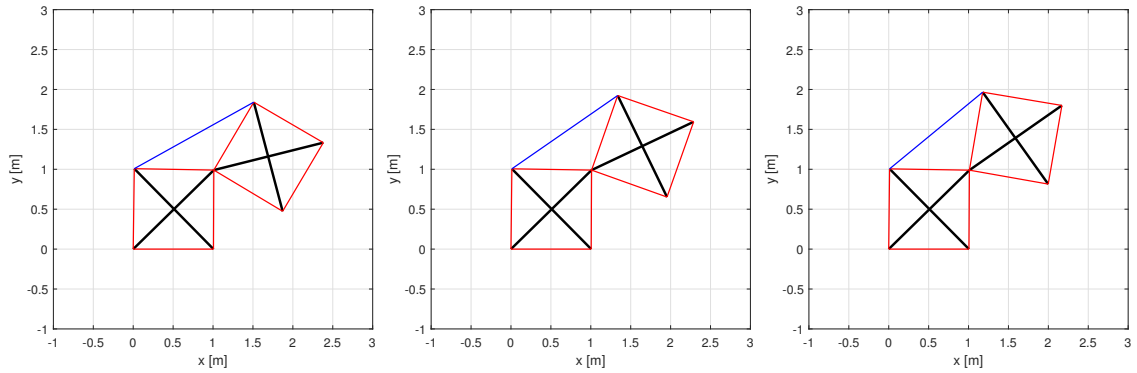
Obrázek 5.30: Porovnání sil ve vyznačeném laně pro obě rychlosti



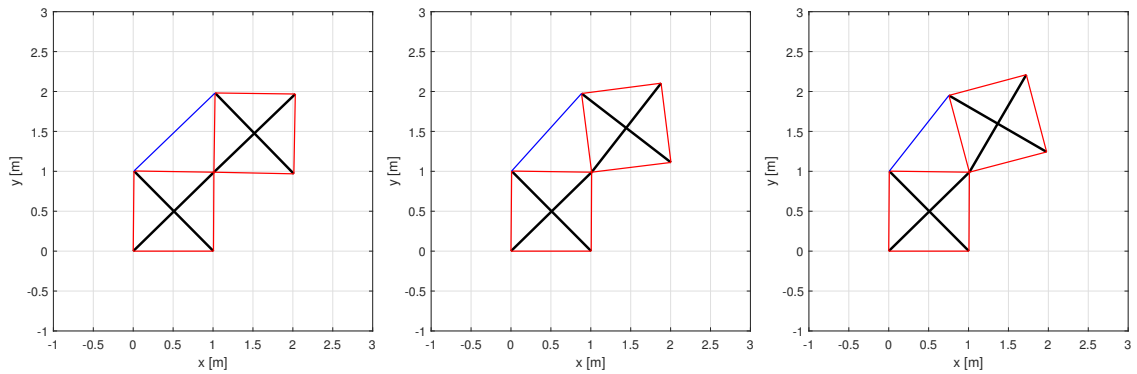
Obrázek 5.31: Porovnání volných a skutečných délek lan pro obě rychlosti



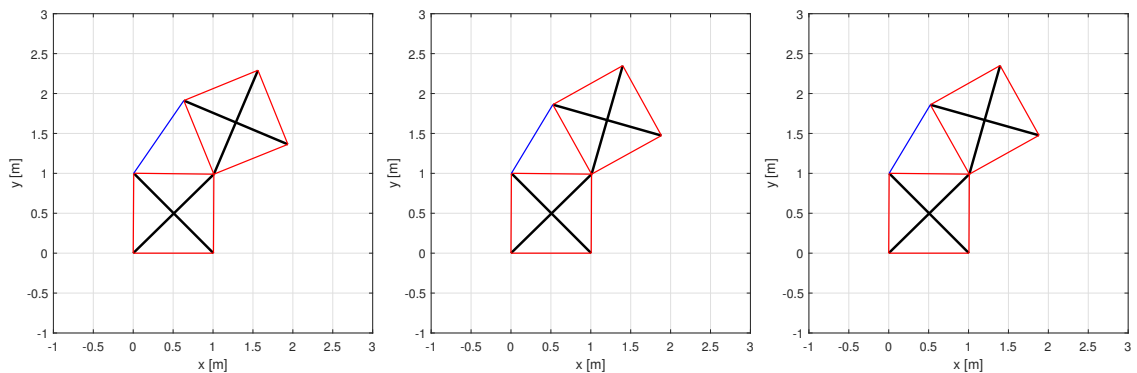
Obrázek 5.32: Porovnání polohy těžiště horního bloku tensegrity pro obě rychlosti



Obrázek 5.33: Změna polohy při zkracování volné délky lana, zobrazeny polohy pro čas $t = 3$ s, $t = 4$ s, $t = 5$ s



Obrázek 5.34: Změna polohy při zkracování volné délky lana, zobrazeny polohy pro čas $t = 6$ s, $t = 7$ s, $t = 8$ s



Obrázek 5.35: Změna polohy při zkracování volné délky lana, zobrazeny polohy pro čas $t = 9$ s, $t = 10$ s, $t = 11$ s

Kapitola 6

Závěr

Obsahem práce bylo seznámení se s konceptem tensegritních struktur, dále hledání rovnovážného stavu tensegrity metodou form-finding, odvození dynamického modelu pro rovinné tensegrity v podobě soustavy algebro-diferenciálních rovnic. Byl vytvořen vlastní program, který tyto rovnice dokáže sestavit. Všechny vytyčené cíle práce tedy byly splněny.

Praktická část byla realizována v programu MATLAB, ověření výsledků potom v programu Adams. Využitím vlastního implementovaného programu byly ukázány simulace pro pět příkladů tensegritních soustav. Na jedné z nich byly vizualizovány vypočítané síly v lanech. Poslední simulace ukazovala použití programu pro výpočet aktivní tensegrity. Navrženým programem lze provést výpočet pro libovolnou rovinnou tensegritu tříd 1 a 2.

V budoucnu lze principy použité v této práci rozšířit na prostorové tensegrity, případně na tensegrity s obecnějšími prvky, než jsou tyče. Dalším směrem budoucího výzkumu může být řízení tvaru tensegrity pomocí aktuátorů měnící volnou délku lan.

Literatura

- [1] K. Koohestani, *Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm*, International Journal of Solids and Structures, č. 49, pp. 739-747, 2012.
- [2] A. S. Wroldsen, *Modelling and Control of Tensegrity Structures*, Doctoral Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2007
- [3] A. Balon, *Optimalizace a řízení mechatronické tensegrity pro robotiku*, Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, 2019
- [4] T. Kaňka, *Tensegritní mechanismy pro náhradu prostorových sériových robotů*, Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, 2021
- [5] B. S. Gan, *Computational Modeling of Tensegrity Structures*, Art, Nature, Mechanical and Biological Systems, Springer Cham, 2019. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-17836-9>
- [6] J. Tvrđík, *Evoluční algoritmy*, Učební texty Ostravské Univerzity, Ostravská Univerzita, 2010
- [7] M. Hajžman, P. Polach, *Application of stabilization techniques in the dynamic analysis of multibody systems*, Applied and Computational Mechanics 1, 479 - 488, 2007
- [8] J. Y. Zhang, M. Ohsaki, *Tensegrity Structures, Form, Stability, and Symmetry*, Springer Japan, 2015. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-4-431-54813-3>
- [9] Wikimedia Commons, 2009, *English Wikipedia* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KurilpaBridgeConstruction7.JPG>
- [10] Landscaped art at the Krölller-Müller Museum, 2016, *Travel blog Notes from Camelid Country* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: <https://notesfromcamelidcountry.net/2016/10/08/landscaped-art-at-the-kroller-muller-museum/>
- [11] Tom Harrow-Smith, 2021, In search of Skylon, *South Bank London* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: <https://southbanklondon.com/south-bank-history-skylon>

- [12] Photos du stade de Seogwipo: Seogwipo Orum World Cup Stadium, 2021, *Stades et Spectateurs* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: <http://www.stades-spectateurs.com/photos-seogwipo-orum-world-cup-stadium.html>
- [13] Karl Ioganson, 2021, *Monoskop* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: https://monoskop.org/Karl_Ioganson
- [14] Marcelo Pars , 2021, The X-module *Tensegriteit* [online], [Cit. 30.5.2022]. Dostupné z: <http://www.tensegriteit.nl/e-xmodule.html>