



**FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI**

Katedra mechaniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modelování proudění krve v 1D modelech arterií
s uvažováním poddajnosti cévních stěn

Tomáš Augustiňák

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.

Plzeň 2022

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Tomáš AUGUSTIŇÁK**
Osobní číslo: **A19B0636P**
Studijní program: **B3947 Počítačové modelování v technice**
Studijní obor: **Počítačové modelování**
Téma práce: **Modelování proudění krve v 1D modelech arterií s uvažováním
poddajnosti cévních stěn**
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Sestavení matematického modelu popisujícího 1D proudění nestlačitelné kapaliny v poddajné trubici včetně formulace příslušných okrajových podmínek.
2. Zobecnění výše uvedeného matematického modelu pro případ bifurkace.
3. Vývoj algoritmů pro numerické řešení pomocí metody konečných objemů.
4. Numerické řešení jak testovacích problémů, tak fyziologicky relevantních problémů proudění krve v 1D modelech arterií.
5. Vyhodnocení, diskuse dosažených výsledků a formulace závěrů.

Rozsah bakalářské práce: **30 – 50 stran A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

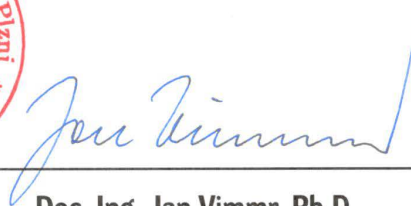
1. S. J. Sherwin, V. Franke, J. Peiró, K. Parker: One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics* 47: 217-250, 2003.
2. S. J. Sherwin, L. Formaggia, J. Peiró, V. Franke: Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 43: 673-700, 2003.
3. J. Vimmr, A. Jonášová: Modelování hemodynamiky v cévních náhradách. (Interní text KME)
4. Matlab: uživatelský manuál.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.**
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **18. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2022**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 18. října 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl použitou literaturu a všechny prameny, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne: _____ Podpis: _____

Poděkování

Děkuji panu doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D., z FAV ZČU v Plzni za odborné konzultace a nemálo času, který mi věnoval, aby mohla tato práce vzniknout.

Děkuji rovněž doc. Ing. Marku Brandnerovi, Ph.D., za konzultace týkající se numerických výpočtů, které mi výrazně pomohly s jejich implementací.

Anotace

Hlavním cílem předložené bakalářské práce je sestavit a numericky vyřešit matematický model popisující nestacionární proudění nestlačitelné kapaliny v 1D poddajné trubici, které by svým charakterem aproximovalo pulzační tok krve v přímém segmentu poddajné artérie. Kromě shrnutí hlavních matematických principů a předpokladů spjatých s užitím tohoto typu modelu je obsahem práce rovněž jeho zobecnění pro případ cévní bifurkace. Vyvinutý výpočetní algoritmus, založený na metodě konečných objemů v kombinaci s explicitním MacCormackovým schématem, je nejprve verifikován na příkladu 1D arteriálního segmentu a poté aplikován pro řešení pulzačního proudění krve v 1D modelu karotické bifurkace. Pro dosažení fyziologicky korektních tokových podmínek a pro aproximaci chování periferního krevního oběhu je na výstupech 1D segmentů aplikován 0D model ve formě tříprvkového Windkessel modelu (RCR model).

Klíčová slova

1D model proudění krve, Windkessel model, metoda konečných objemů, MacCormackovo schéma, karotická bifurkace, poddajná cévní stěna

Abstract

The main goal of this bachelor thesis is to derive and solve a mathematical model of unsteady flow of an incompressible fluid in 1D compliant vessel that approximates the pulsatile blood flow in a straight segment of a compliant artery. In addition to summarizing the main mathematical principles and assumptions connected to using this model, this thesis also contains its generalization to an arterial bifurcation. The algorithm we develop is based on the finite volume method (FVM) and is verified on 1D arterial segment. It is then applied to the solution of pulsatile blood flow in 1D model of a carotic bifurcation. To ensure physiologically relevant flow conditions and approximate the behavior of peripheral blood circulation, RCR Windkessel models are applied to the outlets of 1D segments.

Keywords

1D blood flow model, Windkessel model, finite volume method, MacCormack scheme, carotic bifurcation, elastic vascular wall

Obsah

Úvod	1
1 Matematický model proudění krve v 1D modelu arterie s poddajnou stěnou	3
1.1 Vztah mezi tlakem a průsvitem cévy	4
1.2 Odvození a použití zákonů zachování	6
1.2.1 Odvození Reynoldsova transportního teorému	6
1.2.2 Zákon zachování hmotnosti	8
1.2.3 Zákon zachování hybnosti	9
1.2.4 Formulace zákonů zachování v proměnných A a U	13
1.2.5 Maticový tvar a charakteristické rovnice	14
1.2.6 Bernoulliho rovnice	17
1.2.7 Matematický model proudění krve v 1D modelu bifurkace . . .	19
2 Tříprvkový Windkessel model (RCR model)	21
2.1 Odpor cévního řečiště	21
2.2 Poddajnost cévy	22
2.3 Kirchhoffův zákon o uzlech	23
2.4 Napojení 0D modelu na 1D model	24
3 Numerické řešení	27
3.1 Odvození metody konečných objemů pro nelineární skalární hyperbolicou PDR v 1D	27
3.2 Implementace okrajových podmínek	28
3.3 Lineární interpolace	30
3.4 Určení časového kroku Δt	31
3.5 Implementace numerického řešení v Matlabu	31
4 Aplikace odvozené metody na konkrétní úlohy proudění krve	34
4.1 Testovací úloha	34
4.2 Úloha s karotickou bifurkací	39
4.3 Modifikace úlohy s karotickou bifurkací	44

Závěr	47
Seznam použité literatury a zdrojů informací	49

Úvod

Správná funkce většiny orgánů lidského těla je určitým způsobem spjata s krví a jejím tokem v cévách. Konkrétně je zde myšlena především nezastupitelná funkce krve jakožto hlavního transportního média, které jednotlivým tkáním zajišťuje nepřetržitý přísun kyslíku, živin a dalších životně důležitých látek. Narušení této funkce, např. následkem kornatění tepen neboli rozvoje aterosklerózy, v jejímž důsledku bývá výraznou měrou snížen průtok krve cévami a omezeno prokrvení tkání, může mít pro člověka až fatální následky, tak jako tomu je v případě infarktu myokardu či mozkové mrtvice. Schopnost předvídat tyto zmíněné patologické stavy prostřednictvím numerických simulací proudění krve je v současnosti do značné míry limitováno prostorově velmi složitým kardiovaskulárním systémem každého člověka a jedinečností jeho hemodynamiky (tlak krve, srdeční tep atd.). Z tohoto důvodu se často přistupuje k modelování pouze vybrané části kardiovaskulárního systému, např. v oblasti výskytu aterosklerózy, kde je možné s dostatečnou přesností a na základě klinických dat zrekonstruovat 3D geometrii relevantních cév. Proudění krve ve zbylých (nemodelovaných) částech cévního oběhu pak bývá aproximováno za pomoci matematických modelů tzv. nižšího prostorového řádu, které jsou v odborné literatuře označovány jako 0D a 1D modely proudění krve. Tyto modely v mnoha případech plní funkci přidružených modelů, jejichž hlavním úkolem je stanovení fyziologicky korektních vstupních, resp. výstupních okrajových podmínek u 3D simulací pulzačního proudění krve.

S ohledem na nemalý význam 0D a 1D modelů v případě výše zmíněného víceškálového přístupu si předložená bakalářská práce klade za cíl podrobně popsat matematické principy spjaté s užitím obou typů modelů při numerických simulacích pulzačního proudění krve arteriálními segmenty majícími podobu 1D poddajných trubic. V tomto ohledu je obsah práce rozdělen do čtyř na sebe navazujících kapitol.

V první kapitole jsou představeny předpoklady a základní principy modelování proudění krve v 1D poddajných trubicích (cévách). Jsou zde odvozeny zákony zachování hmotnosti a hybnosti, které jsou dále přeformulovány do podoby odvíjející se od dvou klíčových proměnných, a to rychlosti protékající krve a průsvitu cévy. V závěru první kapitoly je sestavený matematický model proudění v poddajném 1D

segmentu cévy rozšířen pro případ cévní bifurkace.

Podstata 0D modelů proudění, konkrétně tzv. RCR modelu označovaného v odborné literatuře jako tříprvkový Windkessel model, je shrnuta ve druhé kapitole této práce. Vzhledem k tomu, že zvolený 0D model je zde uvažován především jako nástroj pro stanovení fyziologicky korektních výstupních/výtokových veličin dříve popsaného 1D modelu proudění krve, je část druhé kapitoly rovněž věnována matematickým principům zajišťujícím kontinuitu všech veličin na rozhraní mezi uvažovanými 1D a 0D modely proudění.

Numerické řešení dříve sestaveného matematického modelu proudění krve v 1D poddajných trubicích je pro potřeby této práce realizováno pomocí metody konečných objemů, jejíž aplikace je ve třetí kapitole demonstrována na příkladu Cauchyho úlohy pro skalární nelineární hyperbolickou parciální diferenciální rovnici (PDR) v 1D. Pro diskretizaci je zde užito explicitní dvoukrokové MacCormackovo schéma druhého řádu přesnosti v čase i prostoru implementované v Matlabu.

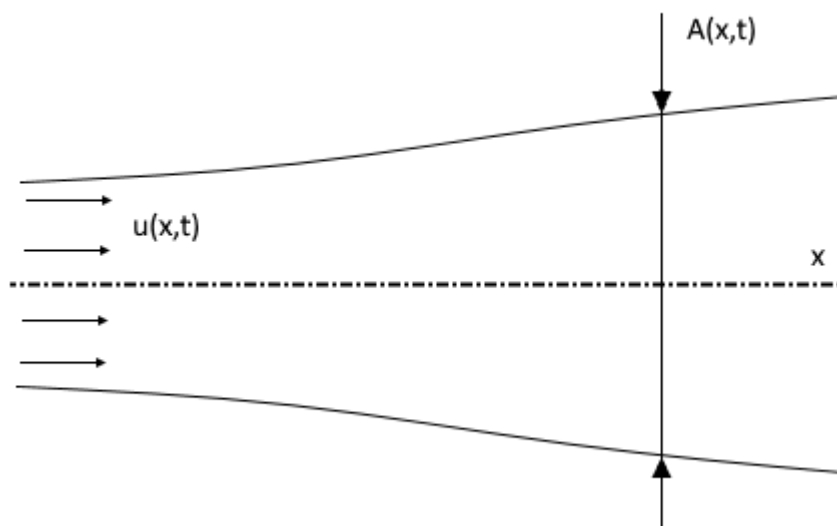
V poslední čtvrté kapitole je na několika vybraných příkladech demonstrována funkčnost vyvinutých výpočetních algoritmů. Jsou zde prezentovány jak výsledky získané řešením testovacího problému na 1D trubici s poddajnou stěnou, tak výsledky numerických simulací fyziologického proudění krve v 1D modelu cévní bifurkace. Konkrétně se jedná o karotickou bifurkaci, u níž byl zkoumán především vliv poddajnosti cévní stěny na charakter pulzačního proudění a změnu průsvitu jednotlivých cévních segmentů v důsledku šíření tlakových vln.

V závěru předložené práce jsou shrnuty získané poznatky a nastíněny možnosti dalšího rozšíření popsaného matematického modelu proudění krve včetně jeho možné implementace ve víceškálových simulacích pulzačního proudění krve.

1 Matematický model proudění krve v 1D modelu arterie s poddajnou stěnou

V této kapitole vysvětlíme, jak lze popsat proudění krve poddajnou cévou. Zformulujeme zákon zachování hmotnosti a zákon zachování hybnosti. Odvodíme rovněž vztah mezi průsvitem cévy a tlakem uvnitř cévy. Pak se budeme zabývat řešením cévního rozvětvení neboli bifurkace.

Základním předpokladem, který umožňuje použití jednorozměrného modelu, je dostatečně malé lokální zakřivení cévy. Pokud toto platí, můžeme střednici cévy ztotožnit s osou x kartézského souřadnicového systému, viz obr. 1.



Obr. 1: Céva, jejíž střednici ztotožníme s osou x

V 1D modelu zavádíme průměrnou rychlost proudění tekutiny U , která závisí pouze na jedné prostorové souřadnici x a na čase t . Velikost této průměrné rychlosti je v celém průřezu konstantní

$$U = \frac{\int_A u dS}{A}. \quad (1)$$

Ve vztahu výše u značí rychlost proudění v daném místě a čase $u = u(x, t)$ a $A = A(x, t)$ je průsvit cévy na určité souřadnici x a v daném čase t .

1.1 Vztah mezi tlakem a průsvitem cévy

Tlak v cévě značíme p , tlak okolního prostředí, resp. vnější tlak p_{ext} , průsvit cévy za rovnovážného stavu A_{eq} . Pak lze ukázat, že platí

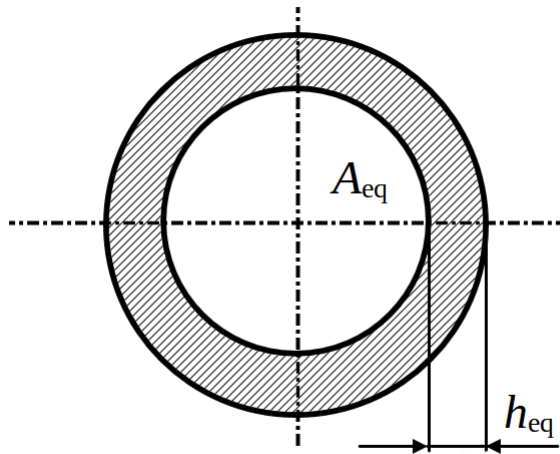
$$p - p_{\text{ext}} = \beta(x)(\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{eq}}}), \quad (2)$$

kde

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} h_{\text{eq}} E}{(1 - \nu^2) A_{\text{eq}}}. \quad (3)$$

Tento vztah nyní odvodíme.

Označíme Youngův modul pružnosti jako E , ν je Poissonovo číslo, A_{eq} je rovnovážný průsvit cévy a h_{eq} je tloušťka stěny cévy v rovnovážném stavu (viz obr. 2). Odvození provádíme v oblasti lineární pružnosti za předpokladu statické rovnováhy a malých deformací, které umožňují výpočty provádět na nepřetvořené cévě. Tlak je na stěně cévy rovnoměrně rozložen, vliv vlastní tíhy neuvažujeme.



Obr. 2: Příčný řez cévou

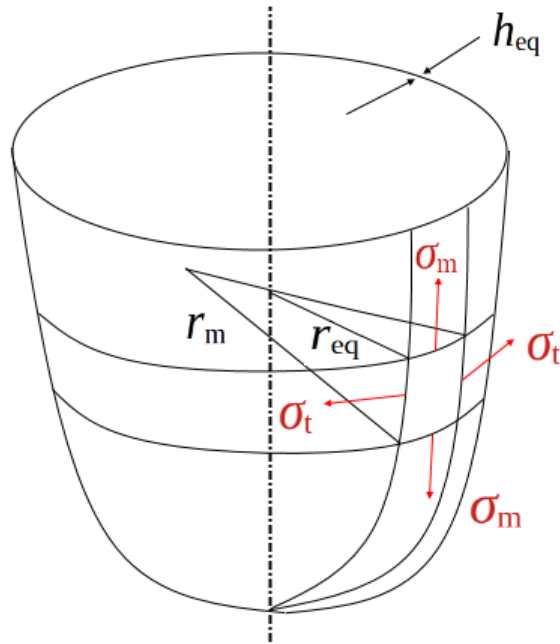
Vyjdeme z Laplaceovy rovnice pro tenkostěnnou nádobu (viz WWW stránku [2])

$$\frac{p - p_{\text{ext}}}{h_{\text{eq}}} = \frac{\sigma_t}{r_{\text{eq}}} + \frac{\sigma_m}{r_m}, \quad (4)$$

kam dosadíme limitně nekonečný meridiální poloměr

$$r_m \rightarrow \infty, \quad (5)$$

protože cévu lze považovat za válcovou nádobu. Pro lepší představu viz obr. 3.



Obr. 3: Válcová nádoba s vyznačenými poloměry a napětími

Máme tedy

$$p - p_{\text{ext}} = \frac{h_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}} \sigma_t. \quad (6)$$

Ze základních kurzů lineární pružnosti je znám vztah pro napětí ve stěně válcové nádoby v obvodovém směru

$$\sigma_t = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \varepsilon = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{r - r_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}}, \quad (7)$$

kde veličina

$$\varepsilon = \frac{r - r_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}} \quad (8)$$

je poměrné přetvoření tělesa v obvodovém směru.

Po dosazení za napětí σ_t dostaneme

$$p - p_{\text{ext}} = \frac{h_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{r - r_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}}}. \quad (9)$$

Vztah dále upravíme za předpokladu kruhového průřezu, pro který platí $A = \pi r^2$, z čehož plyne $r = \sqrt{A/\pi}$

$$p - p_{\text{ext}} = \frac{h_{\text{eq}}}{\sqrt{A_{\text{eq}}/\pi}} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{\sqrt{A/\pi} - \sqrt{A_{\text{eq}}/\pi}}{\sqrt{A_{\text{eq}}/\pi}}, \quad (10)$$

toto ještě jednou upravíme a dostaneme finální tvar

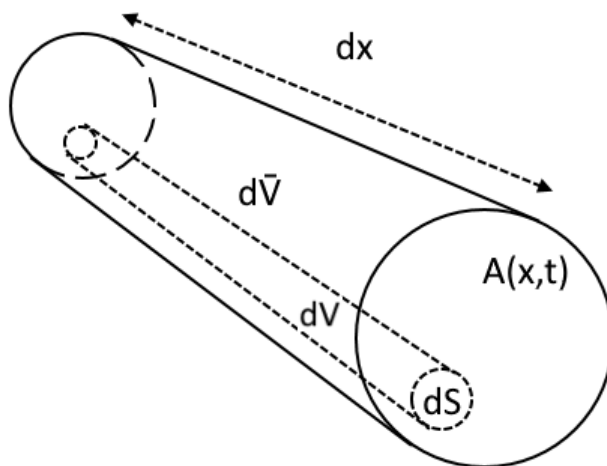
$$p - p_{\text{ext}} = h_{\text{eq}} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{eq}}})}{A_{\text{eq}}} = \beta(x) (\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{eq}}}). \quad (11)$$

Zde jsme zavedli veličinu $\beta(x)$ podle vztahu (3).

1.2 Odvození a použití zákonů zachování

1.2.1 Odvození Reynoldsova transportního teorému

V tomto odstavci odvodíme Reynoldsův transportní teorém pro proudění obecné extenzivní fyzikální veličiny B v 1D trubici s proměnným průřezem. Pro snazší představu viz obr. 4.



Obr. 4: Elementy objemu trubice dV a $d\bar{V}$

Zavedme hustotu veličiny B vztahem

$$\rho_B = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta V} = \frac{dB}{dV} \quad (12)$$

a tok veličiny B

$$j_B = \rho_B u. \quad (13)$$

Velikost veličiny B **přiteklé** do kontrolního objemu $dV = dx dS$ v místě x za čas dt bude

$$(dB)_1' = \frac{dB}{dV} dV = \rho_B \frac{dx}{dt} dS dt = \rho_B u dS dt. \quad (14)$$

Integrujeme tento vztah podle S přes plochu $A = A(x,t)$

$$(dB)_1 = \int_A \rho_B u dS dt. \quad (15)$$

Velikost veličiny B **vyteklé** z kontrolního objemu $dS dx$ v místě $x + dx$ vyjádříme jako

$$(dB)_2 = (dB)_1 + \frac{\partial B}{\partial x} dx = \int_A \rho_B u dS dt + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho_B u dS dt \right) dx. \quad (16)$$

Rozdíl množství vyteklé a přitekuté veličiny B označíme jako konvektivní změnu

$$(dB)_{\text{konv}} = (dB)_2 - (dB)_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho_B u dS dt \right) dx. \quad (17)$$

Dále určíme lokální změnu veličiny B v kontrolním objemu. V čase t se v kontrolním objemu nachází element veličiny B o velikosti

$$(dB)_I' = \frac{dB}{dV} dV = \rho_B dV = \rho_B dS dx. \quad (18)$$

Tento vztah zintegrujeme podle S přes plochu $A(x,t)$

$$(dB)_I = \rho_B dV = \int_A \rho_B dS dx. \quad (19)$$

Tato elementární veličina se za čas dt změní na

$$(dB)_{II} = (dB)_I + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A \rho_B dS dx \right) dt. \quad (20)$$

Vyjádříme jejich rozdíl

$$(dB)_{\text{lok}} = (dB)_{II} - (dB)_I = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A \rho_B dS dx \right) dt. \quad (21)$$

Má-li být veličina B zachována, musí být konvektivní změna a lokální změna této veličiny v součtu nulové. Píšeme

$$(dB)_{\text{konv}} + (dB)_{\text{lok}} = 0, \quad (22)$$

kam dosadíme ze (17) a (21)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho_B u dS dt \right) dx + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A \rho_B dS dx \right) dt = 0. \quad (23)$$

Všimněme si, že x není funkcí t ani t není funkcí x (to platí i pro jejich diferenciály), a rovnici vydělíme součinem $dx dt$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A \rho_B dS \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho_B u dS \right) = 0, \quad (24)$$

což je hledaný Reynoldsův transportní teorém.

Pokud se v kontrolním objemu vyskytují zdroje (obecně je označíme Σ), doplníme je na pravou stranu teorému

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A \rho_B dS \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho_B u dS \right) = \Sigma. \quad (25)$$

1.2.2 Zákon zachování hmotnosti

Vyjděme z Reynoldsova transportního teorému (24) a uvažujme, že A je plocha kolmá na směr proudění a j_B značí tok extenzivní veličiny B definovaný vztahem (13). Ještě si vyjádříme (druhá rovnost platí pro konstantní hustotu)

$$\int_A j_B dS = \int_A \rho_B u dS \stackrel{(1)}{=} \rho_B A U, \quad (26)$$

kde U je průměrná rychlost proudění veličiny B va daném průřezu. Obdobně za předpokladu konstantní hustoty platí

$$\int_A \rho_B dS = \rho_B A. \quad (27)$$

V případě zachování hmotnosti přejdeme k hustotě hmoty ρ , přičemž $\rho \equiv \rho_B$, dosadíme do rovnice (24)

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho A \frac{dx}{dt} \right) = 0. \quad (28)$$

Povšimněme si, že $A dx$ můžeme nahradit diferenciálem objemu, který je různý od dříve zavedeného $dV = dS dx$ – viz obr. 4

$$d\bar{V} = A dx, \quad (29)$$

a platí tedy

$$Q = \frac{d\bar{V}}{dt} = A \frac{dx}{dt}, \quad (30)$$

kde Q je objemový průtok. Do rovnice (28) dosadíme Q

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho Q) = 0. \quad (31)$$

Celou rovnici už jen vydělíme konstantní hustotou ρ .

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

Nyní ukážeme alternativní odvození zákona zachování hmotnosti inspirované [5]. Odvození lze provést tak, že cévu délky l považujeme za kontrolní objem. Vypočítáme jej jako

$$V(t) = \int_0^l A(x,t)dx. \quad (33)$$

Předpokládáme, že tekutina nemůže procházet stěnami, může pouze přitékat nebo odtékat konci cévy. Změnu objemu vypočítáme takto

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = Q(0,t) - Q(l,t). \quad (34)$$

Pak lze napsat zákon zachování hmotnosti ve tvaru

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \rho Q(l,t) - \rho Q(0,t) = 0. \quad (35)$$

Dosadíme za derivaci objemu z rovnice (33)

$$\rho \frac{d}{dt} \int_0^l A(x,t)dx + \rho Q(l,t) - \rho Q(0,t) = 0. \quad (36)$$

Hraniční člen nahradíme integrálem z parciální derivace

$$\rho \frac{d}{dt} \int_0^l A(x,t)dx + \rho \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0. \quad (37)$$

Zaměníme pořadí integrace a derivace v prvním členu a vydělíme hustotou

$$\int_0^l \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dx + \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0. \quad (38)$$

Integrály sloučíme do jednoho a povšimneme si, že délka l je libovolná, z čehož vyplývá nulovost integrandu

$$\int_0^l \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0, \quad (39)$$

z čehož plyne

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (40)$$

1.2.3 Zákon zachování hybnosti

Hustota hybnosti se získá jako

$$\rho_H = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta mv}{\Delta V} = \rho u. \quad (41)$$

Zintegrujeme si přes plochu průřezu A (hustotu hmoty považujeme za konstantní)

$$\int_A \rho_H dS = \int_A \rho u dS = \rho AU = \rho Q. \quad (42)$$

Dále pak tok hybnosti můžeme vyjádřit jako

$$j_H = \rho_H u = \rho u^2. \quad (43)$$

Toho můžeme využít dále

$$\int_A j_H dS = \int_A \rho u^2 dS = \frac{Au^2}{Au^2} \int_A \rho u^2 dS = \alpha \rho AU^2 = \alpha \rho Qu, \quad (44)$$

kde zavádíme symbol α , bez kterého bychom nemohli použít průměrnou rychlost proudění U

$$\alpha = \frac{\int_A u^2 dS}{Au^2}. \quad (45)$$

Dosadíme do Reynoldsova teorému (24) ze vztahů (42) a (44) a dostaneme

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho QU) = 0. \quad (46)$$

Získaný vztah integrujeme podle x přes celou cévu, abychom odvodili rovnováhu sil ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q dx + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho QU) dx = F. \quad (47)$$

Na rozdíl od zákona zachování hmotnosti budeme v zákoně zachování hybnosti mít nenulovou pravou stranu, na které budou vystupovat síly. Těmi budou jednak viskózní síly, jejichž lineární hustotu značíme f_v , a jednak tlaková síla.

Viskózní síly nalezneme integrací jejich lineární hustoty podél cévy

$$F_v = \int_0^l f_v dx. \quad (48)$$

Diskutujme působení tlakové síly na objem kapaliny v kolmých řezech cévou na souřadnicích $x = 0$, resp. $x = l$. V prvním řezu působí tlaková síla ve směru osy x , velikost plochy a tlaku v daném místě označujeme indexem

$$F_{p0} = (pA)_0. \quad (49)$$

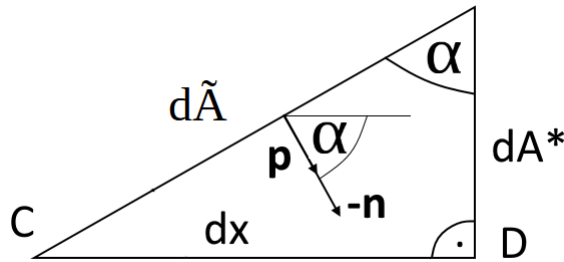
V druhém řezu síla působí opačně a dostáváme

$$F_{pl} = -(pA)_l. \quad (50)$$

Dostáváme se k určení velikosti x -ové složky tlakové síly, kterou působí stěna cévy na kapalinu. Zvětšuje-li se v daném místě průsvit cévy, míří x -ová složka vnějšího jednotkového normálového vektoru (n_x) proti směru osy x , zatímco tlak působí ve směru této osy (viz obr. 5). Proto výslednou tlakovou sílu zapíšeme jako záporně vzatý integrál přes stěnu cévy z tlaku promítnutého do osy x

$$F_p = - \int_0^l \int_{\partial S} p n_x ds dx. \quad (51)$$

Vzhledem k tomu, že céva je osově symetrická, probíhá vnitřní integrace přes kružnici.



Obr. 5: Elementární plochy na stěně cévy, tlak a vnitřní normála

Výraz pro tlakovou sílu (51) upravíme s přihlédnutím k obr. 5. Tlak \mathbf{p} působí kolmo na elementární plošku $d\tilde{A}$, přičemž do směru osy x se promítne síla

$$dF_p = -p n_x d\tilde{A} = p \|\mathbf{-n}\| \cos(\alpha) d\tilde{A} = p \cos(\alpha) d\tilde{A}. \quad (52)$$

Plocha dA^* má velikost

$$dA^* = d\tilde{A} \cos(\alpha). \quad (53)$$

Této rovnosti ihned využijeme

$$dF_p = p \cos(\alpha) d\tilde{A} = p \cos(\alpha) \frac{dA^*}{\cos(\alpha)} = p dA^*. \quad (54)$$

Ještě zjistíme, co vlastně označuje symbol dA^* . Definujme vzdálenost $\Delta x := |CD|$ a počítejme limitu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x_D, t) - A(x_C, t)}{\Delta x} = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (55)$$

Parciální derivace A podle x je směrnici přímky, na níž leží $d\tilde{A}$. Tuto směrnici lze zapsat jako

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (56)$$

V bodě C na obr. 5 má céva průsvit A , v bodě D pak $A + dA^*$. Rozdíl hodnot průsvitu mezi body C a D, tedy dA^* , podělený vzdáleností bodů, tedy dx , je rovný hodnotě funkce tangens ve vztahu (56)

$$\frac{dA^*}{dx} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad (57)$$

odkud plyne

$$dA^* = \frac{\partial A}{\partial x} dx. \quad (58)$$

Nyní již upravíme integrál ve vztahu (51) na

$$F_p = \int_0^l p \frac{\partial A}{\partial x} dx. \quad (59)$$

Máme výslednou sílu

$$F = F_{p0} + F_{pl} + F_p + F_v. \quad (60)$$

První dva členy na pravé straně rovnosti lze ještě upravit na tvar

$$F_{p0} + F_{pl} = (pA)_0 - (pA)_l = - \int_0^l \frac{\partial pA}{\partial x} dx. \quad (61)$$

Dosadíme za F do vztahu (47)

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q dx + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho Q U) dx = - \int_0^l \frac{\partial pA}{\partial x} dx + \int_0^l p \frac{\partial A}{\partial x} dx + \int_0^l f_v dx. \quad (62)$$

V prvním členu prohodíme derivaci a integraci a integrály sloučíme do jediného

$$\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho Q) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho Q U) + \frac{\partial pA}{\partial x} - p \frac{\partial A}{\partial x} - f_v \right) dx = 0. \quad (63)$$

Ještě jednou upravíme (na členy s tlakem použijeme vzorec pro derivaci součinu)

$$\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho Q) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho Q U) + A \frac{\partial p}{\partial x} - f_v \right) dx = 0. \quad (64)$$

Délka l byla zvolena libovolně, jinými slovy, integrál musí být nulový pro libovolné meze. To implikuje nulovou hodnotu integrandu skoro všude

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Q) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho Q U) + A \frac{\partial p}{\partial x} - f_v = 0 \text{ s. v.} \quad (65)$$

Odhlédneme od detailu (nulovosti integrandu skoro všude), vydělíme ρ a dostaneme

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha Q U) = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v}{\rho}. \quad (66)$$

Nyní ukážeme alternativní odvození inspirované [5]. Cévu považujeme za kontrolní objem a nepřipouštíme průsak tekutiny skrze stěnu. Před vlastním odvozením definujeme

$$\alpha = \frac{\int_A u^2 dS}{Au^2}. \quad (67)$$

Pro libovolnou délku l bude platit tvar zákona zachování hybnosti

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q dx + \left(\int_A \rho u^2 dS \right)_l - \left(\int_A \rho u^2 dS \right)_0 = F, \quad (68)$$

kde F jsou vnější síly působící na kontrolní objem ve směru x .

Dosadíme z výrazu pro α (67) za integrály v závorkách a máme

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q dx + (\alpha \rho AU^2)_l - (\alpha \rho AU^2)_0 = F, \quad (69)$$

kde použijeme rovnost $Q = Au$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q dx + (\alpha \rho QU)_l - (\alpha \rho QU)_0 = F. \quad (70)$$

Druhý a třetí sčítanec převedeme na integrál z parciální derivace

$$(\alpha \rho QU)_l - (\alpha \rho QU)_0 = \int_0^l \frac{\partial(\alpha \rho QU)}{\partial x} dx \quad (71)$$

a dostaneme rovnici (47). Zbytek odvození jsme ukázali výše.

1.2.4 Formulace zákonů zachování v proměnných A a U

Rovnice (32) a (66) lze přepsat do tvaru, v němž budou vystupovat neznámé A a U . Zákon zachování hmotnosti upravíme velice snadno, stačí totiž pouze dosadit za objemový průtok $Q = Au$, takže dostaneme

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Au) = 0. \quad (72)$$

Nyní upravíme zákon zachování hybnosti (66) analogickým dosazením za Q , což nám dá

$$\frac{\partial Au}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha AU^2) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v}{\rho}, \quad (73)$$

kde užijeme pravidlo pro derivaci součinu a získáme

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}(\alpha AU) + AU \frac{\partial}{\partial x}(\alpha U) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v}{\rho}. \quad (74)$$

Teď přičteme a odečteme člen $U \frac{\partial}{\partial x} (AU)$ a přeskupíme členy

$$U \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} ((\alpha - 1)AU) + A \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} (\alpha U) \right) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v}{\rho}. \quad (75)$$

Člen v první závorce je nulový, neboť se jedná o levou stranu rovnice (72). Jedná-li se navíc situaci bez viskózních sil, tj. $f_v = 0$, a rychlostní profil je plochý, tj. $U = u$, z čehož plyne $\alpha = 1$, vypadne druhý člen na levé i pravé straně

$$A \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (76)$$

Už jen vydělíme celou rovnici A , čímž obdržíme tvar

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (77)$$

Derivaci tlaku interpretujeme za pomoci vztahu (2), který zderivujeme podle x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\beta}{2\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{DA} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad (78)$$

kde jsme zavedli roztažnost jako

$$D = \frac{2}{\beta\sqrt{A}}. \quad (79)$$

1.2.5 Maticový tvar a charakteristické rovnice

Rovnice (72) a (77) lze přepsat do maticové podoby takto

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U & A \\ \frac{1}{\rho DA} & U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} U & A \\ \frac{1}{\rho DA} & U \end{bmatrix} \quad (81)$$

a píšeme

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (82)$$

Je možné i vyjádření v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} Au \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\beta}{\rho} (\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{eq}}}) + \frac{p_{\text{eq}}}{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (83)$$

kde označíme tokovou funkci

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} Au \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\beta}{\rho} (\sqrt{A} - \sqrt{A_{\text{eq}}}) + \frac{p_{\text{eq}}}{\rho} \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Matici \mathbf{B} budeme nyní diagonalizovat. Nejprve stanovíme její vlastní čísla z rovnice

$$\det(\mathbf{B} - \mathbf{I}\lambda) = 0 \quad (85)$$

neboli

$$\begin{vmatrix} U - \lambda & A \\ \frac{1}{\rho DA} & U - \lambda \end{vmatrix} = (U - \lambda)^2 - \frac{1}{\rho D} = 0. \quad (86)$$

Získáme

$$|U - \lambda| = \frac{1}{\sqrt{\rho D}} =: c \quad (87)$$

a vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = U \pm c = U \pm \frac{1}{\sqrt{\rho D}}. \quad (88)$$

Pro typické hodnoty rychlosti proudění krve ($U < c$) vychází $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$.

Nalezneme levostranné vlastní vektory, které splňují rovnost

$$\mathbf{I}_{1,2}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}_{1,2} \lambda_{1,2}. \quad (89)$$

Dosadíme za první vlastní číslo a máme

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & A \\ \frac{c^2}{A} & U \end{bmatrix} = (U + c) \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

což dává soustavu lineárně závislých rovnic

$$\begin{aligned} -cl_{11} + \frac{c^2}{A}l_{12} &= 0 \\ Al_{11} - cl_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Z první rovnice vyjádříme

$$l_{11} = \frac{c}{A}l_{12}. \quad (92)$$

Zvolíme

$$l_{12} = 1 \quad (93)$$

a dopočítáme

$$l_{11} = \frac{c}{A}. \quad (94)$$

Vlastní vektor \mathbf{l}_1 tedy je

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} \frac{c}{A} & 1 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Naprostο analogickým postupem nalezneme druhý vlastní vektor

$$\mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{c}{A} & 1 \end{bmatrix}. \quad (96)$$

Oba vektory sepíšeme do matice levostranných vlastních vektorů

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{c}{A} & 1 \\ -\frac{c}{A} & 1 \end{bmatrix}, \quad (97)$$

která splňuje vztah

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L} \implies \mathbf{L}\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}, \quad (98)$$

kde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Dosaďme za \mathbf{B} do rovnice (82)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (100)$$

Přenásobme rovnici \mathbf{L} zleva

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (101)$$

Zavedeme transformaci

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{L}, \quad (102)$$

kterou následně dosadíme

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (103)$$

Toto použitím pravidla pro derivaci složené funkce upravíme na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (104)$$

který rozepíšeme po složkách. Dostáváme dvě nezávislé **charakteristické rovnice**

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0. \quad (106)$$

Nyní v rovnosti (102) rozepíšeme derivaci na levé straně a dosadíme za \mathbf{L}

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial A} & \frac{\partial W_1}{\partial U} \\ \frac{\partial W_2}{\partial A} & \frac{\partial W_2}{\partial U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{A} & 1 \\ -\frac{c}{A} & 1 \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Každý z řádků představuje exaktní diferenciální rovnici pro W_1 , resp. W_2 ve tvaru

$$\frac{\partial W_{1,2}}{\partial A} = \pm \frac{c}{A}, \quad \frac{\partial W_{1,2}}{\partial U} = 1. \quad (108)$$

Abychom takové rovnice byli schopni řešit, musí platit

$$\frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial A \partial U} = \frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial U \partial A}. \quad (109)$$

Platnost tohoto vztahu dokážeme snadno derivací prvků matice \mathbf{L}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1}{\partial A \partial U} = \frac{\partial(c/A)}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W_1}{\partial U \partial A} = \frac{\partial 1}{\partial A} &= 0 \implies \frac{\partial^2 W_1}{\partial A \partial U} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial U \partial A} \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial A \partial U} = \frac{\partial(-c/A)}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial U \partial A} = \frac{\partial 1}{\partial U} &= 0 \implies \frac{\partial^2 W_2}{\partial A \partial U} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial U \partial A}. \end{aligned} \quad (110)$$

Rovnice (108) zintegrujeme a dostaneme

$$W_{1,2} = \int_{U_{\text{eq}}}^U dU \pm \int_{A_{\text{eq}}}^A \frac{c}{A} dA. \quad (111)$$

Upravíme argument druhého integrálu

$$\frac{c}{A} = \frac{1}{A\sqrt{\rho D}} = \frac{\sqrt{\beta} \sqrt[4]{A}}{A\sqrt{2\rho}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A^{-3/4}, \quad (112)$$

dosadíme a zintegrujeme, čímž dostaneme

$$W_{1,2} = U - U_{\text{eq}} \pm 4\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} (A^{1/4} - A_{\text{eq}}^{1/4}) = U - U_{\text{eq}} \pm 4(c - c_{\text{eq}}). \quad (113)$$

1.2.6 Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnici pro nestlačitelnou kapalinu proudící ustáleně rychlostí u , která se nenachází v žádném potenciálu vnějších sil, odvodíme ze zákona zachování energie

$$E_k + E_p = \text{konst.}, \quad (114)$$

kde E_k je kinetická energie elementu proudící kapaliny a E_p je jeho tlaková potenciální energie. Dosadíme za oba členy

$$\frac{1}{2}dmu^2 + pdV = \frac{1}{2}\rho dVu^2 + pdV = \text{konst.} \quad (115)$$

Po vydělení elementárním objemem máme

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = \text{konst.}, \quad (116)$$

pro libovolná dvě místa 1, 2 v kapalině tedy vychází

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2. \quad (117)$$

Ještě lze dosadit za tlak z rovnice (2) a obdržet

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_{\text{ext}} + \beta_1(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_{\text{eq}}}) = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_{\text{ext}} + \beta_2(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_{\text{eq}}}). \quad (118)$$

Po odečtení externích tlaků máme

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + \beta_1(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_{\text{eq}}}) = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \beta_2(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_{\text{eq}}}). \quad (119)$$

Dá se ukázat, že vztah (114) je analogický rovnováze setrvačné síly a tlakové síly působící na element kapaliny, tedy

$$-dm \frac{dv}{dt} - dpdA = 0. \quad (120)$$

Tento vztah vynásobíme dx , upravíme

$$dm \frac{dv}{dt} dx + dpdAdx = 0 \quad (121)$$

$$dm \frac{dx}{dt} du + dpdV = 0. \quad (122)$$

Tuto rovnici lze snadno převést na tvar (77) pro ustálené proudění ($U = u = \text{konst.}$).

Pokračujme ale ve výpočtu

$$\int dm \frac{dx}{dt} du + \int dpdV = 0 \quad (123)$$

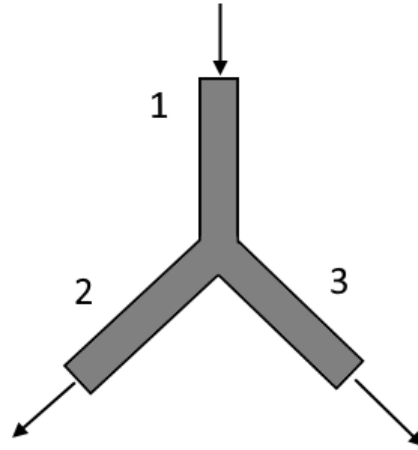
$$dm \frac{u^2}{2} + pdV = \text{konst.}, \quad (124)$$

což je rovnice (115).

1.2.7 Matematický model proudění krve v 1D modelu bifurkace

Při modelování proudění krve v cévách lze očekávat situaci, kdy se primární céva rozděluje na několik sekundárních cév. Cílem této práce také je popsat proudění krve v 1D modelu rozvětvené cévy, konkrétně bifurkaci. Toto rozvětvení popíšeme propojením tří 1D modelů cév. Proto se nyní zaměříme na to, jak takové propojení realizovat.

Schéma bifurkace, je znázorněno na obr. 6.



Obr. 6: Schéma bifurkace

Při výpočtu distribuce krve směřující z cévy 1 do cév 2 a 3 budeme výsledné vztahy odvozovat v jednom časovém okamžiku a v místě, které je společné všem třem cévám. Je zřejmé, že objemový průtok výstupem cévy 1 se musí rovnat součtu objemových průtoků na vstupech cév 2 a 3 (používáme $u = v$), aby se zachovala hmotnost

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \implies A_1 U_1 = A_2 U_2 + A_3 U_3. \quad (125)$$

Požadujeme-li zachování toku hybnosti na rozhraní cév 1 a 2, resp. 1 a 3, dostaneme podmínky na spojitost tlaku na hranici cév

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + \beta_1 (\sqrt{A_1} - \sqrt{A_{\text{eq}}^1}) = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \beta_2 (\sqrt{A_2} - \sqrt{A_{\text{eq}}^2}), \quad (126)$$

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + \beta_1 (\sqrt{A_1} - \sqrt{A_{\text{eq}}^1}) = \frac{1}{2} \rho U_3^2 + \beta_3 (\sqrt{A_3} - \sqrt{A_{\text{eq}}^3}). \quad (127)$$

Tyto rovnice jsou ekvivalentní Bernoulliho rovnici (119). Horní index průsvitu A značí cévu. Výpočet bude probíhat tak, že budeme hledat $A_1, A_2, A_3, U_1, U_2, U_3$

neboli budeme řešit soustavu šesti rovnic o šesti neznámých. Tři rovnice zbývá doplnit.

Z rovnic (88), (105) a (106) snadno nahlédneme, že perturbace v charakteristické proměnné W_1 se za předpokladu $U < c$ šíří rychlostí kladnou, zato perturbace v proměnné W_2 rychlostí zápornou.

V cévě 1 tedy platí, že bifurkace může dosáhnout pouze perturbace δW_1 proměnné W_1 , v cévách 2 a 3 naopak δW_2 . Abychom doplnili chybějící rovnice to naší soustavy, využijeme získaných vztahů pro charakteristické proměnné (113) a píšeme

$$W_1^1 = U_1 - U_{\text{eq}}^1 + 4(c_1 - c_{\text{eq}}^1) \quad (128)$$

$$W_2^2 = U_2 - U_{\text{eq}}^2 - 4(c_2 - c_{\text{eq}}^2) \quad (129)$$

$$W_2^3 = U_3 - U_{\text{eq}}^3 - 4(c_3 - c_{\text{eq}}^3) \quad (130)$$

neboli

$$W_1^1 = U_1 - U_{\text{eq}}^1 + 4\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} \left(\sqrt[4]{A_1} - \sqrt[4]{A_{\text{eq}}^1} \right) \quad (131)$$

$$W_2^2 = U_2 - U_{\text{eq}}^2 - 4\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} \left(\sqrt[4]{A_2} - \sqrt[4]{A_{\text{eq}}^2} \right) \quad (132)$$

$$W_2^3 = U_3 - U_{\text{eq}}^3 - 4\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} \left(\sqrt[4]{A_3} - \sqrt[4]{A_{\text{eq}}^3} \right). \quad (133)$$

Veličiny W_1^1 , W_2^2 a W_2^3 budeme při výpočtu znát. Výpočet provádíme v Matlabu funkcí *fsolve*, která používá variantu Powellova algoritmu. Podrobnosti implementace nalezneme čtenář na WWW stránce [7].

2 Tříprvkový Windkessel model (RCR model)

Při modelování proudění krve představují výzvu okrajové podmínky úlohy, neboť je zpravidla obtížné je experimentálně získat, ať se jedná o tlak, nebo rychlost proudění. Proto se používají takzvané 0D modely neboli modely se soustředěnými parametry, jejichž nastavováním lze ovlivňovat okrajové podmínky 1D modelu. 0D modely jsou z matematického hlediska dynamické systémy, takže nastavením jejich parametrů významně ovlivníme jejich chování. My budeme konkrétně používat RCR model, který zohledňuje odpor cévního řečiště a poddajnost cévy.

2.1 Odpor cévního řečiště

Následující definice je převzata z literatury [6].

Cévní odpor R na určitém segmentu cévy je obecně definován jako

$$R = \frac{\Delta p}{Q} [\text{Pa s m}^{-3}], \quad (134)$$

kde Δp je průměrný tlakový rozdíl mezi vstupem a výstupem daného segmentu a Q je průměrné průtočné množství vyvolané existencí nenulového tlakového gradientu.

Nyní ozřejmíme souvislost odporu cévního řečiště a elektrického odporu vodiče protékaného elektrickým proudem. V elektrickém obvodu je příčinou vzniku proudu nenulový rozdíl elektrických potenciálů (úbytek napětí) na koncích vodiče. V analogii s prouděním tekutiny píšeme

$$U_e \longleftrightarrow \Delta p. \quad (135)$$

Pro objemový průtok platí, že je rovný množství (objemu) tekutiny proteklé daným průřezem trubice za infinitezimální čas dt

$$Q = \frac{dV}{dt}. \quad (136)$$

Podobně v případě elektrického obvodu je elektrický proud podílem elektrického náboje proteklého průřezem vodiče za čas dt a tohoto času neboli

$$i = \frac{dQ_e}{dt}, \quad (137)$$

kde jsme elektrický náboje opatřili indexem e , aby nemohlo dojít k záměně s objemovým průtokem. Platí tedy analogie

$$i \longleftrightarrow Q_e. \quad (138)$$

Pak definujeme elektrický odpor R_e

$$R_e = \frac{U_e}{i} [\Omega], \quad (139)$$

odkud vidíme formální podobnost se vztahem pro odpor cévního řečiště (134).

Můžeme ještě napsat všeobecně známý Ohmův zákon v obvyklém tvaru

$$U_e = R_e i. \quad (140)$$

2.2 Poddajnost cévy

Následující definice je převzata z literatury [6].

Parametr vyjadřující poddajnost lze obecně definovat jako

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta(\Delta p)} [\text{m}^3 \text{ Pa}^{-1}], \quad (141)$$

kde $\Delta(\Delta p)$ je změna tlakového rozdílu mající za následek změnu objemu ΔV .

V elektrickém obvodu odpovídá změna objemu ΔV přitéklému elektrickému náboji Q_e

$$\Delta V \longleftrightarrow Q_e \quad (142)$$

a změna tlakového rozdílu je analogická úbytku napětí (= rozdílu potenciálů) na kondenzátoru

$$\Delta(\Delta p) \longleftrightarrow U_e. \quad (143)$$

Můžeme definovat elektrickou kapacitu (pro tuto chvíli ji označme C_e) v analogii se vztahem (141)

$$C_e = \frac{Q_e}{U_e} [\text{F}]. \quad (144)$$

Dále nalezneme vztah mezi úbytkem napětí na kondenzátoru a elektrickým proudem, který jím protéká

$$U_e(t) = \frac{1}{C_e} \int_0^t i(\tau) d\tau, \quad (145)$$

kde jsme využili vztahu mezi elektrickým nábojem a proudem

$$Q_e = \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (146)$$

2.3 Kirchhoffův zákon o uzlech

Tento Kirchhoffův zákon se týká součtu proudů v uzlu elektrického obvodu. Zní následovně:

Algebraický součet proudů v uzlu je nulový.

Zapíšeme jej rovnicí

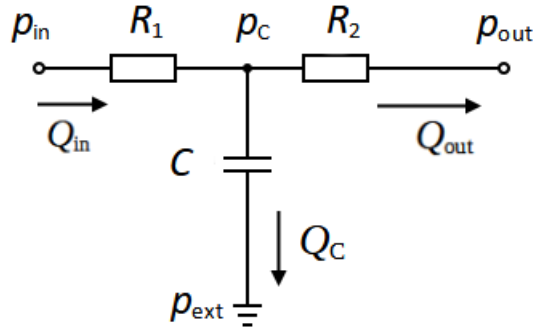
$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (147)$$

Respektujeme-li analogii mezi elektrickým proudem i a objemovým průtokem Q , píšeme

$$\sum_{k=1}^n Q_k = 0. \quad (148)$$

Dále používáme dohodu, že proud (objemový průtok) vtékající do uzlu má znaménko minus, kdežto vytékající znaménko plus. Je možné použít i opačnou konvenci.

Nyní Kirchhoffův zákon o uzlech použijeme na 0D model (patří do třídy Windkessel modelů) typu RCR. Jak název napovídá, tento model proudění krve cévou obsahuje dva parametry s významem odporu cévního řečiště a jeden parametr znamenající cévní poddajnost (viz obr. 7).



Obr. 7: Tříprvkový Windkessel (0D) model

Napišeme si algebraický součet proudů v uzlu spojujícím větve s kondenzátorem a větve s rezistory

$$Q_C + Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}} = 0. \quad (149)$$

Proud (objemový průtok) ve větvi s kondenzátorem vyjádříme z derivace vztahu (145) s přihlédnutím k analogii mezi napětím a tlakovým rozdílem, resp. průtokem

a proudem

$$C \frac{d(p_C - p_{\text{ext}})}{dt} + Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}} = 0. \quad (150)$$

Konstantu p_{ext} zderivujeme, dostaneme 0 a máme

$$C \frac{dp_C}{dt} + Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}} = 0. \quad (151)$$

2.4 Napojení 0D modelu na 1D model

Naším cílem je určit hodnoty průsvitu a rychlosti proudění A^* a U^* v časovém kroku n na výstupním okraji výpočetní oblasti na základě znalosti hodnot z předchozího časového kroku. Hodnoty ve vhodném místě 1D modelu ($x_N + \Delta x - \lambda_1^n \Delta t$) v čase t^{n-1} označíme A_L a U_L . Velkými písmeny značíme přibližné hodnoty neznámých funkcí.

První rovnicí, kterou použijeme, je rovnost první charakteristické proměnné na okraji v n -tém čase a její hodnoty v přechozím čase ve vypočítaném místě.

$$W_1(A^*, U^*) = W_1(A_L, U_L) \quad (152)$$

neboli

$$U^* - U_{\text{eq}} + 4(c(A^*) - c(A_{\text{eq}})) = U_L - U_{\text{eq}} + 4(c(A_L) - c(A_{\text{eq}})), \quad (153)$$

což lze upravit na tvar

$$U^* = U_L + 4c(A_L) - 4c(A^*). \quad (154)$$

Dále použijeme Ohmův zákon na rezistor R_1

$$R_1 A^* U^* = P(A^*) - p_C^n \implies A^* U^* = \frac{P(A^*) - p_C^n}{R_1}, \quad (155)$$

kde jsme definovali

$$P(A^*) = \beta (\sqrt{A^*} - \sqrt{A_0}), \quad (156)$$

což je tlak v cévě za předpokladu **nulového externího tlaku**.

Na uzel spojující kondenzátor a oba rezistory použijeme Kirchhoffův zákon o uzlech (vtékající proud značíme znaménkem minus) a dostaneme vztah (151)

$$C \frac{dp_C}{dt} + Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}} = 0. \quad (157)$$

Derivaci nahradíme poměrnou diferencí a navíc dosadíme $Q_{\text{in}} = A^* U^*$, což nám dá

$$C \frac{p_C^n - p_C^{n-1}}{\Delta t} + Q_{\text{out}}^n - A^* U^* = 0. \quad (158)$$

Ještě jednou použijeme Ohmův zákon, tentokrát na rezistor R_2

$$R_2 Q_{\text{out}}^n + p_{\text{out}} - p_{\text{C}}^n = 0. \quad (159)$$

Nyní řešíme soustavu algebraických rovnic (154), (155), (158) a (159), kde eliminujeme U^* , Q_{out}^n a p_{C}^n . Dosadíme (154) do (155)

$$A^* (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = \frac{P(A^*) - p_{\text{C}}^n}{R_1} \quad (160)$$

a do (158)

$$C \frac{p_{\text{C}}^n - p_{\text{C}}^{n-1}}{\Delta t} + Q_{\text{out}}^n - A^* (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = 0. \quad (161)$$

Nyní vyjádříme ze vztahu (159)

$$Q_{\text{out}}^n = \frac{p_{\text{C}}^n - p_{\text{out}}}{R_2} \quad (162)$$

a ihned dosadíme do (161), což dá

$$C \frac{p_{\text{C}}^n - p_{\text{C}}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{p_{\text{C}}^n - p_{\text{out}}}{R_2} + A^* (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = 0. \quad (163)$$

Rovnici vynásobíme $-\Delta t R_2$

$$-CR_2(p_{\text{C}}^n - p_{\text{C}}^{n-1}) - \Delta t(p_{\text{C}}^n - p_{\text{out}}) - A^* \Delta t R_2 (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = 0. \quad (164)$$

Upravíme první dva členy takto

$$-CR_2(p_{\text{C}}^n - p_{\text{C}}^{n-1}) - \Delta t(p_{\text{C}}^n - p_{\text{out}}) = -p_{\text{C}}^n [CR_2 + \Delta t] + CR_2 p_{\text{C}}^{n-1} + \Delta t p_{\text{out}}, \quad (165)$$

tedy

$$-p_{\text{C}}^n [CR_2 + \Delta t] + CR_2 p_{\text{C}}^{n-1} + \Delta t p_{\text{out}} - A^* \Delta t R_2 (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = 0. \quad (166)$$

Ze (160) vyjádříme

$$p_{\text{C}}^n = P(A^*) - R_1 A^* (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) \quad (167)$$

a dosadíme do (166), což nám dá

$$\begin{aligned} & - [P(A^*) - R_1 A^* (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*))] [CR_2 + \Delta t] + \\ & + CR_2 p_{\text{C}}^{n-1} + \Delta t p_{\text{out}} - A^* \Delta t R_2 (U_{\text{L}} + 4c(A_{\text{L}}) - 4c(A^*)) = 0. \end{aligned} \quad (168)$$

Rovnici upravíme a vydělíme $[CR_2 + \Delta t]$, takže pro A^* obdržíme nelineární algebraickou rovnici ve tvaru

$$A^* \left(R_1 + \frac{R_2 \Delta t}{CR_2 + \Delta t} \right) (U_L + 4c(A_L) - 4c(A^*)) + \frac{CR_2 + p_{\text{out}} \Delta t}{CR_2 + \Delta t} - P(A^*) = 0. \quad (169)$$

Podle literatury [1] označíme

$$p_{\text{out,RCR}} = \frac{CR_2 + p_{\text{out}} \Delta t}{CR_2 + \Delta t}, \quad (170)$$

což nám umožní napsat

$$A^* \left(R_1 + \frac{R_2 \Delta t}{CR_2 + \Delta t} \right) (U_L + 4c(A_L) - 4c(A^*)) + p_{\text{out,RCR}} - P(A^*) = 0. \quad (171)$$

Tuto rovnici řešíme funkcí *fzero*, která v Matlabu hledá kořeny nelineárních rovnic. Podrobnosti nalezne čtenář v knize [3].

Dodejme, že pro účely našich výpočtů budeme tlak p_{out} pokládat rovný 0.

3 Numerické řešení

V této kapitole odvozujeme metodu konečných objemů pro skalární hyperbolickou PDR v 1D. Dále popisujeme implementaci okrajových podmínek našeho modelu, který touto metodou řešíme a určení časového kroku z CFL podmínky. Rovněž je v této kapitole popsána implementace odvozené metody v Matlabu.

3.1 Odvození metody konečných objemů pro nelineární skalární hyperbolickou PDR v 1D

Odvození provedeme pro Cauchyovu úlohu pro nelineární hyperbolickou PDR

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0, \quad f \in C(\mathbb{R}), \quad t \in [0; \tau], \quad U \in C^1(\mathbb{R} \times [0; \tau]), \quad (172)$$

kde $U = U(x, t)$ je hledaná funkce a $f = f(U(x, t))$ je funkce toku.

Zavedeme konečné objemy nad výpočetní oblastí Ω tak, aby platilo

$$\Omega_i = [x_{i-1/2}; x_{i+1/2}], \quad i = 1, \dots, K, \quad (173)$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^K \Omega_i = \Omega. \quad (174)$$

Rovnici (172) integrujeme podle x

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial U}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f(U)}{\partial x} dx = 0. \quad (175)$$

Z prvního integrálu zaměníme pořadí derivování a integrování a ve druhém integrálu použijeme metodu per partes, čímž dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t) dx + f(U(x_{i+1/2}, t)) - f(U(x_{i-1/2}, t)) = 0. \quad (176)$$

Zavedeme integrální průměr hledané funkce v konečném objemu

$$\bar{U}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t) dx, \quad (177)$$

kde $|\Omega_i|$ je velikost konečného objemu. Dostaneme semidiskrétní tvar rovnice (172)

$$|\Omega_i| \frac{d\bar{U}_i}{dt} + f(U(x_{i+1/2}, t)) - f(U(x_{i-1/2}, t)) = 0 \quad (178)$$

neboli

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_i|} [f(U(x_{i+1/2}, t)) - f(U(x_{i-1/2}, t))]. \quad (179)$$

Nyní diskretizujeme časovou derivaci pomocí dopředné diference

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} = \frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} \quad (180)$$

a po dosazení

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} [f(U(x_{i+1/2}, t^n)) - f(U(x_{i-1/2}, t^n))], \quad (181)$$

kde t^n je n -tá časová hladina. Hodnoty toků v krajních bodech konečných objemů neznáme. Musíme použít aproximaci, která závisí na použité metodě.

Pro MacCormackovo schéma, které budeme dále používat, mají aproximace tvar

$$\bar{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (E_i^* + E_{i+1}^n), \quad (182)$$

$$\bar{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (E_{i-1}^* + E_i^n), \quad (183)$$

kde

$$E_i^* = f(\bar{U}_i^*) \quad (184)$$

a

$$\bar{U}_i^* = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n) \quad (185)$$

se nazývá prediktor.

MacCormackovo schéma se často používá ve tvaru prediktor-korektor a korektor je dán vztahem

$$\bar{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\bar{U}_i^n + \bar{U}_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_i^* - E_{i-1}^*) \right]. \quad (186)$$

Při řešení soustavy rovnic budeme všechny hodnoty ve schématu značit **tučně**, neboť se jedná o uspořádané dvojice.

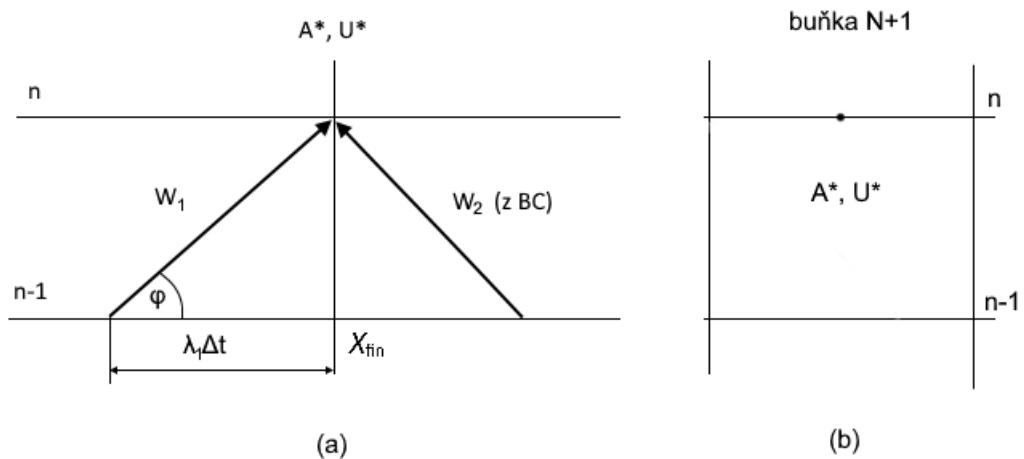
3.2 Implementace okrajových podmínek

Z diferenčního schématu MacCormackovy metody, konkrétně (182), lze nahlédnout, že při výpočtu N -té hodnoty v daném čase je nutné znát hodnotu toku E_{N+1}^n . Tuto hodnotu bychom aplikací tokové funkce získali jako

$$\mathbf{E}_{N+1}^n = \mathbf{f}(\mathbf{A}_{N+1}^n), \quad \mathbf{A}_i^n = [\bar{A}_i^n, \bar{U}_i^n]^T. \quad (187)$$

Tučná písmena značí uspořádanou dvojici hodnot. Problém spočívá v tom, že \mathbf{A}_{N+1}^n neznáme, neboť leží mimo výpočetní oblast Ω . Zřejmě je nutné při určování této hodnoty využít okrajových podmínek.

Považujeme charakteristickou rychlost λ_1 za konstantu. Charakteristická křivka, na které má veličina W_1 konstantní hodnotu, bude přímkou. Dále se orientujeme podle obr. 8.



Obr. 8: (a) k výpočtu hodnot na hranici, (b) implementace okrajové podmínky

Postup je následující:

Hodnotu W_1 v čase t^n určíme z časové hladiny $n - 1$ tak, že najdeme hodnotu W_1 na souřadnici

$$x = x_N + \Delta x - \lambda_1 \Delta t, \quad (188)$$

kde λ_1 jsme vypočítali v n -té časové hladině a kde x_N označuje střed N -tého konečného objemu. K dispozici máme ovšem pouze diskrétní hodnoty neznámých funkcí A a U , resp. W_1 a W_2 , takže musíme přistoupit k lineární interpolaci, v Matlabu implementované ve funkci *griddedInterpolant*. O principu lineární interpolace pojednává odstavec 3.3.

Hodnotu W_2 v čase t^n vypočítáme přímo z okrajové podmínky. K výpočtu charakteristických proměnných slouží rovnice (113).

V první časové hladině A^* , U^* ztotožníme s hodnotou okrajových podmínek.

Ve všech dalších krocích ze známých proměnných W_1 a W_2 vypočítáme A^* , U^*

inverzí vztahu (113)

$$A^* = \left[A_{\text{eq}}^{1/4} + \frac{W_1 - W_2}{8} \sqrt{\frac{2\rho}{\beta}} \right]^4, \quad U^* = \frac{W_1 + W_2}{2} + U_{\text{eq}} \quad (189)$$

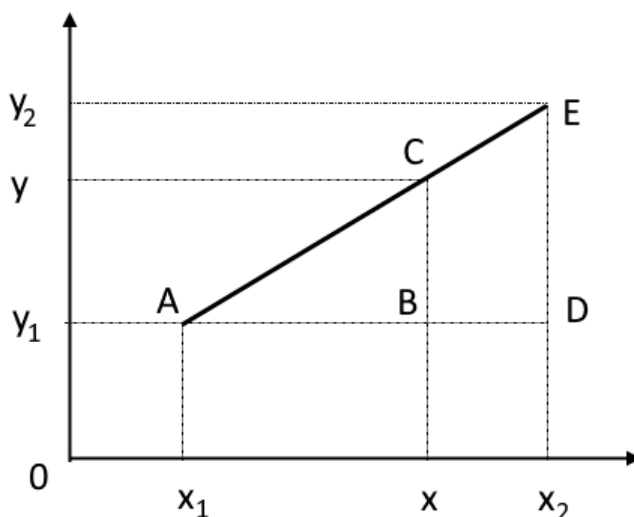
a z nich následně tok

$$f(A^*, U^*), \quad (190)$$

který uložíme do buňky $N + 1$ (viz obr. 8).

V případě, že hranice cévy leží v bifurkaci, se jako okrajové podmínky použijí hodnoty vypočítané ze soustavy rovnic (125)–(127) a (131)–(133).

3.3 Lineární interpolace



Obr. 9: Lineární interpolace

Pro nějaké veličiny x a y známe dvě dvojice jejich hodnot, (x_1, y_1) a (x_2, y_2) . Naším cílem je nalézt hodnotu y v bodě x – viz obr. 9.

Z podobnosti trojúhelníků ABC a ADE plyne

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (191)$$

Odtud vyjádříme

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1. \quad (192)$$

3.4 Určení časového kroku Δt

Z důvodu zajištění konvergence metody musí mezi časovým krokem Δt , prostorovým krokem Δx a maticí derivace toku \mathbf{B} platit vztah známý jako CFL podmínka

$$C \geq \max_i \frac{\|\mathbf{B}_i\| \Delta t}{\Delta x} \quad (193)$$

se vhodnou maticovou normou. C značí CFL číslo. Standardně se za maticovou normu volí spektrální poloměr definovaný jako

$$\|\mathbf{B}_i\| = \max |\sigma(\mathbf{B}_i)|, \quad (194)$$

jinými slovy maximální absolutní hodnota vlastního čísla matice \mathbf{B}_i . Symbol σ značí spektrum matice.

Časový krok vyjádříme vztahem

$$\Delta t \leq \min_i \frac{C \Delta x}{\|\mathbf{B}_i\|}. \quad (195)$$

3.5 Implementace numerického řešení v Matlabu

Popišme funkci *deltat2*. Tato funkce zajišťuje výpočet matice \mathbf{b} dané vztahem (81) a používá ji pro výpočet časového kroku z CFL podmínky vztahem (195), přičemž časový krok určuje tak, aby platila rovnost. Zdůrazňujeme, že minimum se vybírá z výrazů $\frac{C \Delta x}{\|\mathbf{b}_i\|}$, kde i indexuje konečný objem. Z vypočítaných časových kroků se ve funkci *Ceva* vybírá nejmenší (viz dále).

Funkce *prutok_bez_stenozy* počítá objemový průtok vstupním okrajem cévy 1 v daném čase t , který je jejím vstupem. Výpočet probíhá podle vzorce (196) s konstantami danými tab. 1.

Funkce *Prechod* realizuje řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic (125)–(127) a (131)–(133). Veličiny W_1 a W_2 , které do této funkce vstupují, jsou vypočítány na aktuální časové úrovni v krajních buňkách příslušných cév. Výpočet je proveden knihovní funkcí *fsolve*. Výstupní hodnoty neznámých A a U pak považujeme za hodnoty v buňkách 0, resp. $N + 1$ příslušných cév a dále je používáme k výpočtu toků.

V tomto odstavci vysvětlíme princip funkce *vypocti_tok*. Ve všech buňkách vyčíslí tok \mathbf{E}_j^n v daném čase podle vzorce (84). Tok s číslem buňky $N + 1$ určí podle stejného předpisu, ovšem postupem popsáním v části 3.2.

Na obdobném principu funguje funkce *vypocti_tok1*, která počítá E_i^* daný vztahem (184) ve všech buňkách kromě nulté. V nulté buňce se postupuje tak, že W_1 je dáno okrajovou podmínkou a W_2 dopočítáváme, v tom spočívá rozdíl oproti funkci *vypocti_tok*. **Nalezené hodnoty by se zdánlivě měly využít pro výpočet E_i^* vztahem (184), ale místo toho se počítá tok E_0^n !**

Funkce *vypocti_tok_WK* je obdoba funkce *vypocti_tok* pro cévy, k nimž je připojen Windkessel model. Jediný rozdíl oproti zmíněné funkci je způsob získání okrajové podmínky. Tato se počítá z rovnice (171), jejíž řešení probíhá numericky knihovní funkcí *fzero*.

Funkce *MacCormack* realizuje (jak už název napovídá) jeden krok MacCormackova numerického schématu. Rozlišují se v ní tři typy cév. Podle typu cévy se následně spouští metody (funkce) pro výpočet toků. Typ 1 je vstupní céva – má na vstupním okraji zadanou okrajovou podmínku pomocí anonymních funkcí. Do těch se dosadí aktuální čas. Na výstupním okraji je okrajová podmínka dána čísly vypočítanými ze soustavy nelineárních rovnic (125)–(127) a (131)–(133). Během výpočtu této cévy se spouští funkce *vypocti_tok* a *vypocti_tok1*. Typ 2 se v bifurkaci nevykytuje a je rezervován pro budoucí použití. Jedná se o cévu, ke které je z obou stran připojena jiná céva. Během výpočtu se spouští tytéž metody jako u typu 1. Céva typu 3 je na vstupním okraji připojena do bifurkace, zatímco na výstupním okraji má zadánu okrajovou podmínku pomocí 0D modelu. *MacCormack* tentokrát spouští funkce *vypocti_tok_WK* a *vypocti_tok1*.

Funkce *Ceva* je hlavní funkcí programu, neboť přímo či nepřímo spouští většinu ostatních funkcí. Nejprve jsou v ní definovány zadané veličiny (až na tlak p_{out} , ten je deklarován ve funkci *vypocti_tok_WK*), poté se naleznou středy konečných objemů a hodnotami z počátečních podmínek se naplní první řádky matice, kam se budou ukládat hodnoty neznámých funkcí A_j^n a U_j^n . Následuje smyčka s podmínkou na začátku, která se opakuje tak dlouho, dokud čas nepřekročí zadanou hodnotu t_{fin} .

V této smyčce program nejprve vypočítá časový krok Δt pro každou cévu a z nich vybere ten nejmenší. Následuje výpočet hodnot W_1^1 , W_2^2 a W_2^3 v buňkách sousedících s bifurkací. Pak přichází na řadu volání funkce *MacCormack*. Připomeňme, že na cévu 1 nahlížíme jako na typ 1, kdežto cévy 2 a 3 považujeme za typ 3. V každém

kroku výpočtu se ukládá aktuální čas (do řádkové matice *tvect*). Po skončení smyčky se vypočítají tlaky ve všech cévách.

Na závěr funkce *Ceva* přichází na řadu vykreslení interaktivních grafů s průsvity, rychlostmi proudění a tlaky ve všech cévách, v nichž je možné měnit čas pomocí posuvníku. Interaktivní grafy se uloží do souboru *Fig.fig*.

Funkce *vykresy* vygeneruje grafy objemových průtoků a tlaků v závislosti na čase v krajních bodech cév ve druhé periodě.

Funkce *vykresy2* generuje grafy závislostí průsvitů, rychlostí proudění a tlaků na prostorové souřadnici x v jedné, dvou a třech třetinách druhé periody.

V případě testovací úlohy přebírají funkce *deltat* a *vypocti_b* úlohu funkce *deltat2*. Funkce *vypocti_b* vypočítá v každém konečném objemu matici \mathbf{B} a funkce *deltat* poté určí časový krok Δt . Funkce *vykreslovac* vezme uložená data z výpočtu a vykreslí z nich třírozměrnou reprezentaci elastické cévy. Posuvníkem lze měnit čas a sledovat vývoj zakřivení cévy v čase.

4 Aplikace odvozené metody na konkrétní úlohy proudění krve

V této kapitole prezentujeme výsledky dosažené řešením tří aplikačních problémů proudění krve přímou cévou, resp. cévní bifurkací.

Účelem úlohy s přímou (nerozvětvenou) cévou je ověření správnosti programu napsaného v Matlabu na základě metody konečných objemů a MacCormackova schématu (viz vztahy (185) a (186)). Výsledky vypočítané vlastním programem porovnááme s výsledky získanými ze článku [4], kde je stejná úloha řešena jinou metodou – konkrétně nespojitou Galerkinovou metodou.

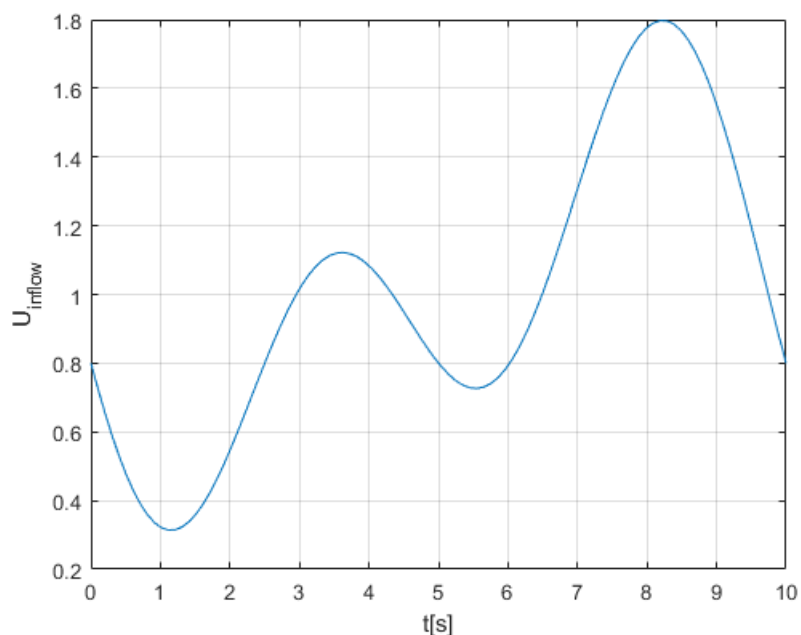
Po ověření funkčnosti sestaveného programu jej aplikujeme na úlohu s cévní bifurkací. Tuto úlohu řešíme ve třech modifikacích, které se liší roztažnostmi jednotlivých cév.

4.1 Testovací úloha

Zadání této úlohy je převzato z článku [4]. Máme jednu přímou cévu. Hledané veličiny uvažujeme bezrozměrové. Máme dáno:

- počet konečných objemů v cévě $N = 200$,
- externí tlak $p_{\text{ext}} = 1$ (viz vztah (2)),
- $\beta = 100$ (souvisí s roztažností cévy vztahem (79)),
- hustota krve $\rho = 0,5$,
- CFL číslo $C = 0,9$ (viz vztah (193)),
- průsvit cévy v ustáleném stavu shodný s počáteční podmínkou $A_{\text{eq}} = A_0 = 1$
- délka cévy $l = 200$,
- počáteční/rovnovážná rychlost $U_0 = U_{\text{eq}} = 1$,
- okrajová podmínka pro rychlost $U_{\text{inflow}} = 1 - 0,4 \sin \frac{\pi t}{5} - 0,4 \sin \frac{2\pi t}{5} - 0,2 \cos \frac{2\pi t}{5}$.

Časový průběh vstupní rychlosti U_{inflow} je vykreslen na obr. 10.



Obr. 10: Průběh vstupní rychlosti v závislosti na čase

Výsledkem výpočtu je tlaková vlna postupující v kladném směru osy x . Maxima rychlosti proudění nastávají současně s maximy průsvitu. Obdobně to platí pro minima.

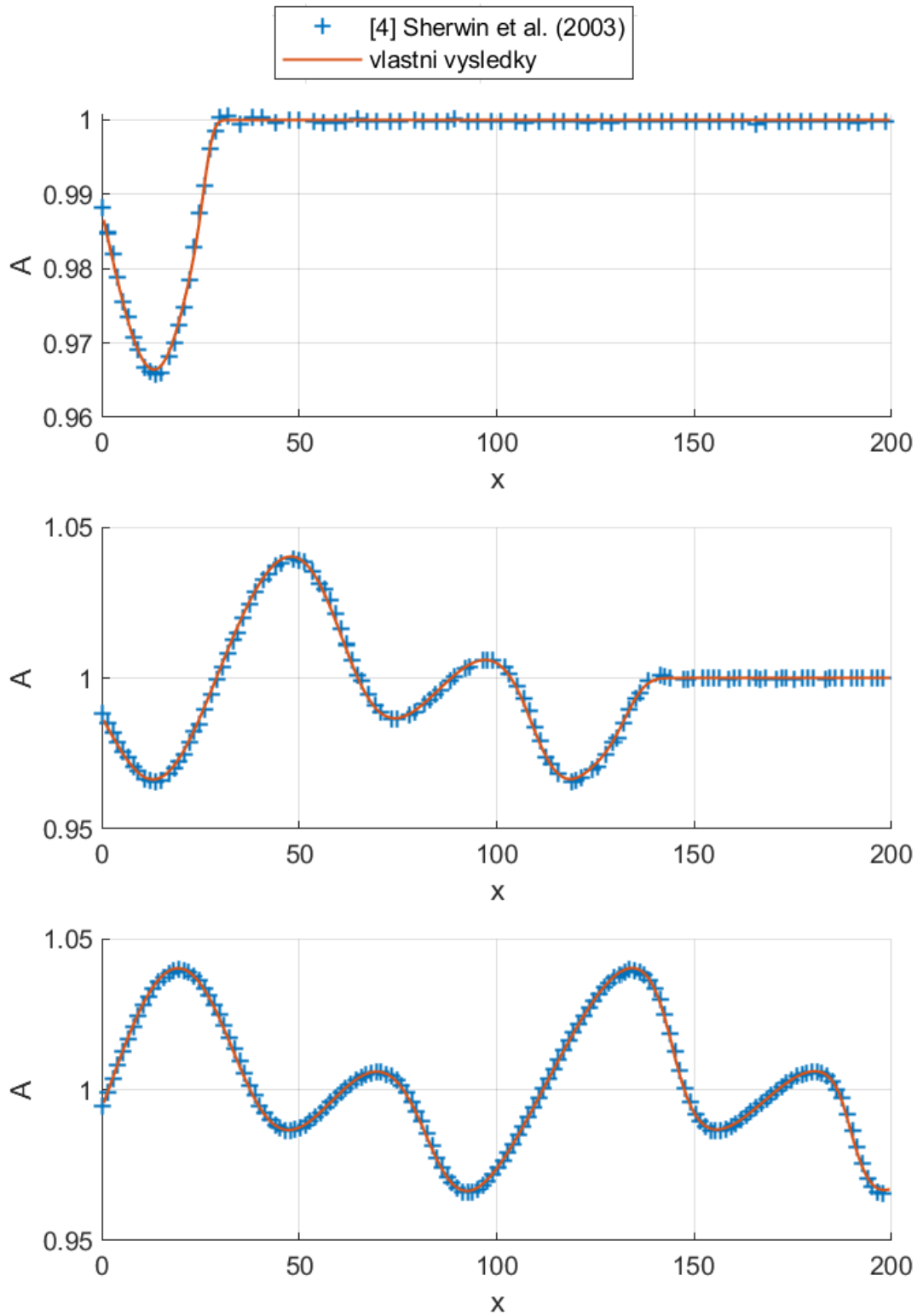
Porovnejme získané grafy s průběhem vstupní rychlosti U_{inflow} v závislosti na čase – viz obr. 10. Kvalitativně vzato je tento graf zrcadlově převráceným obrazem jedné periody průběhu výstupního průsvitu, resp. rychlosti proudění.

Vypočítané průběhy průsvitu A a rychlosti proudění U po délce cévy jsou pro vybrané časy $t = 2,5$ s, $12,5$ s a 20 s znázorněny na obr. 11 a 12 a ve stejných grafech jsou vykreslena také data z odkazovaného článku pro porovnání.

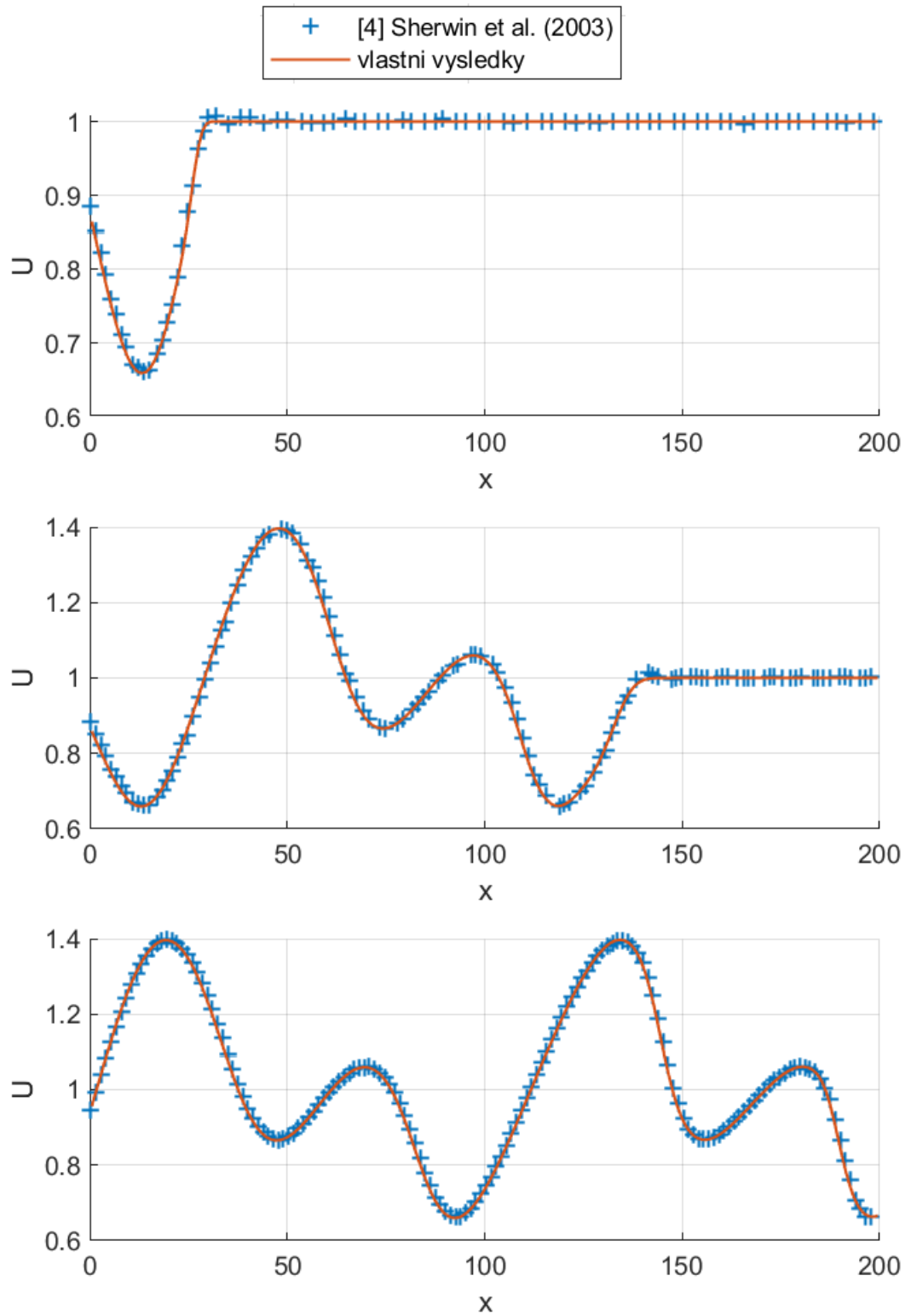
Z vykreslených dat lze konstatovat výbornou shodu našich výsledků s odkazovanými výsledky z literatury.

Dále ukážeme 3D reprezentaci cévy získanou z vypočítaných hodnot průsvitu a porovnáme ji s výsledky z článku [4]. Na obr. 13 vidíme deformaci cévy získanou z literatury (vlevo) a deformaci vypočítanou naším programem (vpravo).

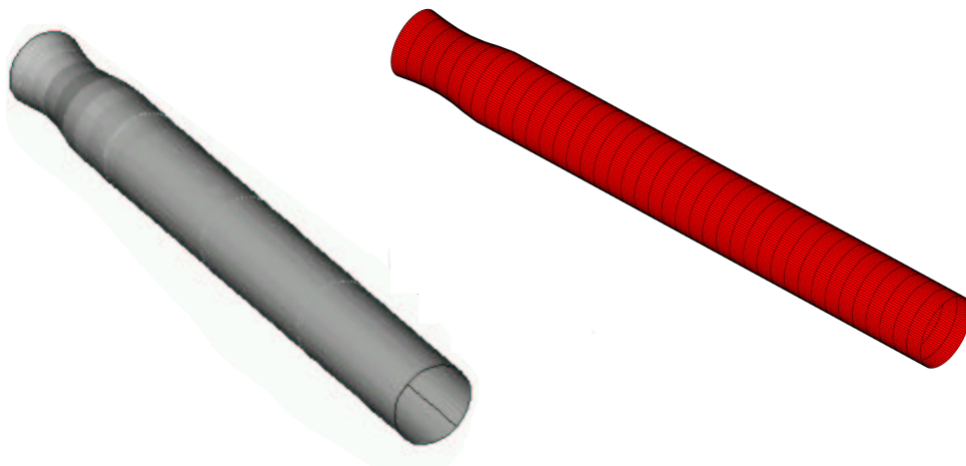
Shoda je rovněž velmi dobrá. To nás opravňuje aplikovat námi sestavený program na další úlohy hemodynamiky.



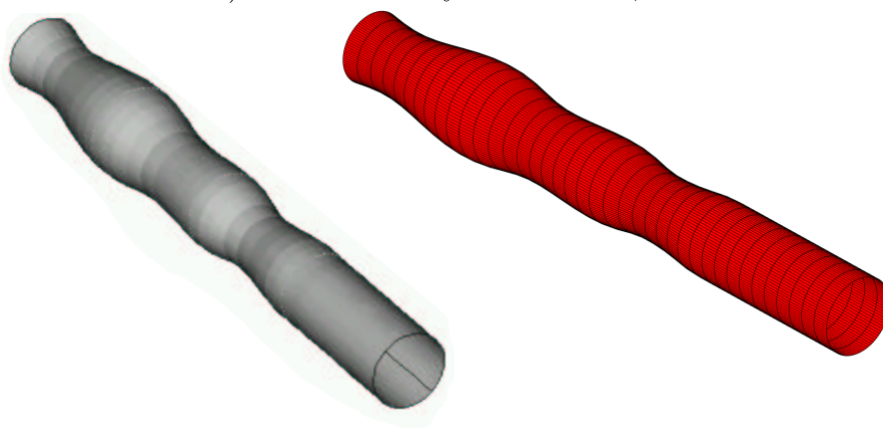
Obr. 11: Průsvit trubice $A(x,t)$ ve třech vybraných časech: $t = 2,5$ s (nahore), $12,5$ s (uprostřed), 20 s (dole)



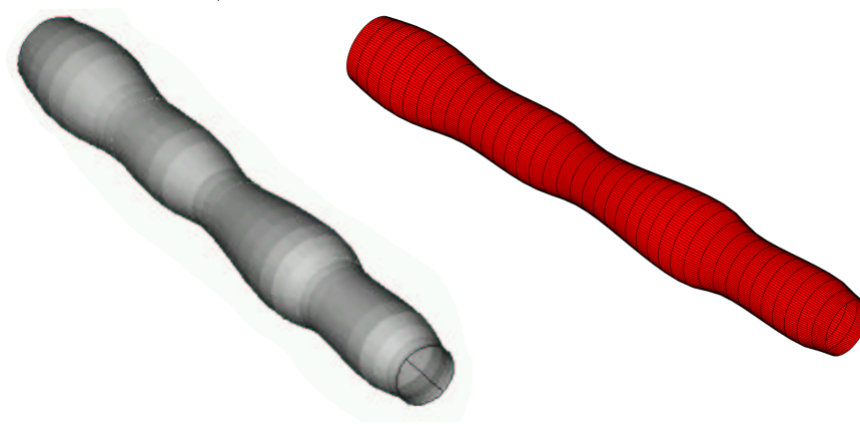
Obr. 12: Rychlost proudění v trubici $U(x,t)$ ve třech vybraných časech: $t = 2,5$ s (nahore), $12,5$ s (uprostřed), 20 s (dole)



a) deformace cévy v čase $t = 2,5$ s



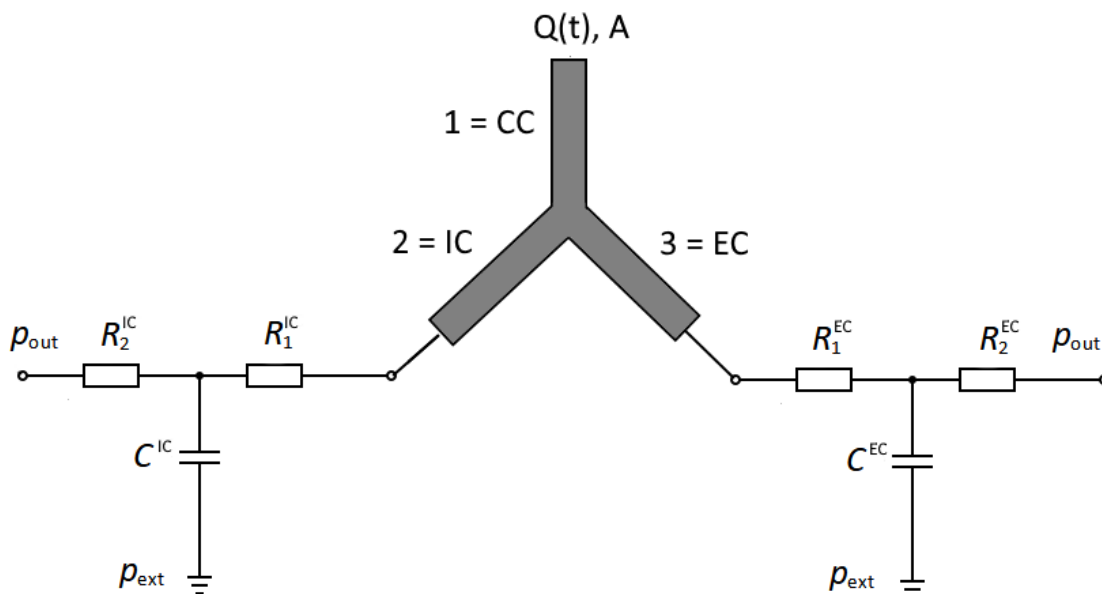
b) deformace cévy v čase $t = 12,5$ s



c) deformace cévy v čase $t = 20$ s

Obr. 13: Porovnání získaných výsledků (vpravo) s výsledky publikovanými v [4] (vlevo). Pro lepší vizualizaci byla míra deformace stěny zvětšena $10\times$ a podélný rozměr přeškálován faktorem $1/20$

4.2 Úloha s karotickou bifurkací



Obr. 14: Schéma úlohy s bifurkací

V tomto odstavci ukážeme aplikovatelnost vyvinutého algoritmu na případě karotické bifurkace se zadanými fyziologickými daty včetně parametrů pro 0D modely. Tato data byla poskytnuta vedoucím práce doc. Vimmrem. Obr. 14 znázorňuje schéma řešené úlohy.

Uvažujeme, že objemový průtok krve vstupním okrajem bifurkace (vstupním okrajem cévy 1) je dán nekonečnou řadou

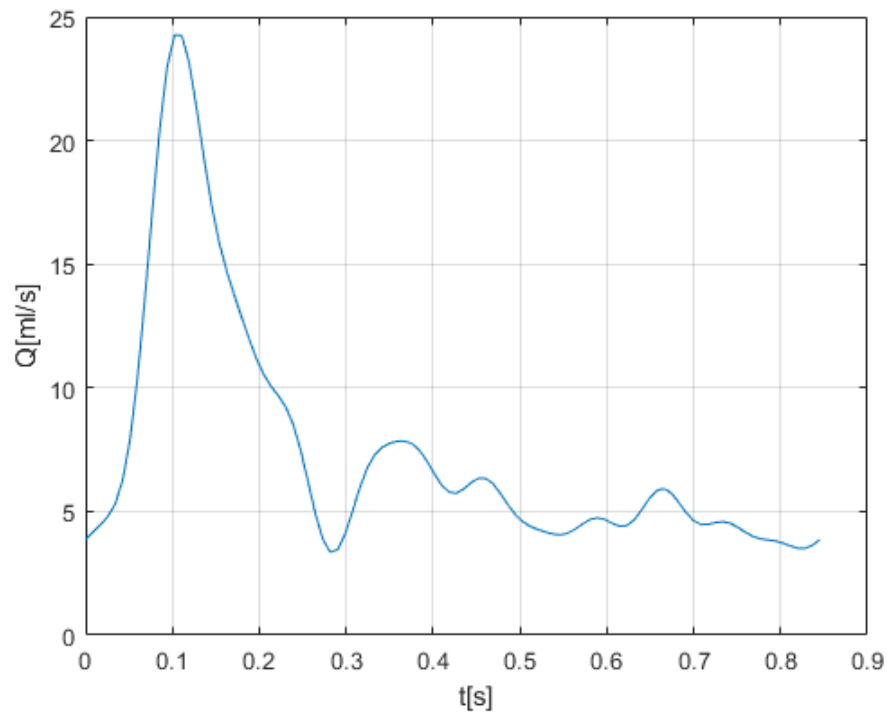
$$Q(t) = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(k\omega t - \Phi_k), \quad (196)$$

kde pro úhlovou frekvenci platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (197)$$

Hodnoty amplitud M_k a fázových posunů Φ_k jsou uvedeny v tab. 1. Aby bylo možné provést sumaci, je členů v řadě konečný počet.

Průběh vstupního objemového průtoku vidíme na obr. 15.



Obr. 15: Průběh zadaného objemového průtoku v jedné periodě

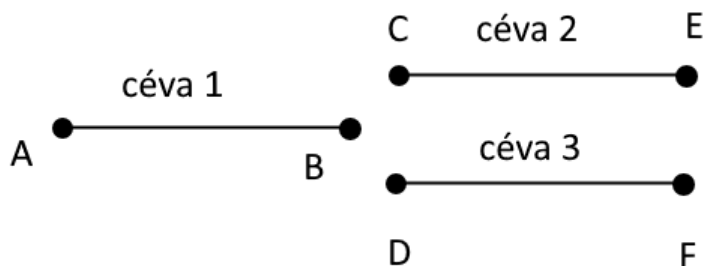
Tab. 1: Hodnoty amplitud a fázových posunů

k	M_k [ml s ⁻¹]	Φ_k [rad]
1	4,4655	1,1671
2	3,4863	1,8749
3	3,5325	2,7035
4	1,7118	-2,6808
5	0,9551	-2,2283
6	1,1763	-2,0086
7	1,1731	-0,9052
8	0,5519	0,4587
9	0,4007	0,4451
10	0,2314	0,4278
11	0,2378	1,5189
12	0,3381	2,6903

Uvažujeme 1D model karotické bifurkace s konstantní poddajností danou parametrem β , který je pro všechny cévy společný. Vstupní cévu 1 označujeme CC (common carotid artery), výstupní cévy se značí následovně: 2 = IC (internal carotid artery), 3 = EC (external carotid artery). Na tyto dvě cévy jsme připojili tříprvkové Windkessel modely, jejichž parametry odpovídají situaci s nepoškozenou karotidou. Máme dány parametry:

- počet konečných objemů v každé cévě $N = 200$,
- externí tlak $p_{\text{ext}} = 0$ hPa,
- tlak $p_{\text{out}} = 0$ hPa na výstupu rezistoru R_2 ,
- $\beta = 100$ kg cm⁻² s⁻²,
- hustota krve $\rho = 0,001$ kg cm⁻³,
- CFL číslo $C = 0,9$,
- délky cév $l_1 = 5,5$ cm, $l_2 = 5$ cm, $l_3 = 2,7$ cm,
- odpory WK modelu v IC $R_1^{\text{IC}} = 393,134 \times 10^6$ Pa s m⁻³,
 $R_2^{\text{IC}} = 3418,34 \times 10^6$ Pa s m⁻³,
- odpory WK modelu v EC $R_1^{\text{EC}} = 132,368 \times 10^6$ Pa s m⁻³,
 $R_2^{\text{EC}} = 2752,10 \times 10^6$ Pa s m⁻³,
- cévní poddajnosti $C^{\text{IC}} = 21,752 \times 10^{-12}$ m³Pa⁻¹, $C^{\text{EC}} = 123,203 \times 10^{-12}$ m³Pa⁻¹,
- okrajová podmínka pro průtok vstupním okrajem cévy 1 – viz vztah (196),
- první člen Fourierovy řady definující průtok vstupem cévy 1
 $Q_0 = 7,4745$ ml s⁻¹.
- perioda okrajové podmínky $T = 0,8451$ s,
- počáteční/rovnovážné průměry cév $d_0^1 = d_{\text{eq}}^1 = 0,72$ cm,
 $d_0^2 = d_{\text{eq}}^2 = d_0^3 = d_{\text{eq}}^3 = 0,46$ cm.

Nyní ukážeme časové závislosti objemového průtoku v různých místech všech tří uvažovaných cév. Místa označujeme velkými písmeny podle obr 16.



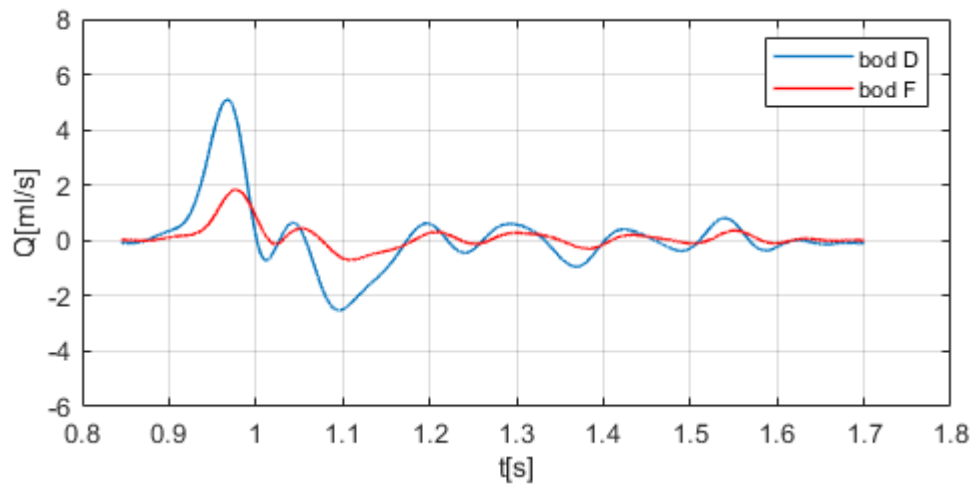
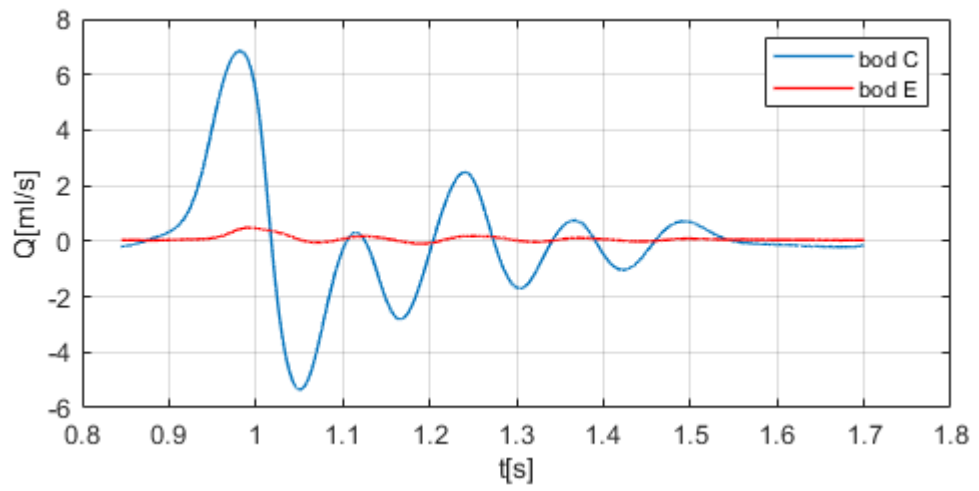
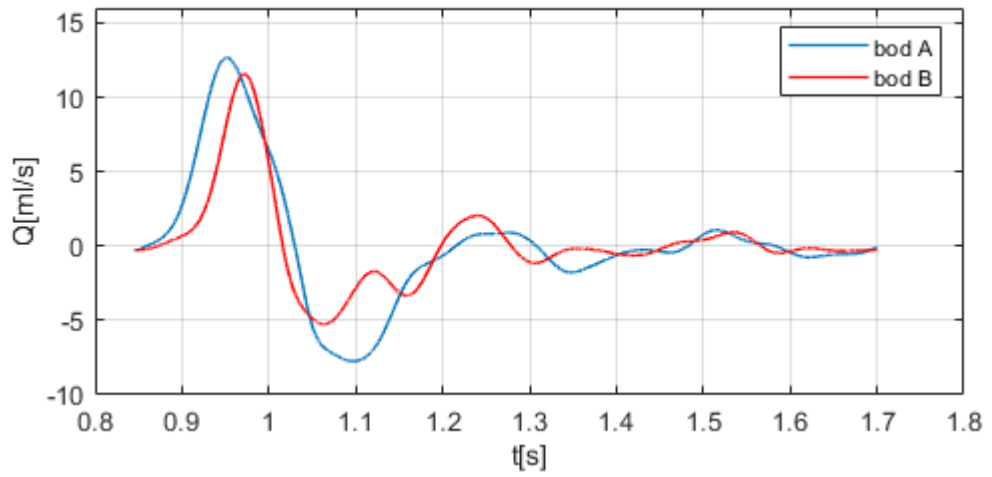
Obr. 16: Schematické znázornění míst, v nichž nás zajímá objemový průtok

Pro průběh objemového průtoku zadaného na vstupním okraji vstupní cévy viz obr. 15.

Výpočty byly provedeny pro dvě celé periody. Z důvodu toho, že chování 0D modelu v první periodě se liší od dalších period (vliv počátečních podmínek), vykreslujeme časové závislosti vždy ve druhé periodě výpočtu.

Porovnáním průtoků v bodech A a B, resp. C a E, resp. D a F dojdeme k závěru, že v bodech vzdálenějších od vstupu bifurkace je časový průběh objemového průtoku krve cévou méně kvalitativně podobný zadanému vstupnímu průběhu. Je to dáno elasticitou cévy, která způsobí, že energie proudící krve je disipována do stěny cévy. V cévě 2 (IC) dojde k větší disipaci energie než v cévě 3 (EC), což lze vysvětlit rozdílnou délkou cév (IC je téměř dvakrát delší než EC).

Navíc, znaménko objemového průtoku se několikrát za periodu změní, což znamená, že se mění směr toku krve cévou.



Obr. 17: Porovnání objemových průtoků v závislosti na čase mezi konci jednotlivých cév: CC (nahore), IC (uprostřed) a EC (dole)

4.3 Modifikace úlohy s karotickou bifurkací

Vzhledem k popsanému vlivu poddajnosti cévní stěny na šíření tlakové vlny budeme modifikovat úlohu s bifurkací změnou (zmenšením) parametru β , tedy zvětšením roztažnosti, u výstupních cév IC a EC. Hodnoty β pro všechny cévy jsou uvedeny v tab. 2. Všechny ostatní parametry úlohy jsou stejné jako v předchozím případě.

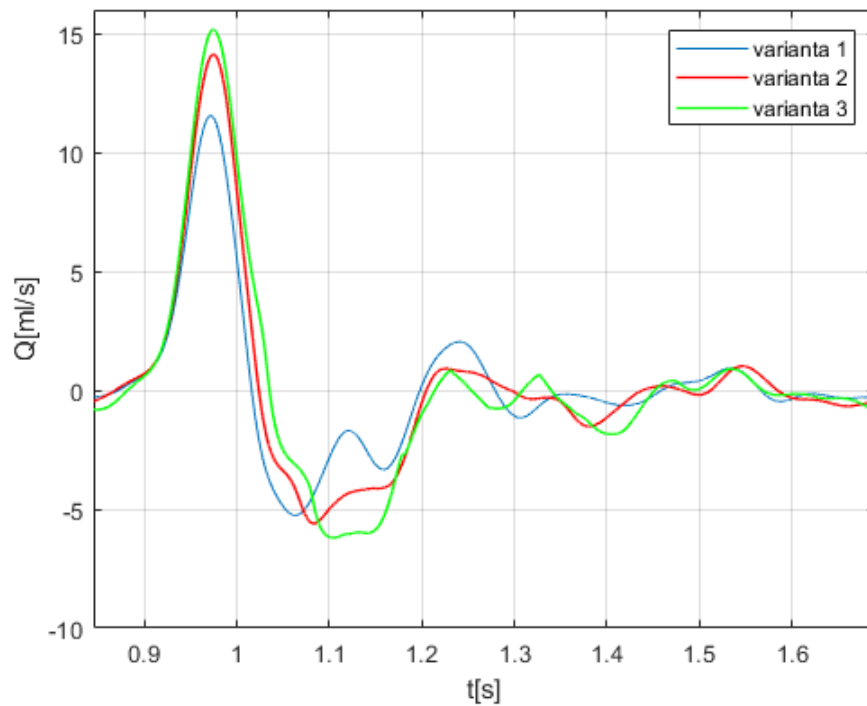
Tab. 2: Hodnoty β [$\text{kg cm}^{-2} \text{s}^{-2}$] pro různé modifikace úlohy s bifurkací (varianta 1 byla diskutována výše)

	céva 1 (CC)	céva 2 (IC)	céva 3 (EC)
varianta 1	100	100	100
varianta 2	100	75	50
varianta 3	100	50	50

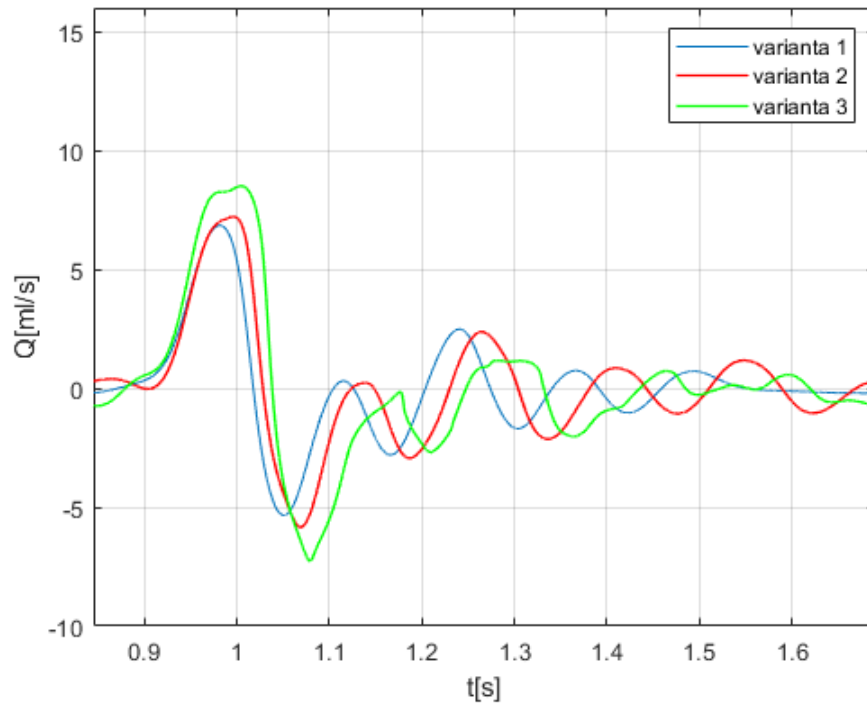
Grafy časových závislostí průtoku v bodech B, C a E pro všechny tři varianty vidíme na obr. 18 až 20.

Z výsledků je zřejmé, že narůstající poddajnost (a tedy klesající β) zvyšuje disipaci energie krve ve druhé cévě (IC) a rozdíl průtoků mezi konci cévy je větší.

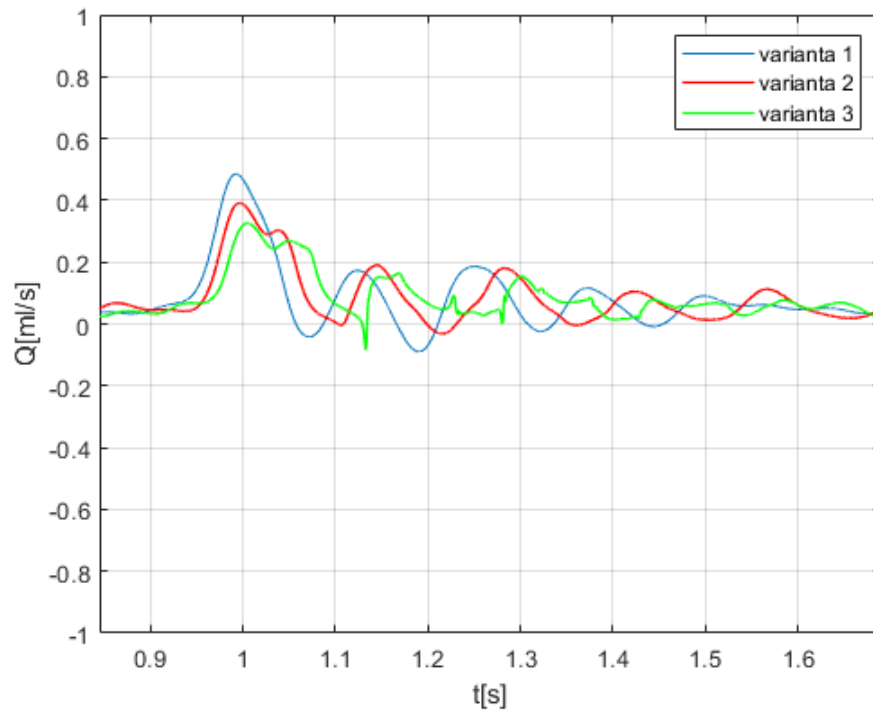
Dále si lze povšimnout změny v průtoku v bodě B. Můžeme konstatovat, že cévy nacházející se dále po proudu (IC a EC) mají vliv na proudění v mateřské cévě. Ačkoliv poddajnost mateřské cévy zůstala stejná, zmenšila se v ní disipace energie proudící krve.



Obr. 18: Časový průběh objemového průtoku v místě B pro jednotlivé varianty úlohy



Obr. 19: Časový průběh objemového průtoku v místě C pro jednotlivé varianty úlohy



Obr. 20: Časový průběh objemového průtoku v místě E pro jednotlivé varianty úlohy

Závěr

Předložená bakalářská práce si kladla za cíl podrobně popsat principy spjaté se sestavením matematického modelu proudění krve v 1D modelech cév s poddajnou stěnou, který je v současnosti hojně využívanou alternativou k výpočetně náročnému řešení obdobných 3D úloh interakce (FSI). Předpoklady a podstaty tohoto alternativního přístupu byly shrnuty v první kapitole této práce, přičemž zde byl rovněž představen zobecněný tvar uvedeného matematického modelu pro případ bifurkace tvořeného různě poddajnými cévními segmenty. Vzhledem k tomu, že naší snahou bylo modelovat co nejrealističtější hemodynamiku, tj. realizovat numerické simulace proudění krve pro fyziologicky korektní tokové podmínky, byl vedle zmíněného 1D modelu popsán ve druhé kapitole i tzv. 0D model proudění krve označovaný jako RCR model či tříprvkový Windkessel model. Připojením tohoto modelu k výstupům jednotlivých 1D modelů cév bylo možné aproximovat chování periferního krevního oběhu a zajistit tak předepsání relevantních okrajových podmínek.

Vlastnímu numerickému řešení sestavených matematických modelů proudění krve jakožto nestlačitelné newtonské kapaliny v 1D modelech poddajných cév byla věnována třetí kapitola této práce. Pro tento účel byla použita metoda konečných objemů v kombinaci s explicitním dvoukrokovým MacCormackovým schématem druhého řádu přesnosti v čase i prostoru. Vyvinuté výpočetní algoritmy byly implementovány v Matlabu, kde byly rovněž realizovány veškeré numerické simulace, jejichž výsledky byly prezentovány ve čtvrté kapitole. Pro ověření správnosti implementace byla nejprve provedena verifikace na základě řešení testovacího problému zahrnujícího jednoduchý 1D model poddajné trubice. Porovnáním získaných numerických výsledků s těmi publikovanými v práci [4] byla zjištěna výborná shoda, která nás opravňovala aplikovat námi vyvinutý program na další složitější úlohy hemodynamiky.

V tomto případě a s ohledem na dostupnost fyziologických dat byla zvolena úloha pulzačního proudění krve v 1D modelu karotické bifurkace. Porovnáním vypočítaných objemových průtoků krve na vstupech a výstupech jednotlivých cév karotické bifurkace bylo možné dojít k závěru, že poddajnost cévní stěny má zásadní vliv na charakter proudění nejen v samotné cévě, ale i na tok krve dále po proudu. Z tohoto

důvodu se závěr čtvrté kapitoly podrobněji zabýval významem poddajnosti cévní stěny, zde vyjádřené prostřednictvím parametru β . Z provedených numerických experimentů pro tři různé sady parametrů vyplynulo, že zvýšení poddajnosti cévní stěny (tj. zmenšení β) je provázáno výraznějšími oscilacemi toku krve, což je v souladu s fyzikálními principy pozorovatelnými např. v elastické aortě. Naopak poněkud překvapivé zjištění bylo učiněno v případě vstupní cévy. Ačkoliv její poddajnost byla ve všech provedených numerických simulacích ponechána beze změny, podepisoval se na jejím toku krve charakter proudění modelovaný v obou dceřiných větvích, u nichž ke změnám v poddajnosti cévních stěn docházelo. Z celkového hlediska je tak nutné konstatovat, že pro lepší pochopení významu poddajnosti cévní stěny v námi uvažovaných 1D modelech proudění krve bude potřeba realizovat mnohem podrobnější analýzu, než jaká byla provedena v předložené bakalářské práci.

Kromě zmíněné analýzy může být problematika 1D modelů dále rozpracována v oblasti modelování proudění krve ve větších a složitějších cévních strukturách, u nichž by bylo možné simulovat například šíření tlakové vlny v rámci kardiovaskulárního systému. Jako další alternativu lze rovněž vnímat užití 1D modelů v kombinaci s vhodnými 0D modely (např. srdce) pro stanovení okrajových podmínek u 3D simulací, kde by umožnily modelovat proudění krve ve fyziologickém rozsahu a pro libovolný rozsah srdečního cyklu (klidový/zátěžový stav).

Seznam použité literatury a zdrojů informací

- [1] ALASTRUEY, J. PARKER, K. PEIRO, J. a SHERWIN, S. (2008). Lumped parameter outflow models for 1-D blood flow simulations: Effect on pulse waves and parameter estimation. *Communications in Computational Physics*. 4, s. 317-336. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/228661502_Lumped_parameter_outflow_models_for_1-D_blood_flow_simulations_Effect_on_pulse_waves_and_parameter_estimation
- [2] DUB, M. Thin-Walled Conical Vessel with Hydrostatic Pressure. *Dlubal Software* [online]. Tiefenbach: Dlubal Software, 2018 [cit. 2022-06-06]. Dostupné z: <https://www.dlubal.com/en/downloads-and-information/examples-and-tutorials/verification-examples/000085>
- [3] MOLER, Cleve B. *Numerical Computing with Matlab* [online]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004, s. 124 [cit. 2022-04-10]. ISBN 978-0-89871-660-3. Dostupné z: doi:10.1137/1.9780898717952
- [4] SHERWIN, S.J., FORMAGGIA, L., PEIRÓ, J. and FRANKE, V. (2003), Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 43: 673-700. <https://doi.org/10.1002/flid.543>
- [5] SHERWIN, S.J., FRANKE, V., PEIRÓ, J. a PARKER, K. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics* [online]. 2003, 47(3/4), s. 217-250 [cit. 2022-04-09]. ISSN 0022-0833. Dostupné z: doi:10.1023/B:ENGI.0000007979.32871.e2
- [6] VIMMR, J., JONÁŠOVÁ, A. Modelování hemodynamiky v cévních náhradách. (Interní text KME)
- [7] Equation Solving Algorithms - MATLAB & Simulink. *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink* [online]. Natick: The MathWorks, 2022 [cit. 2022-04-09]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/equation-solving-algorithms.html#f51372>