



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Economic dispatch problem in smart grid: vliv  
topologie sítě na rychlost konvergence k  
optimálnímu řešení**

## Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejíž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, 2022

.....

## **Poděkování**

Poděkování patří vedoucímu bakalářské práce Ing. Karlu Kubíčkoví za ochotu, odborné vedení, veškeré rady a věnovaný čas. Poděkování také patří rodině za veškerou podporu v průběhu studia.

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou Economic Dispatch Problem (EDP) v energetických sítích. Economic dispatch je optimalizační problém, jehož úkolem je pokrytí požadovaného zatížení sítě tak, aby výsledná cena za MWh byla minimální. Úvod této bakalářské práce je věnován seznámení se s problematikou energetických sítí. Součástí úvodu je především popis jednotlivých částí energetické sítě a jejich funkce. V další části je popsána grafová teorie, která je využita pro popis topologie sítě. Na příkladech je demonstrován problém nalezení konsenzu různých topologií. V další části je uvedena definice EDP. Nejprve je zpracován centralizovaný způsob nalezení řešení metodou Lagrangeových multiplikátorů. Poté je popsán distribuovaný algoritmus použitý k nalezení optimálního řešení. Oba dva způsoby jsou navzájem porovnány a diskutovány. Následující kapitola je pak věnována řešení EDP pro různé topologie sítě. Jsou uvažovány nejprve dvě topologie se čtyřmi agenty a poté čtyři topologie s pěti agenty. Všechny topologie jsou navzájem porovnány a diskutovány, která z nich je pro řešení nejvhodnější. Poslední část je věnována možným návrhům na zlepšení uvažovaného algoritmu pro řešení EDP.

**Klíčová slova:** cooperative control, economic dispatch problem, energetická síť, grafová teorie, multiagentní systémy, networks, optimalizace, power, smart grid

## Abstract

This Bachelor thesis deals with an issue of Economic Dispatch Problem (EDP) in smart grid. Economic dispatch is optimization problem, its primary task is to cover required load of network so the final price per MWh is minimal. Introduction of this bachelor thesis is dedicated to introduction to power networks. Part of the introduction is mainly describing each part of power network and its function. In the following part graph theory is described. Graph theory is used to describe network topology. Examples demonstrate the problem of finding a consensus of different topology. The next section gives a definition of EDP. First, centralized way of finding solution is processed using Lagrange multiplier method. Then, distributed algorithm used for finding optimal solution is described. Both ways of solution are compared and discussed. The following chapter is devoted to EDP solutions for different network topology. First, two topologies with four agents are considered, followed by four topologies with five agents. All topologies are compared and discussed, which one is the most suitable. The last section is devoted to possible solutions for improving the considered algorithm for solving EDP.

**Key words:** cooperative control, economic dispatch problem, energy network, graph theory, multi-agent systems, networks, optimization, power, smart grid

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Úvod</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2 Energetická síť</b>   | <b>2</b>  |
| 2.1 Struktura energetické sítě . . . . .                             | 3         |
| 2.2 Economic dispatch problem . . . . .                              | 4         |
| <b>3 Grafová teorie</b>  | <b>5</b>  |
| 3.1 Matice sousednosti . . . . .                                     | 5         |
| 3.2 Normalizovaná matice sousednosti . . . . .                       | 6         |
| 3.3 Laplacian grafu . . . . .  | 6         |
| 3.4 Souvislost grafů . . . . .                                       | 7         |
| 3.5 Konsenzus problem . . . . .                                      | 7         |
| 3.6 Porovnání centralizovaného a decentralizovaného řešení . . . . . | 9         |
| 3.6.1 Centralizované řešení . . . . .                                | 9         |
| 3.6.2 Decentralizované řešení . . . . .                              | 9         |
| <b>4 Economic Dispatch Problem</b>                                   | <b>10</b> |
| 4.1 Formulace problému EDP . . . . .                                 | 10        |
| 4.2 Metoda Lagrangeových multiplikátorů . . . . .                    | 10        |
| 4.2.1 Příklad pro 4 generátory . . . . .                             | 10        |
| 4.2.2 Příklad pro 5 generátorů . . . . .                             | 12        |
| 4.3 Distribuovaný algoritmus pro řešení EDP . . . . .                | 14        |
| 4.3.1 Algoritmus bez omezení . . . . .                               | 14        |
| 4.3.2 Algoritmus s omezením . . . . .                                | 15        |
| 4.3.3 Důkaz konvergence . . . . .                                    | 16        |
| <b>5 Výsledky pro různé typy topologie</b>                           | <b>17</b> |
| 5.1 Topologie 1 . . . . .  | 18        |
| 5.2 Topologie 2 . . . . .  | 20        |
| 5.3 Topologie 3 . . . . .  | 22        |
| 5.4 Topologie 4 . . . . .  | 25        |
| 5.5 Topologie 5 . . . . .  | 27        |
| 5.6 Topologie 6 . . . . .  | 29        |
| 5.7 Vliv konstanty učení na konvergenci . . . . .                    | 31        |
| 5.8 Zhodnocení výsledků pro jednotlivé topologie . . . . .           | 32        |
| 5.8.1 Topologie se čtyřmi agenty . . . . .                           | 32        |
| 5.8.2 Topologie s pěti agenty . . . . .                              | 33        |
| 5.8.3 Porovnání čtyř a pěti agentů . . . . .                         | 33        |
| <b>6 Možná vylepšení</b>   | <b>34</b> |
| <b>7 Závěr</b>   | <b>35</b> |
| <b>Seznam obrázků</b>  | <b>37</b> |
| <b>Seznam tabulek</b>  | <b>38</b> |

# 1 Úvod

Bakalářská práce se bude zabývat tématem Economic Dispatch Problem (EDP). EDP hraje v dnešních energetických sítích důležitou roli pro celkové rozdělení zatížení napříč celou sítí. Řešením EDP je optimální rozdělení celkové energie mezi jednotlivé generátory tak, aby výsledná cena za jednotku energie (například MW/h) byla minimální. K řešení EDP lze využít například Lagrangianovu metodu,  $\lambda$ -iterační metodu nebo například kvadratické programování [LCH92],[Chi05]. K popisu EDP je využita grafová teorie, pomocí které lze zobrazit jednotlivé agenty a modelovat tak celou topologii užívané sítě [Xia+17].

V současné době je elektřina využívána téměř všude. Koncem 19. století a začátkem 20. století se začal postupně rozvíjet zájem o elektřinu a začaly se stavět nové elektrárny. Dříve elektrárny fungovaly primárně na fosilní paliva či vodu. S rostoucí spotřebou energie bylo potřeba budovat stále více elektráren. To vedlo ve druhé polovině 20. století k rozvoji jaderné energetiky. V současné době je stále vyvíjen větší tlak na snižování emisí vedoucí ke stále většímu zapojení obnovitelných zdrojů do výroby elektřiny. Jedná se zejména o solární, větrné a sluneční elektrárny. V sítích se využívá frekvence 50 nebo 60 Hz. Aby síť zůstala stabilní, nesmí se příliš vychýlit od požadované hodnoty. Pokud je známo, kolik je potřeba vyrobit elektrické energie, využívá se právě metody pro řešení EDP, jejímž úkolem je rozdělit tuto hodnotu mezi dostupné generátory v síti. To lze řešit centralizovanými, ale i decentralizovanými metodami. Tato práce je zaměřena výhradně na decentralizované řešení. Decentralizovaný přístup má úzký vztah s multiagentním řízením.

Multiagentní systémy jsou takové systémy skládají se z více elementů, kterým se říká agenti. Agenti mají dvě důležité vlastnosti. První je, že jsou do jisté míry schopni samostatnosti a druhá, že jsou schopni interagovat s ostatními agenty. Mezi jednotlivými agenty je důležitá především kooperace, dosažení konsenzu a vzájemná výměna dat. Tyto přístupy se mohou vyskytovat napříč všemi možnými aplikacemi [OFM07b].

Distribuované multiagentní systémy mají různé způsoby řízení. Jednotlivé výpočty neprobíhají v jednom konkrétním uzlu (označovaném jako leader), ale v každém uzlu zvlášť. Leader může být fyzicky přítomný v systému (například platooing nákladních aut), aditivní leader, který se fyzicky přidá do systému a zbytek agentů se řídí podle něj a nebo virtuální leader, který není fyzicky v systému přítomen, ale je realizován programově. Poslední možností je zcela distribuovaný způsob. Leader v systému není přítomen a agenti fungují jen samy se sebou. Mezi jednotlivými agenty je tedy velmi důležitá výměna informací. Distribuované multiagentní sítě, jako jsou například distribuované roboti nebo mobilní sensorové sítě představovaly řadu výzev v oblasti teoretických základů pro aplikaci těchto myšlenek. Agenti v těchto sítích musí vzájemně fungovat tak, aby bylo dosaženo cílů na systémové úrovni a zároveň mají přístup k omezeným výpočetním zdrojům, komunikaci a schopnostem snímání. Rozvoj těchto metod umožnil značný vývoj na poli výpočetní techniky, například i malé čipy jsou schopny provádět velké množství operací. Tento trend je patrný i ve vývoji SW v automobilovém průmyslu [KČŠ19] ; [Kub19]. Důležitým prvkem v multiagentním přístupu je uvažovaná struktura dané sítě a její jednotlivé atributy ovlivňující dynamické vlastnosti systému [ME10] ; [Kub21].

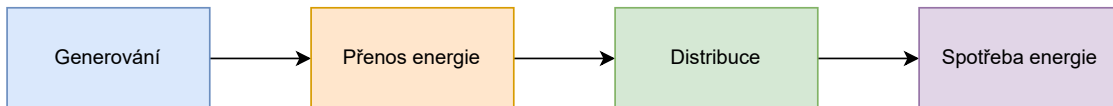
Důležitou součástí multiagentního řízení je i grafová teorie. S její pomocí lze modelovat jednotlivé topologie sítě. Grafová teorie udává informace o toku informací mezi jednotlivými agenty. Jednotlivé vrcholy grafu spojují hrany. Hrany mohou být orientované, či neorientované. Informace mohou téct pouze jedním směrem. Pokud by jednotlivé vrcholy reprezentovaly agenty, to by znamenalo, že první agent může posílat informaci druhému, ale druhý agent tyto informace může pouze přijímat a zpracovat [ME10].

Cílem této bakalářské práce je seznámit se s pojmy grafové teorie sloužící právě k popisu topologie. Dále se bude zabývat vztahem grafové teorie k multiagentnímu řízení. Poté bude řešit nalezení konsenzu v grafu, či síti a důležité pojmy jako Laplacian nebo matice sousednosti. S tímto souvisí zmiňovaný Economic dispatch problem, který bude popsán a formulován v dalších částech společně s distribuovaným algoritmem. Tento algoritmus bude následně zpracován pro různé topologie sítě. Výsledky budou porovnány s výsledky, které o konsenzu poskytuje Laplacian daného grafu. Následně bude provedena diskuze výsledků a závěr celé práce.

## 2 Energetická síť

V současné době probíhají po celém světě změny v infrastruktuře jednotlivých energetických sítí. Do dané infrastruktury jsou přidávány například obnovitelné zdroje energie. Celá síť se dále rozšiřuje, mohou se přidávat i vysokovýkonové elektro nabíjecí stanice pro elektro auta. Modernizuje se i celá přenosová soustava sítě. Vlivem začleňování obnovitelných zdrojů, bateriových systémů a elektro aut se může celkový počet agentů v síti rychle měnit. U obnovitelných zdrojů je toto dáno především vlivem počasí, jelikož jednotlivé elektrárny nemusí být vždy dostupné v čase. Z tohoto důvodu je snaha o nahrazení klasického centralizovaného způsobu řízení za decentralizovaný. Nebo nasadit tyto decentralizované metody v alespoň některých subčástech energetické sítě [Sad+19].

Problematika energetických sítí je velmi složitá, a to jak v případě matematického modelování, tak i jejího celkového řízení. Energetická síť může být rozdělena na čtyři části. Tyto části jsou generování, přenos energie, distribuce a spotřeba energie. Zmiňované části jsou zobrazeny na obrázku 1. První část je výroba energie a funguje výhradně se střídavým proudem, tuto část reprezentují elektrárny různého druhu. Elektrina je běžně vyráběna generátorem. Sinusové napětí je tvořeno třífázovým motorem daného generátoru [And12].



Obrázek 1: Zjednodušené zobrazení energetické sítě

Další část je přenos energie. Přenášená energie vlivem ztrát postupně klesá. Aby bylo dosaženo co nejmenších ztrát energie, je nutno udržet Jouleovo teplo co nejmenší. Jouleovo teplo je teplo vznikající během průchodu elektrického proudu vodičem. Nosiče náboje, neboli elektrony narážejí do kmitavých atomů mřížky, předávají jim část své kinetické energie, a tímto se materiál z makroskopického pohledu zahřívá. Tento jev se tedy označuje jako Jouleovo teplo [pok]. Nejnižší teplo je možno zajistit nízkým proudem, ale naopak vysokým napětím. V reálném světě se energie na dlouhé vzdálenosti přenáší pomocí velmi vysokého napětí, aby se zabránilo co nejvíce ztrátám [And12]. V České republice se v distribuční síti vysokého napětí využívá především napětí 22 kV, respektive 35 kV, které se používá především ve východních a částečně v severních Čechách. V České republice jsou v provozu i části distribuční soustavy s jmenovitými napětími 3,6 a 10 kV, které ale také postupně přecházejí na daná napětí 22 kV nebo 35 kV[Váp11].

Třetí částí je distribuce energie, zajištěna transformačními stanicemi, které přemění napětí z vysokého na nižší, které je již pomocí kabelů vedeno přímo k zákazníkovi. Transformační stanice většinou lze nalézt na okrajích měst a vesnic.

Poslední část představuje spotřebu energie. Tím je myšlena infrastruktura měst, obecně domy, firmy a sídliště v jednotlivých městech [Kub21].

Hlavním cílem energetických sítí je udržet stabilitu celé sítě, to znamená udržet balanc mezi energií spotřebovanou a vyrobenou. Pokud tato rovnováha není udržena, může to mít vážný vliv na celou energetickou síť. Například velké odchýlení od frekvence může vést ke kolapsu celé sítě zvané "blackout". Komplikace nastává ve chvíli, kdy se dlouhodobá a krátkodobá spotřeba energie liší. Například během roku je největší spotřeba v zimních měsících pro země, kde teploty dosahují velmi nízkých hodnot a naopak v létě pro teplejší části. Spotřeba energie se může lišit i během dne. Zde hrají důležitou roli statistické metody sloužící pro odhad a předpověď velikosti hodnoty energie, která se má v daný moment vyrábět, aby byla pokryta její poptávka [And12].

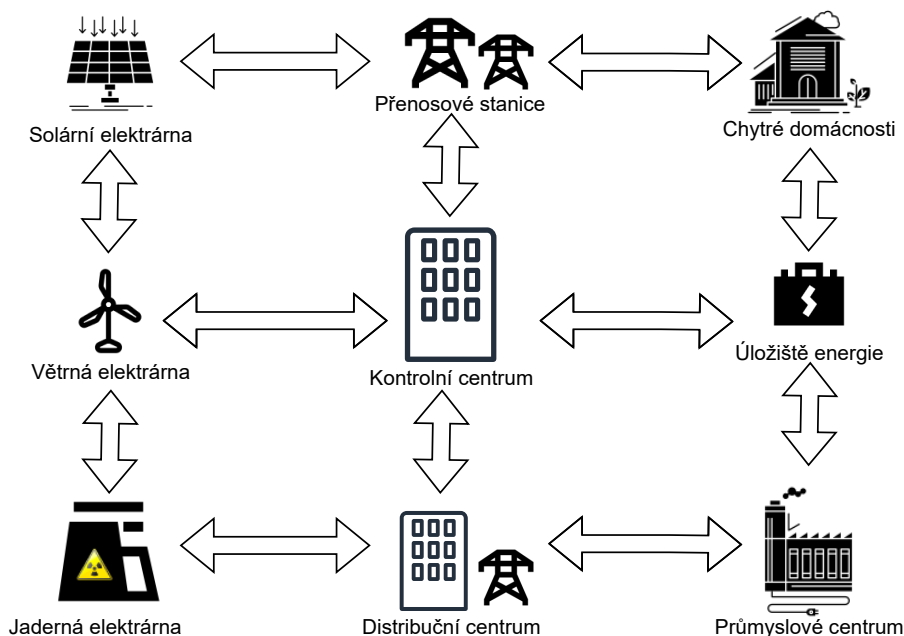


Sítě jsou velmi složité v tom smyslu, že mezi sebou interaguje velké množství různých systémů. Musí se sfázovat generátory, které jsou připojeny do sítě tak, aby měly stejnou fázi a zároveň byly v souladu se sítí. Systémy spojené energetickou sítí jsou takové systémy, které jsou kontrolovány aktuátory, senzory a kontrolkami ovládanými přes určitou formu komunikační sítě. Hlavní myšlenkou energetických sítí je fakt, že jednotlivé komponenty sítě jsou schopny fungovat samostatně, ale všechny se snaží dosáhnout jejich společného cíle [BA07].

## 2.1 Struktura energetické sítě

Přenosová a distribuční síť spojuje všechny elektrárny do jednoho systému zajišťujícího distribuci mezi individuálními zákazníky. Hlavními prvky sítě jsou generátory, elektrárny, pro přenos i kabely, transformátory a rozvodny. U kabelů jsou dvě možnosti vedení, buď pod zemí, nebo nad zemí. Kabely vedené nad zemí jsou ve většině případů určeny k přenosu vysokých napětí. Na druhou stranu kabely vedené pod zemí většinou přenášejí nižší napětí, které se distribuje do menších sítí. Maximální teoretické napětí, které může být přivedeno na nadzemní kabely je 2400 kV. V dnešní době je maximální napětí 1100 kV v Japonsku [Jan11]. Transformátory jsou důležitou částí celé energetické sítě. Úkolem transformátorů je převádět napětí na jednotlivých kabelech a měnit ho pro různé potřeby. Síť může obsahovat mnoho dalších prvků jako například Schuntovy kapacitory, které se v tomto případě používají pro vylepšení stability. Pro lepší funkci je nejlepší využít více kapacitorů zároveň [Glo].

Na obrázku 2 je zobrazen příklad energetické sítě. Lze si všimnout, že síť obsahuje jak obnovitelné zdroje energie, tak i baterie. V současné době může do sítě patřit i elektrické auto. V minulosti se energetické sítě skládaly převážně z velkých elektráren, které byly navzájem pevně provázané a jejich struktura se výrazně neměnila. Právě dynamické změny, které se v sítích mohou odehrávat, jsou motivací pro rozvoj a aplikaci distribuovaných způsobů řešení [Kub21].



Obrázek 2: Příklad energetické sítě

Celá síť je řízena hlavním uzlem, tedy kontrolním centrem, které sleduje stav a chování systému a podle toho zasahuje. Jednotliví agenti mají za cíl převzít část nebo všechny povinnosti na sebe. Hlavním cílem je, aby síť byla stabilní a co s největší přesností uspokojovala poptávku. Je třeba rozložit požadované zatížení sítě mezi jednotlivé agenty, aby výsledná cena za MW/h byla minimální [Kub21]. Pokud je v síti pokles energie, například z důvodu odpojení elektrické elektrárny, nebo rapidní zvýšení poptávky, pak frekvence sítě poklesne. Naopak, pokud je do sítě přidána další elektrárna nebo je odpojena velká část energie, pak frekvence rapidně stoupne. Proto je potřeba, aby celková energie byla v síti řádně rozdělena mezi jednotlivé agenty.

V závislosti na tom, jak rychle mohou jednotlivé elektrárny vygenerovat energii, se dělí do tří hlavních částí, na elektrárny s vysokým, středním a lehkým zatížením. Tato klasifikace je založena na době potřebné k aktivaci zařízení a nákladech na palivo. Například solární nebo větrná elektrárna se může do sítě připojit ihned v závislosti na počasí. Narozdíl od tepelné, kde připojení je otázkou hodin, jelikož se musí nahřát kotel a parogenerátory. V případě jaderné elektrárny to může být i v rádech dnů, ale je na druhou stranu k dispozici neomezeně po dobu, dokud není potřeba vyměnit palivo.

## 2.2 Economic dispatch problem

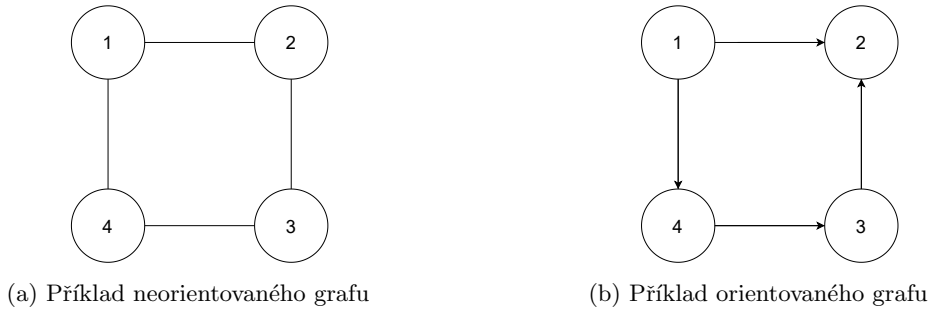
Economic dispatch problem je optimalizační problém snažící se vyřešit optimální rozvržení generátorů. Jednotlivé operace jsou plánovány s předpokladem, že jednotlivé generátory se mohou regulovat mezi jejich minimálními a maximálními hodnotami. Velikost energetických sítí se rapidně zvětšuje, aby splňovala požadavky na energii.

Celý systém je rozdělen na tři části, primární sektor, sekundární sektor a terciální sektor. Primární sektor odkazuje na akce prováděné lokálně přímo v elektrárně. Primární sektor má za úkol udržet frekvenci v akceptovatelných hodnotách. Reálné hodnoty lze měřit lokálně, a ty pak ovlivňují ventily, brány, servo v primárně-řízené elektrárně. V sekundárním řízení frekvence jsou hodnoty výkonu generátoru nastavené, tak aby kompenzovaly zbývající frekvenční chybu po primárním řízení. Kromě jiného musí být sekundárním řízením kompenzován další nežádoucí efekt: nesymetrie činného výkonu a činnost primárního řízení způsobující změny v tocích zátěže na spojovacích vedeních, tj. výměny energie, které nejsou v souladu s plánovanými přenosy. Terciální regulace se aktivuje ručně až po uvolnění použitých primárních a sekundárních regulačních rezerv po narušení. V této části probíhá výpočet EDP. Do terciální složky tedy patří metody pro řešení EDP [And12].

Pro řešení EDP existuje mnoho metod řešení. Jednou z nich je Lambda - iterační metoda, která může být řešena například Newton-Raphsonovou metodou [LCH92]. Další metodou pro řešení EDP může být metoda Lagrangeových multiplikátorů nebo gradientní metody.

### 3 Grafová teorie

Grafová teorie se zabývá grafy, které mohou reprezentovat různé struktury a vztahy mezi nimi. Graf  $G$  se skládá z množiny vrcholů označovaných  $V(G)$  a z množiny hran označovaných  $E(G)$ , které vrcholy spojují. Grafy mohou být buď orientované nebo neorientované. V případě orientovaných grafů  $G$  rozlišují zda signál jde do nebo ven z daného uzlu. Stupeň vrcholu určuje počet sousedních vrcholů. V případě orientovaného grafu pak rozlišuje vstupní a výstupní stupeň daného vrcholu, kde vstupní stupeň je počet orientovaných hran, které vstupují a výstupní stupeň naopak počet vrcholů, které vystupují [JA 08].



Obrázek 3: Příklad dvou typů grafů  $G$

Na obrázku 3 jsou znázorněny příklady neorientovaného a orientovaného grafu. V energetických sítích zobrazují orientované grafy fakt, že některé uzly mohou signál odesílat a některé pouze přijímat. Například uzel 1 může pouze odesílat informace uzlům 2 a 4, ale nemůže už informace od daných uzlů přijímat. Informace o daném grafu udává matice sousednosti.

V této části budou vysvětleny nejdůležitější pojmy grafové teorie, jako jsou matice sousednosti, normalizovaná matice sousednosti, Laplacian grafu. Dále je zde vysvětlena i problematika konsenzu.

#### 3.1 Matice sousednosti

Matice sousednosti je matice udávající zda dané prvky spolu sousedí. V případě, že dané prvky na pozicích  $\alpha_i$  a  $\alpha_j$  sousedí, bude na pozici  $(\alpha_i, \alpha_j)$  v matici jednička, v opačném případě nula.

$$H_{i,j} = \begin{cases} 1, & (\alpha_i, \alpha_j) \in G \\ 0, & (\alpha_i, \alpha_j) \notin G \end{cases}$$

Matice sousednosti je čtvercová matice o velikosti  $\nu$ , kde  $\nu$  je počet uzlů v grafu. V případě orientovaného grafu je matice sousednosti symetrická. Symetrická matice je taková matice, která je čtvercová a transponovaná matice je stejná jako matice původní [ME10]. Matice je tedy symetrická podle úhlopříčky a prvky úhlopříčky jsou stejné. Pro znázornění udělejme matici sousednosti pro grafy na obrázku 3.

$$A_{\text{neorientovaný}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{\text{orientovaný}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lze vidět, že matice sousednosti pro neorientovaný graf je symetrická. Pro lepší znázornění orientovaného grafu je využita normalizovaná matice sousednosti.

### 3.2 Normalizovaná matice sousednosti

Normalizovaná matice sousednosti je definovaná stejně jako matice sousednosti. Jednotlivé prvky matice jsou dány vztahem:

$$H_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_0(\alpha_i)}, & (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{G}, \\ 0, & (\alpha_i, \alpha_j) \notin \mathcal{G}, \end{cases},$$

kde  $d_0$  je počet výstupů daného uzlu  $\alpha$ . V případě normalizované matice je součet všech prvků jednoho řádku vždy roven jedné [Kub21]. Pro předchozí grafy lze definovat normalizované matice sousednosti následovně:

$$H_{\text{neorientovaný}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\text{orientovaný}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Laplacian grafu

Laplacian grafu je vyjádření daného grafu pomocí matice. Laplacian může být definován pomocí rovnice:

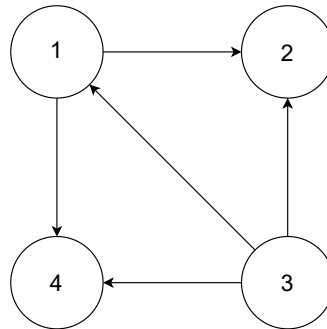
$$L = D - A,$$

kde  $D$  je výstupní matice a  $A$  je nenormalizovaná matice sousednosti grafu. Matice stupňů je taková matice, která má na diagonále počet stupňů jednotlivých uzlů (neboli počet sousedů), zbytek matice pak tvoří nuly. Laplacian lze vyjádřit i pomocí následující matice:

$$L = I - H,$$

kde  $I$  je jednotková matice a  $H$  je normalizovaná matice sousednosti grafu.

Součet jednotlivých prvků v každém řádku Laplacianu se musí rovnat nule. Jako příklad je uvažován graf zobrazen na obrázku 4.



Obrázek 4: Příklad orientovaného grafu

Laplacian daného grafu na obrázku 4 je možné vyjádřit následovně:

$$L = I - H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

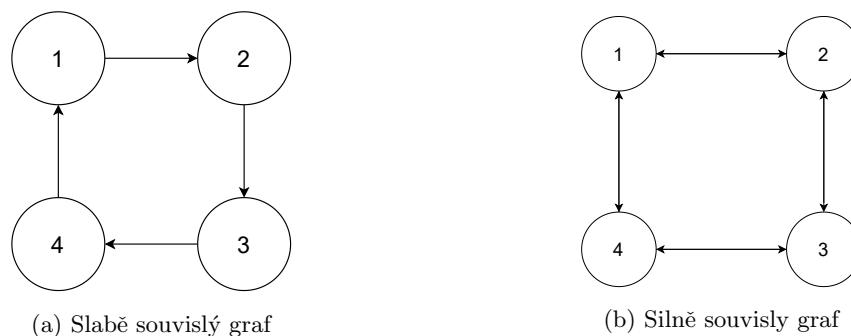
Nebo v případě druhého vzorce jako:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Je vidět, že součet prvků jednotlivých řádku je opravdu roven nule v obou dvou případech. Laplacian se může definovat mnoha způsoby, výsledek je ale vždy stejný. Laplacian je důležitý v tom smyslu, že udává, kolik má jednotlivý uzel sousedů. Laplacian grafu se využívá i při řešení konsenzus problému [ME10].

### 3.4 Souvislost grafů

Pro neorientované grafy platí, že graf je souvislý pokud mezi dvěma vrcholy existuje sled. U orientovaných grafů je rozlišováno zda jsou slabě nebo silně souvislé. Slabá souvislost znamená, že graf je souvislý, tedy že mezi dvěma vrcholy existuje alespoň jedna cesta. Orientovaný graf je silně souvislý pokud platí, že pro dvojici vrcholů  $u, v$  existuje cesta z vrcholu  $u$  do  $v$  a naopak. Souvislý graf je silně souvislý leží-li každá hrana v nějakém cyklu [Dem].



Obrázek 5: Příklad souvislosti grafů

V případě distribuovaného způsobu řešení je potřeba, aby graf byl silně souvislý. Pokud by například jeden agent z topologie vypadl, je potřeba aby na sebe mohli jednotliví agenti navázat i bez něj.

### 3.5 Konsenzus problem

Konsenzus je shoda mezi jednotlivými agenty na nějaké společné hodnotě nebo společném cíli. Lze nastavit  $x_i$  jako stavovou hodnotu daného vrcholu. V případě, že je stavová hodnota všech vrcholů i v síti stejná znamená to, že dosáhly konsenzu. Maticová forma algoritmu konsenzu je dána vztahem:

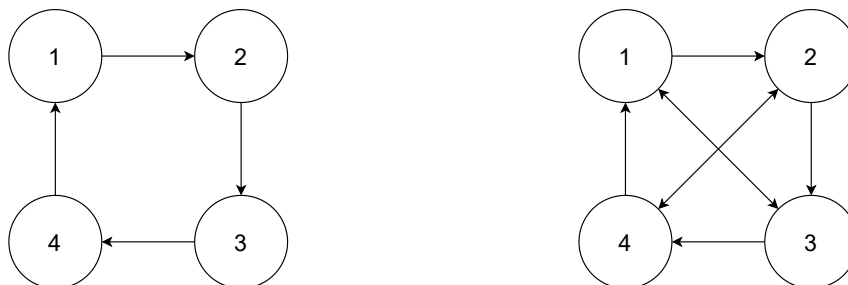
$$\dot{x} = -Lx.$$

$L$  je Laplacian daného grafu, tedy matice o velikosti  $n \times n$ , kde  $n$  je počet agentů dané sítě. Algoritmus konsenzu lze vyjádřit i pomocí vzorce:

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

kde  $a_{ij}$  je  $(i, j)$  element normalizované matice sousednosti a  $N$  je počet agentů dané sítě [Kub21]. Tento fakt demonstruje, jaký vliv má topologie sítě na tento výpočet. Prvky, které spolu nesousedí mají prvek  $a = 0$ , tzn. že se jejich výsledek nepropíše do dané sumy.

Na následujících dvou grafech je demonstrována rychlost dosažení konsenzu pro různé topologie sítě. V obou případech jde o grafy se čtyřmi uzly, ale spojení mezi nimi je různé.



(a) Graf se čtyřmi jednosměrnými komunikačními linkami (b) Graf rozšířený o další dvě obousměrné komunikační linky

Obrázek 6: Příklad různých dvou grafů  $G$

Rychlost dosažení konsenzu pro první graf lze zjistit pomocí Laplaciánu daného grafu. Laplacian daného grafu je vyjádřen jako:

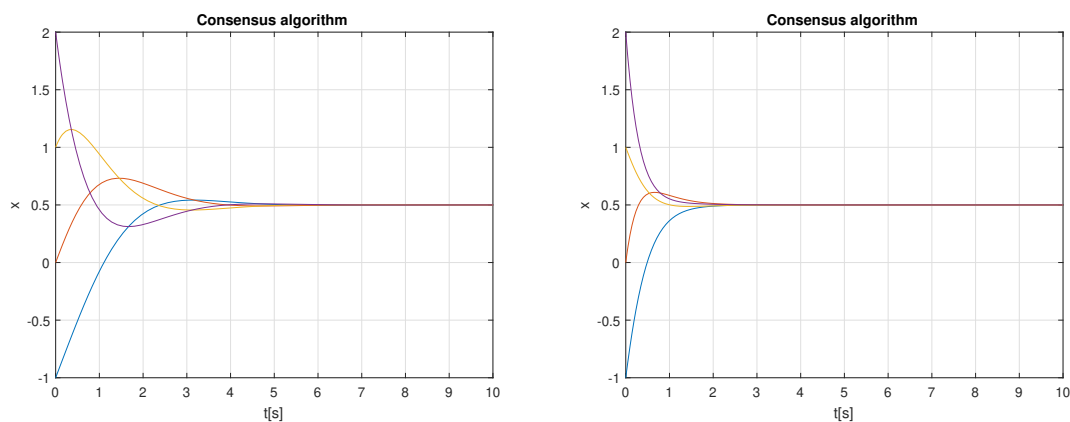
$$L = D - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Je uvažován první graf, který je na obrázku 6 vlevo. Počáteční čas je nastaven jako 0s a koncový jako 10s. Počáteční podmínky jsou nastaveny jako  $x_0 = [-1 \ 0 \ 1 \ 2]$ . Na následujícím grafu je zobrazení dosažení konsenzu pro daný graf.

Dále je proveden stejný výpočet i pro druhý graf, který je na obrázku 6 vpravo. Laplacian grafu bude vypadat následovně:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Byla provedena simulace rovnice  $\dot{x} = -Lx$  pro jednotlivé grafy. Simulace byla provedena pomocí programu Matlab, kód, který byl k simulaci využit je v příloze 7.



(a) Výsledek pro první graf

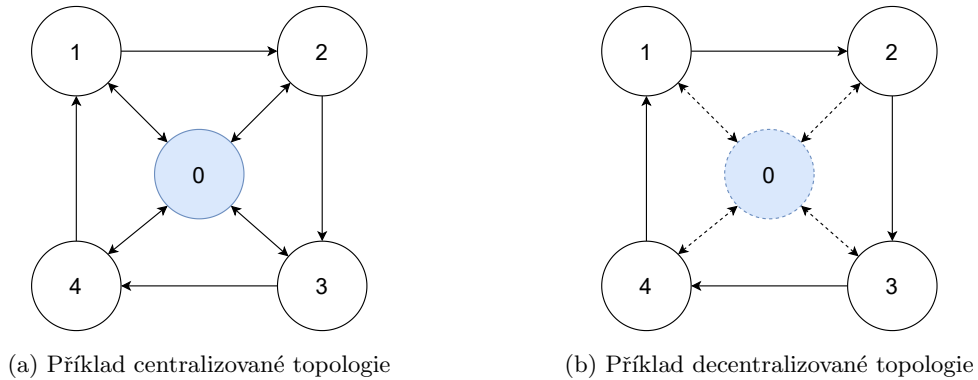
(b) Výsledek pro druhý graf

Obrázek 7: Výsledky pro jednotlivé grafy  $G$

Na obrázku 7 jsou grafy zobrazující výsledky pro jednotlivé grafy. Grafy zobrazují, jak dlouho trvalo agentům dosáhnout společného cíle, tedy konsenzu. V prvním případě dosáhnou konsenzu po přibližně 4 sekundách a ve druhém již po 2 sekundách. To je způsobeno lepší komunikací mezi jednotlivými agenty. Čím více má vrchol společných hran s ostatními vrcholy, tím rychleji dosáhnou konsenzu [Kub21].

### 3.6 Porovnání centralizovaného a decentralizovaného řešení

Centralizované metody mají velkou nevýhodu například ve smyslu velké náročnosti komunikace, výpočetních nárocích na centrální uzel a nebo nerobustnost. V případě poruchy nebo zničení centrálního uzlu přestávají agenti plnit svůj úkol a dané úloha tedy selže. Toto představuje problém především v kritické infrastruktuře, kterou energetická síť bezpochyby je. Například v armádních oblastech, pokud je v případě formace dronů sestřelen vedoucí dron řídící celou formaci, dojde k rozpadu řízení a následnému zničení formace. Decentralizované metody na druhé straně poskytují mnohem lepší odolnost celého systému na poruchy, výpadky komunikace a při aplikaci rekonfiguračních algoritmů umožňují při poškození přenastavit komunikační topologie mezi agenty tak, že zůstane zachována funkčnost pro danou aplikaci. Zároveň je část výpočtů přenesena přímo na agenty, čímž odpadají vyšší nároky na centrální uzel, který tak může mít jen určitou podpůrnou činnost. Například v distribuovaných metodách pro řešení EDP poskytuje pouze informaci o požadovaném zatížení sítě.



Obrázek 8: Příklad centralizované a decentralizované topologie

#### 3.6.1 Centralizované řešení

EDP je klasicky řešeno pomocí centralizovaných metod. To znamená, že je v topologii jeden centrální uzel komunikující s každým jedním uzlem v síti. Celé výpočty řeší právě daný centrální uzel, který předává ostatním agentům informaci o tom, kolik elektřiny mají produkovat. Hlavní nevýhodou centralizovaného řešení je fakt, že pokud je leader eliminován, poté celá komunikační technologie přestává fungovat. Tato skutečnost se dá zlepšit například volbou virtuálního leadera [Lyn96]. Virtuální leader funguje stejně, ale fyzicky není v síti přítomen, pouze virtuálně a je implementován pouze programem [OFM07a]. Příkladem centralizovaného řešení je Lambda-iterační metoda. Centralizovaný způsob řešení, kde je hlavním prvkem leader jsou například formace dronů a nebo řízení autonomním vozidlem.

#### 3.6.2 Decentralizované řešení

Dalším způsobem řešení EDP je decentralizované řešení. Centrální uzel je v tomto případě nahrazen "příkazovým" uzlem. Centrální uzel je fyzicky přítomen v topologii. Příkazový uzel je označen na obrázku 8b jako 0, ale neprovádí žádné související výpočty s řešením EDP, narušil od centrálního uzlu. Příkazový uzel slouží pouze jako zprostředkovatel poskytující informaci o tom, kolik energie má daný uzel vyrobit. Příkladem decentralizovaného algoritmu je algoritmus popsany v kapitole 4.

## 4 Economic Dispatch Problem

V této kapitole budou popsány algoritmy pro řešení EDP. Nejprve bude popsána centralizovaná metoda Lagrangeových multiplikátorů. A následně bude zpracován algoritmus popsáný v článku [YTX13]. Autory tohoto algoritmu jsou Shiping Yang, Sicong Tan a Jian-Xin Xu. Vybrán byl algoritmus s omezujícími podmínkami pro jednotlivé generátory. Jedná se o decentralizovanou verzi algoritmu, která je založena na gradientních metodách optimalizace.

### 4.1 Formulace problému EDP

Hlavním úkolem EDP je najít takové rozdělení energie pro jednotlivé generátory, aby cena byla minimální. K popisu topologie jednotlivé sítě se využívá grafové teorie. Topologie sítě má vliv především na stabilitu a celkovou reprezentaci celé sítě. EDP lze popsat matematicky následující rovnicí:

$$\min_{x_i} \sum_{i=1}^N C_i(x_i).$$

Kde  $N$  je počet jednotlivých generátorů,  $x_i$  je energie generovaná jednotlivými generátory a  $C_i$  je cenová funkce generátoru  $i$ . Pro požadovanou hodnotu platí rovnice:

$$\sum_{i=1}^N x_i = D,$$

kde  $D$  je právě požadovaná hodnota, které se je potřeba dosáhnout. Hodnota  $D$  tak představuje vstup do metod pro řešení EDP. Hodnotu  $D$  poskytují již zmíněné statistické metody pro odhad zatížení sítě. Jak bylo zmíněno již dříve,  $C_i$  je uvažována ve formě kvadratického kritéria. Potom se tento problém zařadí do konvexní optimalizace, jelikož kvadratické kritérium má pouze jedno globální minimum. Pro požadovanou hodnotu dále platí ještě rovnice:

$$\sum_{i=1}^N x_i^{min} \leq D \leq \sum_{i=1}^N x_i^{max},$$

kde  $x_i^{min}$  a  $x_i^{max}$  jsou spodní a horní hranice energie jednotlivého generátoru. Pokud je tato podmínka splněna, tak lze nalézt řešení problému [YTX13].

### 4.2 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Metoda Lagrangeových multiplikátorů je strategie, jak najít maxima a minima funkce, která má nějaká omezení. Podmínkou je, že jedna nebo více rovnic musí být splněné s použitím zvolených proměnných [WW12]. Hodnota Lagrangeova multiplikátoru při řešení této úlohy je rovna rychlosti změny maximální hodnoty účelové funkce při volných omezeních. Princip této metody bude demonstrován na příkladech níže.

#### 4.2.1 Příklad pro 4 generátory

V tomto příkladě bude demonstrováno použití metody Lagrangeových multiplikátorů. K výpočtům bude využit skript v Matlabu, který je přidán v příloze bakalářské práce. Uvažovány budou dva případy, první příklad bude uvažován pro čtyři generátory a druhý pro pět generátorů. V tomto případě bude uvažován centralizovaný způsob řešení. Tedy pokud se změní požadavky sítě, musí se celý výpočet provést znovu a opět odeslat informace jednotlivým agentům. Jedná se o jednorázový výpočet a ne o online algoritmus, který by na změny reagoval okamžitě.

Jsou uvažovány nejprve tedy 4 generátory s následujícími cenovými funkcemi:

$$C_1 = 510 + 7.2x_1 + 0.00142x_1^2, \quad (1)$$

$$C_2 = 78 + 7.97x_1 + 0.0048x_1^2, \quad (2)$$

$$C_3 = 310 + 7.85x_1 + 0.00194x_1^2, \quad (3)$$

$$C_4 = 510 + 7.2x_1 + 0.00142x_1^2. \quad (4)$$



Cena paliva pro jednotlivé generátory, horní limity a spodní limity generátorů jsou zobrazené v tabulce 2.

| Číslo jednotky | Cena paliva | Spodní limit $\underline{x}_i$ | Horní limit $\overline{x}_i$ |
|----------------|-------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1              | 1.0         | 150                            | 600                          |
| 2              | 1.0         | 100                            | 400                          |
| 3              | 1.0         | 50                             | 200                          |
| 4              | 1.0         | 150                            | 600                          |

Tabulka 1: Limity generátorů pro topologii se čtyřmi agenty

Dalším úkolem je vyřešit ekonomický operační bod pro tyto 4 generátory, pokud je celková požadovaná energie nastavena na 1500 MW. Platí tedy následující podmínka:

$$D = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1500 \text{ MW}. \quad (5)$$

Součinem cenových funkcí (1), (2), (3), (4) a příslušné ceny paliva pro danou jednotku lze dostat lambda funkce pro příslušné generátory.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_1 \cdot \nu_1 = 0.001562x_1^2 + 7.92x_1 + 561, \\ \lambda_2 &= C_2 \cdot \nu_2 = 0.00194x_2^2 + 7.85x_2 + 310, \\ \lambda_3 &= C_3 \cdot \nu_3 = 0.0048x_3^2 + 7.97x_3 + 78, \\ \lambda_4 &= C_4 \cdot \nu_4 = 0.001562x_4^2 + 7.92x_4 + 561. \end{aligned}$$

Výsledná hodnota  $\lambda$  je zjištěna vyřešením soustavy rovnic:

$$\frac{d\lambda_1}{dx_1} = \frac{d\lambda_2}{dx_2} = \frac{d\lambda_3}{dx_3} = \lambda.$$

Pro jednotlivé generátory platí následující rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dx_1} &= 2.84 \cdot 10^{-3}x_1 + 7.2 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_2}{dx_2} &= 3.88 \cdot 10^{-3}x_2 + 7.85 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_3}{dx_3} &= 9.6 \cdot 10^{-3}x_3 + 7.97 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_4}{dx_4} &= 2.84 \cdot 10^{-3}x_4 + 7.2 = \lambda. \end{aligned}$$

Jednotlivé rovnice mohou být přepsány do následujících tvarů:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda}{2.84 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.2}{2.84 \cdot 10^{-3}}, \\ x_2 &= \frac{\lambda}{3.88 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.85}{3.88 \cdot 10^{-3}}, \\ x_3 &= \frac{\lambda}{9.6 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.97}{9.6 \cdot 10^{-3}}, \\ x_4 &= \frac{\lambda}{2.84 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.2}{2.84 \cdot 10^{-3}}. \end{aligned}$$

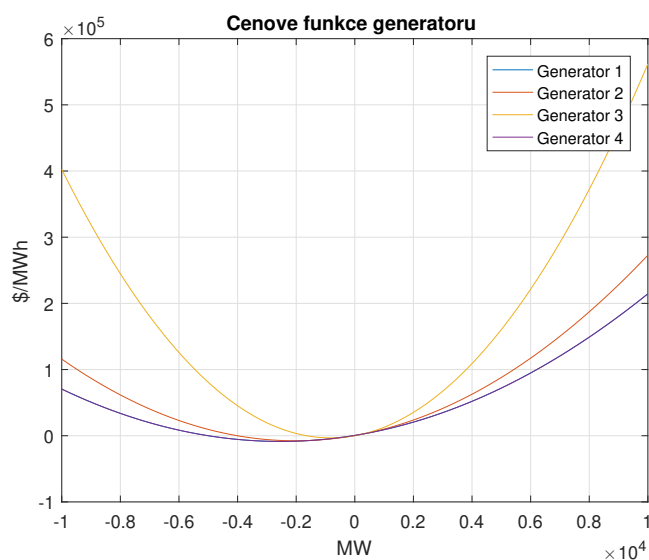
Díky těmto třem rovnicím lze zjistit optimální hodnotu  $\lambda$  označenou dále jako  $\lambda^*$ .

$$\lambda \left( \frac{2}{2.84 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{3.88 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{9.6 \cdot 10^{-3}} \right) - \left( \frac{14.4}{2.84 \cdot 10^{-3}} + \frac{7.85}{3.88 \cdot 10^{-3}} + \frac{7.97}{9.6 \cdot 10^{-3}} \right) = 1500$$

Z předchozího vztahu je získána hodnota  $\lambda^*$ :

$$\lambda^* = 8.84 \text{ \$/MWh.}$$

Na následujícím grafu je zobrazen průběh jednotlivých cenových funkcí. Je vidět, že funkce generátoru 1 a generátoru 4 se překrývají, protože jde o stejný typ generátorů. Cenové funkce jsou kvadratickými funkcemi, grafem jsou tedy paraboly.



Obrázek 9: Cenové funkce jednotlivých generátorů

#### 4.2.2 Příklad pro 5 generátorů

Jako další bude provedena demonstrace metody Lagrangeových multiplikátorů na topologii s pěti agenty. Jednotlivé limity a ceny jsou uvedené v následující tabulce. Je uvažováno 5 generátorů

| Číslo jednotky | Cena paliva | Spodní limit $\underline{x}_i$ | Horní limit $\overline{x}_i$ |
|----------------|-------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1              | 1.0         | 150                            | 600                          |
| 2              | 1.0         | 100                            | 400                          |
| 3              | 1.0         | 50                             | 200                          |
| 4              | 1.0         | 150                            | 600                          |
| 5              | 1.0         | 50                             | 200                          |

Tabulka 2: Limity generátorů pro topologii s pěti agenty

s následujícími cenovými funkcemi:

$$C_1 = 510 + 7.2x_1 + 0.00142x_1^2, \quad (6)$$

$$C_2 = 310 + 7.85x_1 + 0.00194x_1^2, \quad (7)$$

$$C_3 = 78 + 7.97x_1 + 0.0048x_1^2, \quad (8)$$

$$C_4 = 510 + 7.2x_1 + 0.00142x_1^2, \quad (9)$$

$$C_5 = 78 + 7.97x_1 + 0.0048x_1^2. \quad (10)$$

Dalším úkolem je vyřešit ekonomický operační bod pro tyto generátory. Celková požadovaná energie je opět nastavena na 1500 MW. Platí podmínka:

$$D = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1500 \text{ MW.}$$

Součinem cenových funkcí a příslušné ceny paliva dostaneme lambda funkce jednotlivých generátorů.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= C_1 \cdot \nu_1 = 0.001562x_1^2 + 7.92x_1 + 561, \\ \lambda_2 &= C_2 \cdot \nu_2 = 0.00194x_2^2 + 7.85x_2 + 310, \\ \lambda_3 &= C_3 \cdot \nu_3 = 0.0048x_3^2 + 7.97x_3 + 78, \\ \lambda_4 &= C_4 \cdot \nu_4 = 0.001562x_4^2 + 7.92x_4 + 561, \\ \lambda_5 &= C_5 \cdot \nu_3 = 0.0048x_3^2 + 7.97x_3 + 78.\end{aligned}$$

Pro jednotlivé generátory platí následující rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dx_1} &= 2.84 \cdot 10^{-3}x_1 + 7.2 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_2}{dx_2} &= 3.88 \cdot 10^{-3}x_2 + 7.85 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_3}{dx_3} &= 9.6 \cdot 10^{-3}x_3 + 7.97 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_4}{dx_4} &= 2.84 \cdot 10^{-3}x_4 + 7.2 = \lambda, \\ \frac{d\lambda_5}{dx_5} &= 9.6 \cdot 10^{-3}x_3 + 7.97 = \lambda.\end{aligned}$$

Jednotlivé rovnice mohou být přepsány do následujících tvarů:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\lambda}{2.84 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.2}{2.84 \cdot 10^{-3}}, \\ x_2 &= \frac{\lambda}{3.88 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.85}{3.88 \cdot 10^{-3}}, \\ x_3 &= \frac{\lambda}{9.6 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.97}{9.6 \cdot 10^{-3}}, \\ x_4 &= \frac{\lambda}{2.84 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.2}{2.84 \cdot 10^{-3}}, \\ x_5 &= \frac{\lambda}{9.6 \cdot 10^{-3}} - \frac{7.97}{9.6 \cdot 10^{-3}}.\end{aligned}$$

Díky předchozím rovnicím lze získat optimální hodnotu  $\lambda^*$ .

$$\lambda \left( \frac{2}{2.84 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{3.88 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{9.6 \cdot 10^{-3}} \right) - \left( \frac{14.4}{7.2 \cdot 10^{-3}} + \frac{7.85}{3.88 \cdot 10^{-3}} + \frac{15.94}{9.6 \cdot 10^{-3}} \right) = 1500$$

Díky tomuto vztahu lze tedy získat optimální hodnotu:

$$\lambda^* = 8.76 \text{ \$/MWh.}$$

**Poznámka 1 :** Porovnáním výsledků pro čtyři a pro pět generátorů lze zjistit, že přidáním jednoho generátoru do dané topologie se cenová funkce sníží. To je dáno tím, že přidání generátor poskytuje výkon navíc, díky čemuž mohou všechny ostatní generátory pracovat v efektivnějším pásmu. Optimální hodnoty cenových funkcí vypočtených v této kapitole se shodují s hodnotou cenových funkcí zjištěných experimentálně v kapitole 5.

### 4.3 Distribuovaný algoritmus pro řešení EDP

V následující části bude popsán distribuovaný algoritmus, který poskytuje nalezení řešení EDP pomocí distribuovaných metod. Energetické sítě se obvykle skládají z několika generátorů. Předpoklad je, že je v síti  $N$  generátorů. Cenová funkce generované energie je dána následující rovnicí:

$$C_i(x_i) = \frac{(x_i - \alpha_i)^2}{2\beta_i} + \gamma_i. \quad (11)$$

Platí, že  $x_i$  je energie generovaná generátorem  $i$ ,  $\alpha_i \leq 0, \beta_i > 0, \gamma_i \leq 0$ . Jednotlivé parametry  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$  jsou poskytovány výrobcem a nebo jsou experimentálně odměřeny a aproximovány. Jsou definovány dvě matice  $P, Q \in R^{N \times N}$  spojené s grafem  $G = (V, E, A)$  následujícím způsobem:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_i^+} & \text{pokud } j \in N_i^+, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$q_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_i^-} & \text{pokud } j \in N_i^-, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z definice je vidět, že  $P$  je řádkově stochastická matice a  $Q$  sloupcově stochastická matice. Stochastická matice je taková matice, pro kterou platí, že součet řádků popřípadně sloupců je roven jedné. Nejprve bude představen algoritmus bez omezení, který následně bude rozšířen o projekční operátor. Ten reprezentuje respektování omezení. V příkladech bude použit výhradně algoritmus s omezením.

#### 4.3.1 Algoritmus bez omezení

Předpokladem pro tento algoritmus popsáný v článku [YTX13] je, že žádný generátor nemá omezení. Známé řešení pro EDP je rostoucí cenové kritérium. Tato kvadratická cenová funkce  $C_i$  je předepsána rovnicí 11.

$$\begin{cases} \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i} = \lambda^*, & x_i^{min} < x_i < x_i^{max} \\ \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i} < \lambda^*, & x_i = x_i^{max} \\ \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i} > \lambda^*, & x_i = x_i^{min} \end{cases}$$

Kde  $\lambda_i^*$  je optimální cenová funkce. Pokud tedy mají všechny generátory optimální konfiguraci, cenová funkce je rovna optimální hodnotě, tedy:

$$\frac{x_i^* - \alpha_i}{\beta_i} = \lambda_i^*, \forall i \in V.$$

Pokud je tedy známá optimální cenová funkce lze dostat rovnici pro výpočet optimální energie pro každý generátor.

$$x_i^* = \beta_i \lambda_i^* + \alpha_i, \forall i \in V.$$

Hlavní část algoritmu tedy bude vypadat následovně:

$$\lambda_i(k+1) = \sum_{j \in N_i^+} p_{i,j} \lambda_j(k) + \epsilon y_i(k),$$

$$x_i(k+1) = \beta_i \lambda_i(k+1) + \alpha_i,$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j \in N_i^+} q_{i,j} y_j(k) - (x_i(k+1) - x_i(k)).$$

Hodnota  $\epsilon$  je zde brána jako dostatečně malá kladná konstanta. Pokud je hodnota dostatečně malá, algoritmus je stabilní a všechny proměnné konvergují k optimálnímu řešení, které poskytují centralizované metody. Pomocí těchto rovnic je možné sestavit výsledný algoritmus. Optimální cenovou funkci pro generátor  $i$  lze označit jako  $\lambda_i(k)$ , odpovídající energii jako  $x_i(k)$  a rozdíl požadované a momentální hodnoty jako  $y_i(k)$ . Následně jsou inicializovány počáteční podmínky:

$$\begin{cases} \lambda_i(0) &= \text{jakákoliv fixní hodnota,} \\ x_i(0) &= \text{jakákoliv fixní hodnota,} \\ y_i(0) &= \begin{cases} \frac{D}{\|N_0^-\|} - x_i(0), \text{ pokud } i \in N_0^-, \\ -x_i(0), \text{ jinak.} \end{cases} \end{cases}$$

Algoritmus lze pro zjednodušení přepsat do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(k+1) &= P\boldsymbol{\lambda}(k) + \epsilon\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{x}(k+1) &= B\boldsymbol{\lambda}(k+1) + \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{y}(k+1) &= Q\mathbf{y}(k) - (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)) \end{aligned}$$

Platí, že  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  a  $\boldsymbol{\lambda}$  jsou sloupcové vektory složené z  $x_i, y_i, \alpha_i, \lambda_i$  a matice  $B$  má na diagonále jednotlivé hodnoty  $\beta_i$ .

Jedná se tedy o iterativní algoritmus složený ze tří rovnic pro  $\lambda, x, y$ . Tyto tři rovnice se vypočítávají v každém uzlu zvlášť. Z rovnic je patrné, že matice  $P$  a  $Q$  jsou přítomny pouze v rovnicích pro  $\lambda$  a  $y$ . Zde také probíhá výměna informací na základě dané topologie sítě.

### 4.3.2 Algoritmus s omezením

Každý generátor má své fyzikální limity, kolik minimálně a maximálně může vyrábět. Z tohoto důvodu se implementuje algoritmus s podmínkami, které právě tyto omezení berou v úvahu. Pro respektování této skutečnosti se zavádí operátor  $\phi$ , který reprezentuje daná omezení. Pro algoritmus se zavede omezení následujícím způsobem:

$$\phi_i(\lambda_i) = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{pokud } \lambda_i > \bar{\lambda}_i, \\ \beta_i \lambda_i + \alpha_i < \lambda^*, & \text{pokud } \underline{\lambda}_i \leq \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i \forall i \in V, \\ \underline{x}_i, & \text{pokud } \lambda_i < \underline{\lambda}_i. \end{cases}$$

Platí, že  $\underline{\lambda}_i = (\underline{x}_i - \alpha_i)/\beta_i$  a  $\bar{\lambda}_i = (\bar{x}_i - \alpha_i)/\beta_i$ . Distribuovaný algoritmus bude vypadat následovně:

$$\lambda(k+1) = P\lambda(k) + \epsilon y(k), \quad (12a)$$

$$x(k+1) = \phi(\lambda(k+1)), \quad (12b)$$

$$y(k+1) = Qy(k) - (x(k+1) - x(k)). \quad (12c)$$

Matice  $\phi(\lambda(k+1))$  je vyjádřena jako  $[\phi_1(\lambda_1(k+1)), \phi_2(\lambda_2(k+1)), \dots, \phi_N(\lambda_N(k+1))]^T$ . Inicializace tohoto algoritmu se poté může provést podle následujícího předpisu:

$$\begin{cases} \lambda_i(0) & \underline{\lambda}_i, \\ x_i(0) & \underline{x}_i, \\ y_i(0) & \begin{cases} \frac{D}{|N_0^-|} - \underline{x}_i & \text{pokud } i \in N_0^- \\ -\underline{x}_i & \text{jinak} \end{cases} \end{cases}$$

### 4.3.3 Důkaz konvergence

Ve zmiňovaném algoritmu platí, že pokud je konstanta učení  $\epsilon$  kladná a dostatečně malá, pak je algoritmus stabilní a všechny proměnné konvergují k řešení tradičního EDP [YTX13].

$$\lambda_i(k) \rightarrow \lambda^*, x_i(k) \rightarrow x_i^*, y_i(k) \rightarrow 0, \text{ pro } k \rightarrow \infty, \forall i \in V$$

K důkazu je použita perturbaci vlastních čísel, pomocí které bude analyzována konvergence algoritmu. V rovnici (12c) je nahrazena  $x$  za  $\lambda$  použitím (12a) (12b), výsledkem je výraz:

$$\mathbf{y}(k+1) = (Q - \epsilon B)\mathbf{y}(k) + B(I - P)\boldsymbol{\lambda}(k), \quad (13)$$

kde  $I$  je jednotková matice odpovídající dimenze. Přepsáním (12a) a (13) do maticové formy lze získat následující maticovou formu:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & \epsilon I \\ B(I - P) & Q - \epsilon B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Matici  $M$  a  $\Delta$  jsou definovány jako:

$$M \triangleq \begin{bmatrix} P & 0 \\ B(I - P) & Q - \epsilon B \end{bmatrix} \quad a \quad \Delta \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -B \end{bmatrix}.$$

Systémová matice z rovnice (14) může být považována jako  $M$  rozšířená o  $\epsilon\Delta$ .  $M$  je spodní trojúhelníková matice a její vlastní čísla mají stejnou dimenzi jako vlastní čísla matic  $P$  a  $Q$ . Matice  $M$  má tedy dvě vlastní čísla, tedy  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ . Vektory  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  a  $\mathbf{v}_1^T$ ,  $\mathbf{v}_2^T$  lze definovat následovně:

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -\eta\mu \end{bmatrix}, \quad (15)$$

kde  $\eta = \sum_{i=1}^N \beta_i$ . Dále lze definovat vektory  $\mathbf{v}_1^T$ ,  $\mathbf{v}_2^T$ .

$$V^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^T B & 1^T \\ \omega^T & 0^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

Platí, že  $\mathbf{v}_1^T$ ,  $\mathbf{v}_2^T$  jsou dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice  $M$ . Platí rovnice  $V^T U = I$ . Pokud  $\epsilon$  je dostatečně malá hodnota, variace  $\theta_1$  a  $\theta_2$  rozšířené o  $\epsilon\Delta$  lze kvantifikovat jako vlastní čísla matice  $V^T \Delta U$ .

$$V^T \Delta U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^T \mu & -\eta \omega^T \mu \end{bmatrix} \quad (17)$$

Vlastní čísla této matice jsou  $0$  a  $-\eta \omega^T \mu < 0$ . Tedy platí, že  $(d\theta_1)/(d\epsilon) = 0$  a  $(d\theta_2)/(d\epsilon) = -\eta \omega^T \mu < 0$ . To znamená, že  $\theta_1$  se nemění v závislosti na  $\epsilon$  a pokud je  $\epsilon$  kladné,  $\theta_2$  se zmenšuje. Nechť  $\delta_1$  je horní hranice hodnoty  $\epsilon$ , tak aby platilo, že pokud  $\epsilon < 0$ , pak  $|\omega_2| < 1$ . Jelikož vlastní čísla matice závisí na jejích vstupech, v tomto případě zbytek vlastní čísel matice  $M + \epsilon\Delta$  závisí na hodnotě  $\epsilon$ . V tom případě tedy existuje horní hranice  $\delta_2$ , taková že pokud  $\epsilon < \delta_2$ , pak platí, že  $|\theta_j| < 1, j = 3, 4, \dots, 2N$ . Tedy pokud je  $\epsilon < \min(\delta_1, \delta_2)$ , poté je možné zaručit, že první vlastní číslo  $\theta_1 = 1$  je jednoduché a zbytek vlastních čísel leží uvnitř jednotkové kružnice. Pak lze tvrdit, že  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  je vlastní vektor systémové matice z rovnice 14. Platí, že  $\theta_1 = 1$  a jelikož všechna ostatní vlastní čísla leží uvnitř jednotkové kružnice, pak platí že:

$$\begin{bmatrix} \lambda(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \text{ konverguje } k \text{ intervalu } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pokud } k \rightarrow \infty.$$

Potom  $y_i(k) \rightarrow 0$ . Z rovnice (12c) lze derivovat  $1^T x(k)$ , tedy požadované podmínky jsou splněné. Z rovnice (12a) lze zjistit, že  $\lambda_i(k)$  konverguje ke společné hodnotě, tedy podmínka kritéria cenové funkce je splněna. Z těchto tvrzení lze dojít k závěru, že je splněna podmínka konvergence. Z toho důvodu lze tvrdit, že tato decentralizovaná metoda poskytuje stejné řešení jako klasické centralizované metody. Například jako metoda Lagrangeových multiplikátorů, která byla zpracována v kapitole 4.2.

## 5 Výsledky pro různé typy topologie

V této kapitole budou porovnány různé topologie sítě a jejich vliv na rychlost konvergence. Využit bude algoritmus, který je zpracovaný v příloze 7. Nejprve budou uvažovány dvě topologie se čtyřmi uzly a poté čtyři topologie s pěti uzly. Jednotlivé topologie budou složeny ze tří typů generátorů popsaných níže.

### Čtyři generátory:

- **Linka:** Každý uzel je spojen s následujícím obousměrnou komunikační hranou.
- **Čtverec:** Uzly jsou spojeny do kruhu pomocí jednosměrných komunikačních hran.

### Pět generátorů:

- **Pseudo-linka:** Uzly 1 a 2 jsou spojeny s uzlem 3, každý pomocí své obousměrné komunikační hrany. Zbytek sítě je jako linka.
- **Čtverec s centrálním uzlem:** Uzly 1 až 4 jsou spojeny do kruhu pomocí obousměrných komunikačních hran, kdy topologie je doplněna o uzel 5. Ten komunikuje se všemy uzly pomocí obousměrných komunikačních hran.
- **Pětiúhelník s křížovými vazbami:** Uzly jsou spojeny do pětiúhelníku jednosměrnými komunikačními hranami. Některé uzly jsou provázány křížovými jednosměrnými hranami.
- **Pětiúhelník:** Uzly jsou uspořádány do kruhu a propojeny obousměrnými komunikačními linkami.

V těchto příkladech jsou k dispozici tři druhy generátorů, konkrétně Typ A (jednotka spalující uhlí), Typ B (jednotka spalující olej) a Typ C (jednotka spalující olej). Parametry cenové funkce a možnosti jednotlivých generátorů jsou zobrazeny v tabulce 3. Parametry pro všechny tři typy generátorů byly převzaty z knihy "Power generation, operation, and control" od Wooda a Wollenberga [WW12]. Jednotlivé komunikační topologie jsou složeny z jednotlivých generátorů různých typů. Parametry cenové funkce jsou označeny písmeny a - b - c. V popisovaném algoritmu jsou konvertovány na  $\alpha - \beta - \gamma$ . Pro převod parametrů a - b - c na parametry  $\alpha - \beta - \gamma$  jsou využity následující vzorce:

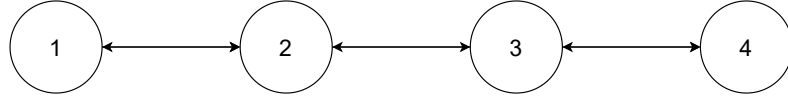
$$\alpha_i = -\frac{b_i}{2a_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{2a_i}, \quad \gamma_i = c_i - \frac{b_i^2}{4a_i}.$$

| Typ generátoru                 | A (spalující uhlí) | B (spalující olej) | C (spalující olej) |
|--------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Rozsah (MW)                    | [150, 600]         | [100, 400]         | [50, 200]          |
| a (\$/MW <sup>2</sup> h)       | 0.00142            | 0.00194            | 0.00482            |
| b (\$/MWh)                     | 7.2                | 7.85               | 7.97               |
| c (\$/h)                       | 510                | 310                | 78                 |
| $\alpha$ (MW)                  | -2535.2            | -2023.2            | -826.8             |
| $\beta$ (MW <sup>2</sup> h/\$) | 352.1              | 257.7              | 103.7              |
| $\gamma$ (\$/h)                | -8616.8            | -7631.0            | -3216.7            |

Tabulka 3: Parametry cenové funkce a možnosti jednotlivých generátorů

## 5.1 Topologie 1

První komunikační topologie je zobrazena na obrázku 10. V této síti jsou čtyři generátory, které jsou vybrané z tabulky 3. V této topologii jsou dva generátory typu A, jeden generátor typu B a jeden typu C. Komunikace mezi jednotlivými generátory je dána linkami spojující jednotlivé agenty. Jednotliví sousedi si navzájem mohou předávat informace i informace přijímat. V tabulce 4 jsou definovány počáteční podmínky pro jednotlivé  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $\lambda(0)$ .



Obrázek 10: Topologie 1

V tabulce 4 jsou uvedeny hodnoty pro inicializaci proměnných jednotlivých generátorů.

| Inicializace          | i = 1 | i = 2 | i = 3 | i = 4 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|
| $x(0)$ (MW)           | 100   | 50    | 150   | 150   |
| $y(0)$ (MW)           | 650   | -50   | 600   | -150  |
| $\lambda(0)$ (\$/MWh) | 8.24  | 8.42  | 7.63  | 7.63  |

Tabulka 4: Inicializace pro topologie se čtyřmi agenty

Dále je třeba inicializovat ještě konstantu učení  $\epsilon$ . Konstanta byla v tomto případě zvolena jako  $\epsilon = 7.026 \cdot 10^{-4}$ . Tato hodnota bude zachována i pro všechny následující příklady.

Následně je potřeba určit jednotlivé matice  $P$  a  $Q$ , které jsou potřeba k výpočtu algoritmu. Matice  $P$  je řádkově stochastická a naopak matice  $Q$  je sloupcově stochastická.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Normalizovaná matice sousednosti pro tuto topologii má následující tvar.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dále bude vypočten Laplacian grafu podle následujícího vzorce:

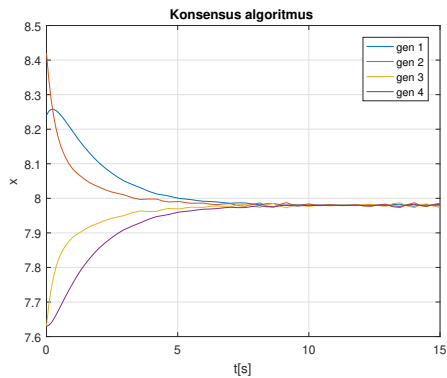
$$L = I - H, \tag{18}$$

kde  $H$  je normalizovaná matice sousednosti a  $I$  je jednotková matice.

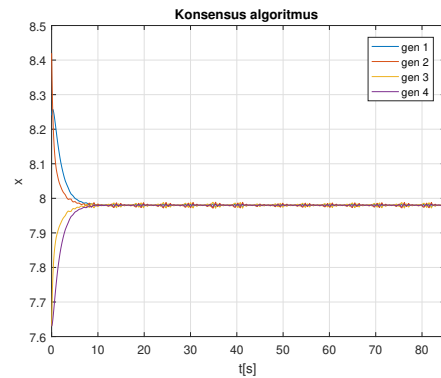
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dále je demonstrována rychlost dosažení konsenzu pro tuto danou topologii. Rychlost je zjištěna pomocí Laplacianu daného grafu, který byl vypočten o krok výše. Jako počáteční podmínky jsou zvoleny jednotlivé hodnoty  $\lambda$ , tedy  $x_0 = [8.24 \ 8.42 \ 7.63 \ 7.63]$ . Graf dosažení konsenzu je zobrazen na obrázku 11. Z grafu lze vidět, že jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu za přibližně 10 sekund. Jednotlivé hodnoty se ustálí na hodnotě přibližně  $x^* = 7.98$ , i když dochází k občasnému odchýlení od ustálené hodnoty.





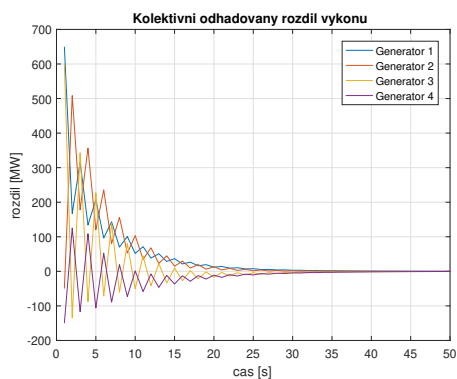
(a) Graf konsenzu pro 15 kroků



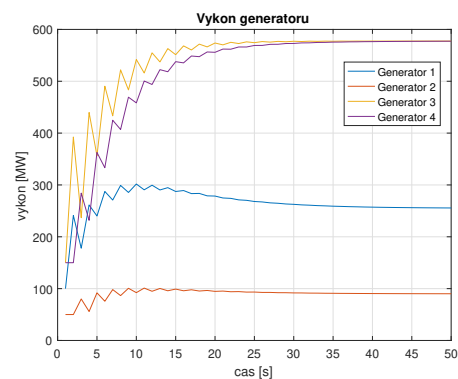
(b) Graf konsenzu pro 85 kroků

Obrázek 11: Grafy konsenzu topologie 1

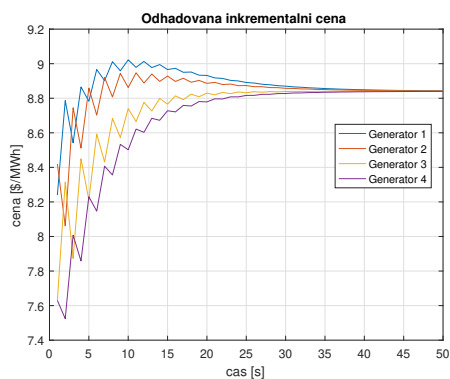
Na následujících grafech jsou znázorněná nejdůležitější kritéria k vyhodnocení dané topologie. Na obrázku 12a je zobrazen vývoj odhadovaného rozdílu výkonu. Na obrázku 12b je znázorněn vývoj energie vydané jednotlivými generátory. Na obrázku 12c je znázorněn vývoj cenové funkce jednotlivých generátorů a na obrázku 12d je porovnání vývoje generované energie a požadované energie v čase.



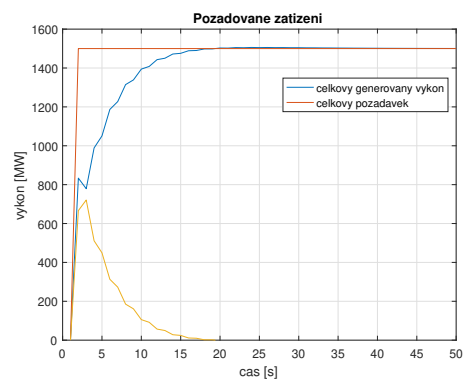
(a) Kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu



(b) Výkon generátorů



(c) Odhadovaná inkrementální cena



(d) Pokrytí požadovaného zatížení

Obrázek 12: Grafy topologie 1

Lze vidět, že u všech grafů dochází k oscilaci, ale přesto dosáhne systém správných výsledků a dosáhne požadované energie, která je zde nastavena na 1500 MW. Požadované energie, kterou je třeba vyrobit, dosáhne přibližně po 30 krocích, jak lze vidět na obrázku 12d. Na obrázku 12c lze vidět, že cenová funkce všech generátorů konverguje ke stejné hodnotě, přibližně  $\lambda^* = 8.84$  \$/MWh. Celkový cíl je tedy splněný. Všechny výstupy jsou v rámci limitních rozsahů jednotlivých generátorů. Pro jednotlivé generátory jsou získány následující hodnoty:  $x_1^* = 577.3$  MW,  $x_2^* = 577.3$  MW,  $x_3^* = 255.2$  MW,  $x_4^* = 90.2$  MW, což lze získat z grafu 12b. Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Byla provedena kontrola, že generátory vyrobí požadované množství energie.

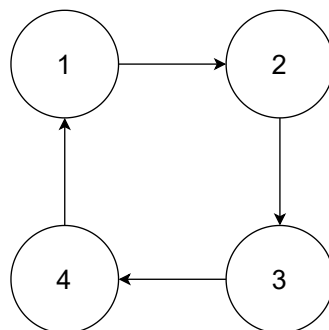
$$x = 577.3 + 577.3 + 255.2 + 90.2 = 1500 \text{ MW}$$

Na obrázku 12a lze vidět, že kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu se po 30 krocích taktéž ustálí na hodnotě nula, tedy hodnoty výkonu jednotlivých generátorů se po 30 sekundách ustálí a vytváří tak požadovaný výkon 1500 MW.

**Poznámka 2:** Z grafu 11a lze vidět, že jednotlivé generátory dosáhnou konsenzu po přibližně 10 sekundách. Na grafu 11b lze vidět, že hodnoty  $x_i$  oscilují kolem dohodnuté hodnoty  $x^* = 7.98$ . V případě odhadované inkrementální ceny, rozdílu výkonů a výkonu generátorů se simulace ustálí po 30 sekundách. Dochází zde k občasnému odchýlení od ustálené hodnoty. Jak lze vidět z obrázku 12c výsledná optimální hodnota je  $\lambda^* = 8.84$  \$/MWh. Výsledná hodnota se liší od hodnoty, kterou lze dosáhnout algoritmem konsenzu. Laplacian je tak vhodný pouze pro určení, zda daná topologie je schopna dosáhnout konsenzu.

## 5.2 Topologie 2

Další topologií je čtverec, zobrazen na obrázku 13. Tato topologie je sestavena opět ze čtyř generátorů. Opět obsahuje dva generátory typu A, jeden typu B a jeden typu C. Jednotlivé uzly mohou předávat informaci dalšímu sousedovi, ale přijímat jí mohou jen od předchozího souseda.



Obrázek 13: Topologie 2

Opět je potřeba nejprve definovat matice  $P$  a  $Q$ .

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

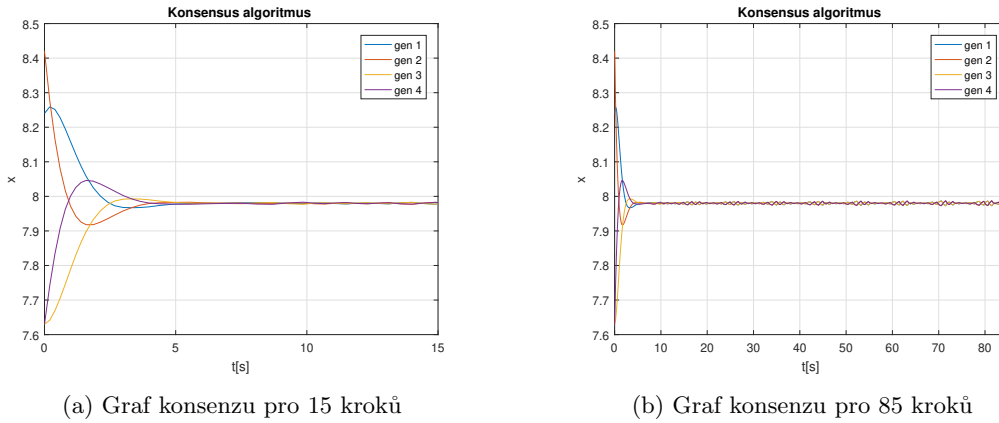
Normalizovaná matice pro tuto topologii:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opět je vypočten Laplacian daného grafu pomocí vzorce  $L = I - H$ .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na obrázku 14 je opět zobrazen graf rychlost dosažení konsenzu pro danou topologii. Rychlost je zjištěna pomocí daného Laplacianu. Za počáteční podmínky jsou dosaženy hodnoty konstanty  $\lambda$ , tedy  $x_0 = [8.24 \ 8.42 \ 7.63 \ 7.63]$ . Z grafu je možné tvrdit, že jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnou společného konsenzu a ustálí se přibližně na hodnotě  $x^* = 7.98$ . Konsenzu dosáhnou přibližně po 5 sekundách.

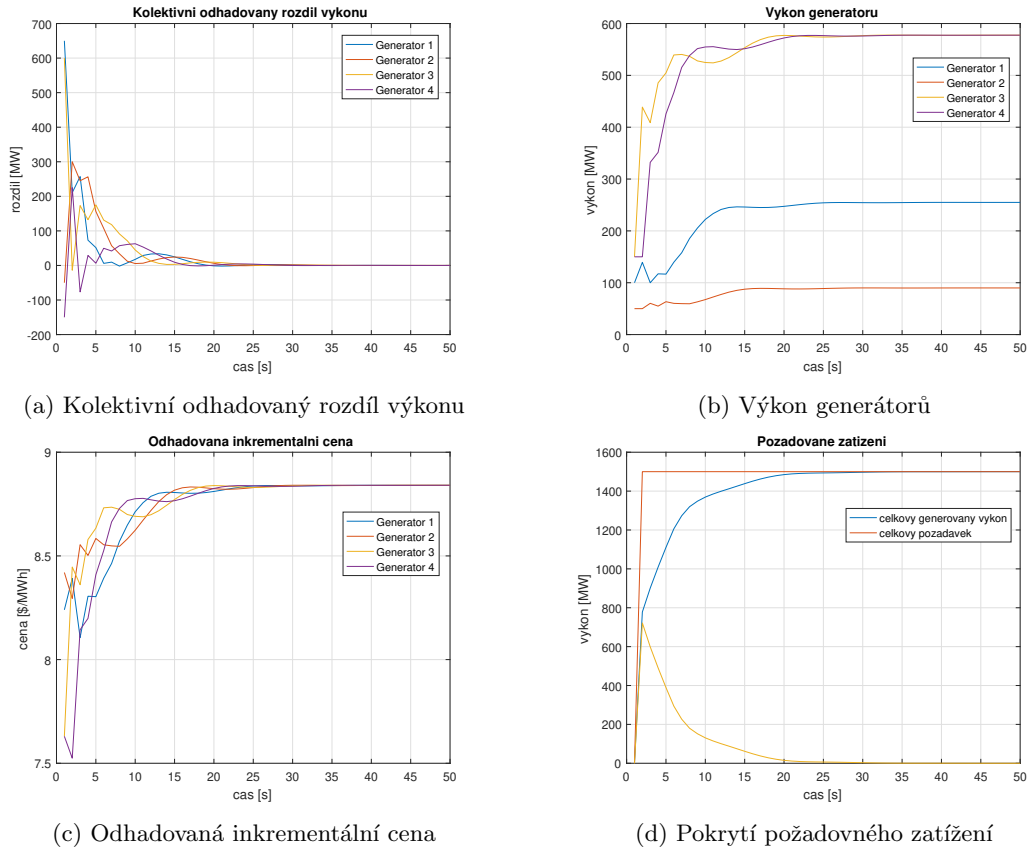


Obrázek 14: Grafy konsenzu topologie 2

Z grafu 15d lze usoudit, že jednotlivé generátory vyrobí požadované množství energie, tedy 1500 MW. Na tuto hodnotu se generátory dostanou za přibližně 25 sekund. Topologie je tedy o něco rychlejší než předchozí topologie popsaná v kapitole 5.1. Cenové funkce jednotlivých generátorů taktéž konvergují všechny ke stejné hodnotě, tedy přibližně  $\lambda^* = 8.84\$/MWh$ , tato skutečnost je zobrazena na obrázku 15c. Cenové funkce obou topologií sestavených ze 4 generátorů by měly dosahovat stejné optimální cenové funkce. Tato podmínka je tedy splněna. Jednotlivé generátory dosahují přibližně hodnot:  $x_1^* = 577.3 \text{ MW}$ ,  $x_2^* = 577.3 \text{ MW}$ ,  $x_3^* = 255.2 \text{ MW}$ ,  $x_4^* = 90.2 \text{ MW}$ , což lze získat z grafu 15b. Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Byla provedena kontrola, že generátory opravdu vyrobí požadované množství energie.

$$x = 577.3 + 577.3 + 255.2 + 90.2 = 1500 \text{ MW}$$

Odhadovaný rozdíl výkonu se taktéž ustálí po 25 sekundách, kdy generátory začnou vyrábět konstantní množství energie, jak lze vidět z obrázku 15a.



Obrázek 15: Grafy topologie 2

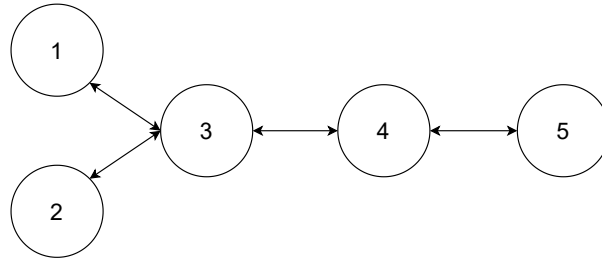
**Poznámka 3:** Na obrázku 14 lze vidět, že hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu po přibližně 5 vteřinách a to na hodnotě  $x^* = 7.98$ , stejně jako v případě předchozí topologie popsané v kapitole 5.1. Hodnoty  $x_i$  se nikdy úplně na dané hodnotě neustálí, ale oscilují kolem. Generátory vyrobí požadované množství energie za 25 vteřin, narozdíl od první topologie je tato varianta přibližně o 5 vteřin rychlejší. Obě topologie složené ze čtyř generátorů poskytují stejné výsledky. Tedy cenová funkce jednotlivých generátorů konverguje na stejnou hodnotu, stejně tak výkony jednotlivých generátorů poskytují stejné hodnoty. Rozdíl je pouze v rychlosti a celkové efektivitě zvolených topologií.

### 5.3 Topologie 3

Následující topologie obsahuje 5 agentů. Daná topologie je zobrazena na obrázku 16. V této topologii mohou všichni sousedi posílat i přijímat informace. Tato topologie obsahuje dva generátory typu A, dva generátory typu C a jeden generátor typu B. Nejprve je potřeba inicializovat počáteční podmínky této topologie. Počáteční podmínky jsou inicializované pro všechny následující topologie stejně.

| Proměnné              | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ | $i = 4$ | $i = 5$ |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x(0)$ (MW)           | 100     | 50      | 150     | 150     | 50      |
| $y(0)$ (MW)           | 650     | -50     | 600     | -150    | -50     |
| $\lambda(0)$ (\$/MWh) | 8.24    | 8.42    | 7.63    | 7.63    | 8.42    |

Tabulka 5: Inicializace pro topologie s pěti agenty



Obrázek 16: Topologie 3

Dále je potřeba si opět inicializovat matice  $P$  a  $Q$ .

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

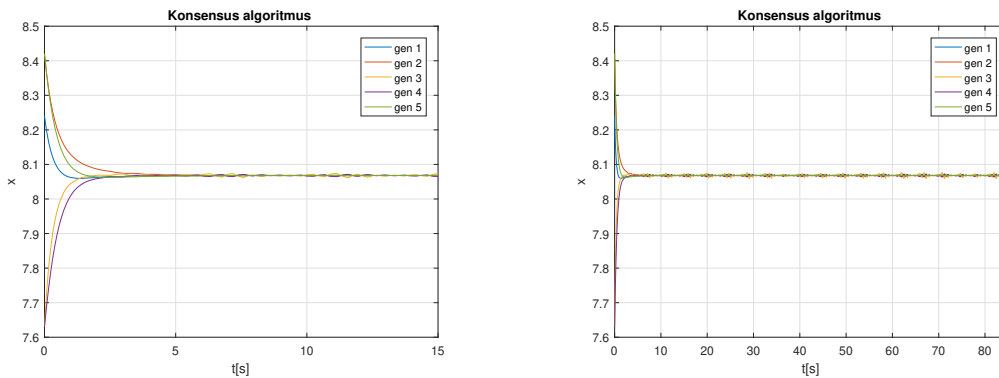
Normalizovaná matice  $H$  pro tuto topologii má tvar:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laplacian je opět vypočten podle vzorce 18.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na následujícím grafu je zobrazen konsenzus mezi jednotlivými agenty. Jako počáteční podmínky byly zvoleny jednotlivé hodnoty  $\lambda$ , tedy  $x_0 = [8.24 \ 8.42 \ 7.63 \ 7.63 \ 8.42]$ . Na grafech je zobrazen nejprve průběh do 15 sekund a poté do 85 sekund, aby byly vidět odchylky od ustálené hodnoty. Jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu a to za přibližně 4 sekundy, dochází zde však k občasnému odchýlení od ustálené hodnoty. Ustálená hodnota je v tomto případě  $x^* = 8.07$ .



(a) Graf konsenzu pro 15 kroků

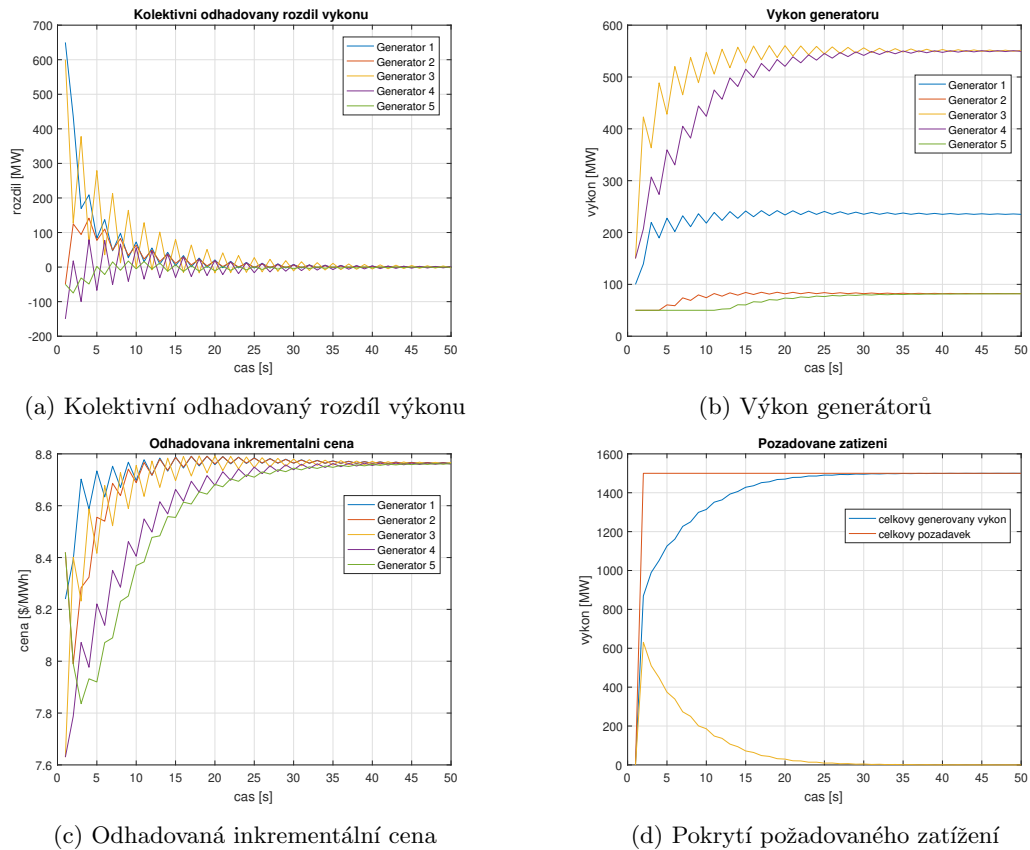
(b) Graf konsenzu pro 85 kroků

Obrázek 17: Grafy konsenzu topologie 3

Na grafech 18 jsou zobrazeny důležité parametry zvolené topologie. Generátory taktéž vyrobí požadované množství energie 1500 MW, a to za přibližně 35 vteřin, jak lze vidět z grafu 18d. U všech grafů opět dochází k oscilaci, ale i tak dosáhnou požadovaných hodnot. Cenová funkce všech generátorů konverguje ke stejné hodnotě, tou je  $\lambda^* = 8.76\$/\text{MWh}$ , to lze zjistit z grafu 18c. Celkový cíl je tedy splněný. Všechny výstupy generátorů jsou opět v rámci jejich limitních rozsahů. Jednotlivé generátory dosahují následujících hodnot:  $x_1^* = 549.6 \text{ MW}$ ,  $x_2^* = 549.6 \text{ MW}$ ,  $x_3^* = 236 \text{ MW}$ ,  $x_4^* = 82.2 \text{ MW}$ ,  $x_5^* = 82.2 \text{ MW}$ . Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Pro kontrolu je proveden výpočet:

$$x = 549.6 + 549.6 + 236 + 82.2 + 82.2 \approx 1500 \text{ MW}$$

Kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu se ustálí na hodnotě nula za přibližně 50 sekund, jak lze vidět z grafu 18d.

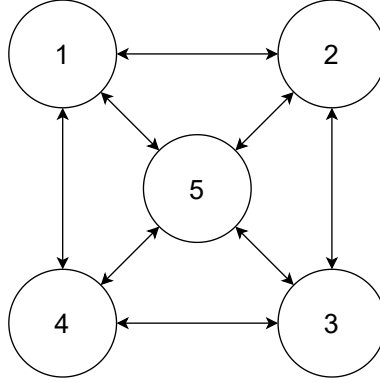


Obrázek 18: Grafy topologie 3

**Poznámka 4:** Jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnout konsenzu na hodnotě  $x^* = 8.07$  a to za přibližně 4 vteřiny. Hodnota  $x^*$  je nižší než v případě topologií se čtyřmi agenty. Hodnota je nižší, protože topologie obsahuje víc komunikačních hran. Hodnoty se nikdy zcela neustálí na dané hodnotě  $x^*$ , ale pouze kmitají kolem jako v ostatních případech. Generátory vyrobí požadované množství energie za přibližně 35 sekund.

## 5.4 Topologie 4

Další uvažovaná topologie má taktéž 5 agentů. Agenti jsou uspořádáni do čtverce a jeden agent je uprostřed topologie a spojuje tak jednotlivé agenty navzájem. Topologie je znázorněna na obrázku 19. Opět jsou uvažovány dva generátory typu A, dva generátory typu C a jeden generátor typu B. Inicializace jednotlivých počátečních podmínek je vypsána v tabulce 5.



Obrázek 19: Topologie

Inicializace matic  $P$  a  $Q$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

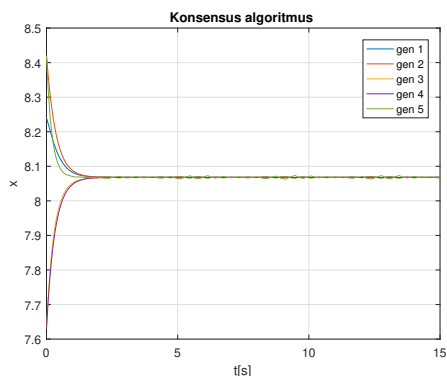
Normalizovaná matice sousednosti  $H$  pro čtvrtou topologii vypadá následovně:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

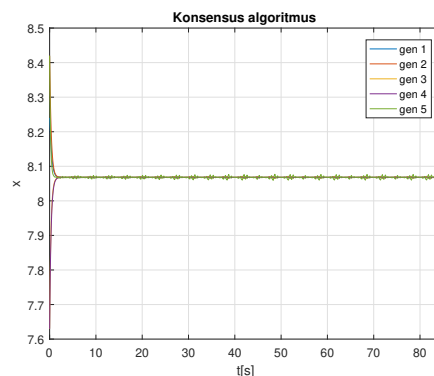
Výpočet Laplacianu je obdobný jako u předchozích příkladů.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Na následujícím obrázku je opět zobrazen graf konsenzu pro danou topologii. Jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu za přibližně 2 vteřiny a to na hodnotě  $x^* = 8.07$ , stejně jako v případě předchozí topologie z kapitoly 5.3.



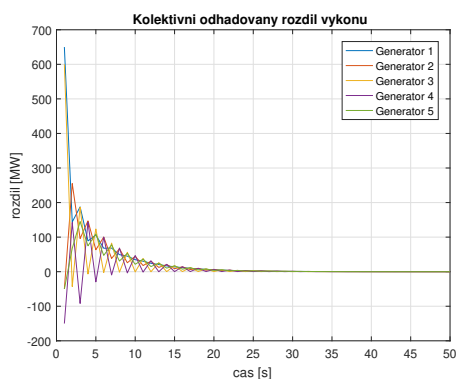
(a) Graf konsenzu pro 15 kroků



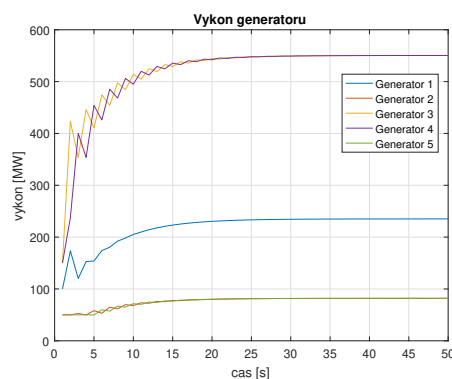
(b) Graf konsenzu pro 85 kroků

Obrázek 20: Grafy konsenzu topologie 4

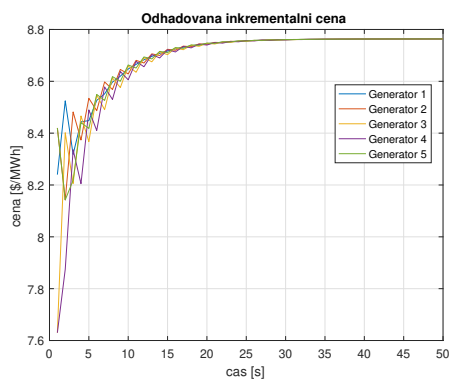
Na následujících grafech jsou opět znázorněny důležité parametry dané topologie.



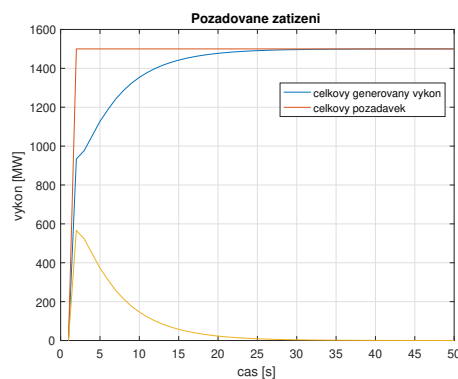
(a) Kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu



(b) Výkon generátorů



(c) Odhadovaná inkrementální cena



(d) Pokrytí požadovaného zatížení

Obrázek 21: Grafy topologie 4

Generátory vyrobí požadované množství energie 1500 MW po přibližně 30 sekundách. U všech grafů dochází sice k oscilaci, ale vždy se dostanou na požadovanou hodnotu. Cenová funkce u všech generátorů konverguje ke stejné hodnotě  $\lambda^* = 8.76\$/MWh$ , to lze zjistit z grafu 21c. Celkový



cíl je splněný a cenová funkce se rovná cenové funkci předchozí topologie z kapitoly 5.3. Výstupy jednotlivých generátorů jsou v rámci limitních rozsahů a dosahují následujících hodnot:  $x_1^* = 549.6$  MW,  $x_2^* = 549.6$  MW,  $x_3^* = 236$  MW,  $x_4^* = 82.2$  MW,  $x_5^* = 82.2$  MW. Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Pro kontrolu je proveden výpočet:

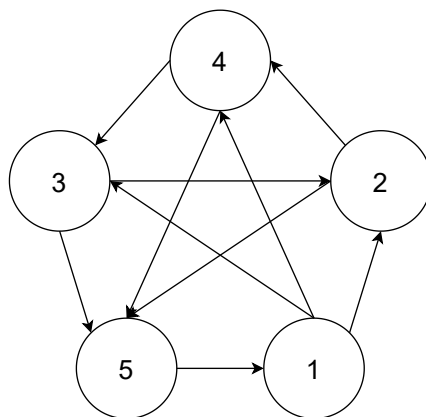
$$x = 549.6 + 549.6 + 236 + 82.2 + 82.2 \approx 1500 \text{ MW.}$$

Odhadovaný rozdíl výkonu se ustálí na hodnotě nula za přibližně 30 sekund, poté generátory vydávají konstantní energii.

**Poznámka 6:** Hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu na hodnotě  $x^* = 8.07$  stejně jako v předchozí topologii a to za přibližně 2 sekundy, nikdy se však zcela neustálí, ale kmitají kolem dané hodnoty. Generátory vygenerují požadovanou energii za přibližně 30 sekund.

## 5.5 Topologie 5

Další topologie se skládá opět z pěti agentů, kteří jsou propojeni do pětiúhelníku a různě propojeni navzájem. Uvažovány jsou dva generátory typu A, dva typu C a jeden generátor typu B. Topologie je znázorněna na obrázku 22.



Obrázek 22: Topologie

Inicializace matic  $P$  a  $Q$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

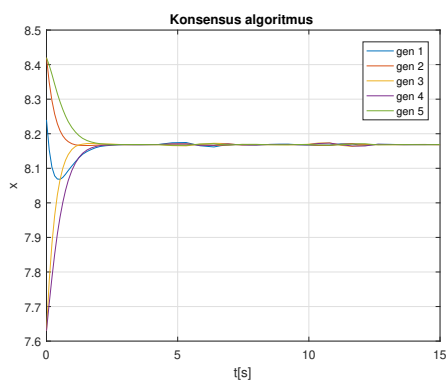
Normalizovaná matice sousednosti  $H$  je inicializovaná následovně:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

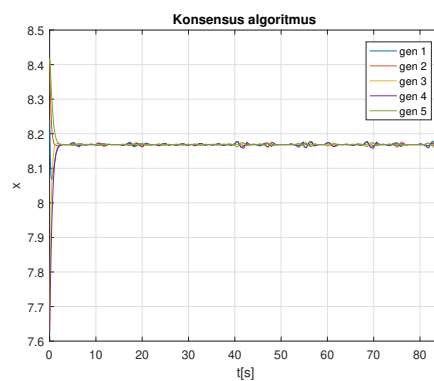
Laplacian daného grafu má následující tvar:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na obrázku 23 jsou zobrazeny grafy konsenzu pro jednotlivé agenty. Jako počáteční podmínky byly zvoleny hodnoty  $\lambda$ , tedy  $x_0 = [8.24 \ 8.42 \ 7.63 \ 7.63 \ 8.42]$ . Na grafech je zobrazen nejprve průběh pro 15 sekund pro lepší přehlednost a poté pro 85 vteřin, aby byly vidět odchylky, které nastávají. Jako v přechozích případech topologií s pěti agenty konvergují hodnoty  $x_i$  k hodnotě  $x^* = 8.17$  a to za přibližně 3 vteřiny.



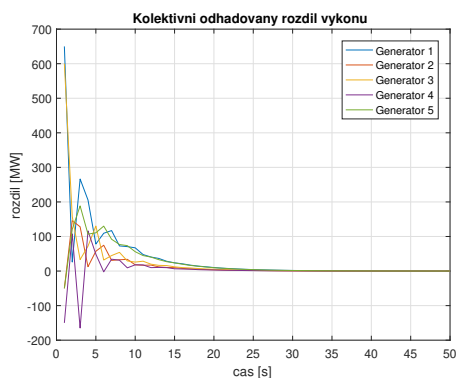
(a) Graf konsenzu pro 15 kroků



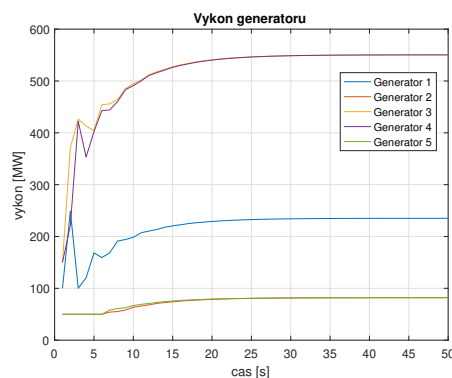
(b) Graf konsenzu pro 85 kroků

Obrázek 23: Grafy konsenzu topologie 5

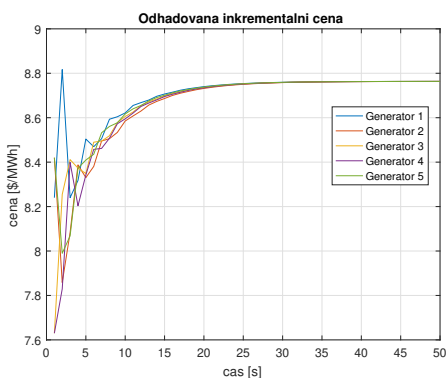
Na obrázcích 24 jsou zobrazeny grafy důležitých parametrů dané topologie.



(a) Kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu



(b) Výkon generátorů



(c) Odhadovaná inkrementální cena



(d) Pokrytí požadovaného zatížení

Obrázek 24: Grafy topologie 5

Generátory dosáhnou požadované hodnoty 1500 MW za přibližně 30 vteřin, to lze vidět z obrázku 24d. Narozdíl od jiných topologií jednotlivé grafy neoscilují a dosáhnou vždy požadované hodnoty. Cenová funkce jednotlivých generátorů konverguje ve všech případech k hodnotě  $\lambda^* = 8.76\$/\text{MWh}$  stejně jako u předchozích příkladů. Výstupy jednotlivých generátorů jsou v rámci limitních rozsahů a dosahují následujících hodnot:  $x_1^* = 549.6 \text{ MW}$ ,  $x_2^* = 549.6 \text{ MW}$ ,  $x_3^* = 236 \text{ MW}$ ,  $x_4^* = 82.2 \text{ MW}$ ,  $x_5^* = 82.2 \text{ MW}$ , tyto hodnoty lze zjistit z grafu 24b. Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Pro kontrolu je proveden výpočet:

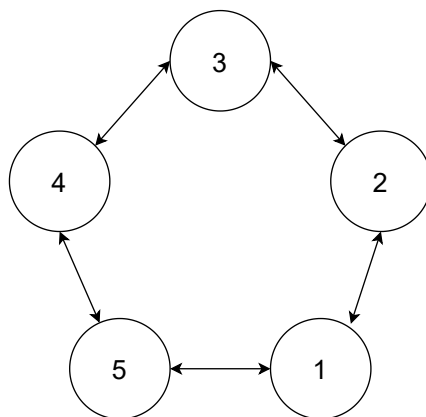
$$x = 549.6 + 549.6 + 236 + 82.2 + 82.2 \approx 1500 \text{ MW}.$$

Odhadovaný rozdíl výkonu se ustálí za přibližně 25 kroků na hodnotě 0.

**Poznámka 7:** Jednotlivé hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu na hodnotě  $x^* = 8.17$  a to za přibližně 3 sekundy. Generátory vyrobí požadované množství energie za 30 sekund.

## 5.6 Topologie 6

Poslední uvažovaná topologie se taktéž skládá z 5 generátorů uspořádaných do kruhu. Sousedící uzly si navzájem mohou informace předávat i dostávat. Topologie je zobrazena na obrázku 25. Uvažovány jsou dva generátory typu A, dva generátory typu C a jeden generátor typu B.



Obrázek 25: Topologie

Inicializace matic  $P$  a  $Q$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

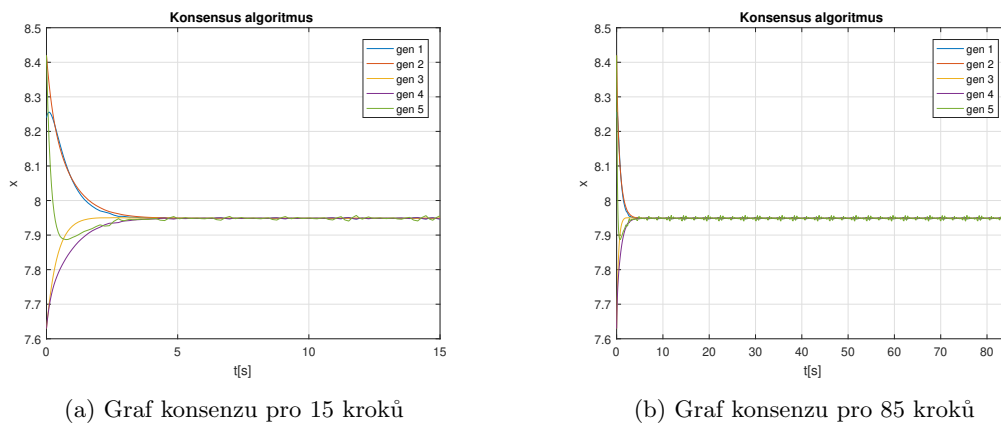
Normalizovaná matice sousednosti  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Laplacian daného grafu má následující podobu:

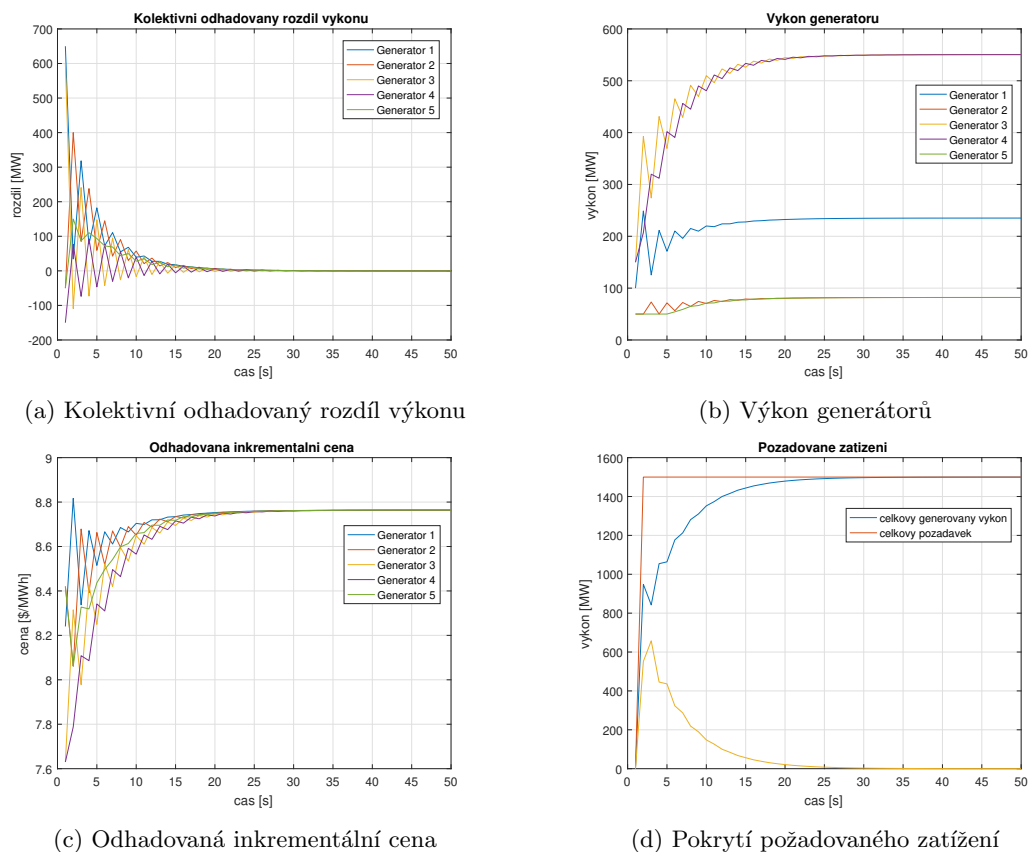
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Na grafech 26a a 26b je zobrazen průběh konsenzu nejprve pro 15 kroků a poté pro 85 kroků. Jako počáteční podmínky byly zvoleny hodnoty  $\lambda$ , tedy  $x_0 = [8.24 \ 8.42 \ 7.63 \ 7.63 \ 8.42]$ . Hodnoty  $x_i$  dosáhnou konsenzu za přibližně 2 vteřiny, ale jak je vidět z grafu 26b, nikdy se zcela neustálí, ale pouze oscilují kolem dohodnuté hodnoty, tou je hodnota  $x^* = 7.95$ .



Obrázek 26: Grafy konsenzu topologie 6

Na grafech 27 jsou zobrazeny nejdůležitější parametry této topologie, důležité pro zhodnocení.



Obrázek 27: Grafy topologie 6

Generátory této zvolené topologie dosáhnou požadované hodnoty 1500 MW za přibližně 27 vteřin, to lze vidět na grafu 27d. Grafy opět oscilují, ale i přes to se dostanou na požadovanou hodnotu. Cenové funkce jednotlivých generátorů všechny konvergují k dané hodnotě  $\lambda^* = 8.76\$/MWh$ , což je zobrazeno v grafu 27c. Hodnota  $\lambda^*$  je pro každou topologii stejná. Výstupy jednotlivých generátorů jsou v rámci limitních rozsahů a dosahují následujících hodnot:  $x_1^* = 549.6$  MW,  $x_2^* = 549.6$  MW,  $x_3^* = 236$  MW,  $x_4^* = 82.2$  MW,  $x_5^* = 82.2$  MW, tyto hodnoty lze zjistit z grafu 24b. Žádný z generátorů nepřesahuje svůj operativní rozsah. Pro kontrolu je proveden výpočet:

$$x = 549.6 + 549.6 + 236 + 82.2 + 82.2 \approx 1500 \text{ MW.}$$

Kolektivní odhadovaný rozdíl se ustálí na hodnotě nula za přibližně 25 vteřin.

**Poznámka 7:** Hodnoty  $x_i$  jednotlivých generátorů dosáhnou konsenzu na hodnotě  $x^* = 7.95$  a to za přibližně 4 sekundy. Jednotlivé generátory vygenerují požadované množství energie za přibližně 27 sekund.

Všechny topologie s pěti agenty poskytují stejné výsledky. Hodnota optimální cenové funkce ve všech případech konverguje k hodnotě  $\lambda = 8.76$   $\$/MWh$ . Rozdíl je pouze v rychlosti, kdy dosáhnou dané generátory požadované hodnoty a v efektivnosti.

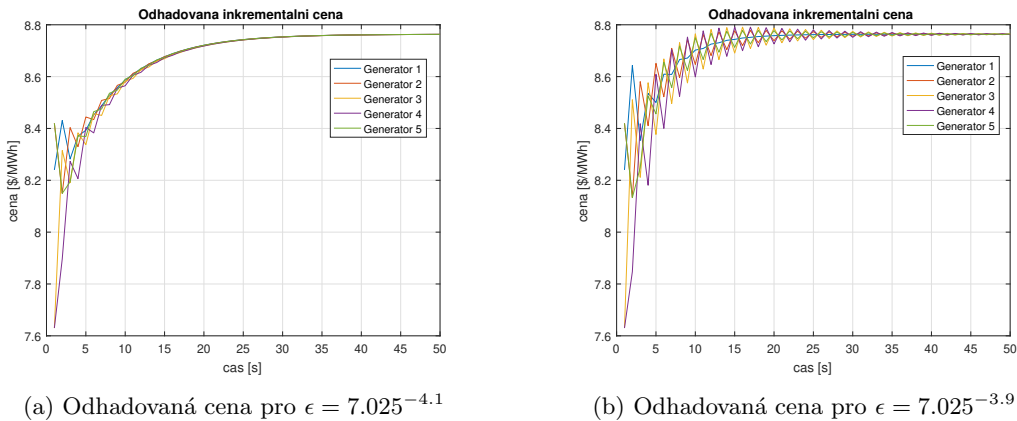
## 5.7 Vliv konstanty učení na konvergenci

V této kapitole je demonstrován vliv konstanty učení na konvergenci. Tento vliv je demonstrován na čtvrté topologii popsané v kapitole 5.4. Parametry jednotlivých generátorů jsou stejné, převzané z tabulky 3. Pro tento příklad budou provedeny čtyři simulace pro různé konstanty učení. Hodnoty jednotlivých konstant  $\epsilon$  jsou zapsané v tabulce 6.

| Hodnota konstanty učení $\epsilon$ |                |                 |                 |                 |
|------------------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Číslo simulace                     | $i = 1$        | $i = 2$         | $i = 3$         | $i = 4$         |
| Konstanta učení - $\epsilon_i$     | $7.026e^{4.1}$ | $7.026e^{-3.9}$ | $7.026e^{-3.8}$ | $7.026e^{-3.5}$ |

Tabulka 6: Nastavené hodnoty konstanty učení  $i$

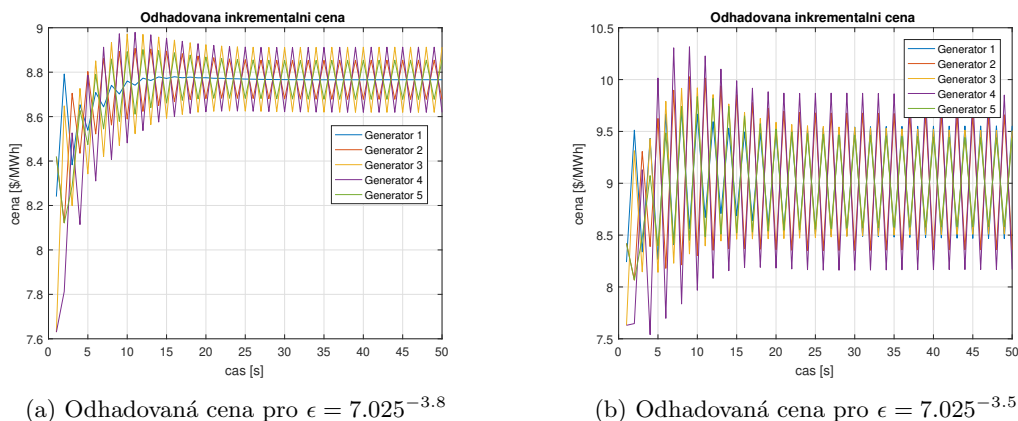
Dopad změny konstanty učení bude zobrazen pro přehlednost pouze na grafech odhadované inkrementální ceny  $\lambda$  pro každou simulaci. Změna konstanty učení by byla patrná i na ostatních proměnných, jako je výkon jednotlivých generátorů, kolektivní odhadovaný rozdíl výkonu nebo požadované zatížení.



Obrázek 28: Grafy pro různé konstanty učení  $\epsilon$

Vývoj ceny pro první příklad je zobrazen na grafu 28a a lze vidět, že je velmi podobný původnímu grafu 21c. Tato simulace dokončuje k optimální hodnotě  $\lambda^*$  za přibližně 30 sekund.

Narozdíl od druhé simulace zobrazené na grafu 28b, která vykazuje velkou oscilaci a konverguje k optimální hodnotě  $\lambda^*$  přibližně o 15 sekund dříve. Obě dvě simulace se ustálí na správně hodnotě, tedy  $\lambda^* = 8.76\$/MWh$ .



Obrázek 29: Grafy pro různé konstanty učení  $\epsilon$  - neoptimální

Průběh simulace vývoje hodnoty  $\lambda$  pro třetí simulaci je zobrazen na grafu 29a. Tento případ nekonverguje k optimálnímu řešení. Dosáhne na danou optimální hodnotu, ale nikdy ji nedosáhne a pouze kolem ní osciluje. Vývoj  $\lambda$  pro čtvrtou simulaci je zobrazen na grafu 29b. Tento případ osciluje výrazně více než předchozí příklad a nedostává se ani poblíž optimální hodnoty  $\lambda^*$ . Tyto hodnoty ( $\epsilon_3, \epsilon_4$ ) tak nejsou vhodné pro tento příklad, jelikož neposkytují optimální řešení  $\lambda^*$ . Z těchto příkladů lze dojít k závěru, že hodnotu konstanty učení  $\epsilon$  je nutno volit vhodně malou, aby byl algoritmus schopný nalézt optimální řešení v přiměřeném čase.

Konstanta učení ovlivňuje například kmitavost celého systému, jeho průběh a s tím i případně rychlost konvergence. Například porovnání grafu 28a a 28b lze zjistit, že změna původní konstanty učení ovlivnila oscilace celého systému, ale i rychlost konvergence. Cenové funkce v případě druhé rovnice dokonvergovaly o přibližně 20 sekund dříve.

## 5.8 Zhodnocení výsledků pro jednotlivé topologie

V tabulce 7 jsou zapsány nejdůležitější hodnoty pro každou topologii, tedy hodnota optimální cenové funkce, rychlost ustálení a zda systém osciluje nebo ne.

| Topologie | $\lambda^* [$/MWh]$ | Rychlost ustálení | Oscilace |
|-----------|---------------------|-------------------|----------|
| 1         | 8.84                | 30                | ANO      |
| 2         | 8.84                | 25                | NE       |
| 3         | 8.76                | 35                | ANO      |
| 4         | 8.76                | 30                | ANO      |
| 5         | 8.76                | 30                | NE       |
| 6         | 8.76                | 27                | ANO      |

Tabulka 7: Vyhodnocení zvolených topologií

### 5.8.1 Topologie se čtyřmi agenty

Nejprve budou zhodnoceny topologie se čtyřmi agenty. V této bakalářské práci byly tyto topologie uvažovány dvě. V obou případech měly topologie stejný typ generátorů, počátečních podmínek i stejnou konstantu učení. V obou případech cenové funkce konvergovaly ke stejné hodnotě, tedy  $\lambda^* = 8.84\$/MWh$ . Změřená hodnota se rovná hodnotě vypočtené v kapitole 4.2.1.

Grafy první topologie výrazně oscilovaly, i přes to se však dostaly na správné hodnoty. V případě praktického využití by to však mohl být problém. Druhá topologie má naopak poměrně hladký průběh pokrytí požadovaného zatížení.

Generátory první topologie dosáhnou požadovaného výkonu 1500 MW přibližně o 5 sekund později než generátory druhé topologie. V porovnání těchto dvou topologií je vhodnější a efektivnější topologie druhá. Dosáhne rychleji daného cíle a není tam problém s případnou oscilací.

### 5.8.2 Topologie s pěti agenty

V této bakalářské práci byly zpracovány celkem čtyři topologie s pěti agenty. Všechny čtyři topologie dosáhly stejných výsledků. Cenové funkce konvergovaly k optimální hodnotě  $\lambda = 8.76$  \$/MWh, tato hodnota je stejná jako hodnota teoreticky spočtena hodnota v kapitole 4.2.2.

Grafy topologie 5.4 měly jako jediné hladký průběh oproti ostatním topologiím. Nejvíce oscilují grafy topologie 5.6 a 5.3. Grafy topologie 5.5 taktéž oscilují, ale průběh náběhu pokrytí požadovaného zatížení je plynulý.

Požadovaného výkonu 1500 MW dosáhne nejrychleji topologie 5.6, tato topologie má však velmi velkou oscilaci a k reálnému použití by nebyla vhodná. Topologie 5.3 dosáhne požadovaného výkonu nejpomaleji, taktéž vykazuje slabší oscilaci. Topologie 5.5 a 5.4 dosahují daného výkonu obě za stejný čas, tedy 30 sekund. Topologie 5.4 však vykazuje oscilaci a nebyla by tak pro reálný případ vhodně využitelná. Po zhodnocení daných topologií lze říct, že topologie 5.5 bude k využití nejlepší. Cíle dosáhne dostatečně rychle, průběh cenových funkcí neosciluje, lze tedy říct, že agenti spojení pomocí této topologie by fungovaly nejefektivněji.

### 5.8.3 Porovnání čtyř a pěti agentů

V případě volby mezi topologií se čtyřmi a s pěti agenty by bylo lepší zvolit topologii s pěti agenty. Z vypočtených cenových funkcí lze usoudit, že cena s přidáním jednoho generátoru do topologie klesla. S tím souvisí i zatížení jednotlivých generátorů, pokud bude v topologii více generátorů, celkové zatížení se lépe rozdělí a generátory budou mít menší zátěž, nebudou se tedy tak opotřebovávat a zbytečně přetěžovat.

Na základě analýzy vlivu konstanty učení  $\epsilon$  v kapitole 5.7 lze říct, že oscilace u všech výše zmíněných topologií by bylo možné potlačit změnou této konstanty. Lze tak tvrdit, že neexistuje jedna univerzálně platná hodnota, ale že její velikost je vhodné volit pro každou uvažovanou topologii zvlášť.

## 6 Možná vylepšení

V této kapitole budou zpracovány návrhy na zlepšení zpracovaného algoritmu, které by zefektivnily dané řešení EDP. Jedním z problémů je forma energetické sítě a nejistoty, které v ní mohou vzniknout. To může být například ztráta energie, komunikační šum, dopravní zpoždění, změna ve struktuře energetické sítě nebo například připojení a opětovné zapojení daného generátoru. Práce se změnami v topologii sítě by měla být uvažována především v případě začlenění obnovitelných zdrojů energie.

V případě obnovitelných zdrojů energie, jako je například větrná elektrárna nebo solární elektrárna je třeba brát v úvahu, že nemusí být dostupné stále. Dostupnost těchto elektráren závisí především na počasí. V tomto případě by bylo možné uvažovat velkou stabilní síť tvořenou především z velkých elektráren, které jsou založeny na spalování fosilních paliv, nebo se může jednat o jaderné elektrárny. Menší zdroje nebo elektrárny založené na obnovitelných zdrojích energie by mohly být připojeny online. S tímto faktem také úzce souvisí integrace bateriových systémů.

Baterie se v dnešních sítích využívají stále častěji. Baterie s menší kapacitou lze využít především v domácnostech, baterie s větší kapacitou lze využít především v průmyslu. V tomto případě je důležité určit, kdy baterie vybíjet a kdy je naopak zase nabíjet. Jejich začlenění do sítě tak může zlepšit celkové chování uvažované sítě.

Jak již bylo posáno v prvním odstavci, nabízí se rozšířit matematickou reprezentaci sítě o nejistoty a nepřesnosti. Například pro grafovou teorii by mělo být možné modelovat měnící se topologie, dopravní zpoždění a možnost jejich vyhodnocení a ošetření v algoritmu. V případě dopravního zpoždění by byla možnost do rovnic popisujících EDP přidat novou konstantu, která by znázorňovala toto dopravní zpoždění. Dopravní zpoždění by mohlo být pro každý generátor různé. "Drop-off" pakety jsou taktéž spojené s dopravním zpožděním. Indikují případ, kdy se všechny přenášené informace ztratí. To může indikovat, že dopravní zpoždění může být nekonečné. Tuto neurčitost by bylo možno také řešit rozšířením daného algoritmu.

Další možností vylepšení je například aplikování distribuovaných metod řešení EDP na reálné zařízení místo klasických centralizovaných metod. Například můžou být distribuované metody pro řešení EDP aplikovány na "virtuální elektrárny". Ty mohou být reprezentovány například dieslovými generátory s různými výkony. Tyto virtuální elektrárny tak mohou z dálky vypadat jako jedna velká elektrárna, která je složena z více kompaktních prvků.

Dále by bylo možné aplikovat distribuovaný algoritmus pouze na část energetické sítě. Porovnání jejich výkonnosti a robusnosti ve srovnání s původní implementací. Většina implementací je stále řízena centralizovaným způsobem řešení pomocí centrálního kontrolního centra.

V mnoha vědeckých člancích se využívají jako vzorové případy implementace distribuovaných algoritmů standartizované verze modelů od Institute Electrical and Electronics Engineers (IEEE). Jedná se například o IEEE 14-bus systém, IEEE 30-bus systém nebo IEEE 118-bus systém. IEEE bus systém popisující energetickou síť složenou z několika generátorů, zátěžových bodů, synchroních kondenzátorů a částí s parametry dlouhé a krátké linky. Tyto sběrníkové systémy jsou využity z důvodu snadné dostupnosti parametrů a dalších dat podle IEEE [Tiw+18]. Zde se tak nabízí validace daných distribuovaných algoritmů právě na těchto modelových soustavách.



## 7 Závěr

Tato bakalářská práce se věnuje problematice Economic dispatch problem in smart grid. Konkrétněji se pak zabývá vlivem změny topologie sítě na rychlost konvergence k optimálnímu řešení pro úlohu EDP. EDP je optimalizační problém snažící se rozdělit zatížení mezi daný počet agentů tak, aby celková cena za MWh byla minimální. Tato skutečnost je spojena i s problémem plánování produkce energie. Například předpověď kolik MW se má vyrobit v daný čas, aby byla pokryta poptávka. V poslední době byl kladen důraz spíše na distribuované metody řešení EDP před těmi centralizovanými. Úvod bakalářské práce se věnuje popisu energetických sítí, jejich organizaci, skladbě a funkci. Tato problematika je velice obsáhlá a komplexní a proto je v této práci popsána značně zjednodušeně. Úvod se věnuje i celkovému popisu multiagentních systémů, jejich rozdělení a popisu jejich funkce.

Následující kapitola se věnuje popisu energetické sítě. Z čeho se tato síť skládá, jaké jsou jednotlivé části energetické sítě a jejich popis. Následně se kapitola věnuje popisu funkce energetické sítě. Součástí této sekce je popis struktury sítě a jejich jednotlivých prvků, jako je kontrolní centrum, přenosové stanice, nebo distribuční centra. Jsou zde zmíněny různé metody pro řešení EDP.

Třetí část práce je věnována grafově teorii. Grafová teorie je v této práci klíčová, jelikož lze s její pomocí popsat jednotlivé topologie sítě. Základní koncepty grafově teorie, jako jsou matice sousednosti, její normalizovaná verze, Laplacian grafu jsou taktéž představeny v této kapitole. Součástí této části je i popis konsenzu grafu, který je demonstrován na příkladu pro dvě různé topologie. Je zde vysvětlen rozdíl mezi souvislým a nesouvislým grafem, jelikož pro decentralizované řešení je potřeba, aby byl graf silně souvislý. Poslední část této kapitoly je věnována popisu centralizovaných a decentralizovaných metod. Tyto metody jsou navzájem porovnány a diskutovány, která je vhodnější pro řešení EDP. Na tuto kapitulu navazuje kapitola věnována právě problematice EDP, jejímu řešení a popsání využitého algoritmu, který byl v této práci zpracován.

Další část se věnuje právě popisu EDP. Problém EDP je nejprve formulován a poté je pro jeho řešení popsán distribuovaný algoritmus převzatý z článku [YTX13]. Jednou z metod centralizovaného řešení je metoda Lagrangeových multiplikátorů, která je taktéž součástí této kapitoly. Tato metoda je demonstrována na příkladu pro topologii se čtyřmi agenty a pro topologii s pěti agenty. Výsledky získané metodou Lagrangeových multiplikátorů jsou později porovnány s výsledky distribuovaného algoritmu. Distribuovaný algoritmus je rozdělen na dvě části, nejprve se tato část zabývá algoritmem bez omezení a poté algoritmem s omezením, který bude klíčový pro další část bakalářské práce. V poslední části je popsán důkaz konvergence, který dokazuje, že decentralizovaná metoda poskytuje opravdu stejné řešení jako centralizované metody.

Pátá kapitola je věnována praktické části. Je zde popsáno celkem šest topologií. Je zde využit algoritmus popsáný ve čtvrté části této práce. Nejprve jsou uvažovány dvě topologie se čtyřmi agenty a poté čtyři topologie s pěti agenty. Pro všechny dané topologie je vypočten Laplacian a zjištěn konsenzus pomocí daného Laplacianu. Pomocí daného algoritmu lze zjistit jednotlivé výkony generátorů, odhadovanou inkrementální cenu a také dobu, kterou budou generátory potřebovat k dosažení požadovaného výkonu. Decentralizovaný algoritmus využitý v této kapitole poskytuje stejné řešení jako centralizovaná metoda Lagrangeových multiplikátorů, která byla popsána v předchozí kapitole. Součástí této kapitoly je i porovnání vlivu konstanty učení na konvergenci. Konstanta učení musí být zvolena vhodně pro danou topologii, aby bylo dosaženo co nejlepších výsledků. Poslední část je zhodnocení jednotlivých topologií a jejich vzájemné porovnání.

Poslední část bakalářské práce je věnována celkovému zhodnocení centralizovaných a decentralizovaných metod. Algoritmus popsáný ve čtvrté kapitole nebere v úvahu možné nepřesnosti a to je právě diskutováno v této kapitole. Začleněním více neurčitostí do modelu se přiblížíme reálnému prostředí, díky tomu by byl tak algoritmus robustnější. Jsou zde uvažované možnosti, jak řešení EDP vylepšit.

## Seznam všech použitých zkratek

- **EDP** - Economic dispatch problem
- **IEEE** - Institute of Electrical and Electronics Engineers
- **kV** - Kilovolt
- **MW** - Megawatt
- **MWh** - Megawatthodina
- **\$/MWh** - Cena za megawatthodinu

## Seznam obrázků

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Zjednodušené zobrazení energetické sítě . . . . .                  | 2  |
| 2  | Příklad energetické sítě . . . . .                                 | 3  |
| 3  | Příklad dvou typů grafů $G$ . . . . .                              | 5  |
| 4  | Příklad orientovaného grafu . . . . .                              | 6  |
| 5  | Příklad souvislosti grafů . . . . .                                | 7  |
| 6  | Příklad různých dvou grafů $G$ . . . . .                           | 8  |
| 7  | Výsledky pro jednotlivé grafy $G$ . . . . .                        | 8  |
| 8  | Příklad centralizované a decentralizované topologie . . . . .      | 9  |
| 9  | Cenové funkce jednotlivých generátorů . . . . .                    | 12 |
| 10 | Topologie 1 . . . . .  | 18 |
| 11 | Grafy konsenzu topologie 1 . . . . .                               | 19 |
| 12 | Grafy topologie 1 . . . . .  | 19 |
| 13 | Topologie 2 . . . . .  | 20 |
| 14 | Grafy konsenzu topologie 2 . . . . .                               | 21 |
| 15 | Grafy topologie 2 . . . . .  | 22 |
| 16 | Topologie 3 . . . . .  | 23 |
| 17 | Grafy konsenzu topologie 3 . . . . .                               | 23 |
| 18 | Grafy topologie 3 . . . . .  | 24 |
| 19 | Topologie . . . . .  | 25 |
| 20 | Grafy konsenzu topologie 4 . . . . .                               | 26 |
| 21 | Grafy topologie 4 . . . . .  | 26 |
| 22 | Topologie . . . . .  | 27 |
| 23 | Grafy konsenzu topologie 5 . . . . .                               | 28 |
| 24 | Grafy topologie 5 . . . . .  | 28 |
| 25 | Topologie . . . . .  | 29 |
| 26 | Grafy konsenzu topologie 6 . . . . .                               | 30 |
| 27 | Grafy topologie 6 . . . . .  | 30 |
| 28 | Grafy pro různé konstanty učení $\epsilon$ . . . . .               | 31 |
| 29 | Grafy pro různé konstanty učení $\epsilon$ - neoptimální . . . . . | 32 |

## Seznam tabulek

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Limity generátorů pro topologii se čtyřmi agenty . . . . .           | 11 |
| 2 | Limity generátorů pro topologii s pěti agenty . . . . .              | 12 |
| 3 | Parametry cenové funkce a možnosti jednotlivých generátorů . . . . . | 17 |
| 4 | Inicializace pro topologie se čtyřmi agenty . . . . .                | 18 |
| 5 | Inicializace pro topologie s pěti agenty . . . . .                   | 22 |
| 6 | Nastavené hodnoty konstanty učení $i$ . . . . .                      | 31 |
| 7 | Vyhodnocení zvolených topologií . . . . .                            | 32 |

## Odkazy

- [And12] Göran Andersson. *Dynamics and Control of Electric Power Systems*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich- Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 2012.
- [BA07] J. Baillieul a P. J. Antsaklis. “Control and Communication Challenges in Networked Real-Time Systems”. In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007), s. 9–28. DOI: 10.1109/JPROC.2006.887290.
- [Dem] Marie Demlová. *Logika a grafy*. URL: <https://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova/lgr/p-lgr815.pdf> (cit. 08.04.2020).
- [Glo] Chint Global. *What’s the role of Shunt Capacitor in Electrical Distribution System*. URL: <https://chintglobal.com/blog/shunt-capacitor/>.
- [Chi05] Chao-Lung Chiang. “Improved genetic algorithm for power economic dispatch of units with valve-point effects and multiple fuels”. In: *IEEE Transactions on Power Systems* 20.4 (2005), s. 1690–1699. DOI: 10.1109/TPWRS.2005.857924.
- [JA 08] U.S.R Murty J.A. Bondy. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.
- [Jan11] Dr Jim Bumby Jan Machowski Janusz W. Bialek. *Power System Dynamics: Stability and Control, 2nd Edition*. 2nd. John Wiley & Sons, Ltd, 2011. ISBN: 978-1-119-96505-3.
- [KČŠ19] Karel Kubíček, Martin Čech a Jan Škach. “Continuous enhancement in model-based software development and recent trends”. In: *2019 24th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*. 2019, s. 71–78. DOI: 10.1109/ETFA.2019.8869237.
- [Kub19] Karel Kubíček. “Modelově orientovaný vývoj softwaru: řízení spojky automatické převodovky kamionů”. Diploma thesis. University of West Bohemia in Pilsen, 2019. URL: <http://hdl.handle.net/11025/39264>.
- [Kub21] Karel Kubíček. “Economic dispatch problem in power energetic networks”. rigorosisthesis. Západočeská univerzita v Plzni, 2021.
- [LCH92] C.E. Lin, S.T. Chen a C.-L. Huang. “A direct Newton-Raphson economic dispatch”. In: *IEEE Transactions on Power Systems* 7.3 (1992), s. 1149–1154. DOI: 10.1109/59.207328.
- [Lyn96] Nancy A. Lynch. *Distributed Algorithms*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996. ISBN: 1558603484.
- [ME10] Mehran Meshabi a Magnus Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 2010.
- [OFM07a] R. Olfati-Saber, J. A. Fax a R. M. Murray. “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems”. In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007), s. 215–233. DOI: 10.1109/JPROC.2006.887293.
- [OFM07b] Reza Olfati-Saber, J. Alex Fax a Richard M. Murray. “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems”. In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007), s. 215–233. DOI: 10.1109/JPROC.2006.887293.
- [pok] Fyzikální pokusy. *Jouleovo teplo*. URL: <https://fyzikalnipokusy.cz/1657/jouleovo-teplo> (cit. 08.04.2020).
- [Sad+19] Tomonori Sadamoto et al. “Dynamic Modeling, Stability, and Control of Power Systems With Distributed Energy Resources: Handling Faults Using Two Control Methods in Tandem”. In: *IEEE Control Systems Magazine* (2019).
- [Tiw+18] Satyam Tiwari et al. “Load Flow Analysis of IEEE 14 Bus System Using ANN Technique”. In: *2018 International Conference on Sustainable Energy, Electronics, and Computing Systems (SEEMS)*. 2018, s. 1–5. DOI: 10.1109/SEEMS.2018.8687353.

- [Váp11] R. Vápeník. “Regulace napětí v distribuční soustavě vn a mn”. In: (2011).
- [WW12] Allen Wood a Bruce Wollenberg. *Power generation, operation, and control*. Led. 2012, s. 632. ISBN: 9780471790556.
- [Xia+17] S. Xia et al. “Distibuted Economical Dispatch for Renewable Power System with Time-varying Topology and Fluctuating Power Generations”. In: *Proceedings of the IEEE* (2017).
- [YTX13] Shiping Yang, Sicong Tan a Jian-Xin Xu. “Consensus Based Approach for Economic Dispatch Problem in a Smart Grid”. In: (2013).

# Přílohy

## Distribuovaný algoritmus

```
1  clc ;
2  clear all ;
3  close all ;
4  %% Definovani grafu
5  s=[1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5];
6  t=[2 3 4 5 1 3 5 1 2 4 1 3 5 1 2 4];
7  G=digraph(s,t);
8  plot(G);
9  %% Inicializace matic P a Q
10 P=[1/5 1/5 1/5 1/5 1/5;
11     1/4 1/4 1/4 0 1/4;
12     1/4 1/4 1/4 1/4 0;
13     1/4 0 1/4 1/4 1/4;
14     1/4 1/4 0 1/4 1/4];
15 Q=[1/5 1/4 1/4 1/4 1/4
16     1/5 1/4 1/4 0 1/4
17     1/5 1/4 1/4 1/4 0
18     1/5 0 1/4 1/4 1/4
19     1/5 1/4 0 1/4 1/4];
20 %% Parametry
21 alfa=[-2023.2 -826.8 -2535.2 -2535.2 -826.8]; %parametry alfa
22 beta=[352.1 257.7 103.7]; %parametry beta
23 gama=[-8616.8 -7631.0 -3216.7]; %parametry gama
24 epsilon=7.026*10^(-4) %konstanta uceni
25 %% Pocatecni podminky
26 x1=ones(50,5);
27 lambda1=ones(50,5);
28 y1=ones(50,5);
29 x1(1,:)= [ 100 50 150 150 50]; %pocatecni podminky pro x
30 lambda1(1,:)= [ 8.24 8.42 7.63 7.63 8.42]; %pocatecni podminky pro
    lambda1
31 y1(1,:)= [ 650 -50 600 -150 -50]; %pocatecni podminky pro y
32 xspodni=[ 100 50 150 150 50];
33 xhorni=[400 200 600 600 200];
34 B=diag([ beta(2), beta(3), beta(1), beta(1), beta(3) ]);
35 %% Algoritmus
36 for k=2:1:50
37     lambda1(k,:) = (P * lambda1((k-1),:))' + (epsilon * y1((k-1),:))'
38     ;
39     fi=B*lambda1(k,:)' + alfa';
40     for y=1:1:5
41         if fi(y)>xhorni(y)
42             fi(y)=xhorni(y);
43         elseif fi(y)<xspodni(y)
44             fi(y)=xspodni(y);
45         else
46             continue;
47         end
48     end
49     x1(k,:)=fi;
```

```

49     y1(k,:)=Q * y1((k-1),:) - (x1(k,:) - x1((k-1),:))';
50     D(k)=sum(x1(k,:)); %celkova energie
51     total(k)=1500;
52     missin(k)=total(k)-D(k); %chybejici energie
53 end
54 %% Vykresleni grafu
55 figure
56 plot(D);
57 hold on;
58 plot(total);
59 hold on;
60 plot(missin);
61 grid on;
62 title('Pozadovane zatizeni')
63 xlim([0 50]);
64 ylim([0 1600]);
65 xlabel('cas [s]');
66 ylabel('vykon [MW]');
67 legend('celkovy generovany vykon', 'celkovy pozadavek');
68 figure
69 plot(lambda1)
70 xlim([0 50]);
71 grid on;
72 legend('Generator 1', 'Generator 2', 'Generator 3', 'Generator 4', '
    Generator 5');
73 title('Odhadovana inkrementalni cena')
74 xlabel('cas [s]');
75 ylabel('cena [$/MWh]');
76 figure
77 plot(x1);
78 grid on;
79 legend('Generator 1', 'Generator 2', 'Generator 3', 'Generator 4', '
    Generator 5');
80 title('Vykon generatoru')
81 xlim([0 50]);
82 xlabel('cas [s]');
83 ylabel('vykon [MW]');
84 figure
85 plot(y1)
86 title('Kolektivni odhadovany rozdil vykonu')
87 xlim([0 50]);
88 legend('Generator 1', 'Generator 2', 'Generator 3', 'Generator 4', '
    Generator 5');
89 xlabel('cas [s]');
90 ylabel('rozdil [MW]');
91 grid on;

```



## Výpočet konsenzu

```
1  clc;
2  clear all;
3  close all;
4  %% definovani grafu
5  s=[1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5];
6  t=[2 3 4 5 1 3 5 1 2 4 1 3 5 1 2 4]; %%ctverec s okem
7  G=digraph(s,t);
8  figure;
9  plot(G)
10 x0=[8.24 8.42 7.63 7.63 8.42]; %%pocatecni podminky
11 %% vypocet diferencialni rovnice
12 [t,x0]=ode45(@fundiff,[0, 85],x0',[]);
13 %% vykresleni
14 figure;
15 for i = 1:5
16     plot(t,x0(:,i))
17     hold on
18 end
19 title('Konsenzus algoritmus')
20 xlabel('t [s]')
21 ylabel('x')
22 xlim([0 85])
23 grid on;
24 legend('gen 1','gen 2','gen 3','gen 4','gen 5')
```

## Funkce využita při výpočtu konsenzu

```
1  function xdot = funkce(t,x)
2  %% inicializace matice sousednosti
3  A = [0 1 0 1 1;
4       1 0 1 0 1;
5       0 1 0 1 1;
6       1 0 1 0 1;
7       1 1 1 1 0];
8  xdot = zeros(5,1);
9  for i=1:5
10     for j = 1:5
11         xdot(i) = A(i,j)*(x(j)-x(i))+ xdot(i);
12     end
13 end
14 end
```