

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

Modely transportu buněk v kapilárním řečišti a vliv akustických vln

Bakalářská práce

Autor práce: Štěpán Peroutka
Vedoucí práce: Prof. Dr. Ing. Eduard Rohan, DSc.

Plzeň, 2022

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Štěpán PEROUTKA**
Osobní číslo: **A19B0646P**
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**
Studijní obor: **Počítačové modelování**
Téma práce: **Modely transportu buněk v kapilárním řečišti a vliv akustických vln**
Zadávající katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Studium popisu interakce poddajných těles s kapalinou.
2. Vytvoření modelu proudění Newtonské a ne-Newtonské kapaliny v axisymetrické poddajné kapiláře.
3. Zjednodušené (redukované modely) 1D proudění elastických těles (buněk) v kapiláře.
4. Zohlednění vlivu akustických vln – metoda akustických perturbací.
5. Numerická implementace vybraných modelů.



Rozsah bakalářské práce: **30 – 50 stran A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. Formaggia L., Quarteroni A., Veneziani A.: Cardiovascular Mathematics. Springer 2009.
2. Pozrikidis C.: Numerical simulation of the flow-induced deformation of red blood cells. Annals of Biomedical Engineering, 31: 1194-1205, 2003.
3. Bermúdez A., Gamallo P., Hervella-Nieto L., Rodríguez R., Santamarina D.: Fluid-Structure Acoustic Interaction. In: Marburg S., Nolte B. (eds) Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids – Finite and Boundary Element Methods. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-77448-8_10, 2008.
4. Rajagopal V., Holmes W., and Lee P.: Computational modeling of single-cell mechanics and cytoskeletal mechanobiology. WIREs Systems Biology and Medicine, 10 (2): e1407, 2018.
5. Khruslov E. and Berlyand L.: Homogenized non-newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interacting particles in a viscous newtonian fluid. SIAM J on Appl Math, 64 (3): 1002-1034, 2004.
6. Tschisgale S., Kempe T, and Fröhlich J.: A general implicit direct forcing immersed boundary method for rigid particles. Computers & Fluids, 170: 285-298, 2018.

Vedoucí bakalářské práce: **Prof. Dr. Ing. Eduard Rohan, DSc.**
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **18. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2022**

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně za použití uvedených zdrojů.

V Plzni dne 31.5.2022

Štěpán Peroutka

Poděkování

Děkuji především prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi, DSc. za vedení, trpělivost a nespočet rad a času, které mi pro vznik této práce věnoval a bez kterých by nemohla vzniknout. Děkuji také za to, že práce mohla vzniknout za podpory Grantové agentury České republiky jako součást projektu č. 19-04956S "Dynamika a nelineární chování pokročilých kompozitních struktur; modelování a optimalizace". Také bych chtěl poděkovat všem, kdo mi ochotně dali zpětnou vazbu k textu, přátelům a rodině za notnou dávku trpělivosti a podpory a rovněž těm, kdo se zasazují o dostupnost odborné literatury.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou modelování proudění krve s detailem na proudění kapilárami. Na implementovaném redukovaném 2D modelu představuje s tím související jev interakce tekutiny s poddajným prostředím. Pro účely tohoto modelu je popsána Fourierova metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu a ve zkratce rovněž metoda konečných prvků. Dále tato práce na zjednodušeném modelu zkoumá vliv postupné vlny šířící se stěnou rotačně symetrického kanálu na tekutinu uvnitř. Nakonec je navržen silně zjednodušený rotačně symetrický model transportu buňky elastickým kanálem.

Klíčová slova: Proudění kapilárami, krevní buňky, interakce tekutiny s poddajným prostředím, postupné vlny

Abstract

This bachelor thesis deals with modeling of blood flow with emphasis on blood flow through capillaries. It introduces related phenomenon of fluid-structure interaction by implementation of reduced 2D model. The Fourier's method for solving parabolic partial differential equation and basic mechanism of finite element method are explained as a part of the model. In another part an effect of a progressive wave of axisymmetric channel wall on the flow inside is studied on a simplified model. Finally, a strongly reduced model of cell transport through an axisymmetric channel is proposed.

Key words: Capillary blood flow, blood cells, fluid-structure interaction, progressive waves

Obsah

1	Úvod	8
2	Kardiovaskulární systém	9
2.1	Srdce	10
2.2	Cévy	10
2.3	Krev	12
3	Hemodynamika	15
3.1	Elektro-hydraulická analogie	15
3.2	Hydrodynamické modely	16
3.3	Mikrocirkulace	17
4	Model proudění s interakcí	20
4.1	Matematický model proudění	21
4.2	Další redukce modelu	21
4.3	Proudění při známém průhybu	24
4.4	Výsledky pro předepsaný průhyb	26
4.5	Interakce proudění s poddajnou deskou	28
4.6	Výsledky modelu interakce	33
4.7	Symetrická úloha	34
5	Vliv postupných vln na proudění	37
5.1	Matematický model	37
5.2	Výsledky	38
5.2.1	Vliv vlnové délky	40
5.2.2	Vliv periody vlny	43
5.2.3	Vliv amplitudy vlny	47
5.3	Shrnutí	50
6	Model interakce s buňkou	51
6.1	Úvod a značení	51
6.2	Stěna kapiláry	52
6.3	Úseky <i>I</i> a <i>III</i>	52
6.4	Úsek <i>II</i>	52
6.5	Hranice mezi úseky	54
6.6	Shrnutí	54
7	Závěr	56

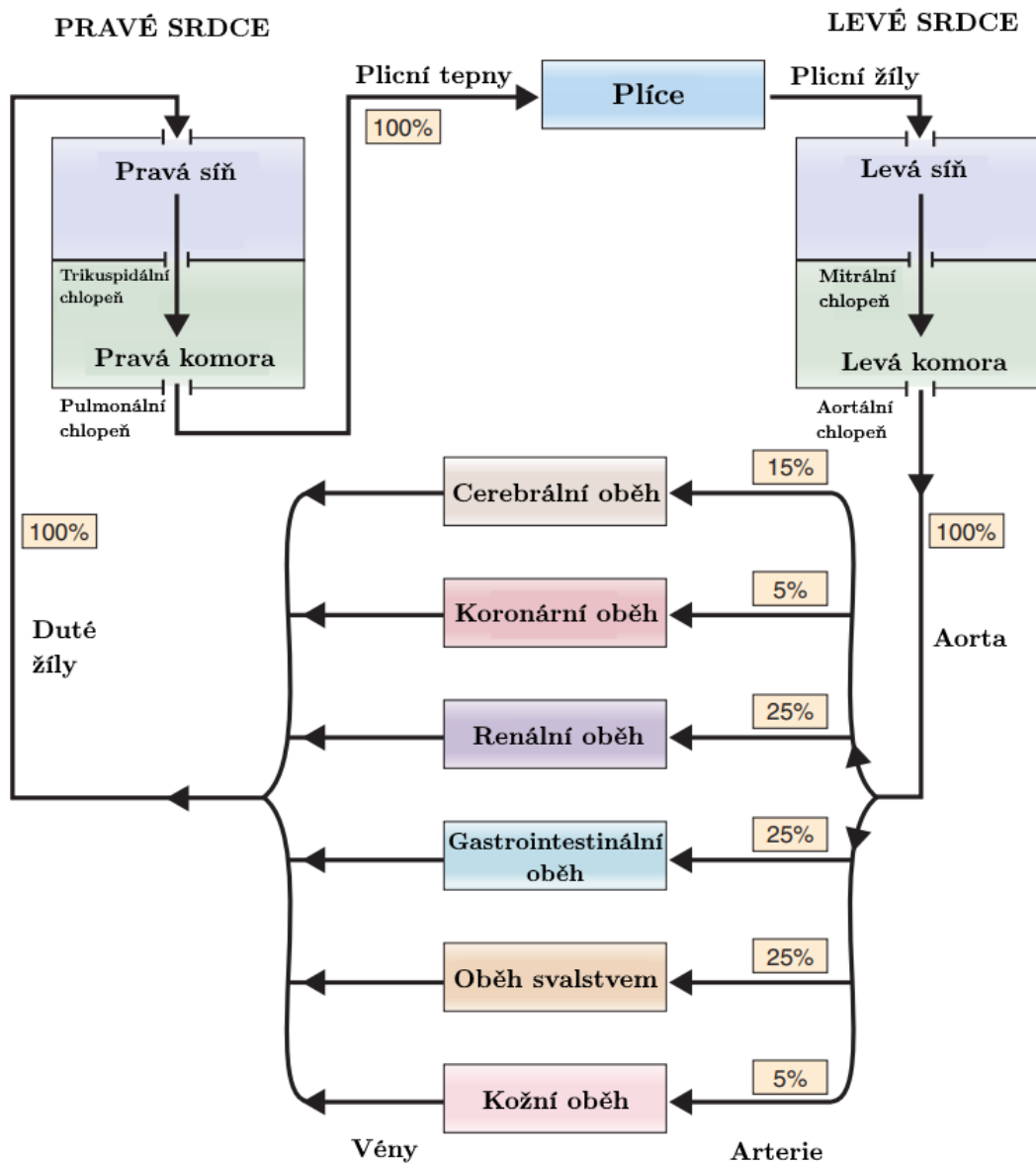
1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je popsat mechanismus proudění krve, především pak zdůraznit konkrétní procesy, ke kterým dochází na úrovni kapilárního řečiště. Pokusí se popsat význam, který pro proudění kapilárami představují krevní buňky a s nimi spjatý mechanismus interakce tekutiny s poddajným tělesem. Zjednodušený 2D model právě interakce tekutiny s poddajným prostředím pak bude jako ilustrativní úvod to této problematiky navrhnout a implementován. Dále se práce bude na zjednodušeném osově symetrickém modelu zabývat vlivem postupného vlnění stěny cévy na proudění. Nakonec bude navrhnout velmi zjednodušený model transportu buňky kapilárou.

Zkoumání proudění kapilárami má význam například pro popis procesů, ke kterým dochází při perfuzi tkání, zejména pak jaterní tkáně. Kvůli metabolickým procesům a okysličování je důležité odlišit tok krevní plazmy a červených krvinek. V dlouhodobějším výhledu by se daly modely proudění kapilárami využít při osidlování tkáňového skeletu živými buňkami a uplatnit se tak ve tkáňovém inženýrství. V době vytvoření této práce neexistuje obecné řešení transportu krevních buněk kapilárami. Složitost této problematiky vyplývá především z vlastností buněk. Jejich popis je kvůli komplexitě a dynamice systému, jakým je živá hmota, nesmírně složitou úlohou, ta ovšem spíše než pod mechaniku spadá do oboru molekulární biologie. Celkově vzato si tato práce neklade ambici vytvořit dokonalý model buněčného transportu, ale spíše na redukováných modelech ilustrovat některé základní principy a mechanismy.

2 Kardiovaskulární systém

Účelem první kapitoly této práce je shrnout obecné informace týkající se kardiovaskulárního systému, posléze se konkrétněji zaměřit na kapilární řečiště a krev. To vše s důrazem na fyzikální vlastnosti a případně jejich významem pro modelování.



Obr. 1: Schéma oběhového systému, šipky značí směr toku krve a procenta reprezentují částí objemu proudící krve, ty se mění podle potřebné funkce[1]

Základním účelem oběhového systému je transport kyslíku z plic a živin z trávicího ústrojí prostřednictvím krve do tkání, ze kterých pak naopak odvádí oxid uhličitý a odpadní metabolity. Zároveň rozvod krve plní přenosem tepla funkci termoregulační, přenosem hormonů funkci regulační, dále zajišťuje funkčnost imunitního systému a celkově umožňuje celou řadu dalších procesů nutných pro existenci stálého vnitřního prostředí[2]. Co se týče jeho stavby, je kardiovaskulární systém tvořen srdcem a cévami, které se dále dělí podle funkce na arterie, arterioly, kapiláry, venuly a vény.

2.1 Srdce

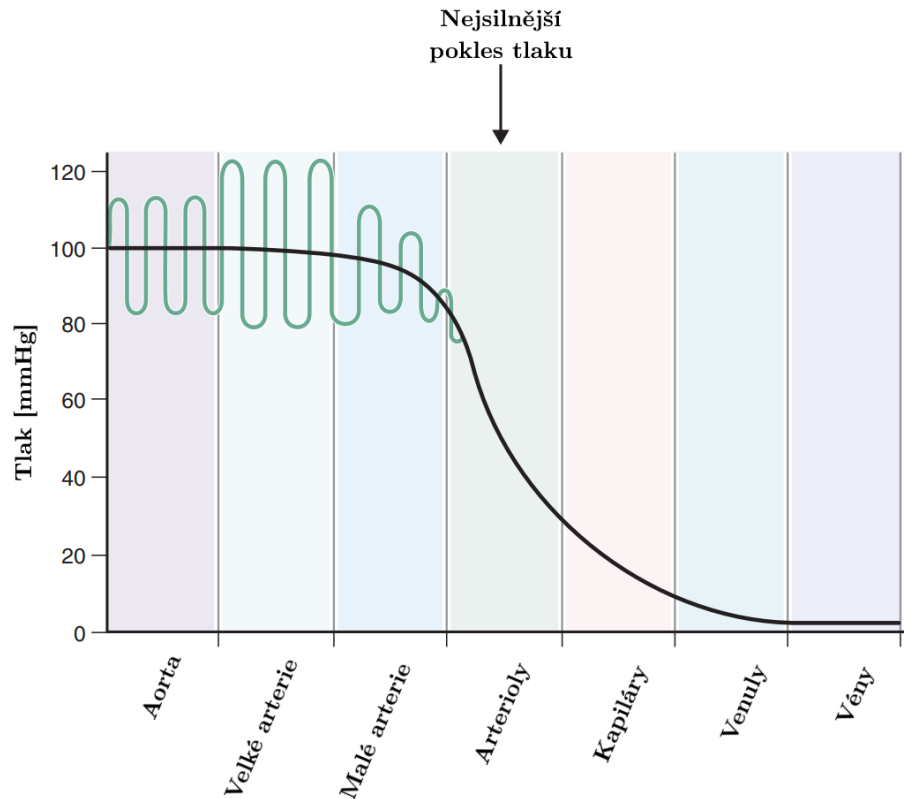
Stavebními materiály srdeční stěny jsou speciální typ svaloviny zvaný myokard, výstelka dutin endokard a zevní vrstvu tvořící výstelka epikard, která je pak také součástí obalu srdce zvaného perikard. Skládá se ze čtyř dutin: levé komory a síně a pravé komory a síně. Srdce je ve své podstatě čerpadlo, pracující střídáním fází kontrakce (systoly) a relaxace (diastoly) myokardu.[3] Správný směr proudění krve zajišťují srdeční chlopně, fungující jako jednosměrné ventily, z čehož vyplývají i jejich možné vady, například stenóza neboli zúžení, kdy se chlopeň dostatečně neotevřívá a dochází tak ke zhoršenému průtoku, nebo insuficience (nedomykavost), kdy se chlopeň nedokonale zavírá a umožňuje zpětný tok krve (regurgitaci). Srdeční cyklus tedy budí proudění v celém krevním řečišti a je provázaný s jeho fyzikálními vlastnostmi jako tlakem nebo rychlostí proudění.

Při stahu srdce dosahuje tlak krve v levé komoře, a tedy vzhledem k otevření chlopně i v tepnách systémového oběhu, nejvyšších hodnot (jedná se o tzv. systolický tlak), za referenční je udávána hodnota 120 mmHg neboli s odchylkou v řádu jednotek 16 kPa . Nejnižší hodnota v průběhu srdečního cyklu v těchto tepnách (tzv. diastolický tlak) pak činí okolo 80 mmHg neboli 10.67 kPa . Jak lze mimo jiné pozorovat z obr. 2, tlak v aortě pulsuje s menší amplitudou, než tlak v navazujících arteriích. To je způsobeno rychlostí šíření tlakové vlny, která je větší, než je rychlost proudění a rovněž odrazem těchto vln. Proudění to však nebrání, jelikož hodnota gradientu efektivního tlaku je vlivem nižšího diastolického tlaku stále záporná[1].

2.2 Cévy

Cévy se, jak již bylo zmíněno, dělí na arterie a arterioly, odvádějící krev směrem od srdce, venuly a vény, přivádějící krev do srdce, a kapiláry, ve kterých dochází k látkové výměně mezi krví a tkáněmi. Přibližné vnitřní průměry jsou u arterií $5 - 25 \text{ mm}$, u arterioli mezi $10 - 50 \mu\text{m}$, u kapilár $5 - 10 \mu\text{m}$, u venuli $10 - 20 \mu\text{m}$ a u vén $5 - 30 \text{ mm}$, viz tabulka 1. Cévní stěny jsou, s výjimkou stěn kapilár, tvořeny třemi vrstvami. První vrstva tunica intima obsahuje endotel, to jest jednu vrstvu plochých epitelových buněk, jehož uspořádání se liší podle potřebné propustnosti. Tvoří nesmáčivý povrch vnitřní stěny cévy, rovněž aktivně zabraňuje tvoření trombů (tedy zabraňuje srážení krve). Střední tunica media je složena primárně z hladké svaloviny umožňující kontrakci. Ta je označována jako vazokonstrikce a je spolu s vazodilatací aktivním mechanismem pro regulaci lumenu (vnitřní části) cév. Vnější tunica externa se skládá z vazivové vrstvy vláken bílkovin elastinu a kolagenu a elastické membrány. Má primárně vliv na elastické vlastnosti cév, rovněž jí procházejí cévy a nervy potřebné pro střední vrstvu[3]. Kapiláry pak mají stěnu tvořenou pouze endotelem a bazální membránou. V některých vénách se pak podobně jako v srdci nacházejí chlopně, které v kombinaci se zúžením vén činností kosterního svalstva napomáhají ke správnému

proudění (tento jev se nazývá svalová pumpa).



Obr. 2: Okamžitý (zeleně) a efektivní (černě) krevní tlak podle části krevního řečiště[1]

typ cévy	průměr[cm]	obsah průřezů [cm ²]	síla stěny [cm]	rychlost[cm/s]	Re
aorta	2.5	4.5	0.2	48	3400
arterie	0.4	20	0.1	45	500
arterioly	0.005	$5.7 \cdot 10^7$	0.002	5	0.7
kapiláry	0.0008	$1.6 \cdot 10^{10}$	0.0001	0.1	0.002
venuly	0.002	$1.3 \cdot 10^9$	0.0002	0.2	0.01
věny	0.5	200	0.05	10	140

Tabulka 1: Reprezentativní hodnoty průměru, celkového obsahu průřezu (součet lumenu všech cév jednoho typu), síly stěny, rychlostí proudění a Reynoldsova čísla [4]

Podle funkce se pak cévy dále dělí do šesti kategorií:

Pružník, neboli velké a středně velké elastické tepny zajišťující rychlý transport krve. Tunica media pružníku obsahuje relativně malý počet buněk hladké svaloviny a naopak

více elastických vláken, jež umožňují regulovat nárazový přítok krve ze srdce na kontinuální proudění. Zjevným příkladem je aorta.

Rezistenční cévy řídí tok krve do orgánů a tkání, buď v podobě tepen a tepének (neboli prekapilárních rezistenčních cév) s malým lumenem a silnou stěnou s velkým podílem buněk hladké svaloviny, díky níž lze lumen, a tedy i tok krve regulovat, nebo v podobě venul (postkapilárních rezistenčních cév), které regulují tlak za kapilárami a tedy spolu s prekapilárními rezistenčními cévami určují rozdíly tlaku v nich.

Prekapilární sfinktery jsou koncové části prekapilárních tepének, které řídí otevřenost, respektive uzavřenost kapilár.

Kapiláry, ve kterých dochází k látkové výměně a jejichž lumen není nijak aktivně řízen, pouze se pasivně přizpůsobuje fyzikálním vlastnostem okolí.

Arteriovenózní zkraty zajišťují přímé spojení mezi tepenným a žilným řečištěm mimo kapiláry, jde tedy o další regulační mechanismus prokrvení tkáně. Nenacházejí se ve všech typech tkání (typicky se vyskytují například v kůži).

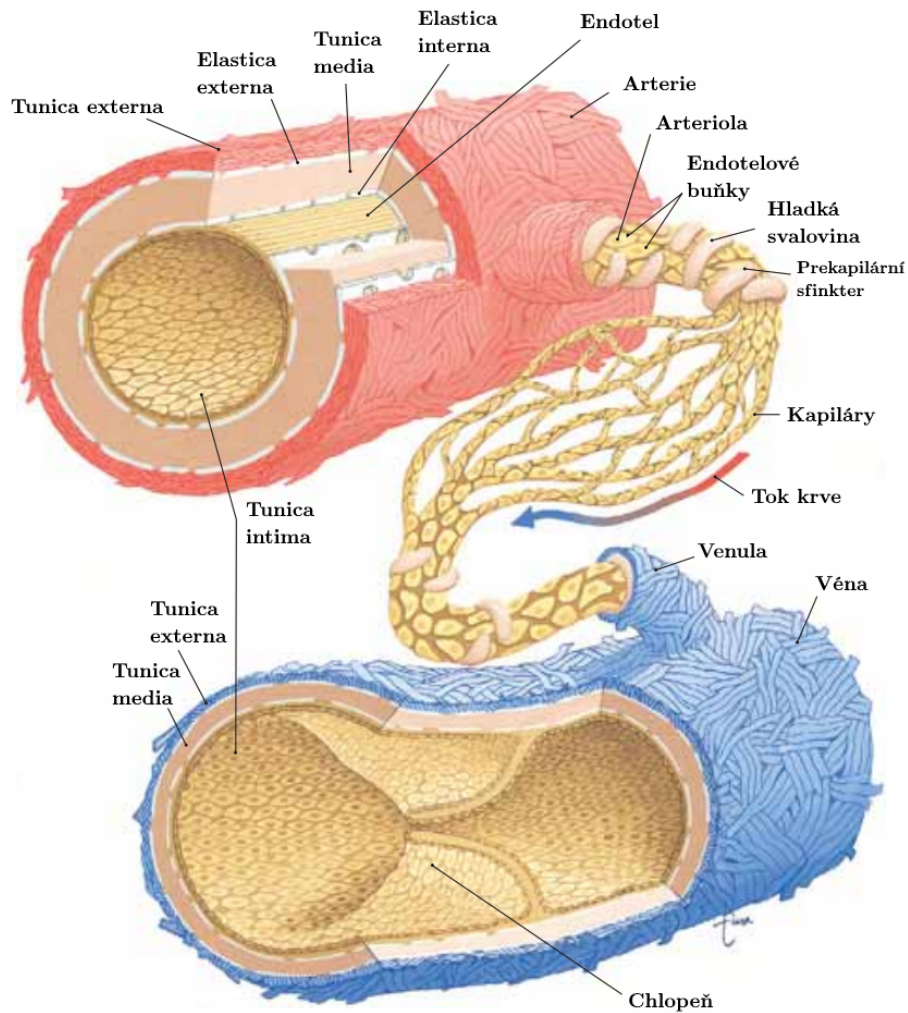
Kapacitní cévy, z většiny žíly se slabou vrstvou tunica media a tedy i malým množstvím svalových buněk, mají funkci jakési nádrže, která vzhledem k proměnlivému proudění krve celým uzavřeným systémem zajišťuje stabilní návrat do srdce[3].

Tato funkční klasifikace pak je v souladu s tím, jak je v celém systému rozdělen objem proudící krve a také jaké mají jeho jednotlivé části vliv na celkový odpor (k jeho významu se dostaneme záhy). Systémový oběh tvoří 84 % kapacity, plicní oběh 9 % a srdce 7 %. V systémovém oběhu se pak 75 % krve nachází v kapacitních cévách, 14 % v cévách pružníku, 8 % v kapilárách a 3 % v rezistenčních cévách. Na odporu proudění se ze 47 % podílejí rezistenční cévy, z 27 % kapiláry, z 19 % cévy pružníku a ze 7 % cévy kapacitní [3].

2.3 Krev

Pro popis proudění krve je samozřejmě nezbytně nutné popsat také její vlastnost. Ty jsou silně spjaté s jejím složením, viz obr. 4. Krev je nehomogenní tekutina, kterou tvoří z přibližně 40 % krevní buňky.

Převážně jde o červené krvinky (erythrocyty), buňky zajišťující zejména transport kyslíku. Ty jsou mimo jiné tvořeny cytoskeletem, bílkovinnou strukturou, která umožňuje například regulaci jejich tvaru[6]. Konkrétně se cytoskelet skládá ze tří základních typů biopolymerů: aktinových vláken, mikrotubulů a intermediárních filament [7]. Z hlediska mechanických vlastností je proto nelze chápat ani jako pouhá elastická tělesa s výchozím tvarem, popis těchto vlastností je kvůli tomu velmi složitý a především komplexní problém neoddelitelně spjatý s fungováním cytoskeletu, které samo není zcela popsáno [8] (co se komplexnosti týče je navíc zajímavé, že ani samotná změna tvaru nemá vliv pouze na mechanické vlastnosti, ale i na vnitřní procesy v buňce[9] nebo na výměnu kyslíku[10]). Pro představu jsou často uvažovány jako kapsle obsahující intracelulární tekutinu (viz např. [11]). Za výchozí stav červených krvinek je v literatuře označován tvar bikonkávní, to jest tvar z obou stran dovnitř prohnutého disku. Experimentálně bylo zjištěno, že jejich zavedená "vnitřní viskozita" (na kterou má ovšem vliv jak vnitřní prostředí, tak membrána buňky) klesá s rostoucím smykovým napětím[12]. Průměr disku se pohybuje okolo $7,5 - 8,7 \mu m$, výška přibližně mezi $1,7 - 2,2 \mu m$ [13]. Pomocí AFM byla určena hodnota Youngova modulu $E = 26 \pm 7 kPa$ [14], ale i $E = 0,1 - 0,2 kPa$ [15], široký rozptyl výsledků je způsoben rozdílnou přípravou vzorků i různými metodami analýzy[16].

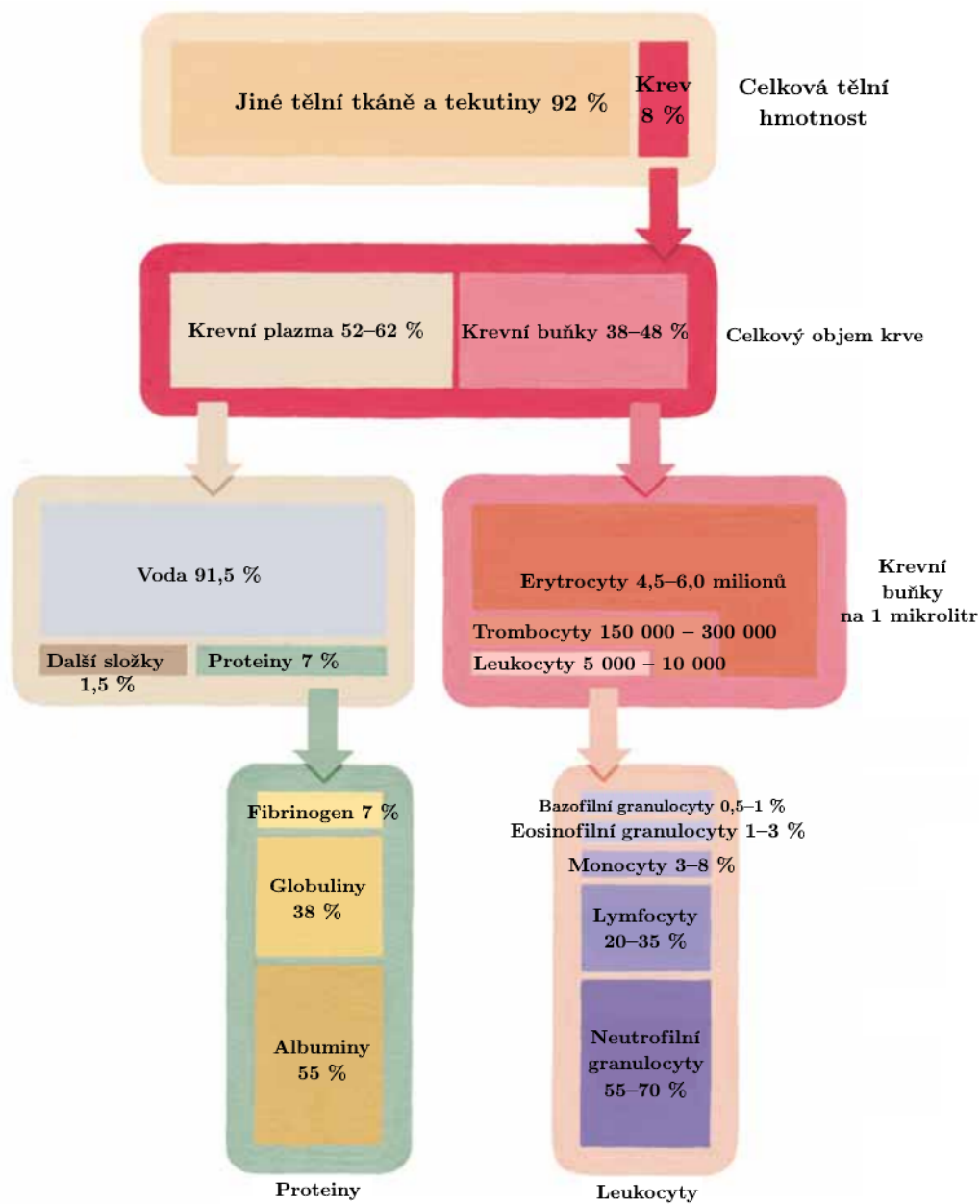


Obr. 3: *Struktura cév*[5]

Červené krvinky nicméně nejsou jedinými krevními buňkami, dalšími jsou trombocyty, jejichž průměr je $1,5 - 4,5 \mu m$, a bílé krvinky (leukocyty), které se dále dělí a nelze je tedy jednotně popsat, jejich průměry jsou přibližně v rozpětí od $6 \mu m$ u lymfocytů po $20 \mu m$ u monocytů[17]. Interakce [18] různých typů krevních buněk pak opět zvyšuje složitost modelování.

Tekutou složku krve, takzvanou krevní plazmu, tvoří převážně voda, dále také plazmatické bílkoviny a další i anorganické složky. Při modelování je zpravidla uvažována jako newtonská tekutina, ergo tekutina s neměnnou dynamickou viskozitou. Její hodnota se pohybuje mezi $1.10 mPa.s$ a $1.30 mPa.s$ [19]. Celková viskozita krve, pokud bychom ji uvažovali jako homogenní tekutinu, se ovšem kvůli krevním buňkám pohybuje v rozmezí od hodnot 2 – 5krát vyšších než je viskozita vody (při vysokých rychlostech proudění) po hodnoty tisícinásobné

u rychlostí nízkých a vysokého obsahu buněk[12].



Obr. 4: Složení krve a poměr krve k ostatním tkáním (liší se podle pohlaví, hmotnosti, zdravotního stavu apod.)[5]

3 Hemodynamika

Hemodynamika je název pro hydrodynamiku krevního oběhu, tedy pro disciplínu zabývající se fyzikálním popisem proudění krve. V této kapitole jsou ukázány některé její základní principy a přístupy.

Hlavními typy modelů proudění krve jsou modely makrocirkulace, tedy ty zabývající se oběhem skrze kardiovaskulární systém jako celkem, modely proudění jednotlivými arteriemi, jejichž význam spočívá například typicky v popisu toku před a po chirurgickém přemostění špatně průchozí cévy (takzvaný bypass)[20], a modely mikrocirkulace, tedy takové, které se zabývají ději v kapilárním řečišti.

3.1 Elektro-hydraulická analogie

Pro popis makrocirkulace se v literatuře [1][2][3] zpravidla objevuje analogický model využívající teorii pro elektrické obvody, konkrétně Ohmův zákon

$$I = \frac{U}{R}$$

nahrazuje vztahem

$$Q = \frac{\Delta p}{R}, \quad (1)$$

kde Q je objemový průtok krve, Δp je tlakový gradient a R je zavedený odpor cévního řečiště. Použitím Hagen-Poiseuillova zákona

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8L\mu},$$

kde r je poloměr trubice, L její délka a μ dynamická viskozita tekutiny, pak lze odpor vyjádřit vztahem

$$R = \frac{8\mu L}{\pi r^4}.$$

Vzhledem k tomu, že jednotlivé části systémového oběhu jsou z většiny řazeny paralelně (viz obr. 1), lze v kontextu analogie elektrického obvodu vypočítat převrácenou hodnotu celkového odporu systému jako součet převrácených hodnot odporů jednotlivých částí krevního oběhu (zde značených R_i) [1]

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Krev zde může být uvažována jako newtonská tekutina, případně jako tekutina s viskozitou konstantní pro konkrétní nahlížený typ cév [21]. Hlavní výhodou tohoto modelu je, že šíření elektrických vln analogickým harmonicky buzeným obvodem odpovídá šíření vln krevním řečištěm [22]. Konečně pokud bychom v (1) nahradili tlakový gradient pouze jeho časově proměnnou složkou (jejímž smyslem by byla stahy srdce buzená oscilující složka tlaku) a v souladu s tím Q nahradili relativním prouděním vůči střednímu toku, pak odpor cév splňuje definici pro akustickou impedanci.

3.2 Hydrodynamické modely

Při modelování proudění v menším měřítku se již využívá poznatků hydrodynamiky. Bilanci sil působících na kontinuum popisuje Cauchyho rovnice dynamické rovnováhy

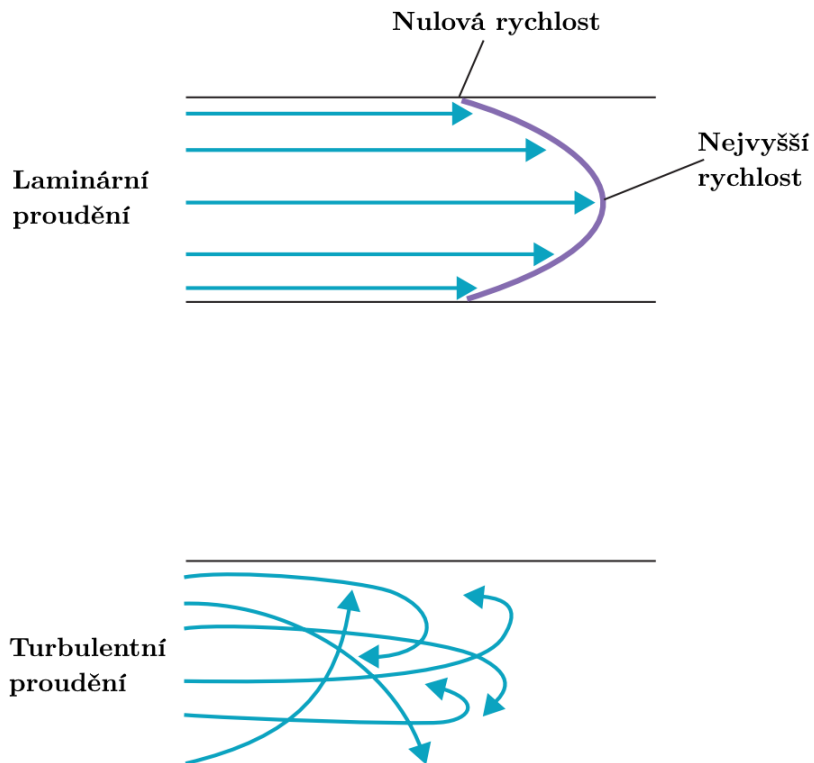
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (2)$$

kde ρ je jeho hustota, \mathbf{v} vektorové pole rychlostí a $\nabla \mathbf{v}$ tedy jeho gradient, $\bar{\sigma}$ tenzor napětí (zde figuruje jeho divergence) a \mathbf{f} je vektor objemových sil. Pro newtonskou tekutinu je to Navier-Stokesova rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

ve které pro změnu figurují gradient tlaku ∇p a kinematická viskozita tekutiny ν , která je poměrem dynamické viskozity a hustoty tekutiny

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]. \quad (4)$$



Obr. 5: Ilustrace laminárního a turbulentního proudění[1]

Pro popis proudění se používají zpravidla dva charaktery - laminární a turbulentní (viz obr. 5).

Laminární proudění je takové, při kterém se trajektorie částic tekutiny (tzv. proudnice) navzájem neprotínají, ale tvoří vrstvy, které se po sobě smýkají. Tím vzniklé smykové napětí vyjadřuje Newtonův zákon viskozity

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

kde μ je dynamická viskozita a y je směr kolmý na rychlost v .

Dvourozměrný model takového proudění v kanálu stálého průřezu má parabolický rychlostní profil, ve válcovém kanálu profil rotačního paraboloidu.

Turbulentní proudění je naopak charakteristické křížením proudnic, částice tekutiny se kromě pohybu ve směru celkového toku pohybují neuspořádaně mezi sebou podobně jako je tomu například u pohybu molekul plynu[23].

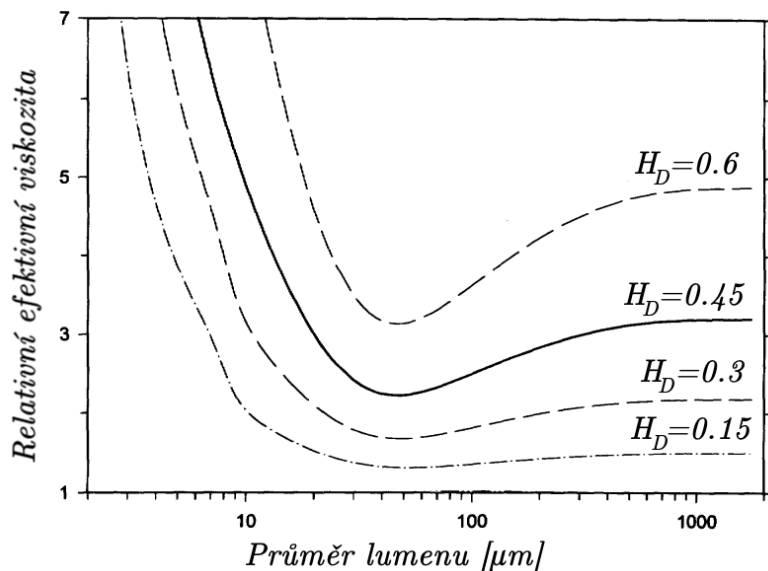
Pro určení, kdy je proudění laminární, a kdy naopak turbulentní, je definováno bezrozměrné Reynoldsovo číslo:

$$Re = \frac{v d}{\nu}, \quad (5)$$

kde v je střední rychlost proudění a d charakteristický rozměr (například u kruhového průřezu je to průměr). Pro danou tekutinu a prostředí pak lze přibližně určit kritickou hodnotu Reynoldsova čísla, tj. nejvyšší při které je proudění ještě laminární (pro vodu v kruhovém potrubí se udává kritická hodnota $Re = 2320$ [23]). Je obecně přijímáno, že ve větších cévách je při obvyklých fyziologických podmínkách proudění laminární a že k turbulentním dochází jen za patologických podmínek [21].

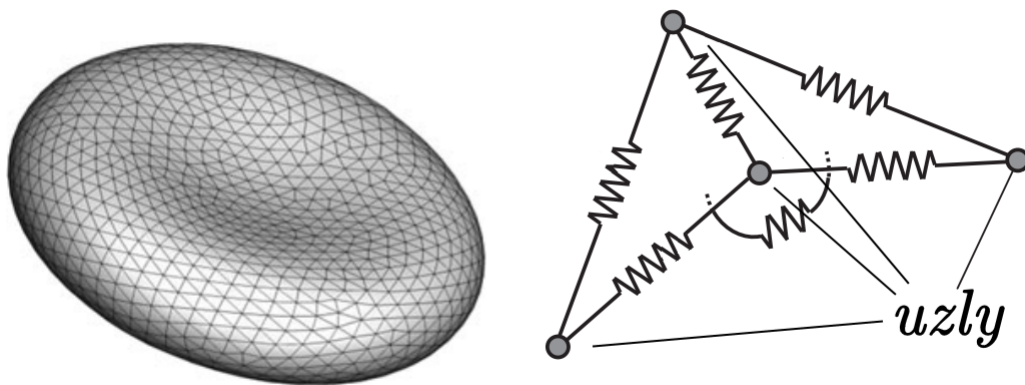
3.3 Mikrocirkulace

Při modelování proudění kapilárami se využívá poznatků z vyšších úrovních, ovšem již nelze uvažovat zjednodušení homogenní tekutiny s konstantní viskozitou [21]. Závislost viskozity na lumenu kapiláry ukazuje obr. 6, kde relativní efektivní viskozita je viskozita myšlené tekutiny, při jejímž proudění by byl zachován objemový průtok, vztažená k viskozitě krevní plazmy. Závislost je zobrazena pro různé hodnoty hematokritu H_D , což je objemový podíl erytrocytů v krvi.



Obr. 6: Závislost relativní efektivní viskozity na velikosti lumenu kapiláry pro různé hodnoty hematokritu [24]

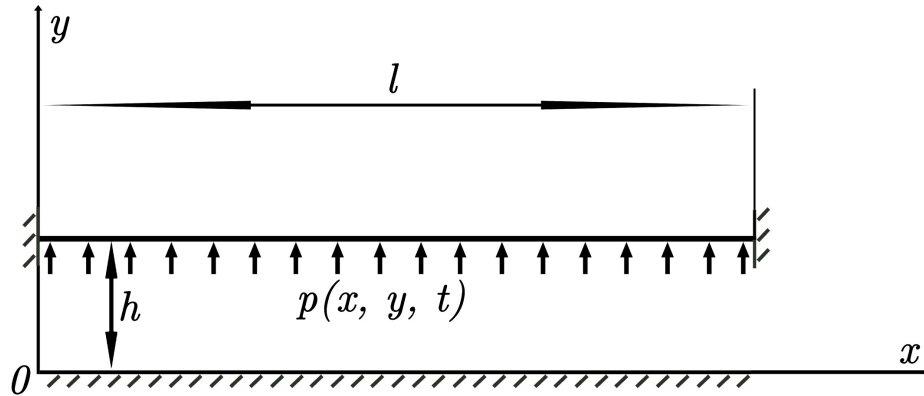
Tato závislost vyplývá z dříve zmíněných příčin, kdy průměr lumenu kapiláry může být i menší než je průměr buňky v klidovém stavu. Interakce mezi buňkou a stěnou cévy je pro efektivní viskozitu určující [25]. Chování buněk je tak pro popis proudění naprosto stěžejní, žádný všeobecný popis ovšem zatím neexistuje [26]. Zpravidla se popisují pouze červené krvinky, jelikož svým počtem v krvi silně převažují počet jiných typů buněk (viz obr. 4). Například [27], [28], [29] nebo [30] využívají pro popis membrány krevních buněk síť pružin, jak je znázorněno na obr. 7.



Obr. 7: Celkový model membrány krevní buňky s detailem na dva sousedící prvky [27]

Dalším typem jsou modely buněk jako kontinuí [31], jeden z typů je popisuje pomocí skořepin pro stěnu a tekutinou v jádru [32]. Například [26] pak modeluje stěnu buňky pomocí dvou vrstev skořepin o různých vlastnostech (kde jedna vrstva má význam lipidové dvouvrstvy a druhá cytoskeletu) ohraničující intracelulární tekutinu. Mechanickými vlastnostmi adheze krevních buněk se zabývá [33] a specificky zdůrazňuje význam molekulárních procesů na mechanické vlastnosti a vice versa (kdy buňky přetvářejí mechanické síly a deformace v biochemické signály).

4 Model proudění s interakcí



Obr. 8: Rovinný řez kanálem

V následujících kapitolách se již budeme zabývat konkrétními modely. Jak bylo ukázáno, modelování proudění kapilárami je komplexní úloha, pro kterou je zcela zásadní kontakt různých typů materiálů, respektive fází. Ať jde tedy o vzájemné působení krevních buněk a krevní plazmy, nebo obojího na cévní stěnu, popis interakce mezi tekutinou a poddajným tělesem je nevyhnutelně nutný. Pro základní vhled do této problematiky je cílem této kapitoly vytvoření redukovaného 2D modelu interakce proudící tekutiny s elastickým prostředím a jeho implementace. Jeho význam nebude spočívat v komplexním řešení konkrétního problému, ale spíše v nastínění problematiky interakce, případně může posloužit dále pro další rozšíření. Mějme kanál tvořený z jedné strany na obou koncích vetknutou elastickou deskou, z druhé strany deskou pevnou (rámem). Řekněme, že jsou desky dostatečně široké a řešení v jednom řezu tak odpovídá libovolnému jinému řezu. Prostředí uvnitř prostoru mezi nimi (dále kanálu) tvoří nestlačitelná newtonská tekutina, celý systém bude buzen oscilujícími tlaky na okrajích $p_0(t)$, $p_1(t)$. V první fázi budeme uvažovat předepsaný průhyb desky pro vytvoření výpočtového modelu proudění a až v další se budeme zabývat interakcí.

Zavedme následující značení:

x	podélná souřadnice
y	radiální souřadnice
$\mathbf{V}(x, t) = (U, V)$	výchylky elementů desky (složky ve směru x , respektive y)
$\mathbf{v}(x, y, t) = (v_x, v_y)$	rychlost proudění tekutiny
$p(x, t)$	tlak v tekutině
$p_0(t)$	hodnota tlaku na počátku kanálu
$p_1(t)$	hodnota tlaku na konci kanálu
μ	dynamická viskozita tekutiny
ν	dynamická viskozita tekutiny
ρ	hustota tekutiny
h	výška kanálu v klidu
L	délka kanálu

4.1 Matematický model proudění

Jako výchozí stav budeme uvažovat laminární proudění tekutiny s parabolickým profilem (Poiseuilleovo) popsané vztahem [34]

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y). \quad (6)$$

Proudění tekutiny popisuje Navierova-Stokesova rovnice (3), v tomto případě nebudeme uvažovat působení objemových sil (tíhu zanedbáme)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla P = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (7)$$

kde P je poměr tlaku ku hustotě, tedy $P(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}$.

Jak bylo již zmíněno, tekutinu uvažujeme nestlačitelnou a jelikož zároveň v celé oblasti kanálu není žádný zdroj ani odtok, pro zachování hmotnosti platí

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (8)$$

4.2 Další redukce modelu

Rychlost toku kapaliny ve směru y aproximujeme lineární funkcí mezi nulovou rychlostí na jedné straně (u rámu) a rychlostí průhybu elastické desky na druhé,

$$v_y \triangleq \frac{\dot{V}(x, t)}{h} y. \quad (9)$$

Dále uvažujme malé perturbace, lze tedy zanedbat konvektivní člen Navierovy-Stokesovy rovnice (7) a zapsat ji ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla P = \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

respektive po složkách

$$\partial_t v_x + \partial_x P = \nu(\partial_{xx} v_x + \partial_{yy} v_x), \quad (10)$$

$$\partial_t v_y + \partial_y P = \nu(\partial_{xx} v_y + \partial_{yy} v_y). \quad (11)$$

Do rovnice (11) dosadíme vztah pro rychlost ve směru y (9), tedy celkem

$$\partial_t \left(\frac{\dot{V}(x, t)}{h} y \right) + \partial_y P = \nu \left(\partial_{xx} \left(\frac{\dot{V}(x, t)}{h} y \right) + \partial_{yy} \left(\frac{\dot{V}(x, t)}{h} y \right) \right),$$

respektive po úpravě

$$\ddot{V} \frac{y}{h} + \partial_y P = \nu \partial_{xx} \dot{V} \frac{y}{h}. \quad (12)$$

Z tohoto vztahu vyjádříme derivaci tlaku

$$\partial_y P = \nu \partial_{xx} \dot{V} \frac{y}{h} - \ddot{V} \frac{y}{h}$$

a integrací podle y , kde $P_0(x, t)$ je tlak kapaliny u rámu, tedy pro $y = 0$, získáme předpis tlaku v celém prostoru kanálu v závislosti na průhybu desky

$$P = P_0(x, t) + \nu \partial_{xx} \dot{V} \frac{y^2}{2h} - \ddot{V} \frac{y^2}{2h}. \quad (13)$$

Vztah pro rychlost ve směru y (9) dále dosadíme do rovnice kontinuity (8)

$$\partial_x v_x + \partial_y \left(\frac{\dot{V}(x, t)}{h} y \right) = 0,$$

tedy

$$\partial_x v_x = -\frac{\dot{V}}{h}. \quad (14)$$

Tím jsme získali závislost i podélné složky rychlosti tekutiny v_x (respektive její derivace podle x) na průhybu desky. Následně (14) a (13) dosadíme do (10):

$$\partial_t v_x + \partial_x \left(P_0(x, t) + \nu \partial_{xx} \dot{V} \frac{y^2}{2h} - \ddot{V} \frac{y^2}{2h} \right) = \nu \left(\partial_x \left(-\frac{\dot{V}}{h} \right) + \partial_{yy} v_x \right),$$

po úpravě

$$\partial_t v_x + \partial_x P_0(x, t) + \nu \partial_{xxx} \dot{V} \frac{y^2}{2h} - \partial_x \ddot{V} \frac{y^2}{2h} = \nu \partial_{yy} v_x - \partial_x \dot{V} \frac{\nu}{h}.$$

Jak bylo zmíněno v úvodu, budeme nejdříve uvažovat předepsaný průhyb desky, proto převedeme všechny známé funkce (různé derivace V) na pravou stranu a označíme je jako f

$$\partial_t v_x - \nu \partial_{yy} v_x + \partial_x P_0(x, t) = f(x, y, t), \quad (15)$$

kde

$$f(x, y, t) = \partial_x \ddot{V} \frac{y^2}{2h} - \nu \partial_{xxx} \dot{V} \frac{y^2}{2h} - \partial_x \dot{V} \frac{\nu}{h}. \quad (16)$$

Počáteční podmínka rychlosti kapaliny v_x je dána (6), okrajové podmínky jsou

$$v_x(x, t, y = 0) = 0,$$

$$v_x(x, t, y = h) = \dot{U}.$$

Aby rychlost proudění tekutiny v diferenciální rovnici (15) měla nulové okrajové podmínky (to bude žádoucí pro další řešení), rozložíme ji na složku určenou rychlostí stěny ve směru osy x a relativní rychlost w_x :

$$v_x(x, t, y) = w_x(x, y, t) + \dot{U}(x, t) \frac{y}{h}. \quad (17)$$

Tomu adekvátně upravíme soustavu rovnic (15) a (14)

$$\partial_t w_x - \nu \partial_{yy} w_x + \partial_x P_0(x, t) = F(x, y, t), \quad (18)$$

$$\partial_x w_x = g(x, y, t), \quad (19)$$

kde do funkcí pravých stran přibude vliv pohybu stěny ve směru x

$$F(x, y, t) = \partial_x \ddot{V} \frac{y^2}{2h} - \nu \partial_{xxx} \dot{V} \frac{y^2}{2h} - \partial_x \dot{V} \frac{\nu}{h} - \ddot{U} \frac{y}{h},$$

$$g(x, y, t) = -\frac{\dot{V}}{h} - \partial_x \dot{U} \frac{y}{h}.$$

a jejíž okrajové a počáteční podmínky jsou

$$w_x(x, t, y = 0) = 0,$$

$$w_x(x, t, y = h) = 0,$$

$$w_x(x, t = 0, y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h - y), \quad (20)$$

$$P_0(x = 0, t) = \frac{p_0(t)}{\rho},$$

$$P_0(x = L, t) = \frac{p_1(t)}{\rho}.$$

Nyní se pokusíme ze soustavy vyjádřit tlak. Rovnici (18) derivujeme podle x

$$\partial_t \partial_x w_x - \nu \partial_{yy} \partial_x w_x + \partial_{xx} P_0(x, t) = \partial_x F(x, y, t),$$

dosadíme z (19)

$$\partial_t g(x, y, t) - \nu \partial_{yy} g(x, y, t) + \partial_{xx} P_0(x, t) = \partial_x F(x, y, t).$$

Po další úpravě získáme předpis pro druhou derivaci tlaku podle x

$$\partial_{xx} P_0(x, t) = \partial_x F(x, y, t) - \partial_t g(x, y, t), \quad (21)$$

to proto, že

$$\partial_{yy} g(x, y, t) = \partial_{yy} \left(-\frac{\dot{V}(x, t)}{h} - \partial_x \dot{U}(x, t) \frac{y}{h} \right) = 0.$$

Jelikož g a F jsou mimo jiné funkcemi y , integrujeme dále (21) přes y

$$h\partial_{xx}P_0(x, t) = \int_0^h \partial_x F(x, y, t) dy - \int_0^h \partial_t g(x, y, t) dy,$$

$$\partial_{xx}P_0(x, t) = \frac{1}{h} \left(\int_0^h \partial_x F(x, y, t) dy - \int_0^h \partial_t g(x, y, t) dy \right).$$

Jelikož $F(x, y, t)$ i $g(x, y, t)$ jsou na y závislé pouze skrze lineární a kvadratické funkce, lze snadno provést integraci a druhou derivaci tlaku tak vyjádřit

$$\partial_{xx}P_0(x, t) = \partial_{xx}\ddot{V}\frac{h}{6} - \partial_{xxxx}\dot{V}\frac{\nu h}{6} - \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu}{h} + \ddot{V}\frac{1}{h}. \quad (22)$$

4.3 Proudění při známém průhybu

Jak již bylo zmíněno, nyní uvažujme desku prohýbající se v průřezu podle předepsané funkce, v následujících ilustracích byla konkrétně použita

$$V(x, t) = \frac{h}{40} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \sin(\omega t), \quad (23)$$

kde ω je úhlová frekvence. Tato funkce byla zvolena tak, aby se při maximálním průhybu vychýlila deska o jednu dvacetinu výšky kanálu a také aby byly zachovány okrajové podmínky dané vetknutím desky na obou koncích.

V tomto případě pak, vzhledem ke známým okrajovým podmínkám (20), lze vypočítat rovnici (22). P_0 je tedy dále známé a k řešení tak zbývá pouze rovnice (18) pro neznámou w_x . Jedná se o parciální diferenciální rovnici parabolického typu (tedy obsahující druhou prostorovou a první časovou derivaci), kterou budeme řešit pomocí Fourierovy metody. Ta je blíže popsána v [35].

Funkci rychlosti $w_x(x, y, t)$ hledějme v separovaném tvaru

$$w_x = Y(y)T(x, t). \quad (24)$$

Do rovnice (18) tedy dosadíme tento předpoklad

$$(\dot{Y}T) - \nu(YT)'' = F(x, y, t) - \partial_x P_0(x, t)$$

a upravíme na

$$Y''T - \frac{1}{\nu}\dot{T}Y = \Phi(x, y, t), \quad (25)$$

kde

$$\Phi(x, y, t) = \frac{1}{\nu} (\partial_x P_0(x, t) - F(x, y, t)).$$

Pro určení časově nezávislé části řešení $Y(y)$ řešme upravenou a homogenizovanou rovnici

$$\frac{Y''}{Y} - \frac{1}{\nu}\frac{\dot{T}}{T} = 0.$$

Zlomek $\frac{Y''}{Y}$ je konstantní v čase: $\frac{Y''}{Y} = -\lambda$, vyjádření $Y(y)$, respektive dále jednotlivých složek Fourierovy řady, je díky dále úlohou hledání vlastních čísel a vlastních funkcí:

$$y_k = e^{\pm\sqrt{-\lambda_k}y}, \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2, k \in N$$

$$y_k = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{h}y\right) + B_k \cos\left(\frac{k\pi}{h}y\right),$$

vzhledem k nulovým okrajovým podmínkám jsou vlastní funkce a jim příslušná vlastní čísla

$$\begin{aligned} y_k &= A_k \sin\left(\frac{k\pi}{h}y\right), \\ \lambda_k &= \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2, k \in N. \end{aligned} \tag{26}$$

Řešení původní rovnice (24) tedy zapíšeme ve tvaru

$$w_x = \sum_k A_k T(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{h}y\right) = \sum_k T_k \sin\left(\frac{k\pi}{h}y\right) = \sum_k T_k Y_k. \tag{27}$$

Část řešení závislou na čase $T(x, t)$ již hledáme pro nehomogenní rovnici (25). Rovnici vynásobíme funkcí $a_j(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{h}\right)$, $j \in N$, v souladu s předchozím zápisem tedy $a_j(y) = Y_j$, a integrujeme přes y na intervalu $[0; h]$:

$$\sum_k T_k \int_0^h Y_k'' Y_j dy - \frac{1}{\nu} \sum_k \dot{T}_k \int_0^h Y_k Y_j dy = \int_0^h \Phi(x, y, t) Y_j dy. \tag{28}$$

Jelikož

$$\int_0^h \sin\frac{k\pi y}{h} \sin\frac{j\pi y}{h} dy = \delta_{kj} \frac{h}{2},$$

je možné rovnici (28) sečtením přes všechna $k \in N$ upravit na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \gamma_j \dot{T}_j(x, t) + T_j(x, t) &= b_j(x, t) \\ T_j(x, 0) &= \frac{2}{h} \bar{w}_j(x) \end{aligned} \tag{29}$$

s konstantami

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{h^2}{(j\pi)^2 \nu} \\ b_j &= -\frac{2h}{(\pi j)^2} \int_0^h \sin\frac{j\pi y}{h} \Phi(x, y, t) dy \\ \bar{w}_j(x) &= \int_0^h \sin\frac{j\pi y}{h} w_x(x, y, 0) dy. \end{aligned}$$

Řešením rovnice (47) je součet homogenního

$$T_j^h(x, t) = c_j(x) e^{-\frac{1}{\gamma_j} t}$$

a partikulárního

$$T_j^p(x, t) = \frac{1}{\gamma_j} \int_0^t b_j(x, \tau) e^{\frac{1}{\gamma_j}(\tau-t)} d\tau$$

řešení, tedy včetně zahrnutí počáteční podmínky

$$T_j(x, t) = \frac{2}{h} \bar{w}_j(x) e^{-\frac{1}{\gamma_j}t} + \frac{1}{\gamma_j} \int_0^t b_j(x, \tau) e^{\frac{1}{\gamma_j}(\tau-t)} d\tau.$$

Celkové řešení rovnice (25) je tedy podle (27)

$$w_x(x, y, t) = \sum_j \left[\left(\frac{2}{h} \bar{w}_j(x) e^{-\frac{1}{\gamma_j}t} + \frac{1}{\gamma_j} \int_0^t b_j(x, \tau) e^{\frac{1}{\gamma_j}(\tau-t)} d\tau \right) \sin \left(\frac{j\pi}{h} y \right) \right]. \quad (30)$$

4.4 Výsledky pro předepsaný průhyb

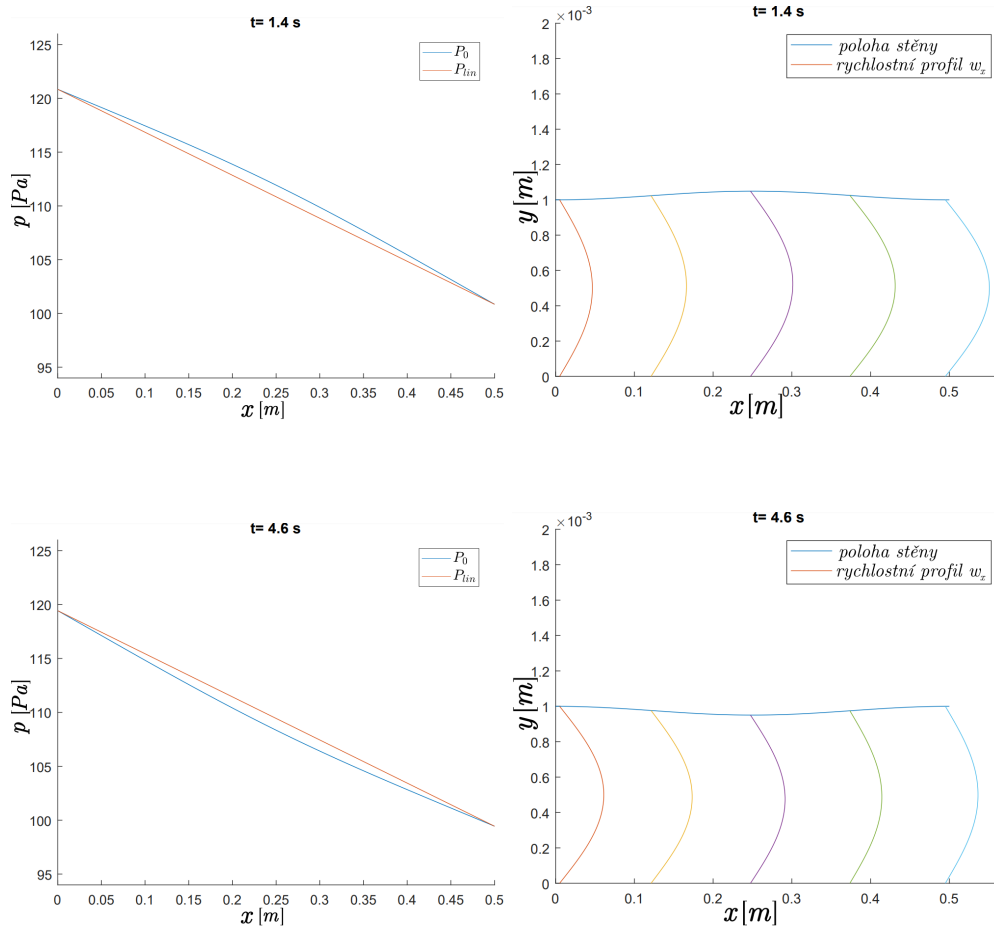
Pro ilustraci byly zvoleny následující parametry:

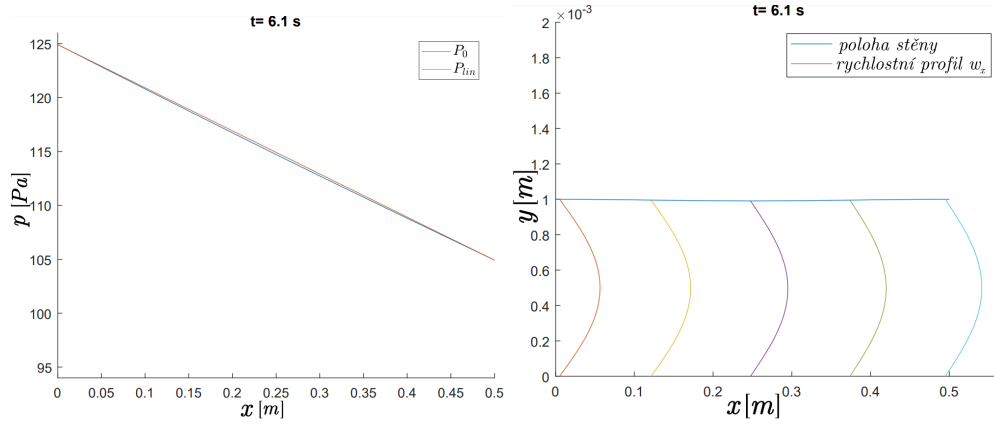
parametr	značka	hodnota, nebo vyjádření
délka kanálu	L	$0.5[m]$
výška kanálu	h	$0.001[m]$
dynamická viskozita	μ	$0.00102[Pa \cdot s]$
hustota tekutiny	ρ	$10^3 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$
tlak na počátku kanálu	$p(x=0, t)$	$p_0 + \tilde{p}_0 e^{i\omega t} [Pa]$
tlak na konci kanálu	$p(x=l, t)$	$p_1 + \tilde{p}_1 e^{i\omega t} [Pa]$
konstantní část p_0	p_0	$120[Pa]$
konstantní část p_1	p_1	$100[Pa]$
amplituda oscilující části tlaku	$\tilde{p}_0 = \tilde{p}_1$	$\frac{(p_0 - p_1)}{4} e^{i\omega t} [Pa]$
úhlová frekvence	ω	$1[s^{-1}]$

Tabulka 2: *Parametry pro model s předepsaným průhybem stěny*

Tyto parametry byly zvoleny pro jasnou viditelnost výsledných jevů, a tedy snadnější posouzení vlastností a případných nedostatků modelu. Ze stejného důvodu jsou rychlostní profily oproti souřadnici x desetinásobné. Na obr. 9 vidíme, jak na průhyb stěny reaguje tlak a s tím i rychlost tekutiny. Zvýšená rychlost na začátku kanálu při zúžení kanálu sice dává smysl vzhledem k tomu, že v tomto prostoru strměji klesá tlak, nicméně se zdá kontraintuitivní vzhledem k zákonu zachování objemu (pamatujeme, že uvažujeme nestlačitelnou tekutinu). Tento jev se bohužel nepodařilo odstranit a je s největší pravděpodobností zapříčiněn tím, že při výpočtu rovnice (18) Fourierovou metodou při hledání vlastních funkcí časově nezávislé části Y není zohledněna proměnnost okrajových podmínek, viz (46), h by se zde totiž v čase mělo s průhybem desky měnit. Tomu metoda není uzpůsobena, pokud bychom okrajové podmínky pro vlastní funkce uvažovali závislé na čase (vyjádřili je v $y=0$ a $y=h+V(x, t)$), dostali bychom se do přímého rozporu s původním předpokladem této metody, kdy Y je nezávislé na čase a nebylo by v první řadě možné takto vlastní funkce hledat. Nalezení řešení

rovnice (18) zahrnující proměnnost okrajových podmínek je tak jedním z možných dalších rozšíření modelu.





Obr. 9: Rozložení tlaku u stěny a tlaku bez průhybu desky a rychlostní profily v kanálu v různých časech, případ s předepsaným průhybem

4.5 Interakce proudění s poddajnou deskou

V další části již uvažujeme průhyb desky vyvolaný pouze samotným tlakem tekutiny v kanálu. Pro popis chování desky využijeme teorii známou pro ohyb nosníků, uvažujeme tedy desku jako jakýsi nosník jednotkové šířky (aby dal smysl význam tlaku jako spojitého zatížení a kvadratický moment I). Bude tedy platit rovnice dynamické rovnováhy, kam jsme dosadili výraz pro tlak (13)

$$EI\partial_{xxxx}V + m\ddot{V} - \left(P_0(x, t) + \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu h}{2} - \ddot{V}\frac{h}{2} \right) \rho = 0, \quad (31)$$

případně pak pro směr x

$$EA\partial_{xx}U - m\ddot{U} = 0, \quad (32)$$

nicméně v tomto směru nebudeme uvažovat působení žádných vnějších sil (zanedbáme vliv tlaku v tomto směru působící při průhybu) a necháme ho tedy bez povšimnutí. Význam m je v tomto případě měrná hmotnost na délku.

Neznáme-li průhyb desky, je nutné řešit systém rovnic (18), (22) a(31):

$$\begin{aligned} EI\partial_{xxxx}V + m\ddot{V} - \left(P_0(x, t) + \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu h}{2} - \ddot{V}\frac{h}{2} \right) \rho &= 0 \\ -\partial_{xx}P_0(x, t) + \partial_{xx}\ddot{V}\frac{h}{6} - \partial_{xxxx}\dot{V}\frac{\nu h}{6} - \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu}{h} + \ddot{V}\frac{1}{h} &= 0, \\ \partial_t v_x - \nu\partial_{yy}v_x + \partial_x P_0(x, t) = \partial_x \ddot{V}\frac{y^2}{2h} - \nu\partial_{xxx}\dot{V}\frac{y^2}{2h} - \partial_x \dot{V}\frac{\nu}{h}, \end{aligned} \quad (33)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
V(x=0, t) = V'(x=0, t) = V(x=L, t) = V'(x=L, t) = 0, \\
P_0(x=0, t) = \bar{P}_{00}, P_0(x=L, t) = \bar{P}_{01}, \\
v_x(x, y=0, t) = v_x(x, y=h, t) = 0, \\
v_x(x, t=0, y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y).
\end{aligned} \tag{34}$$

Nejprve budeme řešit dvě rovnice v soustavě (33), jelikož obě obsahují pouze neznámé V a P_0 . Řešit je budeme najednou pomocí metody konečných prvků (MKP). Jde tedy o takzvanou sdruženou metodu, druhým typem přístupu by byla metoda nesdružená, kdy by byl v postupných iteracích vždy nejdřív vypočten tlak v tekutině, následně jemu odpovídající průhyb, pak znovu tlak a tímto způsobem dále (více ke sdruženým metodám například v [36]). Vzhledem k tomu, že rovnice obsahují kromě prostorových derivací i ty časové, zbavíme se jich uvažováním periodických průběhů všech přítomných proměnných - budeme hledat řešení ve frekvenční oblasti. To tedy znamená:

$$\begin{aligned}
V(x, t) = \tilde{V}(x)e^{i\omega t}, \\
P_0(x, t) = \bar{P}_0(x) + \tilde{P}_0(x)e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

kde \bar{P}_0 je lineární část tlaku a \tilde{P}_0 je oscilující část, řekněme rovněž, že průhyb desky způsobuje právě tato oscilující část. První dvě rovnice (33) pak po úpravě dostávají tvar

$$\partial_{xx}\tilde{P}_0(x, t) + \left(\frac{\omega^2 h}{6} + \frac{i\omega\nu}{h}\right) \partial_{xx}\tilde{V} + \frac{\omega^2}{h}\tilde{V} + \frac{i\omega\nu h}{6}\partial_{xxxx}\tilde{V} = 0, \tag{35}$$

$$\partial_{xxxx}\tilde{V} - \frac{i\omega\nu h\rho}{2EI}\partial_{xx}\tilde{V} - \frac{\omega^2}{EI}\left(m + \frac{h\rho}{2}\right)\tilde{V} - \frac{\rho}{EI}\tilde{P}_0 = 0. \tag{36}$$

Z rovnice (36) vyjádřené $\partial_{xxxx}\tilde{V}$ dosadíme do (35)

$$\partial_{xx}\tilde{P}_0(x, t) + \frac{i\omega\nu h\rho}{6EI}\tilde{P}_0 + \left(\frac{\omega^2 h}{6} + \frac{i\omega\nu}{h} - \frac{\omega^2\nu^2 h^2\rho}{12EI}\right) \partial_{xx}\tilde{V} + \left(\frac{\omega^2}{h} + \frac{i\omega^3\nu h}{6EI}\left(m + \frac{h\rho}{2}\right)\right) \tilde{V} = 0. \tag{37}$$

Rovnice (36) a (37) jsou **silné formulace** řešených rovnic úlohy.

Slabé formulace získáme tak, že násobíme rovnici (37) testovací funkcí pro tlak $q_1(x)$ se spojitými derivacemi 1. řádu, rovnici integrujeme přes celou délku kanálu a členy obsahující druhé derivace upravíme metodou per partes:

$$\begin{aligned}
-\int_0^L \partial_x\tilde{P}_0\partial_x q_1 dx + \frac{i\omega\nu h\rho}{6EI} \int_0^L \tilde{P}_0 q_1 dx - \left(\frac{\omega^2 h}{6} + \frac{i\omega\nu}{h} - \frac{\omega^2\nu^2 h^2\rho}{12EI}\right) \int_0^L \partial_x\tilde{V}\partial_x q_1 dx + \\
+ \left(\frac{\omega^2}{h} + \frac{i\omega^3\nu h}{6EI}\left(m + \frac{h\rho}{2}\right)\right) \int_0^L \tilde{V} q_1 dx = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Silnou formulaci rovnice (36) získáme obdobným způsobem násobením testovací funkcí $q_2(x)$ tentokrát se spojitými derivacemi 3. řádu, dále rovněž integrací podle x a zbavením se derivací čtvrtého (respektive i třetího řádu) metodou per partes:

$$\int_0^L \partial_{xx} \tilde{V} \partial_{xx} q_2 dx + \frac{i\omega\nu h\rho}{2EI} \int_0^L \partial_x \tilde{V} \partial_x q_2 dx - \frac{\omega^2}{EI} \left(m + \frac{h\rho}{2} \right) \int_0^L \tilde{V} q_2 dx - \frac{\rho}{EI} \int_0^L \tilde{P}_0 q_2 dx = 0. \quad (39)$$

Nyní diskretizujeme prostorové závislosti. Nejdříve rozdělíme délku kanálu L na menší části:

$$L = \sum_k L_k$$

kde v každé oblasti Ω_k o délce L_k budeme používat lokální souřadnice $\xi \in (0; 1)$, pro které tedy musí platit

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_0}{L_k}, \\ dx &= L_k d\xi, \\ \int_{\Omega_k} dx &= L_k \int_0^1 d\xi, \end{aligned}$$

kde x_0 je hodnota x na začátku každého prvku. Hmotnost jednoho prvku označme m_k . Prvky budeme používat ekvidistantní, tedy L_k i m bude pro všechny z nich stejné. Tvarové funkce tlaku použijeme lineární (jelikož vzhledem ke tvaru slabé formulace vyžadujeme nenulovou první derivaci), splňující na každém prvku Ω_k okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi = 0) &= 1, \\ \phi_1(\xi = 1) &= 0, \\ \phi_2(\xi = 0) &= 0, \\ \phi_2(\xi = 1) &= 1, \end{aligned}$$

budou tedy jednoduše

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= 1 - \xi, \\ \phi_2(\xi) &= \xi. \end{aligned}$$

Tvarové funkce průhybu jsou složitější, využijeme teorie ohybu nosníku, která uvažuje derivaci průhybu rovnou úhlu natočení. Tvarové funkce tedy hledáme takové, které splní okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \psi_1 &= \psi_2' = 1, \\ \xi = 0 : \psi_2 &= \psi_3 = \psi_4 = \psi_1' = \psi_3' = \psi_4' = 0, \\ \xi = 1 : \psi_3 &= \psi_4' = 1, \\ \xi = 1 : \psi_1 &= \psi_2 = \psi_4 = \psi_1' = \psi_2' = \psi_3' = 0. \end{aligned}$$

Ty splňují funkce

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \psi_2 &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \\ \psi_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \psi_4 &= -\xi^2 + \xi^3. \end{aligned}$$

Maticově zapsány budou tvarové funkce vypadat:

$$\begin{aligned}\Phi &= [1 - \xi \quad \xi], \\ \Psi &= [(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (3\xi^2 - 2\xi^3) \quad (-\xi^2 + \xi^3)].\end{aligned}$$

A nyní konečně rovnici (38) rozdělíme na jednotlivé prvky, kde v každém prvku bude tlak a průhyb nahrazen maticově

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0^k(\xi) &= \Phi \cdot \tilde{P}_0^k, \\ \tilde{V}^k(\xi) &= \Psi \cdot \tilde{V}_k,\end{aligned}$$

a kde \tilde{P}_0^k a \tilde{V}_k jsou uzlové hodnoty tlaku, respektive průhybu a úhlu natočení na počátku a na konci prvku

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0^k &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_0^k \\ \tilde{P}_0^{k+1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{V}^k &= \begin{bmatrix} \tilde{V}_k \\ \tilde{V}'_k \\ \tilde{V}_{k+1} \\ \tilde{V}'_{k+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Testovací funkce rovněž diskretizujeme

$$\begin{aligned}q_1^k &= [q_1^k \quad q_1^{k+1}] \cdot \Phi', \\ q_2^k &= [q_2^k \quad q_2^{k+1} \quad q_2^{k+2} \quad q_2^{k+3}] \cdot \Psi'.\end{aligned}$$

Celá rovnice (38) bude mít při součtu přes všechny prvky tvar:

$$\begin{aligned}& \sum_{\Omega_k} \left(-\frac{1}{L_k} \int_0^1 \Phi'^T \cdot \Phi' \cdot \tilde{P}_0^k d\xi + \frac{i\omega\nu h \rho L_k}{6EI} \int_0^1 \Phi^T \cdot \Phi \cdot \tilde{P}_0^k d\xi \right) \\ & - \sum_{\Omega_k} \left(\left(\frac{\omega^2 h}{6} + \frac{i\omega\nu}{h} - \frac{\omega^2 \nu^2 h^2 \rho}{12EI} \right) \frac{1}{L_k} \int_0^1 \Phi'^T \cdot \Psi \cdot \tilde{V}^k d\xi \right) \\ & + \sum_{\Omega_k} \left(\left(\frac{\omega^2}{h} + \frac{i\omega^3 \nu h}{6EI} \left(m_k + \frac{h\rho}{2} \right) \right) \int_0^1 \Phi^T \cdot \Psi \cdot \tilde{V}^k d\xi \right) = 0.\end{aligned}\tag{40}$$

Maticové součiny nabývají tvar

$$\begin{aligned}\Phi'^T \cdot \Phi' &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Phi^T \cdot \Phi &= \begin{bmatrix} (1 - \xi)^2 & \xi - \xi^2 \\ \xi - \xi^2 & (1 - \xi)^2 \end{bmatrix}, \\ \Phi'^T \cdot \Psi' &= \begin{bmatrix} 6\xi - 6\xi^2 & -1 + 4\xi - 3\xi^2 & -6\xi + 6\xi^2 & 2\xi - 3\xi^2 \\ -6\xi + 6\xi^2 & +1 - 4\xi + 3\xi^2 & 6\xi - 6\xi^2 & -2\xi + 3\xi^2 \end{bmatrix}, \\ \Phi^T \cdot \Psi &= \begin{bmatrix} (1 - \xi - 3\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4) & (\xi - 3\xi^2 + 3\xi^3 - \xi^4) & (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4) & (-\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) \\ (\xi - 3\xi^3 + 2\xi^4) & (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) & (3\xi^3 - 2\xi^4) & (-\xi^3 + \xi^4) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

respektive po integraci

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi'^T \cdot \Phi' d\xi &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Phi^T \cdot \Phi d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Phi'^T \cdot \Psi' d\xi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Phi^T \cdot \Psi d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{30} & \frac{2}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Analogicky diskretizujeme rovněž rovnici nosníku (39)

$$\begin{aligned}\sum_{\Omega_k} \left(\frac{1}{L_k^3} \int_0^1 \Psi''^T \cdot \Psi'' \cdot \tilde{V}^k d\xi + \frac{i\omega\nu h\rho}{2EIL_k} \int_0^1 \Psi'^T \cdot \Psi' \cdot \tilde{V}^k d\xi - \frac{\omega^2 L_k}{EI} \left(m_k + \frac{h\rho}{2} \right) \int_0^1 \Psi^T \cdot \Psi \cdot \tilde{V}^k d\xi \right) \\ - \sum_{\Omega_k} \left(\frac{\rho L_k}{EI} \int_0^1 \Psi^T \cdot \Phi \cdot \tilde{P}_0^k d\xi \right) = 0,\end{aligned}\quad (41)$$

se součiny

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Psi''^T \cdot \Psi'' d\xi &= \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Psi'^T \cdot \Psi' d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Psi^T \cdot \Psi d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} \\ \frac{11}{210} & \frac{105}{420} & \frac{420}{13} & -\frac{140}{11} \\ \frac{9}{70} & \frac{420}{13} & \frac{35}{11} & -\frac{210}{1} \\ -\frac{13}{420} & -\frac{140}{1} & -\frac{11}{210} & \frac{105}{1} \end{bmatrix}, \\ \int_0^1 \Psi^T \cdot \Phi d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{3}{20} & \frac{2}{20} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Součtem přes všechny prvky získáme maticovou rovnici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (42)$$

(neznámé uzlové hodnoty \tilde{P}_0 a \tilde{V} sjednotíme do jedné proměnné \mathbf{z}) s nulovou pravou stranou. Okrajové podmínky zahrneme tak, že od pravé strany rovnice odečteme násobek známé hodnoty a jí odpovídajícího řádku matice \mathbf{A} . Odpovídající řádek a sloupec matice pak odstraníme. Nakonec tak řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic. Rovnici proudění tekutiny ze soustavy (33) pak při znalosti průhybu a tlaku řešíme dříve popsanou Fourierovou metodou.

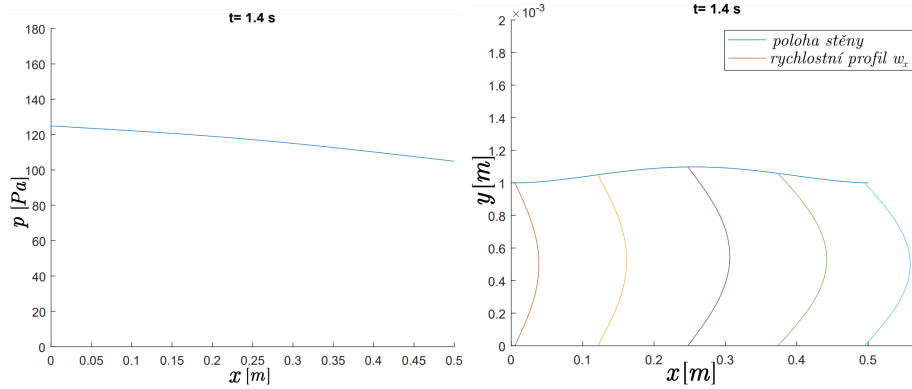
4.6 Výsledky modelu interakce

Pro porovnání tomto případě používáme stejné hodnoty parametrů, jako v předchozím, vlastnosti desky jsou pak

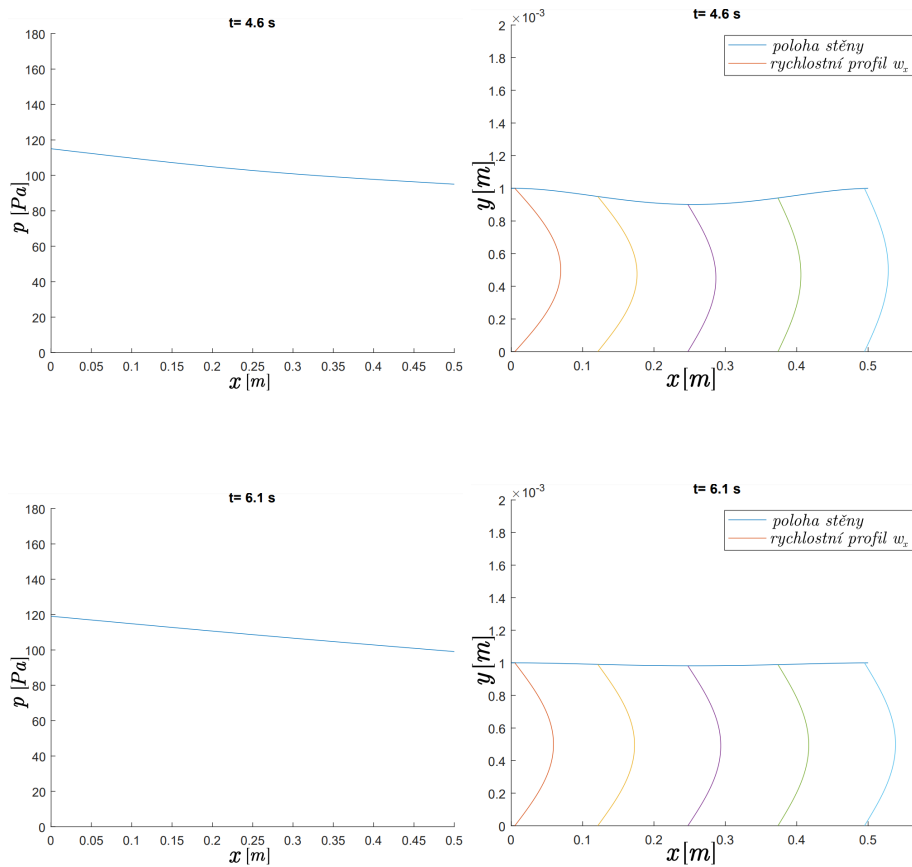
parametr	značka	hodnota
Youngův modul	E	$= 230[mPa]$
plocha profilu	A	$= 7.845 \cdot 10^{-5}[m^2]$
kvadratický moment ke střední ose	I	$= 4.9087 \cdot 10^{-10}[m^4]$
počet uzlů	n	$= 100$
délka prvku	L_k	$= 5.1[mm]$
hmotnost prvku	m_k	$= 3.1[g]$

Tabulka 3: Parametry pro model interakce

Tyto parametry jsou určeny čistě ilustrativně a to konkrétně tak, aby průhyb desky při daném buzení přibližně odpovídal tomu předepsanému v předchozí části a bylo tak možno pozorovat, jestli si oba dva modely odpovídají. Rovněž pro sjednocení fází je zde uvažován fázový posun o $+\frac{3}{2}\pi$. I zde nastává problém s řešením rovnice proudění popsany u předchozích výsledků.



Obr. 10: Rozložení tlaku u stěny a tlaku bez průhybu desky a rychlostní profily v kanálu v čase 1.4s, případ s interakcí



Obr. 11: Rozložení tlaku u stěny a tlaku bez průhybu desky a rychlostní profily v kanálu v časech 4.6s a 6.1s, případ s interakcí

4.7 Symetrická úloha

Pokud chceme úlohu převést na symetrickou (stále jen ve 2D), tedy kdy na ose x nebude pevný rám, ale bude osou symetrie, musí se v první řadě změnit výška kanálu z h na $2h$ a kanál se tak bude ve smyslu osy y nacházet v intervalu $(-h, h)$. Adekvátně tomu upravíme původní počáteční podmínku proudění (6)

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2). \quad (43)$$

Další změna nastane u okrajových podmínek (34), konkrétně u rychlosti tekutiny v_x . Pro tu v $y = 0$ nyní nebude platit, že je nulová. Místo toho zde (na ose x) bude nulová její derivace, což přímo vyplývá ze symetrie. Nejde tedy již o Dirichletovy podmínky, ale o Newtonovy / Robinovy.

Celkově tedy budeme řešit soustavu

$$\begin{aligned}
EI\partial_{xxxx}V + m\ddot{V} - \left(P_0(x, t) + \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu h}{2} - \ddot{V}\frac{h}{2} \right) \rho &= 0, \\
-\partial_{xx}P_0(x, t) + \partial_{xx}\ddot{V}\frac{h}{6} - \partial_{xxxx}\dot{V}\frac{\nu h}{6} - \partial_{xx}\dot{V}\frac{\nu}{h} + \ddot{V}\frac{1}{h} &= 0, \\
\partial_t v_x - \nu\partial_{yy}v_x + \partial_x P_0(x, t) = \partial_x\ddot{V}\frac{y^2}{2h} - \nu\partial_{xxx}\dot{V}\frac{y^2}{2h} - \partial_x\dot{V}\frac{\nu}{h},
\end{aligned} \tag{44}$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
V(x = 0, t) = V'(x = 0, t) = V(x = L, t) = V'(x = L, t) &= 0, \\
P_0(x = 0, t) = \bar{P}_{00}, P_0(x = L, t) = \bar{P}_{01}, \\
\frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y = 0, t) &= 0, \\
v_x(x, y = h, t) &= 0, \\
v_x(x, t = 0, y) &= -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h^2 - y^2).
\end{aligned} \tag{45}$$

Na řešení prvních dvou rovnic tyto změny nebudou mít vliv, naopak se projeví ve Fourierově metodě, to konkrétně při hledání vlastních funkcí časově nezávislé části Y . Vlastní funkce a jim příslušná vlastní čísla budou pro splnění nových okrajových podmínek

$$\begin{aligned}
y_k &= B_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}y\right), \\
\lambda_k &= \left(\frac{(2k-1)\pi}{2h}\right)^2, k \in N.
\end{aligned} \tag{46}$$

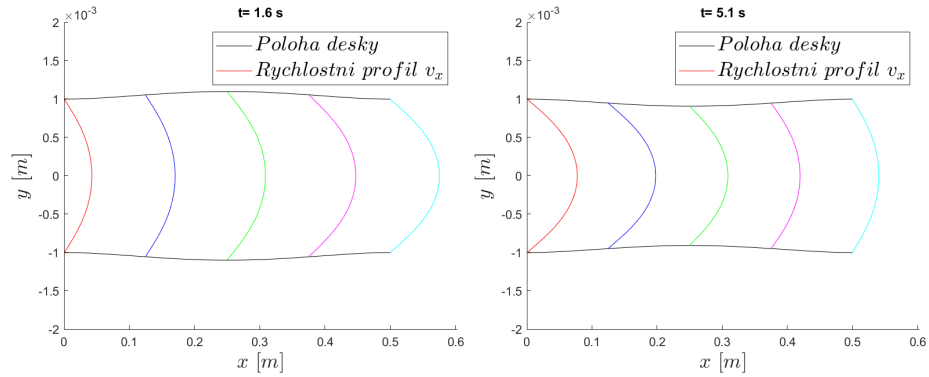
Rovnice pro časově závislou část se tím změní na

$$\begin{aligned}
\gamma_j \dot{T}_j(x, t) + T_j(x, t) &= b_j(x, t), \\
T_j(x, 0) &= \frac{2}{h}\bar{v}_j(x), \\
\gamma_j &= \frac{4h^2}{((2j-1)\pi)^2\nu}, \\
b_j &= -\frac{8h}{(\pi(2j-1))^2} \int_0^h \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2h}y\right) \Phi(x, y, t) dy, \\
\bar{v}_j(x) &= \int_0^h \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2h}y\right) v_x(x, y, 0) dy, \\
\Phi(x, y, t) &= \frac{1}{\nu}(\partial_x P_0(x, t) - f(x, y, t)),
\end{aligned} \tag{47}$$

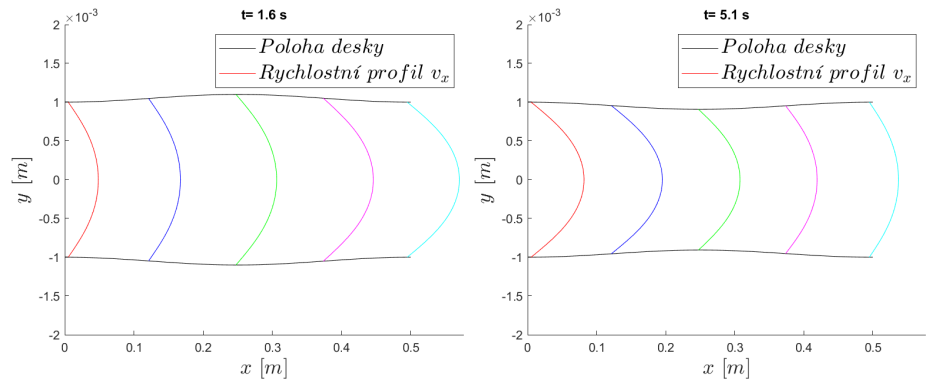
a řešením tedy je

$$v_x(x, y, t) = \sum_j \left[\left(\frac{2}{h}\bar{v}_j(x) e^{-\frac{1}{\gamma_j}t} + \frac{1}{\gamma_j} \int_0^t b_j(x, \tau) e^{\frac{1}{\gamma_j}(\tau-t)} d\tau \right) \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2h}y\right) \right]. \tag{48}$$

Pro ilustrace na obr. 12 a obr.13 byly využity stejné parametry jako v předchozích případech. Zobrazené rychlostní profily jsou trojnásobné oproti x .



Obr. 12: *Průhyb desky a rychlostní profily v různých částech kanálu v časech 1.6s a 5.1s, symetrický případ s interakcí*



Obr. 13: *Průhyb desky a rychlostní profily v různých částech kanálu v časech 1.6s a 5.1s, symetrický případ s předepsaným průhybem*

5 Vliv postupných vln na proudění

Cílem této kapitoly je vytvoření a implementace jednoduchého modelu pro zkoumání vlivu vlnění cévní stěny na proudění. Uvažujme rotačně symetrický kanál a zavedme následující značení:

x	podélná souřadnice, nachází se v ose symetrie
y	radiální souřadnice
L	délka kanálu
$r(x, t)$	poloměr průřezu cévou v daném místě
$p(x, t)$	tlak v tekutině
$p_0 = p(0, t)$	tlak na počátku kanálu
$p_1 = p(L, t)$	tlak na konci kanálu
μ	dynamická viskozita tekutiny
$v(x, y, t)$	rychlost tekutiny
$Q(x, t)$	okamžitý objemový průtok
$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_x, \dot{u}_r)$	vektor rychlosti stěny (složky vyjadřují podélný a radiální směr)
$\mathbf{n} = (n_x, n_r)$	vektor normály stěny

5.1 Matematický model

Znovu budeme velmi zjednodušeně uvažovat tekutinu uvnitř kanálu jako nestlačitelnou a newtonskou. Zachování objemu vyjadřuje vztah (viz [37])

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2\pi r}{n_r} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (49)$$

Proudění budeme uvažovat laminární, tedy rychlostní profil v rovině osy x bude parabolický, v rotačně symetrickém kanálu vyjádřený vztahem (například z [34])

$$v(x, y, t) = \dot{u}_x - \frac{1}{4\mu} (r^2(x) - y^2) \frac{\partial p(x)}{\partial x}, \quad y \in [0, r]. \quad (50)$$

Objemový průtok potom získáme integrací rychlosti přes plochu průřezu, v polárním souřadnicovém systému (který využijeme kvůli uvažované rotační symetrii úlohy)

$$Q(x, t) = \int_0^r \int_0^{2\pi} v \, y \, d\varphi \, dy = \int_0^r 2\pi y \left(\dot{u}_x - \frac{1}{4\mu} (r^2(x) - y^2) \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right) dy$$

$$Q(x, t) = \pi r^2 \dot{u}_x - \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (51)$$

Dosazením (51) do (49) a vydělením celé rovnice π pak získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \dot{u}_x - \frac{r^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + 2r \dot{u}_r = 0, \quad (52)$$

jejímž řešením se budeme dále zabývat.

Řekněme, že známe pohyb stěny cévy, tedy že r a tím pádem i $\dot{\mathbf{u}}$ jsou známé funkce. Tento pohyb bude mít význam cévou se šířící vlny. V rovnici (52) pak zbývá neznámá hodnota

tlaku $p(x)$, uvažujeme známé jeho okrajové hodnoty p_0 na počátku a p_1 na konci kanálu. Tu pak lze řešit například v předchozí kapitole popsanou metodou konečných prvků, (52) je silnou formulací úlohy, slabou formulaci získáme vynásobením testovací funkcí q , integrací přes délku kanálu l a integrací per partes:

$$\frac{1}{8\mu} \int_0^l r^4 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} dx - \int_0^l \dot{u}_x r^2 \frac{\partial q}{\partial x} dx + \int_0^l 2\dot{u}_r r q dx = 0 \forall q \in H_0^1(0, l). \quad (53)$$

Jiným způsobem řešení (52) by mohla být například metoda konečných diferencí. Ta se ovšem neosvědčila, výpočet vyžadoval velmi hustou síť a často kolaboval.

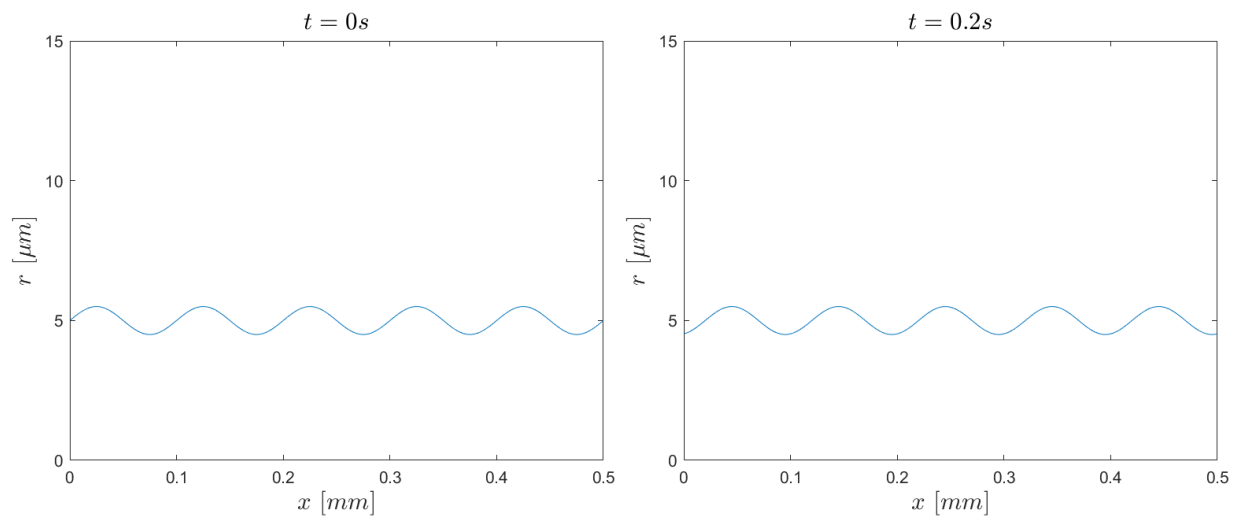
5.2 Výsledky

V souladu s poznatky v předchozích kapitolách (až na tlak, jehož rozpětí je zvýšeno pro přehlednost v grafech) uvažujeme tyto hodnoty:

parametr	značka	hodnota
délka kanálu	L	$0.5[mm]$
dynamická viskozita	μ	$1.3[mPa.s]$
tlak na počátku kanálu	p_0	$3[kPa]$
tlak na konci kanálu	p_1	$2[kPa]$.
předepsaná poloha stěny	$r(x, t)$	$r_0 + a \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$
klidová hodnota poloměru	r_0	$5[\mu m]$
amplituda vlny	a	$\frac{r_0}{10}[\mu m]$
vlnová délka	λ	$\frac{L}{5}[mm]$
perioda	T	$1[s]$.

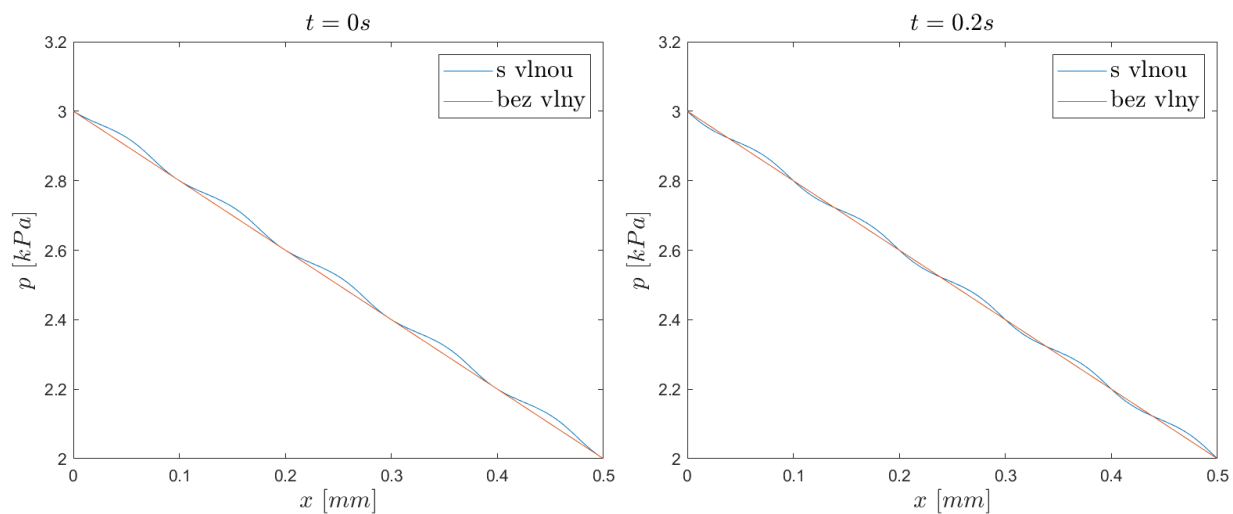
Tabulka 4: *Parametry pro model s vlnou*

Pro popis vlny jsou hodnoty pouze referenční vůči dalším úpravám. z hledem k předpokladu newtonské tekutiny uvažujeme proudění pouze krevní plazmy. Poloměr průřezu v klidu vyjadřuje r_0 . V rovnici šířící se vlny (tj. nekonstantní složky předepsaného poloměru) vystupují vlnová délka λ , perioda T a amplituda a . Jejich zmíněné hodnoty jsou pouze referenční, ke kterým budeme vztahovat další výsledky. Právě vlivem hodnot těchto parametrů vlny na proudění se budeme zabývat. Konkrétní podobu vlny ukazuje obr. 14, vlna se šíří v kladném směru osy x . Grafy jsou zobrazovány v párech, aby byla poznat změna v čase, konkrétní čas $0.2 s$ byl zvolen tak, aby nebyl násobkem poloviny periody vlny a byl tak viditelně odlišen od stojaté vlny.

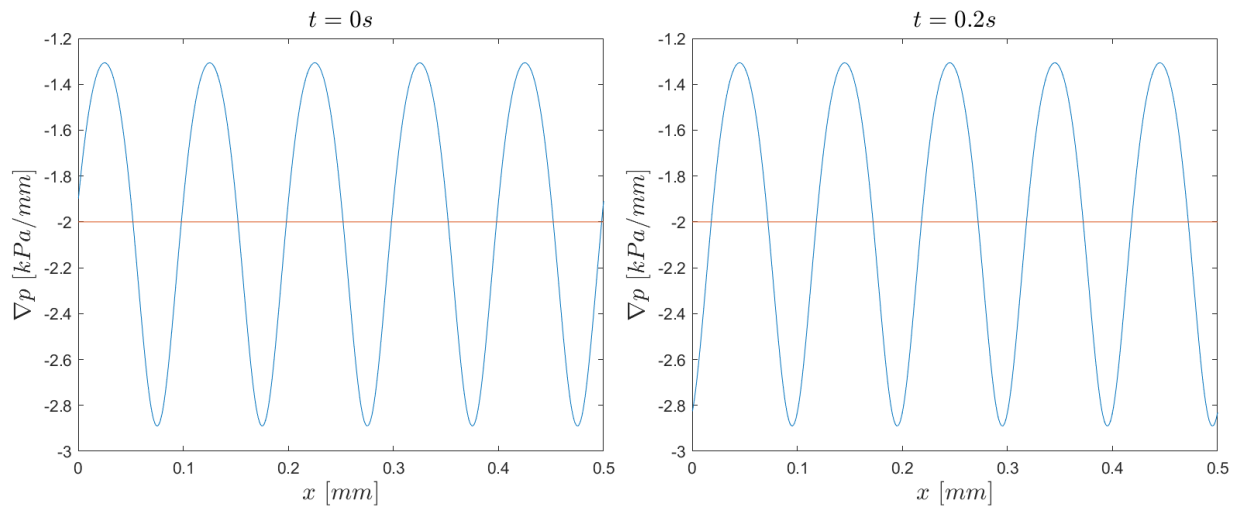


Obr. 14: Radius stěny cévy při uvažované vlně v časech $t = 0s$ a $t = 0.2s$

Zajímavé je, jaký má šířící se vlnění účinek na tlak. Jak lze pozorovat z obr. 16, tlakový gradient se mění stejným trendem jako průřez cévy oproti hodnotám v klidu. V závislosti na tom se pak mění tlak (obr. 15).



Obr. 15: Tlak v kapiláře v časech $t = 0s$ a $t = 0.2s$



Obr. 16: Tlakový gradient v kapiláře v časech $t = 0s$ a $t = 0.2s$

5.2.1 Vliv vlnové délky

Pro přehlednost zavedeme číslo k , které udává podíl celkové délky kapiláry a vlnové délky

$$k = \frac{L}{\lambda}. \quad (54)$$

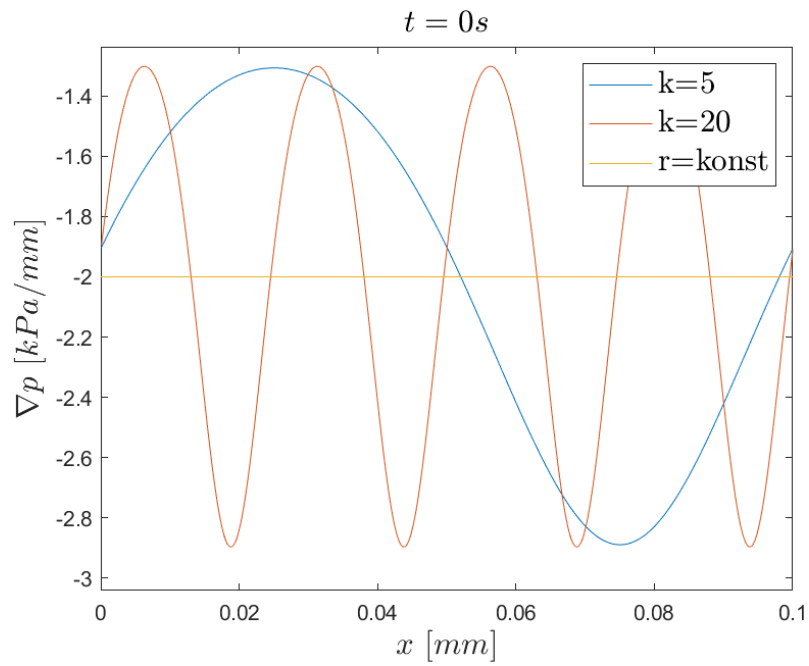
To je tedy počtem vlnových délek v délce kanálu, tedy k vlnovému číslu definovanému vztahem

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (55)$$

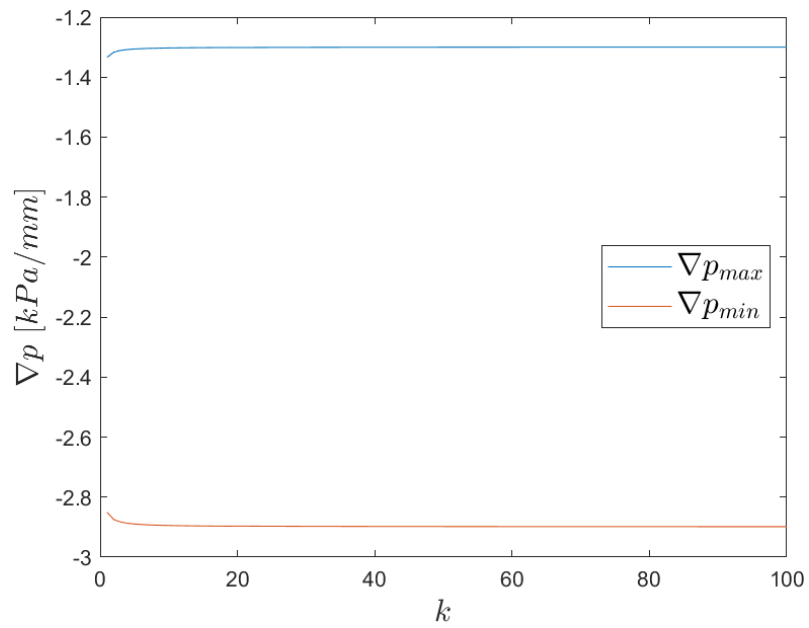
je přímo úměrné

$$k = \varkappa \frac{L}{2\pi}. \quad (56)$$

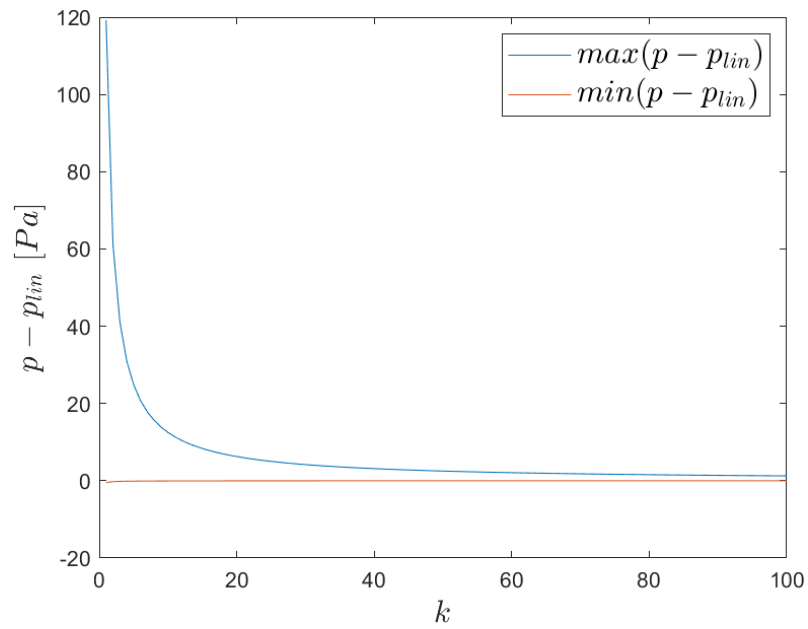
Veškerá zobrazená závislost na k je tedy stejně tak závislostí na \varkappa , použité je pouze pro přehlednost. Co se týče vlivu vlnové délky na tlakový gradient, samozřejmě přímo určuje délku jeho periodicky se opakující části, viz obr. 17. Grafy na obr. 18 ukazují, jaký má k vliv na hodnotu maxima, respektive minima tlakového gradientu, tedy v jakém rozmezí se jeho hodnoty pohybují. Toto rozpětí se mění v jednotkách procent, tedy vliv vlnové délky na ∇p spočívá primárně ve velikosti úseku, na kterém se periodicky mění, ne tolik na jeho amplitudě. Aby bylo omezeno zkreslení způsobené výpočtem, byla uvažována hustota prvků vždy alespoň 100 na vlnovou délku (nejméně však 5000). Hodnotu maxima a minima, a tedy celkový rozptyl rozdílu tlaku s vlnou a tlaku bez vlny zobrazuje obr. 19. Se zmenšující se vlnovou délkou se tlak blíží hodnotám při neměnném průřezu. Podobný vliv jako na tlakový gradient pak má vlnová délka samozřejmě na jemu přímo úměrný (51) objemový průtok (jelikož se jeho periodicky se opakující úsek mění stejně jako ten poloměru cévy). To lze pozorovat z obr. 20, stejně jako fakt, že vlnění v tomto konkrétním případě snižuje celkový objemový průtok.



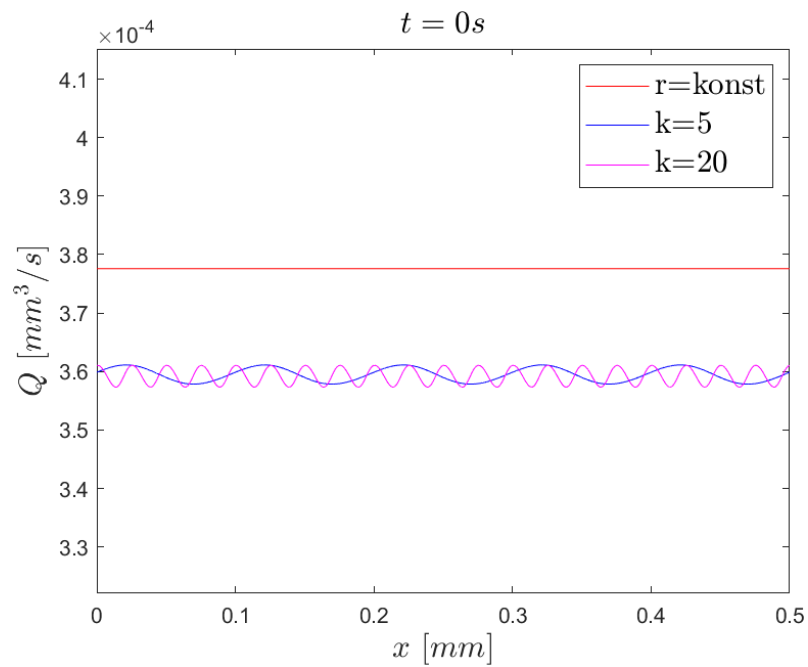
Obr. 17: Tlakový gradient pro různá k



Obr. 18: Extrémy tlakového gradientu v závislosti na k



Obr. 19: Extrémny odchylky tlaku s vlnou a bez vlny v závislosti na k



Obr. 20: Okamžitý objemový průtok při vlnění o různých délkách

5.2.2 Vliv periody vlny

Pro přehlednost budeme hodnoty v grafech zobrazovat v závislosti na frekvenci, tedy na převrácené hodnotě periody

$$f = 1/T.$$

Vliv frekvence na tlakový gradient (obr. 21) má podstatně jiné vlastnosti než vliv vlnové délky. Až do určité kritické hodnoty frekvence se jeho rozpětí (obr. 22) snižuje, poté se opět začíná zvyšovat. Jak lze pozorovat z obr. 23, při této kritické frekvenci je hodnota tlaku nejbližší hodnotě při neměnném průřezu. Pro vyšší frekvence se rozdíl opět zvyšuje, nicméně tentokrát je tlak u případu s vlnou buď stejný, nebo nižší. Dochází k "převrácení" hodnot tlakového gradientu (obr. 21). Tím pádem jeho absolutní hodnota je nyní naopak vyšší v místech s větším průřezem a díky tomu dochází k větším extrémům u objemového průtoku a i jeho větší průměrné hodnotě \bar{Q} . Ten zavedeme jako střední hodnotu okamžitého objemového průtoku po celé délce kanálu

$$\bar{Q} = \frac{1}{L} \int_0^L Q(x) dx. \quad (57)$$

Vzhledem k tomu, že celou dobu počítáme s délkou kanálu jako s násobkem vlnové délky, nemění se tato hodnota v čase (pouze se změnou parametrů) a odpovídá tedy průměrnému průtoku v konkrétním místě podle času, pokud ten vezmeme jako celý násobek periody. Prostorový průměr jsme využili pro podstatně nižší výpočetní náročnost. Za povšimnutí stojí, že hodnota průměrného průtoku naroste nad hodnotu průtoku bez vlnění při jiné frekvenci, než je ta kritická, zde konkrétně mezi $f = 58$ a $f = 59$ (viz obr. 25). Kritická hodnota frekvence v tomto případě téměř odpovídá takové, pro kterou je hodnota fázové rychlosti

$$c = \frac{\omega}{\kappa} = \lambda f \quad (58)$$

rovna hodnotě maximální rychlosti (ta vzhledem k parabolickému profilu nastává při $y = 0$) ze vztahu (50) pro případ s konstantním průřezem

$$v_{max} = -\frac{r^4}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (59)$$

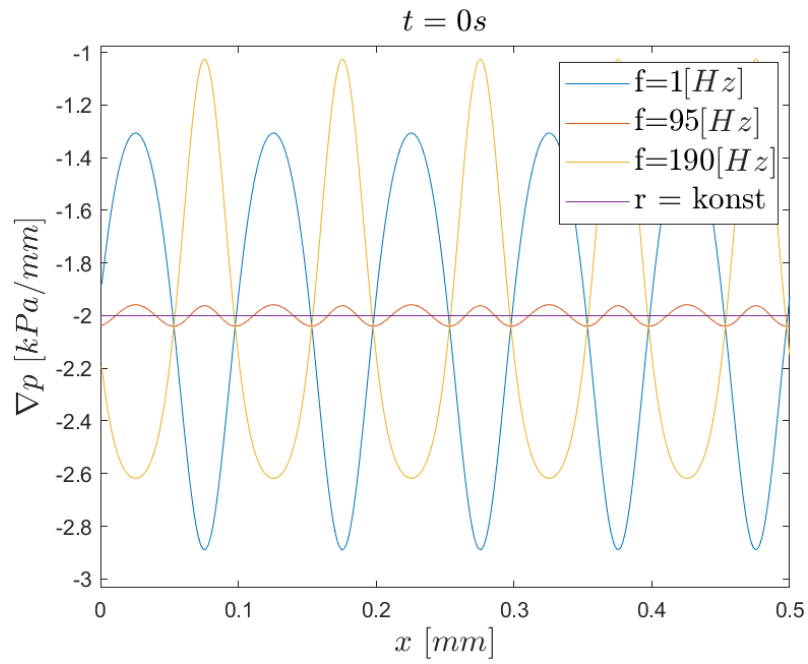
Konkrétně v grafech jde o hodnotu $95[Hz]$, tedy rychlost

$$c = 95 \cdot 10^{-4}[m/s] = 9.5[mm/s],$$

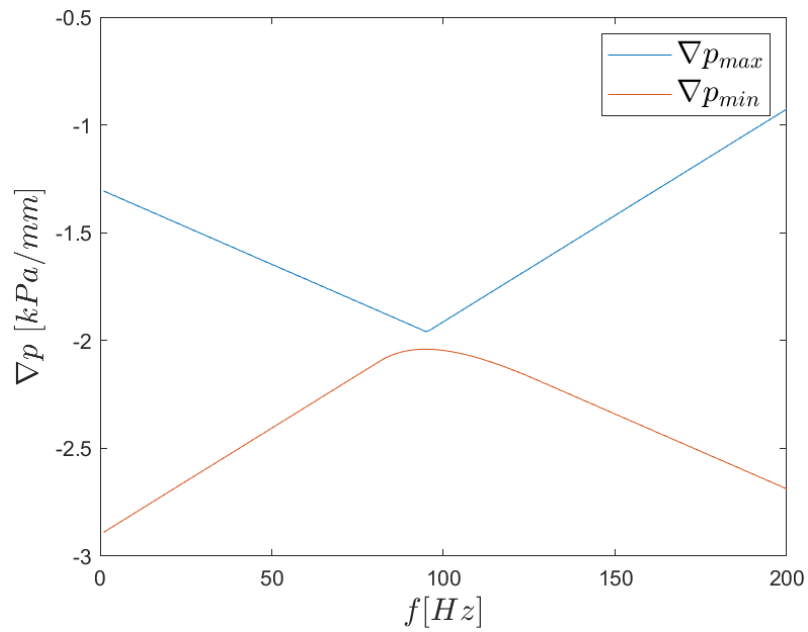
výpočtem rovnice (59) získáme

$$v_{max} = -\frac{(5 \cdot 10^{-6})^2}{4 \cdot 1.3 \cdot 10^{-3}} \frac{(2-3) \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^{-3}} \doteq 9.6 \cdot 10^{-3}[m/s] = 9.6[mm/s].$$

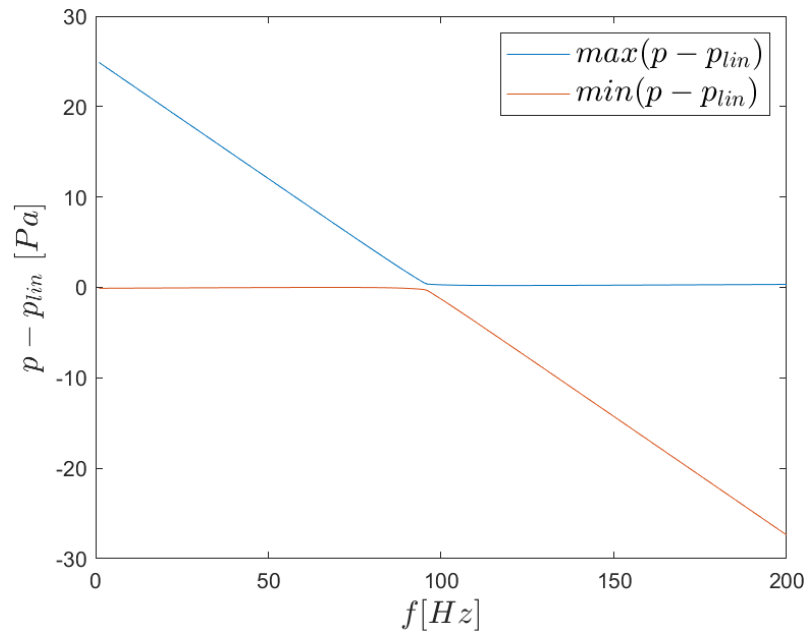
Pro deset dalších různých hodnot pro μ , L , $p_0 - p_1$, r_0 a λ se rychlost vypočtená vztahy (58) a (59) buď přímo rovnala, nebo se lišila o rychlost odpovídající frekvenci $1[Hz]$.



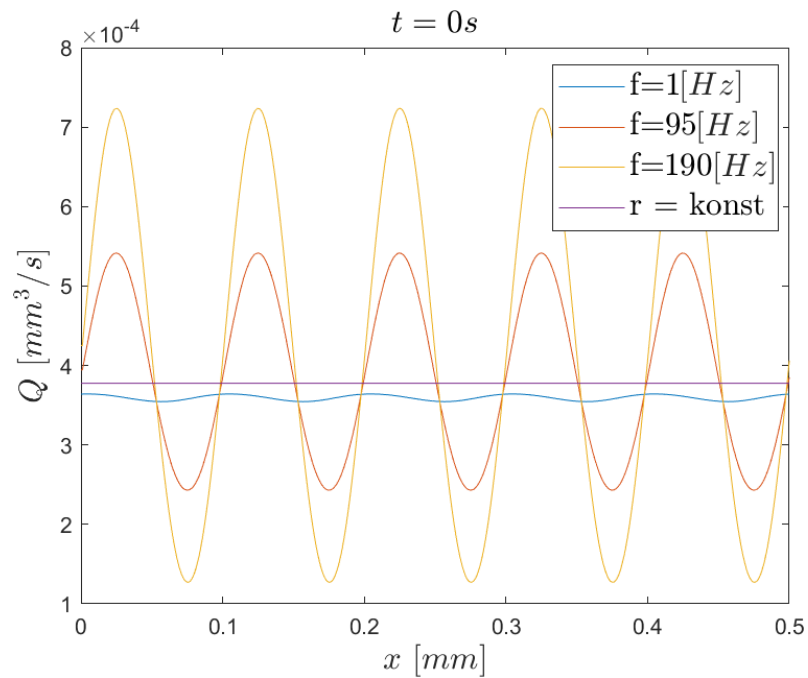
Obr. 21: Tlakový gradient pro různé frekvence



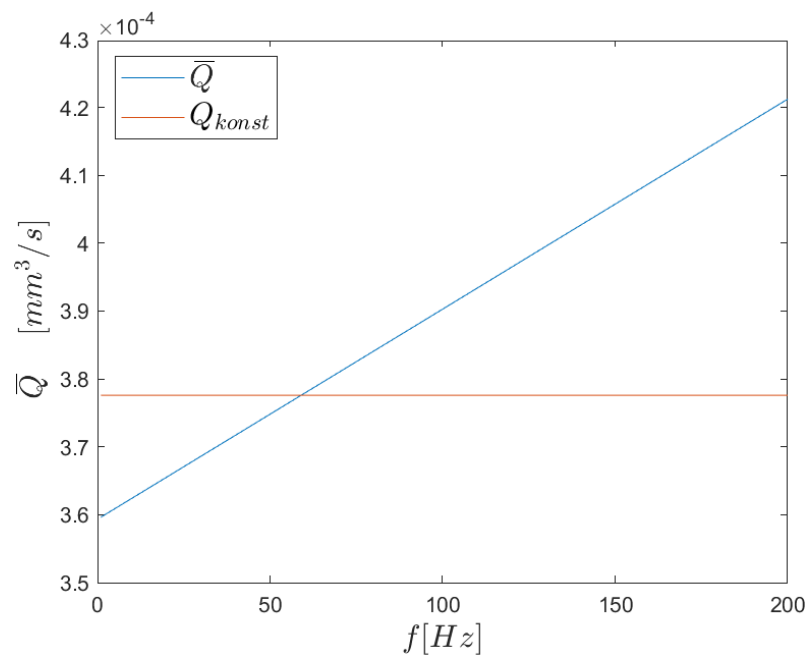
Obr. 22: Extrémy tlakového gradientu v závislosti na frekvenci



Obr. 23: *Extremy odchylky tlaku s vlnou a bez vlny v závislosti na frekvenci*



Obr. 24: *Okamžitý objemový průtok pro vlny o různých frekvencích*



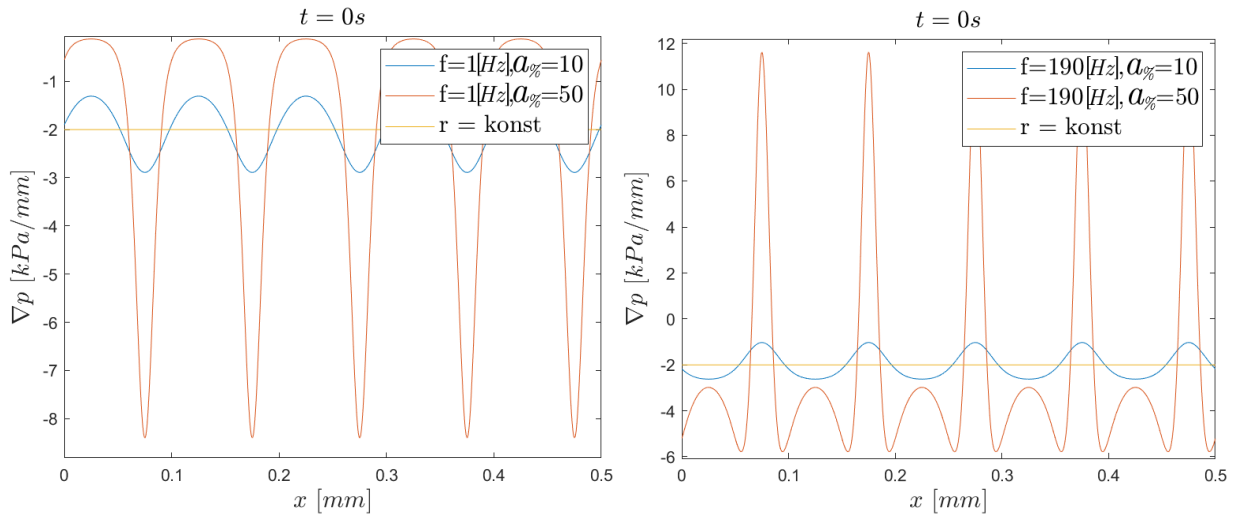
Obr. 25: Průměrný objemový průtok v závislosti na frekvenci

5.2.3 Vliv amplitudy vlny

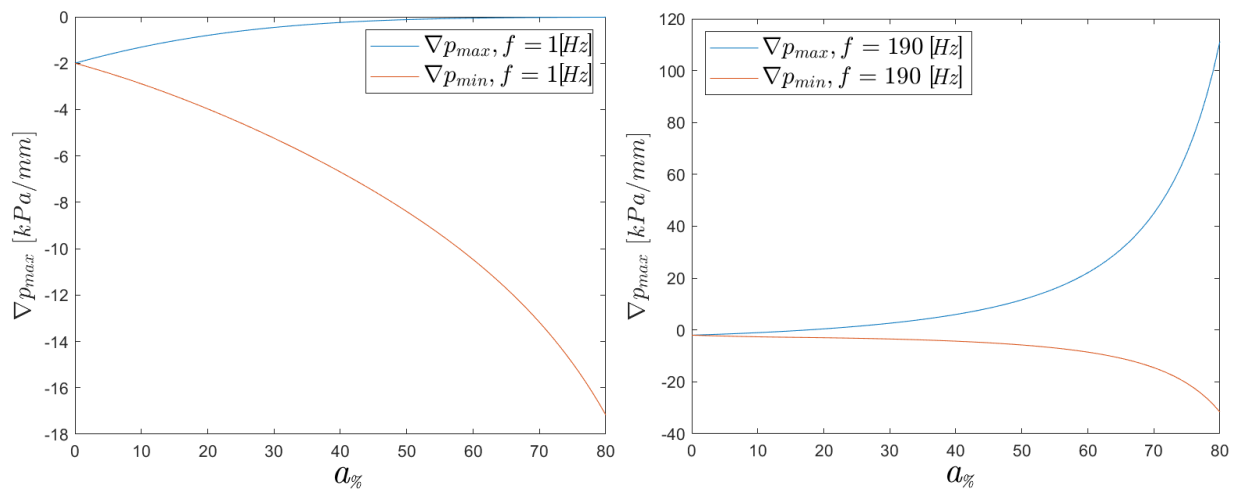
Pro popis vlivu amplitudy pro přehlednost zavedeme poměrný koeficient $a_{\%}$ ke klidovému poloměru r_0 , konkrétně

$$a_{\%} = 100 \frac{a}{r_0}, \quad (60)$$

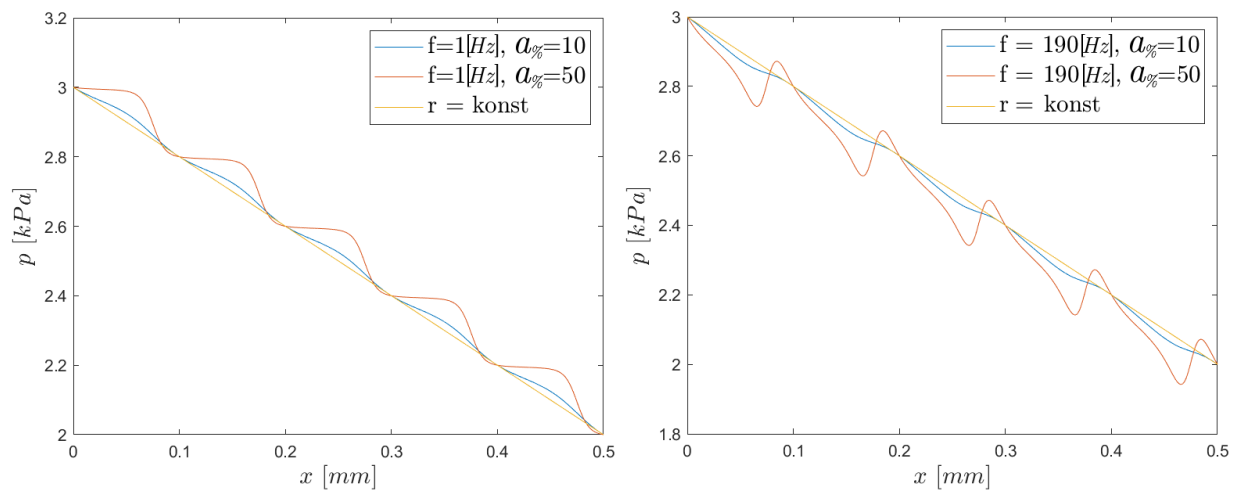
vyjadřující, do jakého procenta poloměru kanálu zasahuje vlna. U hodnot blízkých $a_{\%} = 100$, kdy by byla amplituda vlny rovna poloměru cévy a v jejích maximech by tak docházelo k úplnému uzavření, výpočet kolabuje, a tak budeme zobrazovat závislosti pouze do $a_{\%} = 80$. Jak lze pozorovat z obr. 27 a obr. 29, se zvyšující se amplitudou roste význam vlny na celkové vlastnosti vnitřního prostředí. To vždy podle toho, jak zrovna vlna působí podle dalších jejích parametrů. Obr. 26 a obr. 28 ukazují, že spolu s amplitudou vlny rostou amplitudy tlakového gradientu, respektive velikost odchylky tlaku od lineárně klesajícího. Pro objemový průtok (obr. 30) platí podobné posílení trendu, tedy že hodnoty nižší než u případu bez vlny se snižují a vyšší naopak zvyšují, jen v některých případech. Jak lze pozorovat z obr. 31, samotné zvětšení a může zapříčinit změnu průměrné hodnoty Q z nižší na vyšší vůči případu bez vlny.



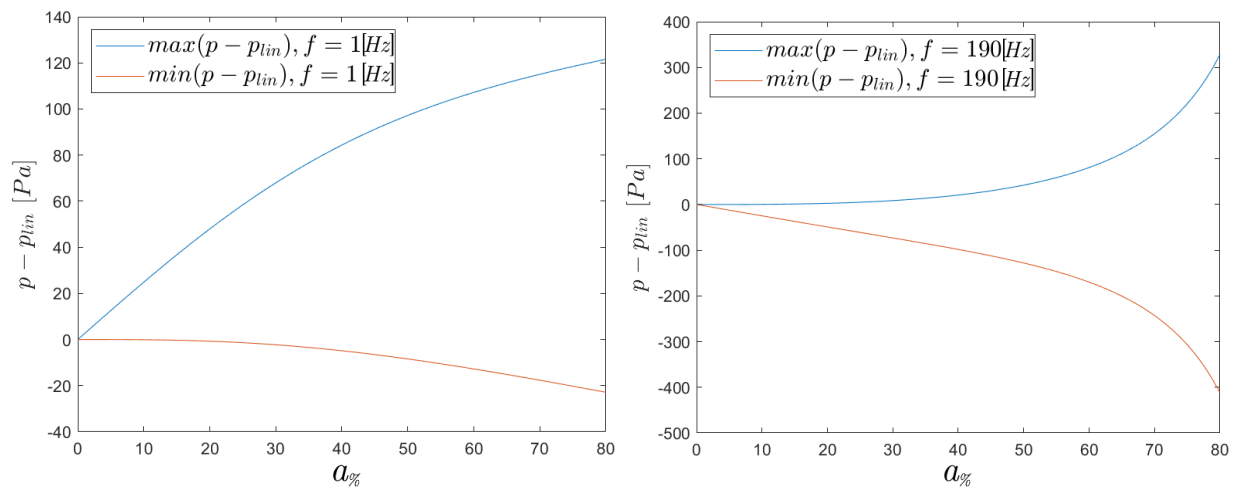
Obr. 26: Tlakový gradient pro různá $a_{\%}$ a pro 2 hodnoty f



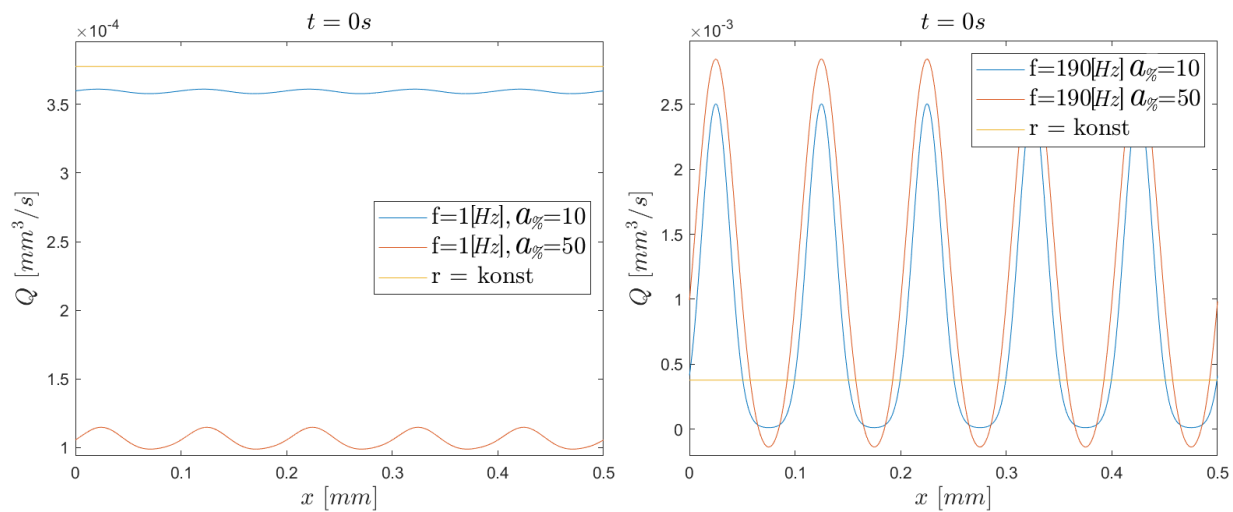
Obr. 27: Extrémy tlakového gradientu v závislosti na $\alpha_{\%}$ pro 2 hodnoty f



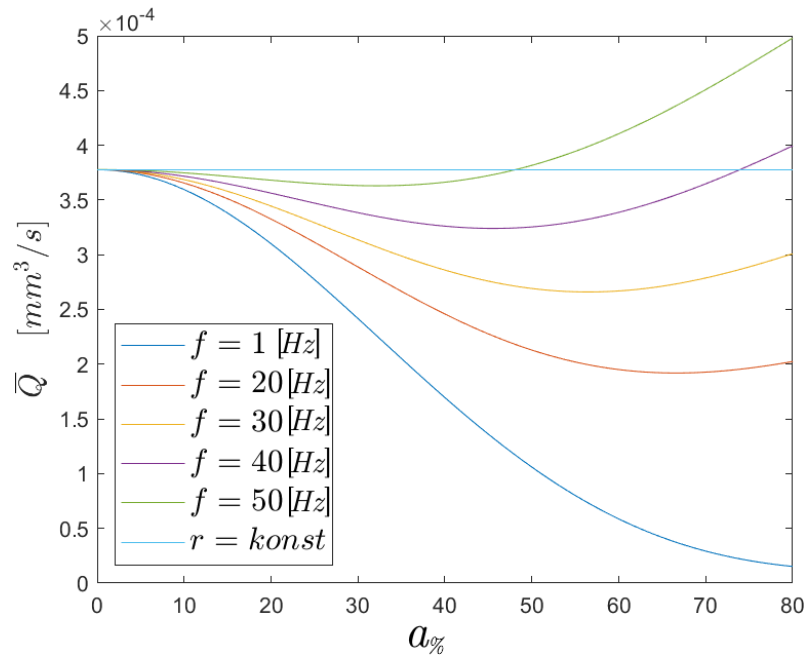
Obr. 28: Tlak pro různá $\alpha_{\%}$ a pro 2 hodnoty f



Obr. 29: Extrémny odchytky tlaku s vlnou a bez vlny podle $a\%$ a pro 2 hodnoty f



Obr. 30: Okamžitý objemový průtok pro různá $a\%$ a pro 2 hodnoty f



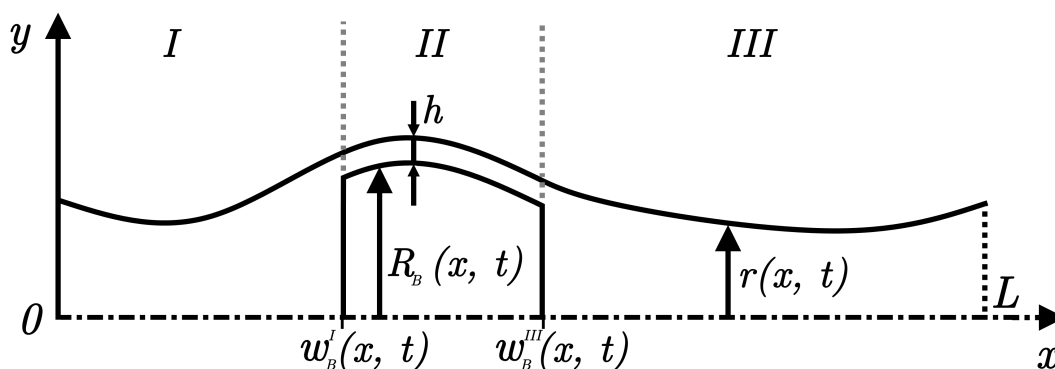
Obr. 31: Průměrný objemový průtok v závislosti na $a_{\%}$ pro různé hodnoty f

5.3 Shrnutí

Pomocí modelu laminárního proudění newtonské tekutiny v rotačně symetrickém kanálu jsme ukázali, jaký vliv mají různé parametry šířící se vlny na vnitřní prostředí (tlak, průtok). Vlnová délka ovlivňuje především délku úseku periodicky se opakující části vypočtené veličiny. Perioda nebo adekvátně frekvence převrací tento opakující se úsek u tlaku, respektive tlakového gradientu, a tím zvyšuje celkový objemový průtok. Amplituda vlny zesiluje vliv tlakového gradientu, zvětšuje odchylku tlaku od klidového stavu a mění hodnotu průtoku tak, jak naznačuje obr. 31.

6 Model interakce s buňkou

6.1 Úvod a značení



Obr. 32: Schéma modelu

Cílem poslední kapitoly je navrhnout zjednodušený model uvažující jak interakci média s prostředím, tak i transport buněk. Využijeme základu modelu z předchozí úlohy, budeme ji rovněž řešit jako rotačně symetrickou vzhledem ke střední ose kapiláry. Rotačně symetrické budeme rovněž uvažovat buňky. Stěnu popíšeme jako poddajnou, nikoliv s předepsaným lumenem. Médium bude nestlačitelná newtonská tekutina představující krevní plazmu. Zavedme následující značení:

x	podélná souřadnice, nachází se v ose symetrie
y	radiální souřadnice
$r(x, t)$	poloměr průřezu cévou v daném místě
r_0	klidová hodnota r
$p(x, t)$	tlak v tekutině
μ	dynamická viskozita tekutiny
$v(x, y, t)$	rychlost tekutiny
$Q(x, t)$	objemový průtok v částech I a III
$Q^{II}(x, t)$	objemový průtok v úseku II
$w_B^I(t)$	poloha počátku buňky na ose x
$w_B^{III}(t)$	poloha konce buňky na ose x
$R_B(x, t)$	poloměr průřezu buňky
V_B	celkový objem buňky
h	vzdálenost mezi stěnou buňky a stěnou kanálu na ose y
$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_x, \dot{u}_r)$	vektor rychlosti stěny cévy (složky vyjadřují podélný a radiální směr)
$\mathbf{n} = (n_x, n_r)$	vektor normály stěny cévy
$\mathbf{n}_B = (n_{Bx}, n_{Br})$	vektor normály stěny buňky
L	délka kanálu

Úlohu budeme řešit ve třech úsecích. Úsek *I* představuje prostor před buňkou, úsek *II* prostor s buňkou a úsek *III* prostor za buňkou. Vzhledem k zavedenému značení bude platit:

$$\begin{aligned} I : x &\in (0, w_B^I(t)) \\ II : x &\in (w_B^I(t), w_B^{III}(t)) \\ III : x &\in (w_B^{III}(t), L). \end{aligned}$$

Při transportu buňky se budou hranice mezi těmito úseky (tj. w_B^I a w_B^{III}) samozřejmě měnit.

6.2 Stěna kapiláry

Poddajnost stěny vyjádříme co možná nejjednodušším vztahem

$$p = \gamma (\pi r^2 - \pi r_0^2)^\kappa. \quad (61)$$

Tento model stěny uvažuje klidovou hodnotu poloměru lumenu r_0 , která nastává, pokud tekutina nepůsobí na stěnu žádným tlakem. Při rostoucím tlaku pak roste rovněž hodnota r . Je otázkou, jakým způsobem stanovit hodnoty koeficientů γ a κ , bylo by vhodné určit je experimentálně.

6.3 Úseky *I* a *III*

Rychlost proudění v těchto úsecích uvažujeme stejnou jako v předchozí kapitole (rovnice (50)), je tedy vyjádřena vztahem

$$v(x, y) = \dot{u}_x - \frac{1}{4\mu} (r^2(x) - y^2) \frac{\partial p(x)}{\partial x}, \quad y \in [0, r]. \quad (62)$$

Dále využijeme pomocí rychlosti upraveného vztahu pro zachování objemu (stejného jako (52)), tedy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \dot{u}_x - \frac{r^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + 2r \dot{u}_r = 0, \quad (63)$$

kam dosadíme derivaci tlaku vyjádřenou z (61)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\pi r \gamma \kappa (\pi r^2 - \pi r_0^2)^{\kappa-1} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (64)$$

Dosazením (64) do (63) tedy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \dot{u}_x - \frac{r^4}{8\mu} 2\pi r \gamma \kappa (\pi r^2 - \pi r_0^2)^{\kappa-1} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2r \dot{u}_r = 0. \quad (65)$$

6.4 Úsek *II*

Pro vytvoření co nejjednoduššího modelu budeme uvažovat buňku, která bude dokonale podajná a jejíž objem, vyjádřený integrálem obsahu průřezu přes celou délku, bude konstantní

$$V = \int_{w_B^I}^{w_B^{III}} \pi R_B^2(x) dx = konst. \quad (66)$$

Poddajnost pak znamená, že rovněž v této části bude platit rovnice (61) (buňka se přizpůsobí proudění, respektive tlaku). Abychom mohli popsat proudění mezi buňkou a stěnou cévy, uvažujeme mezi nimi konstantní mezeru

$$h = konst.$$

Ta může mít význam například průměrné hodnoty skutečné mezery, případně takové, při které by byl zachován stejný průtok tekutiny úsekem II . Z definice této mezery pak vyjádříme R_B jednoznačně v závislosti na r

$$R_B = r - h. \quad (67)$$

Rychlost proudění v prostoru mezi dvěma pohybujícími se soustřednými válcovými plochami je z literatury[38]

$$v(x, y, t) = \dot{u}_x - \frac{1}{4\mu} \left(r^2 - y^2 + (R_B^2 - r^2) \frac{\ln\left(\frac{y}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_B}{r}\right)} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \dot{w}_B \frac{\ln\left(\frac{y}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_B}{r}\right)}. \quad (68)$$

Ta je samozřejmě závislá na rychlosti stěny buňky $\dot{w}_B(x)$ ve směru x , tuto rychlost zjednodušeně získáme lineární interpolací mezi \dot{w}_B^I a \dot{w}_B^{III}

$$\dot{w}_B(x) = \frac{x - w_B^I}{w_B^{III} - w_B^I} (\dot{w}_B^{III} - \dot{w}_B^I) + \dot{w}_B^I. \quad (69)$$

Integrací rychlosti přes plochu průřezu pak získáme objemový průtok

$$Q^{II}(x) = \pi (r^2 - R_B^2) \dot{u}_x - \left(\pi R_B^2 + \frac{\pi (r^2 - R_B^2)}{2 \ln\left(\frac{R_B}{r}\right)} \right) \dot{w}_B - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi}{8\mu} \left((r^4 - R_B^4) + \frac{(r^2 - R_B^2)^2}{\ln\left(\frac{R_B}{r}\right)} \right). \quad (70)$$

Také v tomto úseku musí platit zachování objemu proudící tekutiny, tedy analogicky k (49)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + 2\pi r \dot{u}_r - 2\pi R_B \dot{R}_B = 0,$$

respektive po dosazení z výrazu (67)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + 2\pi h \dot{u}_r = 0. \quad (71)$$

6.5 Hranice mezi úseky

Dále je potřeba uvážit síly působící na buňku ve směru x . Ty zapříčiní transport buňky, tedy i pro výpočet nutných hranic mezi úseky. Určitě bude působit tlak tekutiny - jeho celková bilance P_B je tvořena rozdílem tlaků na základnách buňky a tlakem působícím v meziprostoru na stěnu buňky ve směru x

$$P_B = p(w_B^I)\pi R_B^2(w_B^I) - p(w_B^{III})\pi R_B^2(w_B^{III}) - \int_{w_B^I}^{w_B^{III}} \pi R_B(x)p(x)n_{Bx}(x)dx. \quad (72)$$

Síly působící proti pohybu budeme uvažovat ve tvaru frikční síly

$$F_B = f_r 2\pi \int_{w_B^I}^{w_B^{III}} R_B(x) (\dot{w}_B(x) - \dot{u}_x(x)) dx \quad (73)$$

s frikčním koeficientem f_r . Považujme ho rovněž za známou veličinu.

Pro další zjednodušení řekněme, že uvažujeme ustálený pohyb, kdy je nulové celkové (průměrné) zrychlení buňky, a tedy i setrvačné síly působící na buňku. Celková rovnováha vnějších sil tak bude mít tvar

$$P_B - F_B = 0. \quad (74)$$

Máme již vyjádřeny vztahy pro zachování objemu ve všech třech částech, nakonec je potřeba vyšetřit přechody mezi nimi.

Objemový průtok tekutiny v úseku I v w_B^I musí být rovný součtu průtoku v úseku II ve stejném místě a prostoru uvolněného pohybem základny buňky, tedy

$$Q(w_B^I) = Q^{II}(w_B^I) + \pi R_B^2(w_B^I)\dot{w}_B^I, \quad (75)$$

na druhé hranici pak analogicky

$$Q(w_B^{III}) = Q^{II}(w_B^{III}) + \pi R_B^2(w_B^{III})\dot{w}_B^{III}. \quad (76)$$

Vzhledem k těmto podmínkám může dojít v bodech $x = w_B^I$ a $x = w_B^{III}$ ke skokovým změnám rychlosti a průtoku.

6.6 Shrnutí

Celkově tedy máme proudění tekutiny popsané rovnicemi (65) a (71)

$$\begin{aligned} \forall x \in (0, w_B^I) : \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \dot{u}_x - \frac{r^4}{8\mu} 2\pi r \gamma \kappa (\pi r^2 - \pi r_0^2)^{\kappa-1} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2r \dot{u}_r &= 0, \\ \forall x \in (w_B^I, w_B^{III}) : \frac{\partial Q^{II}}{\partial x} + 2\pi h \dot{u}_r &= 0, \\ \forall x \in (w_B^{III}, L) : \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \dot{u}_x - \frac{r^4}{8\mu} 2\pi r \gamma \kappa (\pi r^2 - \pi r_0^2)^{\kappa-1} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + 2r \dot{u}_r &= 0, \end{aligned} \quad (77)$$

pro neznámou r , její derivace, polohu hranic w_B^I a w_B^{III} a jejich derivace, kde

$$\begin{aligned}
Q^{II}(x) &= \pi (r^2 - R_B^2) \dot{u}_x - \left(\pi R_B^2 + \frac{\pi (r^2 - R_B^2)}{2 \ln \left(\frac{R_B}{r} \right)} \right) \dot{w}_B - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi}{8\mu} \left((r^4 - R_B^4) + \frac{(r^2 - R_B^2)^2}{\ln \left(\frac{R_B}{r} \right)} \right), \\
\dot{w}_B(x) &= \frac{x - w_B^I}{w_B^{III} - w_B^I} (\dot{w}_B^{III} - \dot{w}_B^I) + \dot{w}_B^I, \\
R_B &= r - h, \\
\frac{\partial p}{\partial x} &= 2\pi r \gamma \kappa (\pi r^2 - \pi r_0^2)^{\kappa-1} \frac{\partial r}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{78}$$

Podmínky na rozhraních jsou vyjádřeny rovnicemi (75) a (76)

$$\begin{aligned}
Q(w_B^I) &= Q^{II}(w_B^I) + \pi R_B^2(w_B^I) \dot{w}_B^I, \\
Q(w_B^{III}) &= Q^{II}(w_B^{III}) + \pi R_B^2(w_B^{III}) \dot{w}_B^{III}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Posun těchto rozhraní pak do spojitosti s r dávají (66) a (74)

$$\begin{aligned}
P_B - F_B &= 0, \\
\int_{w_B^I}^{w_B^{III}} \pi R_B^2(x) dx &= konst,
\end{aligned} \tag{80}$$

kde

$$\begin{aligned}
P_B &= p(w_B^I) \pi R_B^2(w_B^I) - p(w_B^{III}) \pi R_B^2(w_B^{III}) - \int_{w_B^I}^{w_B^{III}} \pi R_B(x) p(x) n_{Bx}(x) dx, \\
F_B &= f_r 2\pi \int_{w_B^I}^{w_B^{III}} R_B(x) (\dot{w}_B(x) - \dot{u}_x(x)) dx, \\
p &= \gamma (\pi r^2 - \pi r_0^2)^\kappa, \\
R_B &= r - h.
\end{aligned} \tag{81}$$

Pro řešení by pak bylo nutné znát okrajové a počáteční podmínky

$$\begin{aligned}
p(x=0), \\
p(x=L), \\
w_B^I(t=0), \\
w_B^{III}(t=0).
\end{aligned} \tag{82}$$

7 Závěr

Byly ukázány základní poznatky z fyziologie potřebné pro pochopení funkce krevního proudění, a to především na kapilární úrovni. Zde se jako zcela určující projevuje vliv krevních buněk, kvůli kterým je, na rozdíl od vyšších úrovní kardiovaskulárního systému, pro uspokojivý popis nutné uvažovat krev jako heterogenní médium. V práci byly rovněž představeny základní způsoby modelování těchto buněk. Kromě popisu problematiky byl rovněž vytvořen a implementován zjednodušený model interakce proudění s poddajným prostředím. V něm se sice projevily nedostatky Fourierovy metody řešení parabolické parciální diferenciální rovnice, která neuvažuje proměnné okrajové podmínky, nicméně tento problém nesouvisí přímo s interakcí, stejnou roli hraje u případu s předepsaným pohybem prostředí. Model je možné dále využít jako výchozí bod pro další práce na vyšší úrovni obtížnosti. Rovněž byl představen zjednodušený model zkoumající vliv postupného vlnění prostředí na proudění. Poslední část pak sestává z návrhu modelu proudění uvažující i velmi zjednodušený model buňky. Hlavní význam práce je tedy především ilustrativní, vhodný pro pochopení základních principů proudění kapilárami, zároveň se nicméně naskýtá široká škála možností rozšíření uvedených modelů pro další účely (převod do 3D, komplexnější model cévní stěny a především buňky) a v pozdější fázi například také konkrétnější parametrizace podle experimentálně získaných dat.

Co se týče zadaných zásad pro vypracování, studium popisu interakce poddajných těles s kapalinou je zpracováno implementovaným modelem v kapitole 4. Druhý bod je splněn částečně, kdy je v kapitole 5 pro zkoumání vlivu postupných vln představen model proudění pouze newtonské tekutiny, zde je prostor pro další návaznou práci. Neneutonské vlastnosti krve jsou popsány a vysvětleny v kapitolách 2 a 3. O symetrii (nikoliv ovšem rotační) je rovněž doplněn model interakce. Zjednodušený model proudění buňky kapilárou je představen v kapitole 6, zde by bylo na místě další rozšíření pomocí složitějšího modelu, který by bral v potaz mechanismy cytoskeletu. Náhled na různé typy modelů buněk zahrnuje kapitola 3. Vliv vlnění nebyl zkoumán přímo ve smyslu akustiky, ale v působení postupného vlnění stěny cévy na médium v kapitole 5. V rámci práce byly implementovány dva různé modely, jeden pro popis interakce a jeden pro popis vlivu vln.

Seznam použité literatury

- [1] L. S. Costanzo, *Physiology, E-Book*. Elsevier Health Sciences, 2013.
- [2] J. Švíglerová *et al.*, *Fyziologie kardiovaskulárního systému*. Lékařská fakulta v Plzni, Univerzita Karlova.
- [3] O. Kittnar *et al.*, *Lékařská fyziologie*. Grada publishing, as, Praha, 2011.
- [4] A. Quarteroni, “Cardiovascular mathematics,” *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2006-01-01, ISBN 978-3-03719-022-7, pags. 479-512*, vol. 1, 01 2009.
- [5] V. C. Scanlon and T. Sanders, *Essentials of Anatomy and Physiology Fifth Edition*. F. A. Davis Company, 2007.
- [6] M. Nakao, “Function and structure of the red blood cell cytoskeleton,” in *Erythroid Cells*, pp. 195–225, Springer, 1990.
- [7] V. Rajagopal, W. R. Holmes, and P. V. S. Lee, “Computational modeling of single-cell mechanics and cytoskeletal mechanobiology,” *Wiley Interdisciplinary Reviews: Systems Biology and Medicine*, vol. 10, no. 2, p. e1407, 2018.
- [8] S. E. Lux IV, “Anatomy of the red cell membrane skeleton: unanswered questions,” *Blood, The Journal of the American Society of Hematology*, vol. 127, no. 2, pp. 187–199, 2016.
- [9] K. Shou, M. Sarter, N. R. De Souza, L. De Campo, A. E. Whitten, P. W. Kuchel, C. J. Garvey, and A. M. Stadler, “Effect of red blood cell shape changes on haemoglobin interactions and dynamics: a neutron scattering study,” *Royal Society open science*, vol. 7, no. 10, p. 201507, 2020.
- [10] C.-H. Wang and A. S. Popel, “Effect of red blood cell shape on oxygen transport in capillaries,” *Mathematical biosciences*, vol. 116, no. 1, pp. 89–110, 1993.
- [11] C. Pozrikidis, “Numerical simulation of the flow-induced deformation of red blood cells,” *Annals of biomedical engineering*, vol. 31, no. 10, pp. 1194–1205, 2003.
- [12] L. Dintenfass, “Internal viscosity of the red cell and a blood viscosity equation,” *Nature*, vol. 219, no. 5157, pp. 956–958, 1968.
- [13] M. Diez-Silva, M. Dao, J. Han, C.-T. Lim, and S. Suresh, “Shape and biomechanical characteristics of human red blood cells in health and disease,” *MRS bulletin*, vol. 35, no. 5, pp. 382–388, 2010.
- [14] I. Dulińska, M. Targosz, W. Strojny, M. Lekka, P. Czuba, W. Balwierz, and M. Szymoński, “Stiffness of normal and pathological erythrocytes studied by means of atomic force microscopy,” *Journal of biochemical and biophysical methods*, vol. 66, no. 1-3, pp. 1–11, 2006.
- [15] M. Li, L. Liu, N. Xi, Y. Wang, Z. Dong, X. Xiao, and W. Zhang, “Atomic force microscopy imaging and mechanical properties measurement of red blood cells and aggressive cancer cells,” *Science China Life Sciences*, vol. 55, no. 11, pp. 968–973, 2012.

- [16] S. Barns, M. A. Balanant, E. Sauret, R. Flower, S. Saha, and Y. Gu, “Investigation of red blood cell mechanical properties using afm indentation and coarse-grained particle method,” *Biomedical engineering online*, vol. 16, no. 1, pp. 1–21, 2017.
- [17] S. Paxton, M. Peckham, and A. Knibbs, “The leeds histology guide,” 2003.
- [18] G. W. Schmid-Schönbein, S. Usami, R. Skalak, and S. Chien, “The interaction of leukocytes and erythrocytes in capillary and postcapillary vessels,” *Microvascular research*, vol. 19, no. 1, pp. 45–70, 1980.
- [19] G. Késmárky, P. Kenyeres, M. Rábai, and K. Tóth, “Plasma viscosity: a forgotten variable,” *Clinical hemorheology and microcirculation*, vol. 39, no. 1–4, pp. 243–246, 2008.
- [20] G. Li, H. Wang, M. Zhang, S. Tupin, A. Qiao, Y. Liu, M. Ohta, and H. Anzai, “Prediction of 3d cardiovascular hemodynamics before and after coronary artery bypass surgery via deep learning,” *Communications biology*, vol. 4, no. 1, pp. 1–12, 2021.
- [21] D. A. Steinman, “Assumptions in modelling of large artery hemodynamics,” *Modeling of physiological flows*, pp. 1–18, 2012.
- [22] N. Westerhof, F. Bosman, C. J. De Vries, and A. Noordergraaf, “Analog studies of the human systemic arterial tree,” *Journal of biomechanics*, vol. 2, no. 2, pp. 121–143, 1969.
- [23] J. Janalík, *Hydrodynamika a hydrodynamické stroje*. VŠB - TU Ostrava, Fakulta strojní, 2008.
- [24] A. R. Pries, T. Secomb, T. Gessner, M. Sperandio, J. Gross, and P. Gaehtgens, “Resistance to blood flow in microvessels in vivo.,” *Circulation research*, vol. 75, no. 5, pp. 904–915, 1994.
- [25] T. Secomb, “Mechanics of blood flow in capillaries,” *Contemporary Math.*, vol. 141, 01 1993.
- [26] T. Klöppel, *A finite element model for the human red blood cell*. PhD thesis, Technische Universität München, 2012.
- [27] M. Nakamura, S. Bessho, and S. Wada, “Analysis of red blood cell deformation under fast shear flow for better estimation of hemolysis,” *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, vol. 30, no. 1, pp. 42–54, 2014.
- [28] T. Wu and J. J. Feng, “Simulation of malaria-infected red blood cells in microfluidic channels: Passage and blockage,” *Biomicrofluidics*, vol. 7, no. 4, p. 044115, 2013.
- [29] T. Wang, U. Rongin, and Z. Xing, “A micro-scale simulation of red blood cell passage through symmetric and asymmetric bifurcated vessels,” *Scientific reports*, vol. 6, no. 1, pp. 1–13, 2016.
- [30] K.-i. Tsubota and S. Wada, “Elastic force of red blood cell membrane during tank-treading motion: Consideration of the membrane’s natural state,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, no. 2, pp. 356–364, 2010.

- [31] C. Lim, E. Zhou, and S. Quek, “Mechanical models for living cells—a review,” *Journal of biomechanics*, vol. 39, no. 2, pp. 195–216, 2006.
- [32] A. Yeung and E. Evans, “Cortical shell-liquid core model for passive flow of liquid-like spherical cells into micropipets,” *Biophysical journal*, vol. 56, no. 1, pp. 139–149, 1989.
- [33] C. Zhu, G. Bao, and N. Wang, “Cell mechanics: mechanical response, cell adhesion, and molecular deformation,” *Annual review of biomedical engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 189–226, 2000.
- [34] V. Constantinescu, “Steady parallel flow of incompressible fluids,” in *Laminar Viscous Flow*, pp. 109–137, Springer, 1995.
- [35] P. Drábek and G. Holubová, “Parciální diferenciální rovnice,” 2011.
- [36] A. Bermúdez, P. Gamallo, L. Hervella-Nieto, R. Rodríguez, and D. Santamarina, “Fluid–structure acoustic interaction,” in *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids-Finite and Boundary Element Methods*, pp. 253–286, Springer, 2008.
- [37] E. Rohan and R. Cimrman, “Towards modelling fluid structure interactions in ureter: introductory study,” *Proceedings of the 20th conference Computational Mechanics 2004*, pp. 437–444, 2004.
- [38] M. F. Khalil, S. Z. Kassab, I. G. Adam, and M. Samaha, “Laminar flow in concentric annulus with a moving core,” in *Twelfth Int. Water Technol. Conf. Alexandria, Egypt*, pp. 439–457, 2008.