

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Disertační práce

2021

Ing. Oliver Kost

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

ODHAD VLASTNOSTÍ ŠUMŮ
V DYNAMICKÝCH
MODELECH

Ing. Oliver Kost

disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Kybernetika

Školitel: doc. Ing. Ondřej Straka, Ph.D.
Katedra: Katedra kybernetiky

Plzeň 2021

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences

ESTIMATION OF NOISE
PROPERTIES
IN DYNAMIC MODELS

Ing. Oliver Kost

A dissertation submitted in partial fulfilment
of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy
in
Cybernetics

Advisor: doc. Ing. Ondřej Straka, Ph.D.
Department: Department of Cybernetics

Pilsen 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 20. září 2021

.....

Oliver Kost

Poděkování

Velice rád bych poděkoval především doc. Ing. Ondřeji Strakovi, Ph.D. a doc. Ing. Jindřichu Duníkovi, Ph.D. za podnětné diskuze, odborné rady a důležité připomínky, které mi pomohly při zpracování této práce.

.....
Oliver Kost

Abstrakt

Disertační práce se zabývá odhadem vlastností šumů ve stavových modelech. Práce prezentuje čtyři základní přístupy k odhadu vlastností šumů, přičemž zvláštní pozornost je věnována korelačním metodám. Jsou zde uvedeny způsoby výpočtu vlastností šumů hlavními představiteli korelačních metod a je poukázáno na jejich společné vlastnosti a slabé stránky. Na základě zjištěných nedostatků korelačních metod jsou definovány samotné cíle disertační práce.

Následně je detailně představena nová korelační metoda, která řeší cíle disertační práce. Metoda poskytuje odhad necentrálních a centrálních momentů pro časově nezávislé i závislé šumy. Také je dokázáno, že tyto odhady jsou nestranné a konzistentní. Metoda je též využita k získání dalšího popisu šumů, jakým je ověření předpokladu gaussovosti šumů, či odhad parametrů popisujících časově závislé šumy nebo hustotu pravděpodobnosti šumů. V závěru disertační práce jsou ilustrovány schopnosti nové korelační metody. Metoda je porovnána s významnými představiteli korelačních metod a také jsou ilustrovány unikátní schopnosti metody samotné. V neposlední řadě je ilustrováno využití nové korelační metody v oblasti globálních navigačních satelitních systémů, kde je kromě simulovaných dat využito i reálných měření pseudovzdáleností.

Klíčová slova: stavový model, korelační metody, vlastnosti šumů, korelované šumy, střední hodnoty šumů, kovarianční matice šumů, vyšší momenty šumů, parametrický popis šumů

Abstract

The thesis deals with the estimation of noise properties of the state space model. The thesis presents four basic approaches to the estimation of the noise properties, where the special attention is devoted to the estimation using correlation methods. Also, the detailed ways of calculating the noise properties by the main representatives of the state-of-the-art correlation methods are shown here. Their common qualities and weaknesses are pointed out. The goals of the thesis are defined on the basis of the established properties of the correlation methods.

Subsequently, a new correlation method is presented in detail to address the thesis goals. The method provides estimation of non-central and central moments for both time-independent and time-dependent noises. It is also shown that these estimates are unbiased and consistent. The method is also used to obtain a further description of noises such as Gaussianity of noises, or estimating parameters describing time-dependent noises or the probability density of noises. Finally, the thesis illustrates the capabilities of the new correlation method. The method is compared with prominent representatives of correlation methods and the unique capabilities of the method itself are illustrated. Finally, the application of the new correlation method in the field of global navigation satellite systems is illustrated where the real pseudorange measurements are used in addition to simulated data.

Keywords: state-space model, correlation methods, noise properties, correlated noises, noise means, noise covariance matrices, noise higher-order moments, parametric noise description

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod | 1 |
| 2 | Model systému a značení | 3 |
| 3 | Rozdělení metod pro odhad vlastností šumů | 8 |
| 3.1 | Nestrannost a konzistence odhadů | 8 |
| 3.2 | Bayesovské metody | 9 |
| 3.3 | Metody založené na maximální věrohodnosti | 9 |
| 3.4 | Metody odpovídajících momentů | 10 |
| 3.5 | Korelační metody | 10 |
| 4 | Korelační metody: základní přístupy a vlastnosti | 12 |
| 4.1 | Využívaný model systému | 12 |
| 4.2 | Chyba predikce měření | 12 |
| 4.3 | Metoda navržená Mehrou | 14 |
| 4.3.1 | Modifikace a zlepšení Mehrovy metody | 15 |
| 4.4 | Metoda navržená Bélangerem | 15 |
| 4.4.1 | Modifikace a zlepšení Bélangerovy (ALS) metody | 16 |
| 4.5 | Metoda navržená Leeem | 17 |
| 4.6 | Metoda navržená Bundickem | 18 |
| 4.6.1 | Modifikace a zlepšení Bundickovy metody | 18 |
| 4.7 | Souhrn, porovnání, schopnosti a slabé stránky metod | 18 |
| 5 | Cíle disertační práce | 21 |
| 5.1 | Odhad středních hodnot šumů | 21 |
| 5.2 | Odhad vyšších momentů šumů | 21 |
| 5.3 | Odhad momentů časově závislých šumů | 22 |
| 5.4 | Nestranný odhad kovariancí šumů | 22 |
| 5.5 | Ověření gaussovosti šumů | 22 |
| 5.6 | Maximální počet jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.7 | Odhad parametrů popisujících šumy | 23 |
| 5.8 | Ilustrace použití navržených metod a algoritmů | 23 |
| 6 | Metoda diference měření | 24 |
| 6.1 | Základní představení a rovnice MDM | 24 |
| 6.2 | Časově nezávislé šumy | 27 |
| 6.2.1 | Vztah momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momentů šumů | 28 |
| 6.2.2 | Celkový odhad necentrálních momentů šumů | 30 |
| 6.2.3 | Celkový odhad centrálních momentů šumů | 31 |
| 6.2.4 | Postupný odhad necentrálních momentů šumů | 33 |
| 6.2.5 | Postupný odhad centrálních momentů šumů | 34 |
| 6.3 | Časově závislé šumy | 35 |
| 6.3.1 | Vztah momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momentů šumů | 36 |
| 6.3.2 | Celkový odhad necentrálních momentů šumů | 38 |
| 6.3.3 | Celkový odhad centrálních momentů šumů | 38 |
| 6.3.4 | Postupný odhad necentrálních momentů šumů | 39 |
| 6.3.5 | Postupný odhad centrálních momentů šumů | 40 |
| 7 | Metoda diference měření: analýzy a rozšíření | 41 |
| 7.1 | Vzájemné vztahy mezi odhady MDM | 42 |
| 7.2 | Počet odhadovaných momentů šumů | 42 |
| 7.3 | (Ne)strannost odhadů momentů šumů | 44 |
| 7.4 | Konzistence odhadů momentů šumů | 45 |
| 7.5 | Využití křížových momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ | 48 |
| 7.6 | Senzorová kalibrace, odhad momentů šumu měření | 48 |
| 7.7 | Využití apriorně známých prvků momentů šumů | 50 |
| 7.8 | Rekurzivní odhad momentů šumů | 50 |
| 7.9 | Nelineární modely systému | 51 |
| 7.10 | Využití znalosti tvarování šumů | 51 |
| 7.11 | Vztah pořadí použití měření a kvality odhadu kovariance šumů | 53 |
| 7.12 | Vážený odhad momentů šumů | 55 |
| 7.13 | Volba parametrů L a N v MDM | 58 |
| 7.14 | Stanovení maximálního počtu jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely | 59 |
| 8 | Využití metody diference měření k dalšímu popisu šumů | 69 |
| 8.1 | Ověření gaussovosti šumů | 69 |
| 8.2 | Odhad parametrů šumů | 70 |
| 8.2.1 | Odhad parametrů hustoty pravděpodobnosti | 72 |
| 8.2.2 | Odhad parametrů časově korelovaných šumů | 76 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9 | Numerické ilustrace | 79 |
| 9.1 | Porovnání korelačních metod - LTI model | 79 |
| 9.2 | Porovnání korelačních metod - LTV model | 83 |
| 9.3 | Celkový a postupný odhad MDM | 86 |
| 9.4 | Vztah pořadí použití měření a kvality odhadu kovariance šumů | 87 |
| 9.5 | Odhad parametrů šumů | 89 |
| 9.6 | Odhad kovariancí šumů - nelineární model | 94 |
| 9.6.1 | Systém - generátor dat | 94 |
| 9.6.2 | Model rovnice měření a šumů pro úlohu identifikace | 96 |
| 9.6.3 | Parametry pro generování dat | 99 |
| 9.6.4 | Parametry pro odhad kovariancí šumů | 100 |
| 9.6.5 | Výsledky odhadů kovariancí šumů | 102 |
| 9.7 | Reálná měření pseudovzdáleností GNSS | 105 |
| 9.7.1 | Odhad variance šumu pseudovzdálenosti | 105 |
| 9.7.2 | Využití odhadu variance šumu pseudovzdálenosti k vá- ženému odhadu polohy | 108 |
| 9.7.3 | Modelování variancí pseudovzdáleností | 111 |
| 10 | Závěr | 112 |
| A | Vztahy v MDM | 115 |
| B | Konzistence odhadů | 117 |
| C | Momenty Gaussovy směsi | 123 |
| D | Momenty časově korelovaných šumů | 128 |

Kapitola 1

Úvod

V mnoha odvětvích lidské činnosti se setkáváme se systémy, u nichž je potřeba poznat jejich aktuální situaci či ovlivnit jejich chování. Aby bylo poznání, či ovlivňování efektivní, využívá se model systému, který v sobě koncentruje dostupné informace o chování daného systému. V případě, že by model svým popisem neodpovídal chování systému, může dojít k chybnému poznání či nevhodnému ovlivnění chování tohoto systému. Proto je velmi důležité najít model, který dostatečně kvalitně popisuje systém.

Mezi často využívané modely patří stavové modely. Stavový model využívá vnitřní proměnnou která, jak už název napovídá, se nazývá stavem. Tento stav reprezentuje aktuální situaci daného systému. Celý stavový model určuje vývoj stavu, vzájemné vazby mezi samotnými složkami stavu, způsob, jakým lze tento stav ovlivnit vnějším zásahem, či způsob, jakým se stav projevuje na měření daného systému.

Model popisující systém je možné chápat jako kombinaci dvou částí. První část popisuje předvídatelné chování systému, která se obvykle významně projevuje při jeho pozorování. Tato část se označuje jako deterministická část modelu a lze ji obvykle nalézt modelováním pomocí mechanických, chemických, biologických, ekonomických či jiných zákonů nebo pravidel [1] nebo alternativně pomocí identifikačních metod na základě dostupných měření [2, 3]. Druhá část modelu se označuje jako stochastická část modelu a má za úkol co nejlépe popsat nepředvídatelné (tj. obtížně modelovatelné) chování systému. Nalezení stochastické části modelu pomocí expertních znalostí či modelováním bývá, oproti deterministické části, obvykle velice komplikované, v některých případech dokonce nemožné. Proto je stochastická část modelu získávána výhradně za pomoci identifikačních metod a má spolu s deterministickou částí modelu jako celek co nejlépe popsat chování reálného systému.

Rozvoj metod identifikujících stochastickou část modelu probíhá již

od sedmdesátých let. Tyto metody mají mnoho rozdílných předpokladů nejen na model, ale i na způsob identifikace. I přesto mají často řadu nevhodných vlastností, tvrdých předpokladů a jejich schopnosti bývají omezené.

V této práci se zaměříme na významné představitele metod identifikujících stochastickou část modelu. Poukáže se nejen na jejich dobré vlastnosti, které budou v této práci dále rozšiřovány, ale i na slabé stránky, které budou potlačovány či úplně odstraňovány.

Práce je rozčleněna včetně úvodní kapitoly do celkem 10 kapitol. V kapitole 2 je ukázán model systému a značení, které je v práci využito. V kapitole 3 jsou jednotlivé metody pro odhad vlastností šumů rozděleny do čtyř skupin dle principu odhadu a je poukázáno na jejich předpoklady a vlastnosti. V kapitole 4 jsou představeny a porovnány veškeré významné korelační metody. Na základě zjištěných schopností a předpokladů korelačních metod jsou definovány v kapitole 5 cíle disertační práce. Stěžejní část disertační práce je v kapitole 6, kde je představena nová korelační metoda, která poskytuje hned několik různých způsobů odhadu momentů šumů. V kapitole 7 jsou nejen analyzovány vlastnosti odhadů momentů z předchozí kapitoly 6, ale také jsou ukázána různá rozšíření a diskutovány poznámky k metodě samotné. Využití odhadů momentů šumů k dalšímu popisu šumů je představeno v kapitole 8. Jednotlivé části kapitol 6, 7 a 8 také postupně řeší jednotlivé cíle disertační práce z kapitoly 5. V kapitole 9 je na několika příkladech ilustrováno chování nově navržené korelační metody. Závěrečná kapitola 10 shrnuje dosažené výsledky disertační práce.

Kapitola 2

Model systému a značení

Uvažujme lineární časově proměnný (LTV - z anglického linear time-varying) diskrétní stochastický stavový model systému [4, 5], který je dán následujícími rovnicemi vyjadřujícími dynamiku stavu a relaci mezi stavem a měřením

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, \tau$, $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je matice dynamiky, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ je matice měření, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neměřitelný vektor stavu, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je známý vektor řízení, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je známý vektor měření, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neměřitelný vektor šumu stavu a $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je neměřitelný vektor šumu měření.

Deterministická část modelu je dána v tomto případě lineárními rovnicemi (2.1), (2.2) a maticemi \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k , které budeme v této práci považovat za známé¹ a omezené, tzn. každý prvek matic \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k nabývá konečné hodnoty. Také předpokládejme, že stav je v každém okamžiku pozorovatelný, tzn. odhad stavu lze získat z posloupnosti řízení $[\mathbf{u}_k^T, \mathbf{u}_{k+1}^T, \dots, \mathbf{u}_{k+(n_x-2)}^T]^T$ a posloupnosti měření $[\mathbf{z}_k^T, \mathbf{z}_{k+1}^T, \dots, \mathbf{z}_{k+(n_x-1)}^T]^T$ pro všechna k . Stav \mathbf{x}_k je pozorovatelný právě tehdy, když matice pozorovatelnosti, která je definovaná jako

$$\mathcal{O}_k^{n_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{F}_k \\ \mathbf{H}_{k+2} \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{F}_k \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k+n_x-1} \mathcal{F}_k^{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z n_x \times n_x}, \quad (2.3)$$

¹Získané například modelováním či identifikací.

má hodnotu rovnou n_x . Matice \mathcal{F}_k^j je definována jako $\mathcal{F}_k^j = \prod_{i=1}^j \mathbf{F}_{k+j-i} = \mathbf{F}_{k+j-1} \cdots \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Stochastická část modelu je dána vlastnostmi šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k . V práci budeme uvažovat náhodné vektory šumů \mathbf{w}_k a \mathbf{v}_k , které jsou popsány

- i) známými funkcemi² parametrizovanými konečným počtem časově neproměnných konečných parametrů $\boldsymbol{\theta}$
- ii) nebo pomocí konečného počtu časově neproměnných konečných momentů.

Mezi často využívaný popis parametrizovanou funkcí patří například popis pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF - z anglického probability density function) šumů zapsané jako $p_{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_\tau, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_\tau}(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_\tau, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_\tau; \boldsymbol{\theta})$.

V práci bude převážně využíván popis pomocí momentů, který se dá dále rozdělit na popis pomocí necentrálních a centrálních momentů³. Z důvodu úspornosti zápisu budeme v práci využívat následující značení.

Uvažujme libovolné vektory $\mathbf{s}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro které bude používán zkrácený zápis střední hodnoty jejich Kroneckerova součinu (tj. necentrální momenty)

$$\mathcal{N}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{s}_1^{\otimes i_1} \otimes \mathbf{s}_2^{\otimes i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}_n^{\otimes i_n} \right], \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{s}_j^{\otimes i_j} = \underbrace{\mathbf{s}_j \otimes \mathbf{s}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{s}_j}_{i_j\text{-členů}}$, $\forall j$ značí Kroneckerovu mocninu, \otimes značí operátor Kroneckerova součinu a dolní index $\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}$ je zkrácený zápis

polynomiální funkce $\mathbf{s}_1^{\otimes i_1} \otimes \mathbf{s}_2^{\otimes i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{s}_n^{\otimes i_n}$.

Příklad

Pokud je \mathbf{w}_k náhodný vektor, pak $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k^4}$ je 4. *necentrální* moment tohoto vektoru, který lze také zapsat jako $\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k]$. Pokud je necentrální moment navíc časově neproměnný, lze u něj z důvodu zjednodušení zápisu vynechat dolní časový index jako $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^4} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k^4}$.

Pokud je \mathbf{a} deterministický vektor a \mathbf{w}_k a \mathbf{w}_{k+1} jsou náhodné vektory, pak $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{a}, \mathbf{w}_{k+1}^2}$ je 3. *křížový* necentrální moment náhodných vektorů \mathbf{w}_k a \mathbf{w}_{k+1} násobený vektorem \mathbf{a} , který lze také zapsat jako $\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{w}_{k+1} \otimes \mathbf{w}_{k+1}]$.

Obdobně bude využit pro náhodné vektory $\mathbf{s}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ zápis

²Tato funkce je dána například hustotou pravděpodobnosti nebo pomocí struktury popisující vývoj náhodné veličiny v čase, jak je detailně ukázáno v kapitole 8.2.

³Centrální momenty lze přepsat jako polynomiální funkce necentrálních momentů.

pro centrální momenty

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}} = \mathbb{E} \left[(\mathbf{s}_1 - \mathbb{E}[\mathbf{s}_1])^{\otimes i_1} \otimes (\mathbf{s}_2 - \mathbb{E}[\mathbf{s}_2])^{\otimes i_2} \otimes \dots \otimes (\mathbf{s}_n - \mathbb{E}[\mathbf{s}_n])^{\otimes i_n} \right], \quad (2.5)$$

kde dolní index $\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}$ je zkrácený zápis polynomiální funkce $(\mathbf{s}_1 - \mathbb{E}[\mathbf{s}_1])^{\otimes i_1} \otimes (\mathbf{s}_2 - \mathbb{E}[\mathbf{s}_2])^{\otimes i_2} \otimes \dots \otimes (\mathbf{s}_n - \mathbb{E}[\mathbf{s}_n])^{\otimes i_n}$.

Příklad

Pokud \mathbf{w}_k je náhodný vektor, pak $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k^4}$ je 4. *centrální* moment tohoto vektoru, který lze také zapsat jako $\mathbb{E}[(\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k]) \otimes (\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k]) \otimes (\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k]) \otimes (\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k])]$. Pokud je centrální moment časově neproměnný, lze u něj z důvodu zjednodušení zápisu vynechat dolní časový index $\mathcal{C}_{\mathbf{w}^4} = \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k^4}$.

Pokud jsou \mathbf{w}_k a \mathbf{w}_{k+1} náhodné vektory, pak $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_k}$ je 3. *křížový* centrální moment náhodných vektorů \mathbf{w}_k a \mathbf{w}_{k+1} , který lze také zapsat $\mathbb{E}[(\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k]) \otimes (\mathbf{w}_{k+1} - \mathbb{E}[\mathbf{w}_{k+1}]) \otimes (\mathbf{w}_k - \mathbb{E}[\mathbf{w}_k])]$.

Pokud vektor A obsahuje kopie některých prvků, poté lze vektor obsahující pouze jeho unikátní prvky zapsat jako A^U . Díky tomu lze vektor unikátních prvků vektoru $\mathcal{N}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}(2.4)$ zapsat jako $\mathcal{N}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^U$ pomocí následujícího vztahu

$$\mathcal{N}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}} = \Psi_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^U, \quad (2.6)$$

kde symbol $\Psi_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^{\mathcal{N}}$ představuje replikační matici obsahující jedničky a nuly. Obdobně lze i pro vektor $\mathcal{C}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}(2.5)$ a vektor jeho unikátních prvků $\mathcal{C}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^U$ nalézt vztah

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}} = \Psi_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathbf{s}_1^{i_1}, \mathbf{s}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{s}_n^{i_n}}^U. \quad (2.7)$$

Příklad

Náhodný vektor $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^2$ má nulovou střední hodnotu a časově neproměnnou kovarianční matici $\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(1)} & \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(2)} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(2)} & \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(3)} \end{bmatrix}$, kterou lze zapsat ve vektorizované formě jako $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2} = [\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(1)} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(2)} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(2)} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(3)}]^T$, případně pouze pomocí unikátních prvků jako $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U} = [\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(1)} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(2)} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(3)}]^T$, kde $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U(i)}$ je prvek vektoru $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U}$ na i -tém řádku. Tudíž platí vztah $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_2} = \Psi_{\mathbf{w}_2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_2^U}$, kde matice $\Psi_{\mathbf{w}_2}^{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Jako opak replikační matice bude využívána takzvaná unifikační matice, která z vektoru \mathbf{a} obsahující ho kopie některých prvků vybere libovolným způsobem pouze unikátní prvky, které seřadí do vektoru \mathbf{a}^U . Proto lze z vektoru $\mathcal{N}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}$ (2.4) vytvořit vektor unikátních prvků $\mathcal{N}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^U$ pomocí vztahu

$$\mathcal{N}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^U = \Phi_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}, \quad (2.8)$$

kde symbol $\Phi_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^{\mathcal{N}}$ představuje unifikační matici⁴ obsahující jedničky a nuly. Obdobně i vektor $\mathcal{C}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}$ (2.5) lze převést na vektor jeho unikátních prvků $\mathcal{C}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^U$ podle vztahu

$$\mathcal{C}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^U = \Phi_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}. \quad (2.9)$$

Příklad

Náhodný vektor $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^2$ má nulovou střední hodnotu a časově neproměnnou kovarianci $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k} = [\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(1) \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(2) \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(2) \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(3)]^T$ nebo $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U = [\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(1) \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(2) \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U(3)]^T$. Tudíž platí vztah $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k} = \Phi_{\mathbf{w}_k}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k}^U$ kde unifikační matice má například následující podobu $\Phi_{\mathbf{w}_k}^{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Pokud existuje dvojice vektorů $\mathcal{N}_{s_1^{i_1}, s_2^{i_2}, \dots, s_n^{i_n}}$ (2.4) taková, že množina prvků $s_j^{i_j}, \forall j$ u obou vektorů obsahuje stejné prvky, ale pouze v jiném pořadí, tak je mezi touto dvojicí vektorů jednoznačný vztah pomocí takzvané přeskládávací matice.

Příklad

Pro náhodné vektory \mathbf{w}_k a \mathbf{w}_{k+1} lze nadefinovat vektory 4. necentrálních momentů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}}^2$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_k}$, které se vzájemně nerovnají, nicméně obsahují stejné prvky. Proto mezi nimi existují následující vztahy $\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}}^2 = \Upsilon^{1,3,2} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_k} = \Upsilon^{2,3,1} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_k} = \Upsilon^{1,2,3} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}}^2$ kde symbol $\Upsilon^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ představuje přeskládávací matici jedniček a nul, která vhodně přeuspořádá jednotlivé členy v operátoru střední hodnoty podle pořadí čísel v horním indexu. Poznamenejme, že $\Upsilon^{1,2,3}$ se rovná jednotkové matici.

V této práci budeme uvažovat, že mezi parametry $\boldsymbol{\theta}$ a momenty existuje vztah. Vztah mezi momenty a parametry PDF je pro několik vybraných (skalárních) náhodných veličin ilustrován v tabulce 2.1.

⁴Unifikační matice není jednoznačně definovaná. Z vektoru obsahujícího kopie stejných prvků lze například vybrat libovolně jeden z nich a je jedno který.

| Gaussovo rozdělení | |
|--|--|
| hustota | $p_x(x; a, b) = \mathbf{G}(x; a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}$ |
| parametry | $a \in \mathbb{R}, b > 0$ |
| vztahy | $\mathcal{N}_x = a, \mathcal{C}_{x^2} = b$ |
| Studentovo rozdělení | |
| hustota | $p_x(x; a, b, c) = \mathbf{T}(x; a, b, c)$ $= \frac{1}{\sqrt{\pi bc}} \frac{\mathbf{G}(\frac{c+1}{2})}{\mathbf{G}(\frac{c}{2})} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{(x-a)^2}{b}\right)^{-\frac{(c+1)}{2}}, \mathbf{G}$ je gama funkce |
| parametry | $a \in \mathbb{R}, b > 0, c > 0$ |
| vztahy | $\mathcal{N}_x = a, \mathcal{C}_{x^2} = \frac{bc}{c-2}, \mathcal{C}_{x^4} = \frac{6}{c-4}$ |
| Šikmé Studentovo rozdělení | |
| hustota | $p_x(x; a, b, c, d) = \mathbf{ST}(x; a, b, c, d)$ $= 2\mathbf{T}(x; a, b + c^2, d) \mathbf{D}_{\mathbf{T}(0,1,d+1)} \left(\frac{c}{\sqrt{b}} \frac{x-a}{\sqrt{b+c^2}} \sqrt{\frac{d+1}{d + \frac{(x-a)^2}{b+c^2}}} \right)$ kde funkce \mathbf{D} poskytuje hodnotu distribuční funkce |
| parametry | $a \in \mathbb{R}, b > 0, c \in \mathbb{R}, d > 0$ |
| vztahy | $\mathcal{N}_x = a + ec, \quad \mathcal{C}_{x^2} = \frac{d}{d-2}(b + c^2) - (ce)^2$ $\mathcal{C}_{x^3} = ec \frac{d}{d-3}(3b + 2c^2) - \frac{3d}{d-2}(b + c^2) + 2(ce)^2$ $\mathcal{C}_{x^4} = \frac{3d^2}{(d-2)(d-4)}(b + c^2)^2 - \frac{4d}{d-3}(3b + 2c^2) + \frac{6d}{d-2}(ce)^2(b + c^2)$ $- 3(ce)^4 \left(\frac{d}{d-2}(b + c^2) - (ce)^2 \right)^2$ kde $e = \sqrt{\frac{d}{\pi} \frac{\mathbf{G}(\frac{d-1}{2})}{\mathbf{G}(\frac{d}{2})}}$ |
| Rozdělení směsi dvou Gaussových rozdělení | |
| hustota | $p_x(x; a, b, c, d, e) = \mathbf{GM}(x; a, b, c, d, e)$ $= a\mathbf{G}(x; b, d) + (1 - a)\mathbf{G}(x; c, e)$ |
| parametry | $a \in (0, 1), b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d > 0, e > 0$ |
| vztahy | $\mathcal{N}_x = ab + (1 - a)c$ $\mathcal{N}_{x^2} = a(d + b^2) + (1 - a)(e + c^2)$ $\mathcal{N}_{x^3} = a(3bd + b^3) + (1 - a)(3ce + c^3)$ $\mathcal{N}_{x^4} = a(6b^2d + 3d^2 + b^4) + (1 - a)(6c^2e + 3e^2 + c^4)$ $\mathcal{N}_{x^5} = a(10b^3d + 15bd^2 + b^5) + (1 - a)(10c^3e + 15ce^2 + c^5)$ |

Tabulka 2.1: Přehled vybraných skalárních náhodných veličin popsanych konečnou množinou parametrů PDF a jejich vztahy k momentům.

Kapitola 3

Rozdělení metod pro odhad vlastností šumů

Za posledních pět desetiletí bylo navrženo nemalé množství identifikačních metod, které poskytují odhad vlastností šumů. Tyto metody lze rozdělit do následujících čtyř skupin podle principu jejich odhadu [6]: korelační metody [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31], metody odpovídajících momentů [32, 33, 34, 6, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50], metody založené na maximální věrohodnosti [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] a bayesovské metody, [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84]. Vlastnostmi, výhodami a nevýhodami konkrétních metod či určitých skupin se zabývalo několik následujících, často přehledových článků [51, 85, 86, 6, 87, 88, 75, 17, 89, 20, 30, 90, 91].

Hlavní myšlenky, vlastnosti a předpoklady jednotlivých skupin jsou diskutovány v následujících podkapitolách.

3.1 Nestrannost a konzistence odhadů

V následujících kapitolách bude využívána dvojice pojmů, jakými jsou nestrannost a konzistence odhadů. Uvažujme deterministický vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, jehož odhad lze zapsat jako $\hat{\mathbf{x}}$.

Tento odhad $\hat{\mathbf{x}}$ lze nazývat nestranným, pokud se střední hodnota odhadu rovná odhadovanému vektoru, tj. platí $E[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{x}$. Pokud je odhad $\hat{\mathbf{x}}$ získán na základě dostupných měření, pak nestrannost není nijak ovlivněná celkovým počtem použitých měření.

Další využívanou vlastností odhadu je slabá konzistence [92, 93], kterou budeme v této práci zkráceně nazývat jako konzistence. Odhad $\hat{\mathbf{x}}$, počítaný

na základě τ měření, je konzistentní, pokud konverguje ve smyslu střední kvadratické chyby (MSE - z anglického mean squared error) ke skutečné hodnotě \mathbf{x} , tj. platí vztah $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})] = 0$, který je ekvivalentní se vztahem $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] = \mathbf{0}_{n_x \times n_x}$, kde $\mathbf{0}_{n_x \times n_x}$ značí nulovou matici příslušné dimenze. Slabá konzistence zaručuje snižování MSE odhadu s narůstajícím počtem měření.

3.2 Bayesovské metody

V této kapitole se zaměříme na metody využívající bayesovský přístup. Bayesovské metody (BM - z anglického Bayesian methods) jsou obecně navrženy pro systém, který je popsán stavovým LTV modelem.

BM využívají mnoha různorodých nelineárních filtrů, díky kterým poskytují odhad popisu šumů společně s odhadem stavu.

BM jsou převážně navrženy k odhadu středních hodnot a kovariančních matic šumů. BM předpokládají kromě jiného i znalost rozložení hustot pravděpodobnosti nejen počáteční informaci o stavu a šumů, které jsou v drtivé většině gaussovské, ale také znalosti rozložení hustot pravděpodobnosti jednotlivých parametrů šumů. Ty ovlivňují nejen výslednou kvalitu odhadu, ale i stabilitu výpočtu samotného odhadu. Vlastnosti odhadů popisu šumů získané pomocí BM, konkrétně nestrannost a konzistence, takřka nebyly v literatuře řešeny.

3.3 Metody založené na maximální věrohodnosti

Dalšími metodami identifikujícími vlastnosti šumů jsou metody založené na maximální věrohodnosti (MLM - z anglického maximum likelihood methods). Většina MLM je navržena pro systém popsáný stavovým LTV modelem obecně s negaussovským šumem. Samotné MLM lze rozdělit do dvou podskupin dle způsobu odhadu vlastností šumů.

První podskupina využívá množinu předdefinovaných modelů parametrizovaných různými parametry popisující šumy. Pro každý tento model je pomocí věrohodnostní funkce vypočtena míra důvěry v tento model a díky tomu je z množiny vybrán model s největší mírou důvěry. Tento přístup vyžaduje vytvoření obvykle nemalé množiny těchto předdefinovaných modelů. Druhá podskupina využívá algoritmus ustřednění a maximalizace (EM - z anglického expectation-maximization). Tento přístup využívá počáteční informaci o parametrech šumu k nadefinování filtru a odhadu stavu systému

pro všechna dostupná měření. Pomocí tohoto odhadu stavu se díky věrohodnostní funkci odhadnou nové parametry šumu, díky nimž se znovu nadefinuje nový filtr a znovu se odhadne stav. Tyto kroky se pak střídavě opakují, dokud nedojde k ustálení hodnoty odhadu.

MLM poskytují odhad středních hodnot a kovarianční matice šumů stavu i měření nebo autokorelační funkci šumu měření. Kvalita odhadu a stabilita výpočtu je u tohoto přístupu závislá na počáteční informaci o parametrech šumu. Odhad popisu šumů pomocí MLM je časově velmi náročný, a podobně jako BM ani pro MLM nebylo dokázáno, že poskytují nestranný nebo konzistentní odhad vlastností šumů.

3.4 Metody odpovídajících momentů

V této kapitole jsou popsány metody, které se snaží najít popis vlastností šumů pomocí odpovídajících momentů. Metody odpovídajících momentů (MMM - z anglického moment-matching methods) jsou navrženy pro systémy popsané stavovým LTV modelem s gaussovskými šумы.

MMM jsou založené na využití odhadu stavu z lineárního filtru (tj. střední hodnoty a kovarianční matice chyby odhadu stavu) spolu s jejich očekávanými vlastnostmi, a to i v případě, že nejsou splněny předpoklady pro použití tohoto filtru. Tyto odhady stavu jsou s pomocí zapomínacího faktoru či posuvného okénka v každém kroku filtru využity pro odhad vlastností šumů, které jsou využity v dalším časovém kroku filtru. To znamená, že filtru se v čase aktualizují informace o vlastnostech šumů a tím i mění vlastnosti odhadu stavu.

MMM poskytují odhad jak středních hodnot, tak kovariančních matic šumů. Kvalita odhadu, stejně jako stabilita výpočtu, je obecně závislá na kvalitě počáteční informace o parametrech šumu. Výpočet pomocí MMM je časově nenáročný, ale podobně jako u předchozích přístupů nebylo dokázáno, že tento přístup poskytuje nestranné či konzistentní odhady.

3.5 Korelační metody

V neposlední řadě se v této kapitole podíváme na metody nazývané korelační metody (CM - z anglického correlation methods). Většina CM je navržena pro systémy popsané stavovým lineární časově neproměnný (LTI - z angl. linear time-invariant) modelem obecně s libovolnými hustotami pravděpodobností šumů a stavu.

Hlavní myšlenka CM je založena na korelační analýze chyby predikce

měření počítané převážně¹ pomocí lineárního filtru s uživatelsky voleným ziskem.

Díky tomu CM poskytují odhad kovarianční matice šumů. Oproti předchozím třem přístupům mají CM nejméně předpokladů na systém, nejméně požadovaných počátečních informací a uživatelských parametrů. Nejen díky tomu lze ukázat, že CM jsou schopny poskytnout jednak konzistentní, ale pro některé metody dokonce i nestranné odhady.

Především díky schopnosti poskytovat konzistentní a nestranný odhad, díky mírným předpokladům na systém a malému počtu uživatelských parametrů se tato práce zaměří výhradně na CM.

¹Obecně jde o korelační analýzu stochastického procesu vzniklého transformací měření.

Kapitola 4

Korelační metody: základní přístupy a vlastnosti

V této kapitole se zaměříme na významné představitele CM spolu s jejich následovníky a na způsob definování chyby predikce měření (MPE - z anglického measurement prediction error), která je využívána veškerými CM. Následně budou vlastnosti, schopnosti a nedostatky představených metod shrnuty jednotnou formou a na základě získaných poznatků budou formovány cíle disertační práce.

4.1 Využívaný model systému

Předpokládejme systém popsaný rovnicemi (2.1) a (2.2), kde vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, tj. šumy stavu a měření jsou časově nezávislé, ale mohou být závislé vzájemně. Vektory šumu stavu \mathbf{w}_k a šumu měření \mathbf{v}_k mají nulovou střední hodnotu a kovariance¹ šumů jsou následující $\mathcal{C}_{\mathbf{w}^2} = \mathbf{Q}$, $\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2} = \mathbf{R}$, $\mathcal{C}_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{S}$. Dále budeme uvažovat z důvodu zjednodušení (bez ztráty obecnosti), že bude řízení \mathbf{u}_k nulové pro všechna k .

4.2 Chyba predikce měření

Veškeré CM jsou založeny na statistické analýze MPE definované jako

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k, \quad (4.1)$$

¹Vektory \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} obsahují prvky kovariančních matic šumů a v textu je dále budeme označovat zkráceně kovariance šumů.

kde \mathbf{Z}_k je vektor vytvořený z posloupnosti měření a $\widehat{\mathbf{Z}}_k$ je jeho predikce. Jak už z názvu vyplývá, CM využívají korelační analýzu MPE (4.1). Korelační funkci MPE lze zjednodušeně² zapsat ve vektorové formě jako

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U \\ \mathbf{R}^U \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{A}_k je známá matice konstruovaná za pomoci známých matic \mathbf{F}_k , \mathbf{H}_k a uživatelských parametrů a vektor \mathbf{C}_k je definován

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\widehat{\mathbf{Z}}_k^2} \\ \mathcal{N}_{\widehat{\mathbf{Z}}_k, \widehat{\mathbf{Z}}_{k-1}} \\ \vdots \\ \mathcal{N}_{\widehat{\mathbf{Z}}_k, \widehat{\mathbf{Z}}_{k-J}} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

z čehož plyne, že rovnice obsahuje celkem $J + 1$ korelačních členů.

Rovnici (4.2) lze pro všechny dostupné časové okamžiky zapsat do jednotného tvaru

$$\check{\mathbf{C}} = \check{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U \\ \mathbf{R}^U \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

kde $\check{\mathbf{A}}$ a $\check{\mathbf{C}}$ jsou definovány následovně

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J \\ \mathbf{A}_{J+1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_J \\ \mathbf{C}_{J+1} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Pokud by byl vektor $\check{\mathbf{C}}$ známý a známá matice $\check{\mathbf{A}}$ by měla plnou sloupcovou hodnotu, bylo by možné z lineární rovnice (4.4) získat odhad unikátních prvků kovariancí šumů. Bohužel vektor $\check{\mathbf{C}}$ je neznámý, jelikož jeho znalost je podmíněná znalostí hledaných kovariančních matic šumů. Nicméně autokorelace chyby predikce měření \mathbf{C}_k a tím i vektor $\check{\mathbf{C}}$ může být nestranně odhadnut

²Pro některé metody zde platí rovnost pro libovolný počet měření, pro jiné tato rovnost platí pouze v případě nekonečného počtu dat z důvodu odeznění počátečních podmínek, které jsou uživatelským parametrem těchto metod. Stejně tak některé CM poskytují odhad pouze kovariancí \mathbf{Q} a \mathbf{R} , tj. předpokládají $\mathbf{S} = \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}$.

z naměřených dat jako

$$\widehat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}}_J \\ \widehat{\mathbf{C}}_{J+1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{C}}_k = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{N}}_{\widetilde{\mathbf{Z}}_k^2} \\ \widehat{\mathcal{N}}_{\widetilde{\mathbf{Z}}_k, \widetilde{\mathbf{Z}}_{k-1}} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{N}}_{\widetilde{\mathbf{Z}}_k, \widetilde{\mathbf{Z}}_{k-J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Z}}_k^{\otimes 2} \\ \widetilde{\mathbf{Z}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{Z}}_{k-1} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{Z}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{Z}}_{k-J} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Pokud má $\check{\mathbf{A}}$ plnou sloupcovou hodnotu³, je možné na základě lineární rovnice (4.4) a odhadu (4.5) získat odhad kovariancí šumů pro všechny možné časové okamžiky pomocí vztahu

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{Q}}^u \\ \widehat{\mathbf{R}}^u \\ \widehat{\mathbf{S}} \end{bmatrix} = \check{\mathbf{A}}^\dagger \widehat{\mathbf{C}}, \quad (4.6)$$

kde $\check{\mathbf{A}}^\dagger = (\check{\mathbf{A}}^T \check{\mathbf{A}})^{-1} \check{\mathbf{A}}^T$ značí levou pseudoinverzi matice $\check{\mathbf{A}}$.

Tento koncept je shodný pro veškeré CM. Konkrétní rozdíly v definici vektoru \mathcal{Z} , výpočtu odhadu predikce $\widetilde{\mathbf{Z}}$, konstrukci matice \mathbf{A}_k , stejně jako výsledné vlastnosti odhadu kovariancí šumů a předpoklady na systém pro významné a konceptuálně odlišné CM a jejich následovníky budou diskutovány v následujících podkapitolách.

4.3 Metoda navržená Mehrou

Historicky první korelační metodou odhadující vlastnosti šumů je bezesporu metoda navržená Mehrou v [7]. Metoda byla navržena pro odhad kovariancí šumů stavu \mathbf{Q} a měření \mathbf{R} pro systém popsany stavovým LTI modelem s gaussovskými⁴ šumy.

Pro tuto metodu má MPE(4.1) následující podobu

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \underbrace{\mathbf{z}_k}_{\widetilde{\mathbf{Z}}_k} - \underbrace{\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}_{\widehat{\mathbf{Z}}_k}, \quad (4.7)$$

³Pokud matice $\check{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{i \times j}$ má plnou sloupcovou hodnotu, znamená to, že $\text{rank}(\check{\mathbf{A}}) = j$, kde $\text{rank}(\check{\mathbf{A}})$ značí hodnotu matice $\check{\mathbf{A}}$.

⁴Metoda v úvodu článku [7] sice předpokládá gaussovské šumy, ale tento předpoklad je nadbytečný a samotný algoritmus tuto znalost nevyužívá a ani ji nepotřebuje pro svůj chod.

kde $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ je prediktivní odhad stavu v čase k za podmínky znalosti měření do času $k - 1$, který je získán pomocí lineárního filtru definovaného jako

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{F} (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \\ &= (\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{z}_k,\end{aligned}\tag{4.8}$$

kde uživatelský volený zisk lineárního filtru \mathbf{K} , musí být zvolený tak, aby matice $(\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{H})$ měla všechna vlastní čísla uvnitř jednotkové kružnice. Kromě zisku \mathbf{K} musí být také zvolen počáteční odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$.

Počet korelačních členů J ve vztahu (4.5) je zvolen $J = n_x$. Kromě pozorovatelnosti stavu metoda navíc vyžaduje při konstrukci matice \mathbf{A}_k (4.2) *invertovatelnou* matici dynamiky \mathbf{F} a vzájemně *nekorelované* šумы, tj. $\mathbf{S} = \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}$. Výsledný odhad kovariancí \mathbf{Q} a \mathbf{R} je *konzistentní*, ale *stranný*. Poznamenejme, že metoda též poskytuje odhad ustáleného Kálmánova zisku.

4.3.1 Modifikace a zlepšení Mehrovy metody

První zlepšení převážně numerické stability Mehrovy metody bylo navrženo v [8]. Další zlepšení metody bylo navrženo v [9], kde se kromě matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} navíc poskytuje odhad vzájemné kovariance \mathbf{S} . Aplikací metody v oblasti geofyzikálních dat a zlepšení rychlosti a stability výpočtu se zabýval článek [16].

4.4 Metoda navržená Bélangerem

Druhou velice významnou metodou odhadující kovarianční matice šumů je metoda navržená Bélangerem v [10]. Metoda je navržená, na rozdíl od Mehrovy metody, pro systém popsáný LTV stavovým modelem se šумы popsanými libovolnou hustotou pravděpodobnosti a nulovou střední hodnotou. Pro takovýto model může metoda poskytnout odhady nejen matic \mathbf{Q} a \mathbf{R} , ale také *vzájemnou* kovarianci šumů \mathbf{S} .

V případě LTI modelu je generování MPE (4.1) pro tuto metodu tožné s metodou navrženou Mehrou (4.7), tj. pomocí lineárního filtru s uživatelsky voleným ziskem a počátečním odhadem střední hodnoty predikce stavu. Pro LTV model může být volba stabilizujícího zisku časově proměnná s tím, jak se mění matice \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k . Oproti předchozí metodě vytvoření matice \mathbf{A}_k (4.2) vyžaduje volbu počtu korelačních členů J (4.5), báze matice⁵

⁵Báze matice generující obal kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} se dají zvolit velice jednoduše bez jakékoliv prvotní znalosti o skutečných kovariancích šumů. Rozumně zvolené báze prvky nemají vliv na výsledný odhad kovariancí šumů.

generující obal (anglicky zvané span) kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} , ale zato *nevyžaduje* invertibilní matici dynamiky \mathbf{F}_k . Díky tomu metoda poskytuje *konzistentní* avšak *stranné* odhady kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} a \mathbf{S} .

Poznamenejme, že pokud jsou bazové matice zvoleny tak, že každá jednotlivá bazová matice generuje obal pouze pro každý jednotlivý unikátní prvek z kovariancí šumů, lze ukázat, že pro LTI model systému je takto vytvořená matice \mathbf{A}_k (4.2) totožná s maticí vytvořenou pomocí metody ALS [17, 20] (z anglického autocovariance least-squares). Nicméně ALS metoda je navržena výlučně pro systém popsany LTI modelem. Díky tomu se odvození i výsledný zápis rovnic u metody ALS významně zjednodušil.

4.4.1 Modifikace a zlepšení Bélangerovy (ALS) metody

V této kapitole se zaměříme nejen na modifikace a zlepšení Bélangerovy metody, ale také na metody odkazující se na metodu ALS, která díky zjednodušenému zápisu získala velký ohlas.

Zlepšení Bélangerovy metody z pohledu rychlosti konvergence rekursivního odhadu kovariancí šumů bylo navrženo v [13]. Metoda ovšem navíc vyžaduje předpoklad gaussovských šumů. V [30] byl analyzován vliv volby uživatelských parametrů na výslednou varianci kovariancí šumů pro Bélangerovu metodu.

Mezi první zlepšení ALS metody jistě patří metoda navržená v práci [18]. Ta je rozšířená o předpoklad na model, jenž může být nelineární, ale je dobře linearizovatelný Taylorovým polynomem prvního řádu. Metoda je díky tomu schopná poskytnout odhady kovariancí šumů, které nejsou kvůli aproximacím ve srovnání s původní metodou konzistentní. Aplikace tohoto přístupu pro chemické procesy byla představena v [23], [25] a pro navigaci v [24].

Další zlepšení ALS metody je v [19], kde se kromě kovariancí šumů stavu \mathbf{Q} a měření \mathbf{R} navíc odhaduje vzájemná kovariance \mathbf{S} . Podobný přístup pro jednodušší model byl představen v [21].

V článku [22] byla ALS metoda rozšířená pro LTV modely, speciálně pro periodické modely (tj. stav se periodicky opakuje). Metoda využívá znalosti délky periody, díky níž je metoda schopná poskytnout konzistentní odhad kovariancí šumů \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

Aproximativní rozšíření ALS metody pro pomalu se měnící LTV modely bylo publikováno v článku [26].

Metoda publikovaná v [27] rozšiřuje metodu ALS a je navržena pro odhad časově korelovaných šumů přes jeden časový okamžik (tj. \mathbf{Q} , \mathbf{R} , $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}}$ a $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}}$).

V článku [28] je navrženo rozšíření pro metodu ALS pro model s asymptoticky stabilní maticí dynamiky \mathbf{F} a buď časově proměnnou maticí měření \mathbf{H}_k ,

nebo nelineární rovnici měření s aditivním šumem, kde nelinearita je dána polynomiální funkcí. Pro model s nelineární rovnici měření je možno rovnici měření díky tomu, že nelinearita je dána polynomiální funkcí, přesně nahradit Taylorovým polynomem konečného řádu. Pro tyto modely metoda poskytuje konzistentní odhad kovariancí šumů \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

Zlepšení z pohledu kvality výsledného odhadu \mathbf{Q} a \mathbf{R} metody ALS pro různé uživatelské parametry bylo navrženo v [29, 31].

4.5 Metoda navržená Leeem

Další metoda byla představená v článku o rozsahu pouhé jedné strany Leeem [11]. Metoda je navržena pro systém popsany stavovým LTI modelem s gaussovskými⁶ šumy s nulovou střední hodnotou. Pro takovýto model metoda poskytuje odhad kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} .

Tato metoda oproti předchozím dvěma nevyužívá k výpočtu MPE (4.1) lineární filtr. Tudiž nevyžaduje ani definici stabilizujícího zisku \mathbf{K} , ani znalost počátečního odhadu stavu $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$. Metoda používá pro výpočet MPE předchozí měření podle vztahu

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{O} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k-1} \\ \mathbf{z}_{k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k-n_x} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

kde matice \mathbf{O} obsahuje koeficienty charakteristického polynomu⁷ $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ matice \mathbf{F} . Díky tomu lze ukázat, že MPE (4.9) je oproti předchozím dvěma metodám lineární funkcí pouze šumů stavu a měření, ale není funkcí počátečního odhadu stavu. Proto je autokovarianční funkce (4.2), u níž je maximální korelační posuv nastaven na $J = n_x$, neaproximativní pro konečný počet měření. Proto také metoda poskytuje nejen *konzistentní*, ale také *nestranný* odhad kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} . Zdůrazněme též, že metoda téměř jako jediná nevyžaduje žádný uživatelský parametr.

⁶Metoda v úvodu článku sice předpokládá gaussovské šumy, ale tento předpoklad je nadbytečný a samotný algoritmus tuto znalost nijak nevyužívá a ani ji nepotřebuje pro svůj chod.

⁷Metoda využívá charakteristického polynom $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ matice dynamiky \mathbf{F} , pro který platí, že $\mathbf{f}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}_{n_x}$, díky čemuž se zbaví závislosti na neznámém stavu.

4.6 Metoda navržená Bundickem

Další metoda navržená pro odhad vlastností šumů byla představená Bundickem v [14]. Metoda je navržená pro systém popsaný stavovým LTI modelem se vzájemně nekorelovanými gaussovskými⁸ šumy s nulovou střední hodnotou. Pro takovýto model metoda poskytuje odhad kovariancí šumů \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

Metoda využívá podobně jako metody navržené Mehrou a Bélangerem lineární filtr, jen s tím rozdílem, že místo jednoho filtru využívá množinu těchto filtrů s různými stabilizujícími zisky \mathbf{K} . Počet těchto filtrů je uživatelskou volbou. Pro všechny tyto lineární filtry jsou spočítány autokovarianční funkce pouze pro maximální korelační posuv $J = 0$ (4.5), tzn. jsou počítány pouze kovarianční matice MPE. Metoda poskytuje *konzistentní*, nicméně *stranné* odhady kovariancí šumů \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

4.6.1 Modifikace a zlepšení Bundickovy metody

Spíše než na modifikace či zlepšení se podíváme na předchůdce této metody, jenž byl navržen v [12]. Zde je uveden velmi specifický model s jedním měřením a dvěma stavy, kde stavové šumy jsou vzájemně nezávislé. Takto navržená metoda tedy odhaduje pouze tři neznámé parametry (dva prvky z kovarianční matice šumů stavu a jeden z měření), avšak přístup k jednotlivým neznámým a předpokladům je totožný jako u metody navržené Bundickem.

4.7 Souhrn, porovnání, schopnosti a slabé stránky metod

Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, vybrané metody jsou navržené za různých předpokladů, pro různé modely a jsou schopné odhadovat různé vlastnosti šumů. CM mají mnoho kladných společných vlastností, ale i neschopnosti a slabé stránky, na které se v této kapitole podíváme.

Veškeré CM využívají MPE, které je počítáno jako vážený součet měření (popř. počáteční znalosti stavu). Z této posloupnosti CM počítají korelaci, díky čemuž také získaly svůj název. Některé CM jsou si dokonce tak podobné, že při vhodném zvolení parametrů metod lze dostat naprosto totožné odhady z několika různých CM (tj. rovnice několika různých CM jsou

⁸Metoda v úvodu článku sice předpokládá gaussovské šumy, ale tento předpoklad je nadbytečný a samotný algoritmus tuto znalost nijak nevyužívá a ani ji nepotřebuje pro svůj chod.

tomto případě naprosto totožné). Pokud například budeme uvažovat skalární LTI model a parametry pro metodu navrženou Bélangerem (ALS⁹), jsou zvoleny takto:

- zisk lineárního filtru $K = \frac{1}{H}$,
- počáteční odhad stavu $\hat{x}_{0,-1} = \frac{z_0}{H}$,

pak jsou matice \mathbf{A}_k (4.2) pro odhad pouze variancí Q a R ($S = 0$) totožné pro metody navržené Leeem a Bélangerem (ALS).

Pokud se podíváme napříč všemi CM¹⁰, zjistíme, že i přes veškerou snahu nelze jednoznačně odhadnout všechny unikátní prvky kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} a \mathbf{S} , protože matice \mathbf{A} nemá plnou sloupcovou hodnotu. Tato vlastnost byla pozorována převážně pro systémy popsané LTI modely, ačkoliv se tento problém může vyskytnout i u LTV modelů.

Pro získání dobrého přehledu významných CM jsou klíčové vlastnosti shrnuty v tabulce 4.1, kde symbol \checkmark značí schopnost umět, symbol \times značí neschopnost umět, symbol $-$ značí prázdné políčko a červená značka označuje změnu oproti původní metodě.

Z tabulky 4.1 je vidět, že napříč všemi významnými CM jsou metody schopné poskytnout odhad kovariancí \mathbf{Q} a \mathbf{R} pro LTI model. Existují ovšem oblasti, kde schopnosti samotných metod či vlastnosti poskytovaných odhadů nejsou ideální či dostačující. Mezi tyto oblasti patří například systémy popsané LTV modelem nebo odhady středních hodnot šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}}$, vyšších momentů šumů, křížových kovariancí šumů $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-j}}$ a $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-j}}$ pro $\text{abs}(j) > 0$, kde funkce $\text{abs}(\mathbf{a})$ vrací absolutní hodnotu jednotlivých prvků argumentu \mathbf{a} , a mnoho dalších. Přitom existuje mnoho aplikací, kde jsou tyto znalosti předpokládány a vyžadovány. Mezi nejvýznamnější patří aplikace v oblastech navigace, sledování, sensorové kalibrace nebo detekce změn systému. Další slabou stránkou drtivé většiny CM je nutnost volby uživatelských parametrů (např. $\hat{\mathbf{x}}_{0,-1}$, \mathbf{K} , J), které mohou významně ovlivnit výslednou kvalitu odhadu [31]. Nebo skutečnost, že metody poskytují sice konzistentní, ale stranné odhady, což může být problém převážně v případech, kdy je dostupný pouze omezený počet měření.

⁹V případě vhodně zvolených bázových matic u Bélangérové metody, jak již bylo diskutováno dříve.

¹⁰Nejednoznačnost odhadu kovariancí šumů \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} byla pozorována nejen pro CM, ale také i pro BM, MLM a MMM.

| Původní metoda z kapitoly | 4.3 | | 4.4 | | 4.4 | | | | 4.5 | 4.6 |
|---------------------------|-----|-----|----------------------|--|----------|----------|----------|-------------------|------|------------------|
| | 4.3 | [9] | 4.4 | | [17, 20] | [18, 26] | [19, 21] | [22] | [27] | [28] |
| Metoda navržená v | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Model | × | × | ✓ | | × | ✓ | × | ✓ ^a | × | ✓ ^b |
| | × | × | × | | × | ✓ | × | × | × | ✓ ^{b,c} |
| | × | × | × | | × | × | × | × | × | × |
| | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| | × | ✓ | ✓ | | × | × | ✓ | × | × | × |
| Odhaduje | × | × | × | | × | × | × | × | ✓ | × |
| | × | × | × | | × | × | × | × | × | × |
| | × | × | × | | × | × | × | × | × | × |
| | × | × | × | | × | × | × | × | × | × |
| Odhad je | × | × | × | | × | × | × | × | × | × |
| | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | × | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Vyžaduje | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| | × | × | × | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Další vyžadované znalosti | - | - | Volba bázových matic | | - | - | - | Perioda opakování | - | - |

^a Pouze periodický model.

^b Pouze model s asymptoticky stabilní maticí dynamiky \mathbf{F} .

^c Pokud je nelineární pouze rovnice měření s aditivním šumem, kde nelinearita je dána polynomiální funkcí, poskytuje metoda konzistentní odhad.

Tabulka 4.1: Souhrn klíčových vlastností hlavních představitelů CM.

Kapitola 5

Cíle disertační práce

Tato kapitola definuje cíle samotné disertační práce, které povedou k potlačení slabých stránek a zároveň k rozšíření dobrých vlastností a schopností CM odhadujících nejen kovariance šumů, ale také složitějších popisů vlastností šumů.

5.1 Odhad středních hodnot šumů

Předpoklad modelu s bílými šumy popsanými nulovými středními hodnotami není zcela neobvyklý. Nalezneme ovšem aplikační oblasti, kde jsou očekávány šumy s nenulovou střední hodnotou, a to například z důvodu offsetu senzorů nebo řídicí jednotky. Bohužel žádná z výše představených metod není navržena pro odhad jak středních hodnot, tak i kovariancí šumů. Proto bude prvním cílem disertační práce rozšířit CM na odhad středních hodnot šumů (vedle kovariancí šumů).

5.2 Odhad vyšších momentů šumů

Dalším problémem neřešeným v literatuře je odhad vlastností šumů, které obecně nelze dostatečně dobře popsat za pomoci střední hodnoty a kovariancím šumů. Mohou to být například modely obsahující obecně negaussovské šumy (viz tabulka 2.1) jako například při měření pomocí ultra-širokopásmových zařízení (anglicky zvané ultra-wideband) [94]. Dalším cílem disertační práce je tedy navrhnout metodu pro odhad vyšších momentů za pomoci využití principů CM.

5.3 Odhad momentů časově závislých šumů

Další cíl je zaměřený na případy, kdy odhadovaná stochastická část modelu obsahuje časově závislé šumy (tzn. křížové kovariance šumů $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j} \neq \mathbf{0}_{n_x^2 \times 1}$, $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j} \neq \mathbf{0}_{n_z^2 \times 1}$ či $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j} \neq \mathbf{0}_{n_z n_x \times 1}$ pro $k \neq j$). Takovýto popis šumů lze očekávat například v případě měření z inerciálních senzorů [95] nebo měření pseudovzdálenosti v satelitním navigačním systému [96]. Z pohledu CM byl tento problém částečně řešen v článku [27], avšak pouze pro LTI model, kde šumy byly závislé pouze přes jeden časový okamžik. Z těchto důvodů bude dalším cílem disertační práce navrhnout metodu pro odhad popisu časově závislých šumů využitím principů CM.

5.4 Nestranný odhad kovariancí šumů

Na velice důležitou vlastnost, jakou je nestrannost, dosáhlo v oblasti odhadování vlastností šumů minimum metod. Ze všech metod, ať už CM, BM, MLM či MMM, poskytuje nestranný odhad pouze Leeova metoda, která je navržena pro odhad kovariancí šumů pouze pro LTI model. Tato vlastnost je velice důležitá především v případě malého počtu měření τ . Proto dalším cílem disertační práce bude navrhnout takovou CM, aby poskytovala nestranné odhady kovariancí šumů, a to i pro systém popsaný LTV modelem.

5.5 Ověření gaussovosti šumů

V některých aplikacích je kromě získání odhadu stavu také velice důležitou součástí řešení i určení takzvané integrity řešení, která zaručuje určitou důvěru v poskytnutý odhad stavu. Pro její určení se obvykle předpokládá, že šumy stavu a měření mají gaussovské rozdělení hustoty pravděpodobnosti. Tato problematika se vyskytuje v oblasti bezpečnostně kritických systémů jako je například navigace letadel. Proto bude dalším cílem využít CM pro ověření předpokladu gaussovosti šumů.

5.6 Maximální počet jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely

Jak bylo zmíněno v kapitole 4.7, CM nemusí být schopné v případě LTI modelu odhadnout veškeré prvky kovariancí šumů. Nicméně v literatuře nee-

xistuje vztah, který by na základě modelu systému (konkrétně hodnotí a dimenzí matic \mathbf{F} a \mathbf{H}) určil, kolik prvků kovariancí šumů je možné maximálně jednoznačně odhadnout. Dalším cílem disertační práce je proto analyzovat maximální možný počet jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů za pomoci využití principů CM.

5.7 Odhad parametrů popisujících šumy

Další oblastí zájmu bude situace, kdy stochastická část modelu bude popsána pomocí známých funkcí, které jsou parametrizovány neznámým vektorem parametrů. Takovéto šumy lze očekávat například v případě šumů popsaných Markovovým procesem, popřípadě obecně negaussovskou PDF, které se vyskytují v již zmíněných měřeních ultra-širokopásmových zařízení nebo inerciálních senzorech. Proto dalším cílem disertační práce bude navrhnout metodu pro odhad vektoru parametrů popisujících šumů s využitím principů CM.

5.8 Ilustrace použití navržených metod a algoritmů

Poslední cíl disertační práce bude implementace a ilustrace chování nově navržených přístupů k odhadu popisu vlastností šumů ve vybraných aplikacích.

Kapitola 6

Metoda difference měření

V této kapitole bude představen základní koncept nové korelační metody difference měření (MDM - z anglického measurement difference method) založené na statistické analýze rozdílu sekvence měření. Schopnosti samotné metody budou nejenom v této, ale i v následujících kapitolách postupně rozvíjeny a ilustrovány. Díky tomu bude možné využít MDM jednak k řešení jednotlivých cílů disertační práce, ale také budou ukázány výhody, jaké MDM přináší oproti ostatním CM.

Samotná kapitola bude rozdělena následujícím způsobem. Na počátku kapitoly bude popsáno, jak je definován samotný proces MDM počítaný pomocí sekvence měření, popřípadě řízení. Dále bude, za předpokladu časově nezávislých šumů, ukázán vztah mezi necentrálními a centrálními momenty vypočteného procesu a neznámých momentů šumů. Následně budou představeny dva různé způsoby odhadu – *celkový* a *postupný*, které poskytují rozdílné způsoby odhadu jak necentrálních, tak i centrálních momentů šumů. Ve zbytku kapitoly bude poukázáno na rozdíly odhadu necentrálních a centrálních momentů šumů, a to jak postupným, tak i celkovým způsobem odhadu v případě, že jsou šumy časově závislé.

6.1 Základní představení a rovnice MDM

V kapitole 4 byli zmíněni hlavní představitelé korelačních metod spolu s jejich následovníky. Bylo poukázáno na fakt, že využití lineárního filtru pro výpočet procesu MPE (4.7) vyžaduje několik uživatelských parametrů ovlivňujících zpracování dat. Tyto parametry mohou mít nepříznivý vliv na výsledné vlastnosti odhadu kovariancí šumů z pohledu, jakým je například nestrannost odhadů kovariancí šumů. Proto také Leova metoda [11], která jako jediná z představených CM nevyužívá lineární filtr, poskytuje nestranný

odhad. Je to ale vykoupeno tím, že Leeova metoda je jednak navržena pouze pro systém popsany LTI modelem, ale také tím, že k odhadu kovariancí šumů využívá minimálního charakteristického polynomu. Kvůli tomu metoda nenabízí žádnou možnost, jak ovlivnit výslednou kvalitu pro konkrétní modely systému. Nicméně základní koncept využívající k odhadu vlastností šumů statistickou analýzu stochastického procesu vytvořeného transformací sekvence známých měření, popřípadě řízení, bez nutnosti potřeby počátečního odhadu stavu v lineárním filtru byl jednou z motivací pro návrh nové metody, která bude v této kapitole představena.

Nová MDM je založená na analýze stochastického procesu vytvořeného transformací sekvence měření. S ohledem na rovnici MPE (4.1) využívá MDM rozšířeného vektoru měření definovaného

$$\mathbf{Z}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+L-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Ln_z}, \text{ pro } k = 0, \dots, \tau - L + 1 \quad (6.1)$$

pro konečné celé $L \geq 1$. Tento vektor se dá díky rovnicím dynamiky (2.1) a měření (2.2) rozepsat do následující podoby

$$\mathbf{Z}_k^L = \mathcal{O}_k^L \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \quad (6.2)$$

kde jednotlivé členy $\mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (L-1)n_x}$, $\mathbf{W}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$, $\mathbf{V}_k^L \in \mathbb{R}^{Ln_z}$ a $\mathbf{U}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$ jsou definovány vztahy

$$\mathbf{W}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k+L-2} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k+L-1} \end{bmatrix}, \mathbf{U}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+L-2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H}_{k+1} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H}_{k+2} \mathbf{F}_{k+1} & \mathbf{H}_{k+2} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{k+L-1} \mathcal{F}_{k+1}^{L-2} & \mathbf{H}_{k+L-1} \mathcal{F}_{k+2}^{L-3} & \cdots & \mathbf{H}_{k+L-1} \end{bmatrix}.$$

přičemž členy \mathcal{O}_k^L a \mathcal{F}_{k+1}^{L-2} byly definovány v (2.3). Kvůli zjednodušení zápisu budeme uvažovat, že matice, jejichž alespoň jedna dimenze je nulová, se v rovnici nevyskytují. Poznamenejme, že rovnice rozšířeného vektoru měření

(6.2) bude mít pro $L = 1$, tj. $\mathbf{W}_k^0 \in \mathbb{R}^0$, $\mathbf{U}_k^0 \in \mathbb{R}^0$ a $\mathbf{\Gamma}_k^0 \in \mathbb{R}^{n_z \times 0}$ podobu rovnice měření (2.2), tj. $\mathbf{Z}_k^1 = \mathbf{z}_k$.

Pro rozšířený vektor měření \mathbf{Z}_k^L (6.2) lze vypočítat N -krokovou predikci $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$ za pomoci známé sekvence měření \mathbf{Z}_{k-N}^L , popřípadě řízení \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} . Predikce je definována následovně

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N} = & \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) \\ & + \mathcal{O}_k \mathbf{\Xi}_{k-N+1}^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

pro $k = N, \dots, \tau - L + 1$, kde $\mathbf{\Xi}_{k-N+1}^N = [\mathcal{F}_{k-N+1}^{N-1}, \mathcal{F}_{k-N+2}^{N-2}, \dots, \mathcal{F}_{k-1}^1, \mathbf{I}_{n_x}] \in \mathbb{R}^{n_x \times N n_x}$, konečné celé $N \geq 1$ a \mathbf{I}_{n_x} značí jednotkovou matici dimenze $n_x \times n_x$.

Díky rozšířenému vektoru měření \mathbf{Z}_k^L (6.2) a jeho predikci $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$ (6.3) lze zadefinovat následující stochastický proces, který je základním kamenem MDM, jako

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{Z}_k^L - \widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}, \text{ pro } k = N, \dots, \tau - L + 1. \quad (6.4)$$

Rovnice (6.4) představující vztah pro výpočet procesu $\widetilde{\mathbf{Z}}_k$ se dá přepsat do následující podoby vhodné pro analýzu vlastností procesu samotného

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \mathcal{E}_k, \quad (6.5)$$

kde vektor $\mathcal{E}_k \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + P n_z}$ a matice $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{L n_z \times (P-1)n_x + P n_z}$ pro $P = L + N$ jsou definovány následovně

$$\mathcal{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + P n_z}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_k^w & \mathcal{A}_k^v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L n_z \times (P-1)n_x + P n_z}, \quad (6.7)$$

kde matice $\mathcal{A}_k^w \in \mathbb{R}^{L n_z \times (P-1)n_x}$ a $\mathcal{A}_k^v \in \mathbb{R}^{L n_z \times P n_z}$ jsou definovány

$$\mathcal{A}_k^w = [\mathbf{I}_{L n_z}, \mathbf{I}_{L n_z}] \begin{bmatrix} [\mathcal{O}_k^L \mathbf{\Xi}_{k-N+1}^N, \mathbf{\Gamma}_k^{L-1}] \\ [-\mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1}, \mathbf{0}_{L n_z \times N n_x}] \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{A}_k^v = [\mathbf{I}_{L n_z}, \mathbf{I}_{L n_z}] \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{L n_z \times N n_z}, \mathbf{I}_{L n_z}] \\ [-\mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger, \mathbf{0}_{L n_z \times N n_z}] \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

¹Později také ukážeme možnost volby $N = 0$ pro určité modely systému, která přináší další možnosti odhadu vlastností šumu konkrétně pro senzorovou kalibraci v kapitole 7.6.

Vektor $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze vypočítat podle vztahu (6.4) pomocí rozšířeného vektoru měření \mathbf{Z}_k^L (6.2) a jeho predikce $\hat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$ (6.3). Ovšem **vyzdvihněme**, že výpočet tohoto vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze také získat přímou transformací známé sekvence měření a řízení

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

jak je ukázáno v příloze A. Poznamenejme že matice \mathcal{A}_k (6.10) je ta samá matice jako v rovnici (6.5). Pokud se podíváme na vektor $\tilde{\mathbf{Z}}_k$, zjistíme, že tento vektor se dá díky rovnici (6.5) chápat nejen jako lineární funkce sekvence neznámých realizací šumů stavu a měření, ale současně také, díky rovnici (6.10), jako lineární funkce sekvence známých realizací řízení a měření. Vztah (6.10) také rovněž dovoluje odklonit se od historicky zavedeného pohledu na korelační metody u kterých je proces $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (4.1) tvořen oddělitelnou sekvencí měření \mathbf{Z}_k a její predikcí $\hat{\mathbf{Z}}_k$. Proces $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (6.10) jako transformace měření bez využití její predikce je nejvíce patrný, jak už bylo krátce zmíněno, pro specifický model systému, který umožní zvolit parametry jako $N = 0$ a $L = 1$, jak bude ukázáno v kapitole 7.6. Díky tomu je proces $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ počítán pouze z jednoho vektoru měření bez využití jakékoliv znalosti o rovnici stavu.

Parametry N a L v (6.5) nebo (6.10) mohou být zvoleny, jak už bylo řečeno, $N \geq 1$ a $L \geq 1$ (tzn. $P \geq 2$). Nicméně (v závislosti na konkrétních maticích modelu systému \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k), parametr L musí být zvolen dostatečně velký, aby matice \mathcal{O}_k^L měla plnou sloupcovou hodnotu, tj. n_x . Díky tomu bude platit vztah $(\mathcal{O}_k^L)^\dagger \mathcal{O}_k^L = \mathbf{I}_{n_x}$, který je vyžadován v přepisu do maticové podoby (6.5) a (6.10) v příloze A. Dále si také povšimněme matice \mathcal{A}_k , která je vytvořená ze známých a omezených matic systému \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k , tudíž je také známá a omezená.

6.2 Časově nezávislé šumy

Mezi často předpokládané vlastnosti šumů vyskytující se v modelu systému jistě patří časová nezávislost. Proto se v této kapitole podíváme na odhad momentů šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k , jež se vyskytují v rovnicích modelu systému (2.1) a (2.2). Navíc budeme předpokládat, že vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, tj. šumy stavu a měření jsou časově nezávislé, ale mohou být závislé vzájemně.

6.2.1 Vztah momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momentů šumů

V této kapitole se podíváme, jaký je vztah libovolných m -tých momentů náhodného vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momentů šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k . Tyto vztahy budou v následujících kapitolách využity k odhadu momentů šumů.

Pokud využijeme rovnice (6.5), lze ukázat, že jednotlivé časově proměnné centrální či necentrální m -té momenty stochastického procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze vyjádřit jako lineární funkce časově *neproměnných* m -tých momentů rozšířeného vektoru šumů stavu a měření \mathcal{E}_k díky polynomiální funkci a operátoru střední hodnoty vztahem

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = \mathcal{A}_k^{\otimes m} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}, \quad (6.11a)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = \mathcal{A}_k^{\otimes m} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}, \quad (6.11b)$$

kde $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} \in \mathbb{R}^{(Ln_z)^m}$, $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} \in \mathbb{R}^{(Ln_z)^m}$, $\mathcal{A}_k^{\otimes m} \in \mathbb{R}^{(Ln_z)^m \times ((P-1)n_x + Pn_z)^m}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m} \in \mathbb{R}^{((P-1)n_x + Pn_z)^m}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m} \in \mathbb{R}^{((P-1)n_x + Pn_z)^m}$.

Při bližším pohledu na necentrální a centrální momenty \mathcal{E}_k , tj. $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}$, lze velmi jednoduše ukázat, že tyto vektory obsahují kopie některých prvků polynomiálních funkcí momentů šumů stavu a měření. Proto je možné za využití rovnic (2.6), (2.7) nalézt následující vztahy

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m} = \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}, \quad (6.12a)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m} = \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}. \quad (6.12b)$$

Příklad

Pokud je vektor $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, pak první a druhé necentrální momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ pro $P \geq 3$ mohou být zapsány jako

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}} = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}, \quad (6.13a)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{w}}^{\otimes 2} \right)^{\mathcal{U}} \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2} \right)^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}. \quad (6.13b)$$

Druhý necentrální moment $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ lze zapsat pro $P = 2$ ve tvaru

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \\ (\mathcal{N}_{\mathbf{v}^{\otimes 2}}^{\mathcal{U}})^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}, \quad (6.13c)$$

kde se ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ nevyskytují prvky vektoru $(\mathcal{N}_{\mathbf{w}^{\otimes 2}}^{\mathcal{U}})^{\mathcal{U}}$ oproti vztahu (6.13b). Druhý centrální moment $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}$ lze zapsat pro $P \geq 2$ ve tvaru

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} - \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}. \quad (6.13d)$$

Rovnice necentrálních a centrálních momentů vektoru \mathbf{Z}_k , tj. $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}$ a $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}$ (6.11), obsahují nadbytečné kopie stejných prvků. Proto je možné za pomoci unifikčních matic (2.8), (2.9) vybrat pouze unikátní řádky

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes m} \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}, \quad (6.14a)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{U}} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{A}_k^{\otimes m} \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}. \quad (6.14b)$$

V rovnici (6.14a) lze nejen díky příkladu (6.13b) vidět, že m -tý necentrální moment $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{U}}$ je funkcí jednak unikátních prvků m -tých necentrálních momentů šumů, ale také polynomiálních funkcí prvních až $(m-1)$ -tých necentrálních momentů šumů. Ty jsou uspořádané do vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$. Obdobně v rovnici (6.14b) m -tý centrální moment $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^{\mathcal{U}}$ je funkcí jednak unikátních prvků m -tých centrálních momentů šumů, ale také polynomiálních funkcí druhých až $(m-1)$ -tých centrálních momentů šumů. Ty jsou uspořádané do vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$.

Rovnice (6.14) je možné zapsat pro všechny časové okamžiky $k = N, \dots, \tau - L + 1$ do kompaktní podoby

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^m = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}, \quad (6.15a)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m}^m = \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^m \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}, \quad (6.15b)$$

kde

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_N^m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^m} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix} \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}}, \quad (6.16)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_N^m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^m} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^m = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{A}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix} \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{C}}. \quad (6.17)$$

Samotné matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m$ a $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^m$ jsou zkonstruovány a obsahují pouze známé a omezené matice \mathbf{F}_k a \mathbf{H}_k , díky čemuž jsou tyto matice také známé a omezené. Pokud by navíc byly momenty $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m$ a $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m$ také známé, bylo by možné z rovnic (6.15) pomocí metody nejmenších čtverců odhadnout neznámé momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$, které rovněž obsahují hledané momenty šumů stavu a měření. Naneštěstí jsou tyto momenty procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ neznámé.

Nicméně v následujících kapitolách bude ukázáno hned několik cest, jak získat odhad momentů šumů, které si v krátkosti nastíníme. Budou ukázány dva základní přístupy:

- **Celkový odhad** poskytuje odhad celého vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$, tzn. jak m -tých momentů šumů, tak i polynomiálních funkcí nižších momentů šumů. K odhadu tudíž nevyžaduje znalost nižších momentů.
- **Postupný odhad**, jak je vidět již z názvu, počítá odhady momentů šumů postupně od nejnižších momentů šumů až k požadovaným m -tým momentům šumů. K výpočtu jednotlivých momentů šumů vždy využije veškerou znalost o nižších momentech.

6.2.2 Celkový odhad necentrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak získat odhad nejen středních hodnot šumů, ale obecně m -tých necentrálních momentů šumů.

Momenty stochastického procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (6.14a) jsou neznámé, nicméně samotné realizace tohoto procesu lze vypočítat podle rovnice (6.10) díky známým maticím \mathbf{F}_k , \mathbf{H}_k a dostupným měřením \mathbf{z}_k a řízením \mathbf{u}_k , $\forall k$. Díky těmto

realizacím $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze získat odhad jeho momentů podle vztahu

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_N^m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Pokud v rovnici (6.15a) je nahrazen výraz $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m$ jeho odhadem (6.18) a matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m$ (6.16) má plnou sloupcovou hodnotu, je možné z rovnice (6.15a) získat odhad unikátních prvků momentů šumů uspořádaných ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ pomocí metody nejmenších čtverců

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^\dagger \widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m. \quad (6.19)$$

Příklad

Realizace $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ vypočítané pomocí (6.10) využité k odhadu $\widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^1$ (6.18) umožní odhadnout střední hodnotu šumů ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}$ (6.13a) podle (6.19) jako

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1)^\dagger \widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^1. \quad (6.20)$$

Základní myšlenka celkového odhadu necentrálních momentů je velice jednoduchá a přímočará. Celkový odhad necentrálních momentů využívá dostupných měření a znalosti matic dynamiky a měření, díky čemuž je schopen poskytnout odhad celého vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$, který obsahuje jak m -té necentrální momenty šumů, tak i polynomiální funkce nižších necentrálních momentů. Díky tomu je tento odhad, jak bude dokázáno později, *nestranný a konzistentní*.

6.2.3 Celkový odhad centrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme jak získat odhad m -tých centrálních momentů šumů.

Libovolný m -tý centrální moment $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ může být vyjádřen jako polynomiální funkce nejen m -tých, ale také nižších *necentrálních* momentů šumů stavu a měření, které jsou za předpokladu $P > m$ uspořádané do vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$. Tento vztah lze zapsat následující rovnicí

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = \Theta_{\mathcal{E}^m} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}. \quad (6.21)$$

Proto je možné, za předpokladu časově nezávislých šumů a $P > m$, nejdříve získat odhad vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19) a lineární kombinací jednotlivých prvků vektoru $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ podle (6.21) získat navíc i odhad vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ vztahem

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = \Theta_{\mathcal{E}^m} \widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}. \quad (6.22)$$

Pokud je ovšem hodnota parametru $P \leq m$, tak vztah (6.21) jako celek nelze definovat. Je to způsobené tím, že vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ neobsahuje všechny potřebné prvky polynomiálních funkcí nižších necentrálních momentů šumů, které jsou zapotřebí pro lineární přepočítání do vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$. Nicméně pokud $P = m$, je možné vypočítat alespoň část centrálních momentů šumů. Pokud ovšem platí $P < m$, nelze vypočítat žádnou část centrálních momentů šumů.

Příklad

Vektor $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.13d) lze pro $P \geq 3$ vyjádřit z vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.13b) ve tvaru

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}} = \underbrace{\left([1 \quad -1] \otimes \mathbf{I}_{n_x(n_x+1) + \frac{n_z(n_z+1)}{2} + n_x n_z} \right)}_{\Theta_{\mathcal{E}^2}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}. \quad (6.23)$$

Ovšem pro $P = 2$ je možné z vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ (6.13c) vypočítat pouze část centrálních momentů šumů, a to

$$\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} - \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2} \right)^{\mathcal{U}}, \quad (6.24a)$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} - \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}}. \quad (6.24b)$$

Bohužel centrální moment šumu stavu $\mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}}$ není možné vypočítat kvůli chybějícímu členu $\left(\mathcal{N}_{\mathbf{w}}^{\otimes 2} \right)^{\mathcal{U}}$ ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ (6.13c). Poznamenejme, že rovnice (6.24) odpovídají posledním řádkům z rovnice (6.23).

Hlavní myšlenka celkového odhadu centrálních momentů je založená na dvou jednoduchých skutečnostech. První je ta, že m -tý centrální moment lze vyjádřit jako lineární funkce jednak prvků m -tých necentrálních momentů, ale také prvků polynomiálních funkcí nižších necentrálních momentů. Druhou skutečností je, že vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ obsahuje za předpokladu, že $P > m$, všechny prvky jak m -tých necentrálních momentů, tak i polynomiálních funkcí nižších necentrálních momentů, které jsou potřeba k výpočtu vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$. Proto k výpočtu celkového odhadu centrálních momentů, který je také, jak bude dokázáno *nestranný* a *konzistentní*, je potřeba prvotně vypočítat celkový odhad necentrálních momentů.

6.2.4 Postupný odhad necentrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak postupným odhadováním od nejnižších momentů získat odhad m -tých necentrálních momentů šumů.

Postupný odhad necentrálních momentů šumů postupně identifikuje první až $(m - 1)$ -té necentrální momenty šumů, které využívá k odhadu dalších, tj. m -tých necentrálních momentů šumů. Tento přístup lze ukázat upravením rovnice (6.15a) do následující podoby

$$\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^m}^m = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{m\}\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{m\} + \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{l\}\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{l\}, \quad (6.25)$$

kde matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{m\}$ obsahuje všechny sloupceky z matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m$ náležící prvkům pouze m -tých necentrálních momentů šumů uspořádaným ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{m\}$. Oproti tomu matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{l\}$ obsahuje zbývající sloupceky matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m$, které náleží zbývajícím prvkům, uspořádaným ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{l\}$. Tyto zbývající prvky jsou polynomiální funkce prvních až $(m - 1)$ -tých necentrálních momentů šumů. Pokud jsou prvky ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{l\}$ (6.25) nahrazeny odhady prvků $(m - 1)$ -tých a nižších necentrálních momentů šumů, vektor $\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^m}^m$ je nahrazen odhadem (6.18) a matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{m\}$ (6.25) má plnou sloupcovou hodnotu, je možné získat odhad m -tých necentrálních momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{m\}$ metodou nejmenších čtverců ve tvaru

$$\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{m\}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{m\})^\dagger \left(\widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^m}^m} - \underbrace{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m\{l\}\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U\{l\}}}_{\substack{\text{vliv nižších} \\ \text{necentrálních} \\ \text{momentů šumů}}} \right). \quad (6.26)$$

Příklad

Odhad $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U}$ (6.20) lze využít k odhadu vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U\{2\}$ (6.26) pro $P \geq 3$ podle vztahu

$$\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U\{2\}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^U} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^U} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{w},\mathbf{v}}} \end{bmatrix} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2\{2\})^\dagger \left(\widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^2}^2} - \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2\{l\} \begin{bmatrix} (\widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{w}}^{\otimes 2}})^U \\ (\widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2}})^U \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{w}}} \otimes \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}}} \end{bmatrix} \right). \quad (6.27)$$

Poznamenejme, že celkový a postupný (6.20) odhad *prvního* necentrálního momentu šumů je totožný.

Postupný odhad necentrálních momentů vyžaduje postupně odhadnout veškeré nižší necentrální momenty od prvního po $(m - 1)$ -tý, které jsou využity k odhadu m -tého necentrálního momentu. To znamená, že kromě odhadu

m -tých necentrálních momentů šumů metoda postupného odhadu poskytne i odhady *všech* nižších momentů. V porovnání s celkovým odhadem m -tých necentrálních momentů šumů, který také poskytl odhad m -tých necentrálních momentů šumů, ale dále poskytl odhad pouze polynomiální funkce nižších momentů, nikoliv nižších momentů samotných. Bohužel kvůli využívání odhadů nižších necentrálních momentů šumů v postupném odhadu je obecně velice obtížné říci něco o nestrannosti a konzistenci odhadů.

6.2.5 Postupný odhad centrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme jak postupným odhadováním od nejnižších momentů získat odhad m -tého centrálního momentu šumů.

Podobně jako v předchozí kapitole 6.2.4 hlavní myšlenkou postupného odhadu centrálních momentů šumů je postupná identifikace druhých až $(m - 1)$ -tých centrálních momentů šumů a využití těchto již odhadnutých nižších momentů k odhadu dalšího, tj. m -tého centrálního momentu šumů. Navíc je využito i odhadu prvků prvního necentrálního momentu šumů $\mathcal{N}_\varepsilon^U$. Tento přístup lze ukázat úpravou rovnice (6.15b) do následující podoby

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^m = \mathcal{A}_C^m \{m\} \mathcal{C}_{\varepsilon^m}^U \{m\} + \mathcal{A}_C^m \{l\} \mathcal{C}_{\varepsilon^m}^U \{l\}, \quad (6.28)$$

kde matice $\mathcal{A}_C^m \{m\}$ obsahuje všechny sloupcečky z matice \mathcal{A}_C^m náležící pouze m -tým prvkům centrálních momentů šumů uspořádaných do vektoru $\mathcal{C}_{\varepsilon^m}^U \{m\}$. Oproti tomu matice $\mathcal{A}_C^m \{l\}$ obsahuje zbývající sloupcečky matice \mathcal{A}_C^m , které náleží zbývajícím prvkům uspořádaným ve vektoru $\mathcal{C}_{\varepsilon^m}^U \{l\}$. Tyto zbývající prvky jsou polynomiální funkce druhých až $(m - 1)$ -tých centrálních momentů šumů. Poznamenejme, že $\mathcal{A}_C^m \{m\} = \mathcal{A}_C^m$ pro $m < 4$, protože $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^m$ bude pouze lineární funkcí m -tých prvků centrálních momentů šumů. Pokud je $\mathcal{N}_\varepsilon^U$ (6.13a) odhadnut pomocí (6.19), pak je možné odhadnout $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^m$ ze vztahu

$$\widehat{\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^m} = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \widehat{\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_N^m}^m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \widehat{\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^m}^m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \widehat{\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^m}^m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \left(\tilde{\mathbf{Z}}_N - \mathcal{A}_N \Psi_\varepsilon^N \widehat{\mathcal{N}_\varepsilon^U} \right)^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1} - \mathcal{A}_{N+1} \Psi_\varepsilon^N \widehat{\mathcal{N}_\varepsilon^U} \right)^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^C \left(\tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1} - \mathcal{A}_{\tau-L+1} \Psi_\varepsilon^N \widehat{\mathcal{N}_\varepsilon^U} \right)^{\otimes m} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Pokud je vektor $\mathcal{C}_{\varepsilon^m}^U \{l\}$ (6.28) nahrazen odhady prvků druhých až $(m - 1)$ -tých centrálních momentů šumů, vektor $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}}^m$ je nahrazen odhadem (6.29) a matice $\mathcal{A}_C^m \{m\}$ (6.28) má plnou sloupcovou hodnotu, je možné získat

odhad m -tých centrálních momentů šumů $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}$ pomocí vztahu

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^m\{m\})^\dagger \left(\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{Z}}^m} - \mathcal{A}_{\mathcal{C}}^m\{l\} \widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}} \right). \quad (6.30)$$

Příklad

Odhad $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}}$ (6.20) využitý v odhadu $\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{Z}^2}^2}$ (6.29) lze použít pro odhad vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.30)^a podle

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^2)^\dagger \widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{Z}^2}^2}. \quad (6.31)$$

^aVektor $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}\{2\}$ je totožný s $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.13d) a matice $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^2\{2\}$ je rovna $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^2$, protože $m=2 < 4$.

Postupný odhad centrálních momentů šumů vyžaduje odhadnout nejdříve první necentrální moment šumů, který je následně využit k postupnému odhadu všech nižších centrálních momentů šumů od druhého po $(m-1)$ -tý. Veškeré odhady nižších momentů jsou poté využity k odhadu m -tých centrálních momentů šumů. To znamená, že kromě odhadu m -tých centrálních momentů šumů metoda postupného odhadu poskytne i odhady *všech* nižších centrálních momentů a středních hodnot šumů. Oproti tomu celkový odhad m -tých centrálních momentů šumů poskytuje pouze odhad m -tých centrálních momentů šumů. Bohužel kvůli využívání odhadů nižších momentů šumů v postupném odhadu je obecně velice obtížné říci něco o nestrannosti a konzistenci těchto odhadů.

6.3 Časově závislé šumy

Předchozí kapitola 6.2 se věnovala odhadu momentů časově nezávislých šumů. Nicméně pro popis některých systémů nemusí být modely s časově nezávislými šumy dostačující. Proto je potřeba využít modely obsahující časově závislé šumy, jejichž momenty budou v této kapitole odhádovány. Konkrétně bude v této kapitole ukázán odhad momentů šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k v rovnicích modelu systému (2.1), (2.2). Také bude předpokládáno, že existuje *závislost* mezi vektorem šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ a vektorem $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $\text{abs}(k-j) \leq z_{\max}$, kde z_{\max} je hodnota maximální časové závislosti mezi vektory šumů tj. šumy stavu a měření mohou být časově i vzájemně závislé. Poznamenejme, že v této kapitole budou ukázány převážně změny či rozdíly ve výpočtu odhadu momentů šumu oproti kapitole 6.2.

6.3.1 Vztah momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momentů šumů

V této kapitole se podíváme, jaký je vztah libovolných m -tých momentů šumů náhodného vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ s momenty časově závislých šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k .

Stejně jako v kapitole 6.2.1 lze beze změny ukázat, že jednotlivé centrální či necentrální m -té momenty stochastického procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze vyjádřit jako lineární funkci momentů rozšířeného vektoru šumů stavu a měření \mathcal{E}_k podobně jako v (6.11). Samotné m -té momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}$ samozřejmě také obsahují kopie některých prvků, a proto lze nadefinovat vektor obsahující pouze unikátní prvky stejně jako v (6.12).

Rozdíl oproti předchozí kapitole 6.2.1 lze ale spatřit při bližším pohledu na jednotlivé prvky vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}$. Ty obsahují stejně jako v případě časově nezávislých šumů kopie prvků m -tých momentů šumů. Místo kopií prvků polynomiálních funkcí prvních až $(m-1)$ -tých momentů šumů stavu a měření se zde však mohou vyskytnout i m -té křížové momenty popisující časově závislé šumy. Poznamenejme, že konkrétní počet unikátních prvků vyskytujících se v momentech $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}$ se různí v závislosti nejen na hodnotě maximální časové korelace z_{\max} , ale také na velikosti hodnoty parametru P .

Příklad

Pokud je vektor šumů $\xi_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ závislý na vektoru ξ_j pouze pro $\text{abs}(k-j) \leq 1 = z_{\max}$, pak druhé momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}$ pro $P = 2$ mohou být zapsány jako

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}, \quad (6.32a)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} - \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}. \quad (6.32b)$$

Druhý necentrální moment $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ pro $P = 3$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2} \right)^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}. \quad (6.32c)$$

Druhý necentrální moment $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ pro $P \geq 4$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{w}}^{\otimes 2} \right)^{\mathbf{U}} \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2} \right)^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}. \quad (6.32d)$$

Druhý centrální moment $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}$ pro $P \geq 3$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} = \mathbb{E} \left[\left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} - \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \end{bmatrix} = \Psi_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}. \quad (6.32e)$$

Stejně jako v kapitole 6.2.1 lze beze změny zapsat rovnice (6.11) do tvaru (6.14) a vyjádřit je pro všechny časové okamžiky $k = N, \dots, \tau - L + 1$ v kompaktní podobě (6.15). Využití rovnice (6.15) k získání odhadů vlastností časově závislých šumů stavu a měření bude ukázáno v následujících kapitolách.

6.3.2 Celkový odhad necentrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak získat odhad nejen m -tého necentrálního momentu časově závislých šumů.

Pokud je v rovnici (6.15a) nahrazen výraz $\mathcal{N}_{\mathbf{z}_m}^m$ jeho odhadem (6.18) a matice $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}^m$ (6.16) má plnou sloupcovou hodnotu, je možné z rovnice (6.15a) získat odhad unikátních prvků momentů šumů uspořádaných ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ stejně jako v případě časově nezávislých šumů v kapitole 6.2.2. Výsledný odhad je stejně tak *nestranný* a *konzistentní*, jak bude dokázáno v následujících kapitolách.

6.3.3 Celkový odhad centrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak získat celkový odhad m -tého centrálního momentu časově závislých šumů.

V případě závislosti vektorů šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ a $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $\text{abs}(k - j) \leq z_{\max}$ lze také vyjádřit m -tý centrální moment $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ jako funkci prvků z vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ pomocí vztahu (6.21) obdobně jako v kapitole 6.2.3, ale pouze pokud hodnota parametru splňuje $P > (m + z_{\max})$.

Pokud ovšem pro hodnotu parametru platí $P \leq (m + z_{\max})$, nelze vztah (6.21) jako celek definovat. Je to způsobené tím, že vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ neobsahuje všechny potřebné prvky polynomiálních funkcí nižších necentrálních momentů šumů, které jsou zapotřebí pro lineární přepočítání do vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$. Nicméně pokud $P = (m + z_{\max})$, je možné vypočítat alespoň část centrálních

momentů šumů obdobně jako v kapitole 6.2.3. Pokud ovšem $P < (m + z_{\max})$, například když maximální časová závislost z_{\max} není konečná, pak nelze vypočítat žádnou část centrálních momentů šumů.

Příklad

Vektor $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.32e) lze vyjádřit z vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.32d), pro $P \geq 4$, ve tvaru

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}} = \underbrace{\mathbf{I}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2} + n_x^2 + \frac{n_z(n_z+1)}{2} + n_z^2 + 3n_x n_z}}_{\Theta_{\mathcal{E}^2}} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Psi_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{N}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{n_z(n_z+1)}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_x n_z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_x n_z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_x n_z} \end{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}, \quad (6.33)$$

kde $\mathbf{0}$ je zjednodušený zápis nulové matice s odpovídající dimenzí. Ovšem pro $P = 3$ je možné z vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ (6.32c) vypočítat pouze část centrálních momentů šumů $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$ (6.32e), a to

$$\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} - \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2} \right)^{\mathcal{U}}, \quad (6.34a)$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}}^{\otimes 2}, \quad (6.34b)$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}} - \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}}, \quad (6.34c)$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} - \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}}, \quad (6.34d)$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} - \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}}. \quad (6.34e)$$

Bohužel centrální momenty šumů stavu $\mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_k}$ není možné vypočítat kvůli chybějícímu členu $\mathcal{N}_{\mathbf{w}}^{\otimes 2}$ ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}$ (6.32c). Poznamenejme, že rovnice (6.34) odpovídají posledním řádkům rovnice (6.33).

Výpočet celkového odhadu centrálních momentů pro časově závislé šumy za předpokladu $P > (m + z_{\max})$ je, jak bude dokázáno v následujících kapitolách, nestranný a konzistentní.

6.3.4 Postupný odhad necentrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak postupným odhadováním získat odhad m -tých necentrálních momentů šumů.

Výpočet postupného odhadu m -tých necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}}$ (6.26) s využitím polynomiálních funkcí nižších, již odhadnutých,

necentrálních momentů ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}$ (6.25) zůstává nezměněn v porovnání s kapitolou 6.2.4.

Poznamenejme, že pro větší časovou závislost $\text{abs}(k-j) = z_{\max}$ mezi vektory šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ a $\boldsymbol{\xi}_j$ a zároveň malou hodnotu P může odhadovaný vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}$ (6.26) obsahovat stejné prvky jako v případě celkového odhadu $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19). Jelikož vektor polynomiálních funkcí nižších necentrálních momentů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}$ (6.26) může být prázdný, tzn. žádný nižší necentrální moment není využit a postupný odhad necentrálních momentů je totožný s celkovým odhadem dokonce pro libovolný moment m .

Bohužel, podobně jako v případě odhadu necentrálních momentů časově nezávislých šumů v kapitole 6.2.4, je kvůli využívání odhadů nižších necentrálních momentů šumů v postupném odhadu obecně velice obtížné říci něco o nestrannosti a konzistenci odhadů.

6.3.5 Postupný odhad centrálních momentů šumů

V této kapitole si ukážeme, jak postupně získat odhad m -tého centrálního momentu šumů.

Pro výpočet postupného odhadu m -tých centrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}}$ (6.30) jsou využity již odhadnuté nižší momenty šumů ve vektoru $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}$ (6.28) obdobě jako v kapitole 6.2.5.

Poznamenejme, že pro větší časovou závislost z_{\max} a zároveň malou hodnotu P může odhadovaný vektor $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}$ (6.30) obsahovat stejné prvky jako celý vektor $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.21). Tudíž vektor polynomiálních funkcí nižších centrálních momentů $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}$ (6.30) může být prázdný, tzn. žádný nižší centrální moment není využit pro libovolný moment m . Nicméně vždy bude využito alespoň odhadu středních hodnot šumů $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}}$ při výpočtu $\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{Z}^m}^m}$ (6.29).

Podobně jako v případě odhadu centrálních momentů časově nezávislých šumů v kapitole 6.2.5 je díky využívání odhadů nižších momentů šumů v postupném odhadu obecně velice obtížné říci něco o nestrannosti a konzistenci odhadů.

Kapitola 7

Metoda difference měření: analýzy a rozšíření

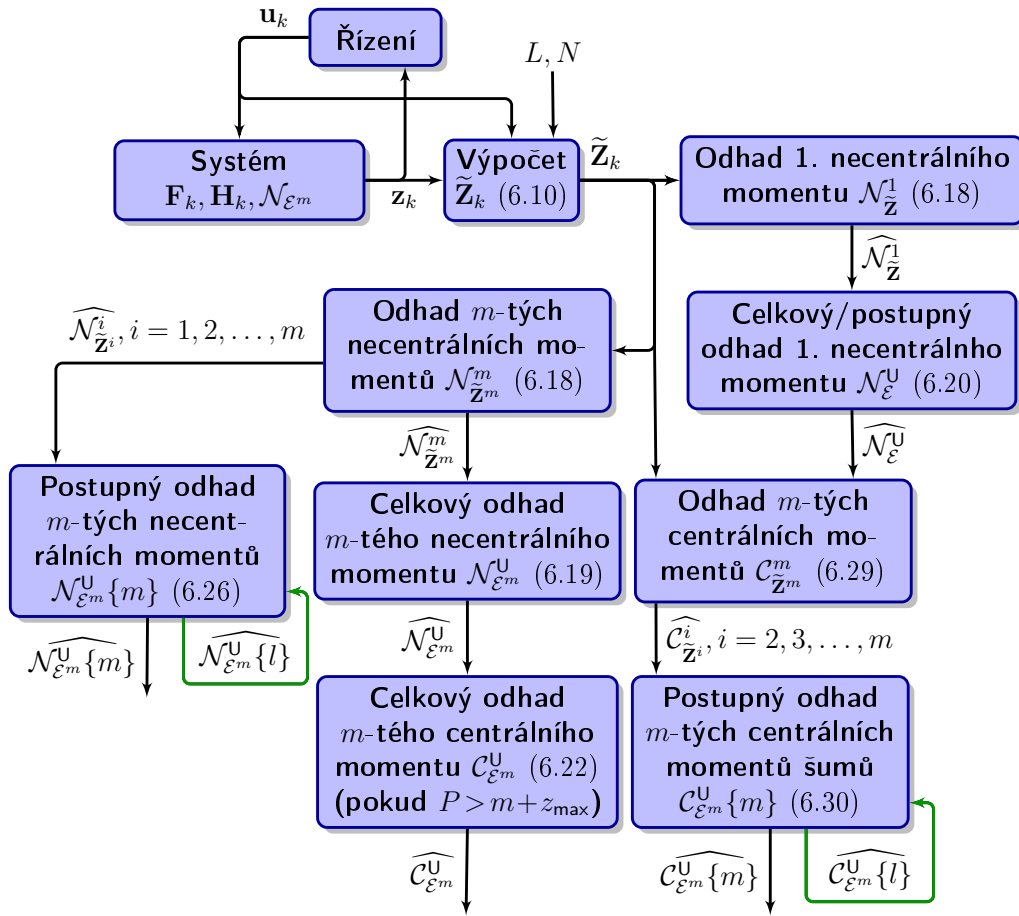
V této kapitole budou analyzovány odhady momentů šumů získané pomocí MDM a také bude ukázáno několik rozšíření metody samotné.

Na počátku kapitoly bude pomocí blokového schématu ukázáno, které měření či odhady vyžadují pro svůj výpočet jednotlivé odhady MDM. Dále pak bude ukázán narůstající celkový počet odhadovaných prvků momentů šumů pomocí MDM v závislosti na několika faktorech, jako jsou časová ne/závislost šumů, kolikátý moment bude odhadován nebo zda je pro odhad využít celkový či postupný odhad MDM. V následujících dvou podkapitolách 7.3 a 7.4 budou analyzovány vlastnosti jednotlivých MDM odhadů, jako jsou nestrannost a konzistence. Dále v podkapitole 7.5 pak bude ukázána možnost využití křížových momentů $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ definujících další rovnice, které lze využít k odhadu momentů šumů. Možnost odhadu momentů pouze šumu měření s využitím vztahů MDM bude ukázána v další kapitole 7.6. Poté v podkapitole 7.7 bude diskutována možnost využití znalosti některých prvků momentů šumů k odhadu zbývajících neznámých prvků momentů šumů. V následujících dvou podkapitolách 7.8 a 7.9 bude diskutována možnost rozšíření MDM odhadů jednak do rekurzivní verze, ale také využití vztahů MDM pro nelineární modely. Následně bude v podkapitole 7.10 ukázáno, jak v odhadu momentů šumů pomocí MDM využít modelu systému, který obsahuje známé tvarovací matice šumů. Dále v podkapitole 7.11 bude ukázáno, jak změna použití dostupných měření může vhodně změnit model s ohledem na výslednou kvalitu odhadovaných kovariancí šumů. Poté bude v podkapitole 7.12 ukázána možnost vážení nejmenších čtverců v odhadu momentů šumů pomocí MDM. Na závěr kapitoly budou diskutovány hodnoty uživatelsky volených parametrů L a N v MDM.

7.1 Vzájemné vztahy mezi odhady MDM

V této kapitole se podíváme na vztahy jednotlivých odhadů MDM.

Jak bylo v předchozích kapitolách vidět, jednotlivé kroky výpočtu odhadů jsou částečně propojené. Pro přehlednost jsou jednotlivé části výpočtu odhadu centrálních a necentrálních momentů celkovým a postupným způsobem ukázány na obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Struktura výpočtu odhadu momentů šumů pomocí MDM

7.2 Počet odhadovaných momentů šumů

V této kapitole se podíváme na to, jak narůstá celkový počet odhadovaných prvků pro určitý moment a pro různé přístupy k odhadu.

Při celkovém odhadu momentů šumů uvedených v podkapitolách 6.2.2, 6.2.3, 6.3.2 a 6.3.3 se vždy odhadují veškeré neznámé prvky, nicméně není potřeba znalosti nižších momentů. Oproti tomu postupné odhady momentů

uvedených v podkapitolách 6.2.4, 6.2.5, 6.3.4 a 6.3.5 pro výpočet m -tého momentu šumů vyžadují (odhadnuté) nižší momenty šumů.

Pokud budeme například uvažovat vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$, který je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, zjistíme, že počet všech odhadnutelných prvků pro celkový (podkapitola 6.2.2, 6.2.3) a postupný (podkapitola 6.2.4, 6.2.5) odhad momentů šumů je různý, jak ukazuje tabulka 7.1.

| n_x | n_z | P | m -tý moment | Celkový odhad | | Postupný odhad | |
|-------|-------|-----|-------------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| | | | | necent. mom. | cent. mom. | necent. mom. | cent. mom. |
| 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | - | 2 | - |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 13 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 3 | 4 | 26 | 11 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 46 | 18 | 6 | 6 |

Tabulka 7.1: Celkový počet odhadovaných prvků v případě nezávislosti vektorů šumů $\boldsymbol{\xi}_k$ a $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$.

Z tabulky 7.1 je zřejmé, že *celkový* odhad 4. necentrálního momentu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^4}^{\mathcal{U}}$ (6.19) obsahuje celkem 26 prvků, což je více než 5krát více než při *postupném* odhadu 4. necentrálního momentu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^4}^{\mathcal{U}}\{4\}$ (6.26), který obsahuje celkem 5 prvků (konkrétně \mathcal{N}_{w^4} , $\mathcal{N}_{w^3,v}$, \mathcal{N}_{w^2,v^2} , \mathcal{N}_{w,v^3} a \mathcal{N}_{v^4}). Obdobně je v tabulce vidět, že celkový odhad $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{U}}$ (6.22) a postupný odhad $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{U}}\{3\}$ (6.30) třetích centrálních momentů obsahují stejný počet odhadovaných prvků pro $m < 4$, jak bylo zmíněno v kapitole 6.2.5.

Nyní uvažujme, že vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$. V tomto případě je celkový počet všech odhadnutelných prvků pro celkový a postupný odhad momentů z podkapitol 6.3.2, 6.3.4, 6.3.5 popsán tabulkou 7.2.

| n_x | n_z | P | m -tý moment | Celkový odhad necentrálních momentů | Postupný odhad necent. mom. | cent. mom. |
|-------|-------|-----|-------------------|---|-----------------------------------|---------------|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | - |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 9 | 9 | 9 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 25 | 25 | 25 |
| 1 | 1 | 3 | 4 | 55 | 55 | 55 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 105 | 105 | 105 |

Tabulka 7.2: Celkový počet odhadovaných prvků v případě závislosti vektorů šumů ξ_k a ξ_j pro $k \neq j$.

V tomto případě není možné vypočítat celkový odhad centrálních momentů, protože kvůli chybějícím členům polynomiálních funkcí nižších momentů ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_2}^U$ není možné definovat matici $\Theta_{\mathcal{E}_m}$ (6.21). Jak je z tabulky vidět, v případě (nekonečně) velké časové závislosti z_{\max} mezi vektory šumů ξ_k a ξ_j obsahují odhadované vektory pro celkový a postupný odhad necentrálních momentů a vektor pro postupný odhad centrálních momentů stejný počet prvků. Je to způsobeno také skutečností, že vektory obsahující funkce nižších momentů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^U\{l\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}_m}^U\{l\}$ neobsahují žádné prvky.

Nyní uvažujme celkový odhad druhého necentrálního momentu pro $P = 3$, kde časová závislost mezi vektory šumů ξ_k a ξ_j by byla pouze přes jeden časový okamžik $z_{\max} = 1$ jako v (6.32c). Poté by byl celkový počet odhadovaných prvků pouze 7, což je o dva méně, než je ukázáno v tabulce 7.2 pro (nekonečně) velkou závislost z_{\max} , protože vektor funkcí nižších momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^U\{l\}$ (6.28) nebude prázdný, ale bude obsahovat následující prvky

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}_2}^U\{l\}} = \left[\begin{array}{c} \left(\widehat{\mathcal{N}_v}^{\otimes 2} \right)^U \\ \left[\widehat{\mathcal{N}_w} \otimes \widehat{\mathcal{N}_v} \right] \end{array} \right]. \quad (7.1)$$

7.3 (Ne)strannost odhadů momentů šumů

V této kapitole se podíváme na strannost celkového a postupného odhadu pro časově korelované i nekorelované šumy.

Celkový odhad m -tých necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^U}$ (6.19) je ne-stranný díky předpokladu, že matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m$ (6.16) je známá, omezená a má

plnou sloupcovou hodnot. Protože platí vztah

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} \right] = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^\dagger \mathbb{E} \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^\dagger \mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^m = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^\dagger \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}},$$

který dokazuje, že odhad libovolného m -tého necentrálního momentu šumů (6.19) je nestranný pro nezávislé i závislé vektory $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ a $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$.

Jelikož je celkový odhad m -tého centrálního momentu šumů $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.22) pouze lineární funkcí celkového odhadu m -tých *necentrálních* momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19), za předpokladu $P > (m + z_{\max})$ je tento odhad také nestranný. Vyplývá to ze vztahu

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} \right] = \Theta_{\mathcal{E}^m} \mathbb{E} \left[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} \right] = \Theta_{\mathcal{E}^m} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}, \quad (7.2)$$

který dokazuje, že celkový odhad libovolného m -tého centrálního momentu šumů (6.19) je také nestranný.

Postupný odhad m -tých necentrálních $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}$ (6.26) a centrálních $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{m\}$ (6.30) momentů šumů je, na rozdíl od celkového odhadu, obecně stranným odhadem. Je to způsobeno tím, že polynomiální funkce odhadů nižších momentů šumů, které jsou využity ve výpočtu, se obecně nerovnají polynomiálním funkcím skutečných nižších momentů šumů, tj. obecně

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\} \right] \neq \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}, \quad (7.3)$$

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\} \right] \neq \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}\{l\}. \quad (7.4)$$

7.4 Konzistence odhadů momentů šumů

V této kapitole se podíváme na konzistenci odhadů momentů šumů získaných pomocí MDM.

Pro důkaz konzistence odhadu úplného necentrálního m -tého momentu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19) je použit následující vztah

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_k^{\otimes m} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes m} \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\otimes m} = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes m} (\Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} + \boldsymbol{\eta}_k), \quad (7.5)$$

kde náhodná veličina $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\otimes m} - \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ má nulovou střední hodnotu a její autokorelační funkce je definována jako

$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\otimes m}, \boldsymbol{\varepsilon}_j^{\otimes m}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\otimes 2}. \quad (7.6)$$

Odhad $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19) může být díky rovnici (7.5) zapsán jako

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} + \left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \right)^1 \left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \boldsymbol{\eta}_k \right), \quad (7.7)$$

kde $\Pi_k = \left(\Phi_{\mathcal{Z}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes m} \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \right)^T \Phi_{\mathcal{Z}^m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes m}$. Kovariance chyby odhadu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}}$ (6.19) je

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \boldsymbol{\eta}_k \right) \right)^{\otimes 2} \right] \\ &= \left(\left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \right)^{-1} \right)^{\otimes 2} \sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} (\Pi_k \otimes \Pi_j) \mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Pokud existuje regulární matice Λ taková, že pro všechny $\tau > 0$ platí

$$\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \geq \Lambda \bar{\tau}, \quad (7.9)$$

kde $\bar{\tau} = \tau - P + 2$ a maticová nerovnost $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ znamená, že rozdíl $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ je pozitivně semidefinitní, poté lze velice jednoduše ukázat, že platí

$$\left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi_k \Psi_{\mathcal{E}^m}^{\mathcal{N}} \right)^{-1} \leq \frac{\Lambda^{-1}}{\bar{\tau}}. \quad (7.10)$$

Také je možné ukázat, že vektor \mathbf{z} (7.8)

$$\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} (\Pi_k \otimes \Pi_j) \mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} \quad (7.11)$$

lze zapsat do podoby čtvercové matice jako

$$\left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} (\Pi_k \otimes \Pi_j) \mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} \right)_{\mathbf{M}} = \sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \Pi_j \mathbf{E} [\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_k^T] \Pi_k^T, \quad (7.12)$$

kde $(\cdot)_{\mathbf{M}}$ je inverzní funkce k funkci $(\cdot)_{\mathbf{V}}$ která vektorizuje čtvercové matice, tj. pro čtvercovou matici \mathbf{A} platí vztah $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{\mathbf{V}})_{\mathbf{M}}$. Dále je potřeba pro matici (7.12) nalézt maticovou funkci $\Omega(\bar{\tau})$ takovou, že platí nerovnost

$$\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \Pi_j \mathbf{E} [\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_k^T] \Pi_k^T \leq \Omega(\bar{\tau}), \quad (7.13)$$

přičemž maticová funkce $\Omega(\bar{\tau})$ roste maximálně s malým-o (anglicky zvané little-o) kvadratické funkce τ^2 ve smyslu $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Omega(\bar{\tau})}{\tau^2} = \mathbf{0}$. Čtvercové matice na obou stranách nerovnice (7.13) lze také zapsat ve vektorové formě při zachování platnosti maticové nerovnosti pro původní čtvercové matice zapsané symbolem $\stackrel{\text{M}}{\leq}$ jako

$$\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} (\Pi_k \otimes \Pi_j) \mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} \stackrel{\text{M}}{\leq} \Omega(\bar{\tau})_{\mathbf{V}}. \quad (7.14)$$

Poté lze díky Λ (7.10), $\Omega(\bar{\tau})_{\mathbf{V}}$ (7.14) a vztahu (7.8) zapsat následující nerovnost

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}} \right)^{\otimes 2} \right] \stackrel{\text{M}}{\leq} \frac{(\Lambda^{-1})^{\otimes 2}}{\bar{\tau}^2} \Omega(\bar{\tau})_{\mathbf{V}}. \quad (7.15)$$

Pokud bude pro funkci na pravé straně rovnice (7.15) platit limita

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(\Lambda^{-1})^{\otimes 2}}{\bar{\tau}^2} \Omega(\bar{\tau})_{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad (7.16)$$

bude jistě platit i limita

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \mathbf{0}, \quad (7.17)$$

a proto je úplný odhad necentrálního m -tého momentu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}$ (6.19) *konzistentní*. Ukázka konzistentních odhadů momentů šumů pro model systému s nezávislými i závislými šумы je v příloze B.

Jelikož úplný odhad m -tého centrálního momentu $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}$ (6.22) je pouze lineární kombinací konzistentního odhadu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}$ (6.19), je i tento odhad konzistentní.

Pro důkaz konzistence postupného necentrálního m -tého momentu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}\{m\}$ (6.26) a postupného centrálního m -tého momentu $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^m}^{\mathbf{U}}\{m\}$ (6.30) bohužel nelze využít odvození, jež bylo využito pro důkaz konzistence úplného necentrálního m -tého momentu z úvodu této kapitoly. Komplikace způsobují dosazované nižší momenty, kvůli nimž je výsledný postupný odhad momentů stranný. Nicméně lze očekávat, že s tím, jak budou jednotlivé odhady nižších momentů počítány na základě stále většího počtu dat, se i veškeré tyto odhady budou blížit k hledaným momentům. Díky tomu by se k hledaným momentům měly blížit i odhady vyšších momentů, které využívají tyto nižší momenty.

7.5 Využití křížových momentů procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$

V této kapitole se podíváme na možnost, jak využít i křížové momenty $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ pro odhad momentů šumů stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k .

V podkapitolách (6.2.1) a (6.3.1) bylo ukázáno, že jednotlivé centrální či necentrální m -té momenty stochastického procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ lze vyjádřit jako funkci hledaných vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U$ (6.15). Nicméně k vyjádření vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U$ lze obdobně využít také *křížové* centrální i necentrální momenty procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ definované jako

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k_1}^{i_1}, \tilde{\mathbf{z}}_{k_2}^{i_2}, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_{k_l}^{i_l}}, \quad (7.18a)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k_1}^{i_1}, \tilde{\mathbf{z}}_{k_2}^{i_2}, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_{k_l}^{i_l}}, \quad (7.18b)$$

kde $k_j \in \{0, 1, \dots, \tau\}$, $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $\sum_{j=1}^l i_j = m$.

Tyto křížové momenty lze využít jako další rovnice pro odhad momentů šumů obdobně jako u rovnic (6.15). Nicméně poznamenejme, že pokud model systému obsahuje časově nezávislé šумы, lze ukázat, že křížové momenty (7.18) jsou funkcí pouze prvků momentů šumů, které jsou již obsaženy ve vektorech $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U$ pro dostatečně velké P . To znamená, že veškeré křížové momenty (7.18) lze zapsat jako funkce pouze prvků vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U$. Pokud ovšem model systému obsahuje časově závislé šумы, tak odhadovaný vektor prvků momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U$ bude obsahovat více prvků, než kdyby tyto křížové momenty (7.18) použity nebyly. Využití křížových momentů (7.18) samozřejmě bude mít vliv na kvalitu výsledného odhadu momentů šumů. S ohledem na to, že odhad momentů šumů je získán pomocí nevážených nejmenších čtverců, *nemusí* vést využití křížových momentů (7.18) vždy ke zlepšení kvality odhadovaných momentů šumů.

Rovnice vzniklé pomocí křížových momentů šumu budou velice důležité v následující kapitole 7.6.

7.6 Senzorová kalibrace, odhad momentů šumu měření

V této kapitole bude ukázáno, jak lze pro specifický model systému odhadnout pouze momenty šumů měření bez potřeby jakékoli znalosti o rovnici dynamiky stavu.

V kapitole 6.1 byla uvedena možnost volby parametrů $N = 0$ a $L = 1$ (tj. $P = 1$) k výpočtu procesu $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (6.10). S touto volbou lze rovnici (6.10)

zapsat a upravit do následující podoby vhodné pro výpočet

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \mathbf{Z}_k^1 = \left(\mathbf{I}_{n_z} - \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^\dagger \right) \mathbf{z}_k \quad (7.19)$$

a obdobně lze upravit i rovnici (6.5) do tvaru vhodného pro analýzu vlastností šumu měření

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \mathcal{E}_k = \left(\mathbf{I}_{n_z} - \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^\dagger \right) \mathbf{v}_k. \quad (7.20)$$

Podmínkou pro výpočty (7.19) a (7.20) je, aby matice \mathbf{H}_k měla plnou sloupcovou hodnotu, tj. aby platil vztah $\mathbf{H}_k^\dagger \mathbf{H}_k = \mathbf{I}_{n_x} \forall k$, ale také musí platit $n_z > n_x$, aby $\mathcal{A}_k \neq \mathbf{0}_{n_z \times n_z}$.

Jak je vidět z rovnic (7.19) a (7.20), není potřeba žádné znalosti o celé rovnici dynamiky (2.1). To znamená, že *není* potřeba mít znalost matice dynamiky \mathbf{F}_k a vektoru řízení \mathbf{u}_k , ale ani o popisu šumu stavu \mathbf{w}_k či závislosti šumu stavu a měření, jelikož se v odhadu nevyskytují. Tudiž pouze ze znalosti matice měření \mathbf{H}_k a měření samotného \mathbf{z}_k , je možné vypočítat proces $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (7.19), který lze, obdobně jako pro $N > 0$, využít pro odhady vlastností šumu, samozřejmě v tomto případě pouze šumu měření.

Pokud si vyjádříme momenty $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ jako funkci momentů šumů podle (6.15), zjistíme, že díky struktuře (7.20) (kde vždy $P = 1$) budou hledané vektory funkcí pouze m -tých momentů šumů měření jako $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^m}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U = \mathcal{C}_{\mathbf{v}^m}^U$. V tomto případě například není možné vypočítat celkové odhady centrálního momentu šumu měření $\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U}$ (6.22), protože celkový odhad necentrálního momentu šumu měření $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}^U}$ (6.19), ze kterého by měl být $\widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}^U}$ počítán, neobsahuje všechny potřebné prvky. Nicméně tento problém lze velice jednoduše vyřešit využitím křížových momentů $\tilde{\mathbf{Z}}_k$, jak bylo ukázáno v kapitole 7.5.

Příklad

Pokud je vektor šumu měření \mathbf{v}_k časově nezávislý a $P = 1$, tak bez využití křížových členů nelze získat celkový odhad druhého centrálního momentu měření $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^U = \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^U$, protože celkový odhad necentrálního momentu šumu měření $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^U$, ze kterého je počítán, neobsahuje unikátní prvky členu $\mathcal{N}_{\mathbf{v}^{\otimes 2}}^{\otimes 2}$. Pokud ale využijeme i vztah pro křížový člen $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k-1}}^U = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^{\otimes 2}}^{\otimes 2}$, je možné získat celkový odhad druhého centrálního momentu šumu měření, protože celkový odhad necentrálního momentu šumu

měření již obsahuje všechny potřebné členy $\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U \\ \mathcal{N}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k-1}}^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^U \\ \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}^{\otimes 2}}^{\otimes 2} \right)^U \end{bmatrix}$.

7.7 Využití apriorně známých prvků momentů šumů

V této kapitole se podíváme, jak využít apriorně známých prvků momentů šumů pro odhad zbývajících neznámých prvků momentů šumů. Apriorní znalost prvků momentů šumů může být získána například předpokladem vzájemné nezávislosti šumů, tj. $\mathcal{N}_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{v}}$ a $\mathcal{C}_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n_x n_z}$.

Pokud jsou některé prvky momentů šumů apriorně známé, je možné jejich vliv odečíst z momentů $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}_k^m}$ a $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{z}}_k^m}$ a odhadovat pouze zbylé neznámé prvky momentů šumů. Tento postup lze provést u všech prezentovaných odhadů.

Samotný postup si pro ilustraci ukažme pro celkový odhad necentrálních prvních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ (6.19). Předpokládejme, že z vektoru prvních necentrálních momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ (6.13a) je apriorně známý vektor středních hodnot šumu stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{w}}$. V tom případě lze vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ rozdělit na známou a zbylou odhadovanou část upravením rovnice (6.15a) do následující podoby

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}}^1 = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{o\}\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{o\} + \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{z\}\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{z\}, \quad (7.21)$$

kde matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{o\}$ obsahuje všechny sloupečky z matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1$ náležící odhadovaným prvkům vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ uspořádaným ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{o\} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}}$. Oproti tomu matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{z\}$ obsahuje zbývajících sloupečky matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1$, které náleží známým prvkům uspořádaných ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{z\} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}}$. Pokud je vektor $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}}^1$ nahrazen odhadem (6.18) a matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{o\}$ (7.21) má plnou sloupcovou hodnotu, je možné získat odhad vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^1}^{\mathbf{U}}\{o\}$ metodou nejmenších čtverců

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{o\} = \widehat{\mathcal{N}}_{\mathbf{v}} = (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{o\})^\dagger \left(\widehat{\mathcal{N}}_{\tilde{\mathbf{z}}}^1 - \underbrace{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^1\{z\}\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}\{z\}}_{\text{vliv známé části}} \right). \quad (7.22)$$

Poznamenejme, že využití znalosti některých momentů má samozřejmě příznivý vliv jak na výslednou kvalitu odhadu, tak na výpočetní a paměťovou náročnost odhadu.

7.8 Rekurzivní odhad momentů šumů

V této kapitole se podíváme na možnost odhadu momentů šumů pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců.

V několika předchozích podkapitolách bylo ukázáno, jak získat odhad necentrálních i centrálních momentů šumů, a to za pomoci dávkové (anglicky nazývané batch) metody nejmenších čtverců. To může být ovšem limitující

pro modely s velkou dimenzí stavu či měření nebo v případě velkého množství měření. V těchto případech je velmi vhodné využít rekurzivní metodu nejmenších čtverců [97], která tyto problémy potlačuje a navíc má další příznivé vlastnosti, jako například menší náročnost na výpočet nebo paměť. Rekurzivní přístup ovšem vyžaduje jednak apriorní znalost odhadované veličiny, ale také matici určující jistou míru důvěry v tuto apriorní znalost.

7.9 Nelineární modely systému

V této kapitole se podíváme na možnost odhadu momentů šumů pro nelineární model systému.

Představená MDM je navržena pro lineární model systému popsany rovnicemi (2.1), (2.2). Nicméně působnost MDM je možné rozšířit i pro nelineární modely. Základní myšlenka je založená na využití vhodné linearizace například pomocí Taylorova polynomu prvního řádu nebo pomocí Stirlingovy interpolace, která nevyžaduje diferencovatelnost nelineární funkce. Takovýto linearizovaný model lze přímo využít pro odhad momentů šumů pomocí MDM. Nicméně lze přirozeně očekávat, že výsledná kvalita odhadů bude ovlivněna velikostí linearizační chyby, která je dána jednak mírou nelinearity samotného modelu, ale také i volbou samotného linearizačního bodu.

7.10 Využití znalosti tvarování šumů

V této kapitole se podíváme, jak využít znalosti tvarování šumů pomocí známých tvarovacích matic (anglicky zvané shaping matrices). Také je zde ukázáno, jak využít libovolné matice řízení.

Pokud uvažujeme, že rovnice stavu a měření mají následující upravenou podobu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathcal{U}_k \mathbf{u}_k + \mathcal{W}_k \mathbf{w}_k, \quad (7.23)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathcal{V}_k \mathbf{v}_k, \quad (7.24)$$

kde n_u , n_w a n_v jsou dimenze vektoru řízení, vektoru šumu stavu a měření a $\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\mathcal{W}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ a $\mathcal{V}_k \in \mathbb{R}^{n_z \times n_v}$ jsou známé matice řízení a známé tvarovací matice šumu stavu a šumu měření. V tomto případě lze jednoduše upravit několik navazujících rovnic a hodnot dimenzí vektorů a matic a lze využít MDM v představené verzi. Například rovnici (6.5), použitou pro analýzu vlastností šumů, je možné zapsat do podoby

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \mathcal{J}_k \mathcal{E}_k, \quad (7.25)$$

kde matice $\mathcal{J}_k \in \mathbb{R}^{((P-1)n_x + Pn_z) \times ((P-1)n_w + Pn_v)}$ je definována

$$\mathcal{J}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{k-N} & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \mathcal{W}_{k-N+1} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \cdots & \mathcal{W}_{k+L-2} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathcal{V}_{k-N} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \cdots & \mathcal{V}_{k-L-2} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_w} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \mathcal{V}_{k-L-1} \end{bmatrix}.$$

Obdobně lze poupravit i vztah mezi momenty $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ a momenty šumů z rovnice (6.11) do podoby

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = (\mathcal{A}_k \mathcal{J}_k)^{\otimes m} \mathcal{N}_{\mathcal{E}^m}, \quad (7.26a)$$

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^m} = (\mathcal{A}_k \mathcal{J}_k)^{\otimes m} \mathcal{C}_{\mathcal{E}^m}. \quad (7.26b)$$

Jak je vidět z rovnic (7.25) a (7.26), úprava jednotlivých vztahů je dána jednoduchým nahrazením původní matice \mathcal{A}_k její upravenou verzí $\mathcal{A}_k \mathcal{J}_k$, přičemž navazující vtahy jsou stále platné a je možné je použít.

Vztah (6.10) pro výpočet vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ z dostupných měření a řízení má v tomto případě podobu

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \mathcal{B}_k \begin{bmatrix} -\mathbf{U}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

kde matice $\mathcal{B}_k \in \mathbb{R}^{((P-1)n_x + Pn_z) \times ((P-1)n_u + Pn_z)}$ je definována jako

$$\mathcal{B}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{k-N} & \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \mathcal{U}_{k-N+1} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \mathbf{0}_{n_x \times n_u} & \cdots & \mathcal{U}_{k+L-2} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} & \mathbf{0}_{n_x \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{I}_{n_z} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \cdots & \mathbf{I}_{n_z} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_u} & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_v} & \mathbf{I}_{n_z} \end{bmatrix}.$$

Poznamenejme, že pokud pro matici řízení platí $\mathcal{U}_k = \mathbf{I}_{n_x}$, tak vztah pro výpočet vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ (6.10) zůstává nezměněn.

7.11 Vztah pořadí použití měření a kvality odhadu kovariance šumů

V úloze identifikace parametrů pomocí modelu systému a dostupných měření lze očekávat, že výsledná kvalita odhadu, jakou je například MSE odhadu, je mimo jiné přirozeně závislá na modelu samotném. To samé lze očekávat i při odhadu momentu šumů. Proto si v této kapitole ukážeme, jak může pořadí použitých měření ovlivnit model systému a tím i výslednou kvalitu odhadu momentů šumů, konkrétně kovarianci šumu stavu.

Předpokládejme, že k dostupným měřením \mathbf{z}_k a řízením \mathbf{u}_k máme model systému popsany rovnicemi (7.23), (7.24) z předchozí kapitoly 7.10, kde navíc šumy stavu a měření mají nulovou střední hodnotu a jsou vzájemně a časově nezávislé. Nicméně uvažujme že pro takovýto model provedeme odhad kovariancí šumů, ale výsledná kvalita, konkrétně kovariance šumu stavu, není dostačující. To může být způsobeno kombinací několika faktorů, jakými je například poměrově velký rozdíl v hodnotách odhadovaných kovariancí šumů stavu a měření. Tento rozdíl může být způsobený malou periodou vzorkování měření, kvůli které se šum stavu, zjednodušeně řečeno, nestihl tolik projevit skrze stav v rovnici měření.

Jednou z možností, jak změnit model systému tak, aby se mohl šum stavu více projevit, je nepoužívat po sobě následující měření. Pokud bychom vybírali například každé M -té měření, tj. $k = 0, M, 2M, \dots$, tak rovnice měření (7.24) se nijak nezmění, ale rovnici dynamiky (7.23) je potřeba upravit do následující podoby

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+M} &= \underbrace{\mathbf{F}_{k+M-1} \dots \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{F}_k}_{\mathcal{F}_k} \mathbf{x}_k \\
 &+ \underbrace{\left[\mathbf{F}_{k+M-1} \dots \mathbf{F}_{k+2} \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{U}_k, \dots, \mathbf{F}_{k+M-1} \mathbf{U}_{k+M-2}, \mathbf{U}_{k+M-1} \right]}_{\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times M n_u}} \mathbf{U}_k^M \\
 &+ \underbrace{\left[\mathbf{F}_{k+M-1} \dots \mathbf{F}_{k+2} \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{W}_k, \dots, \mathbf{F}_{k+M-1} \mathbf{W}_{k+M-2}, \mathbf{W}_{k+M-1} \right]}_{\mathcal{W}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times M n_w}} \mathbf{W}_k^M, \\
 &= \mathcal{F}_k \mathbf{x}_k + \mathcal{U}_k \mathbf{U}_k^M + \mathcal{W}_k \mathbf{W}_k^M. \tag{7.28}
 \end{aligned}$$

Z této rovnice dynamiky (7.28) vidíme, že přechod ze stavu k do $k + M$ je nyní ovlivněn váženým součtem celkem M šumů stavu. Díky tomu se šum stavu může více projevit a tím může být změněna i výsledná kvalita odhadu kovariancí šumu stavu.

Rovnice dynamiky (7.28) pro velké hodnoty M obsahuje matice velkých dimenzí, což může vést k velké náročnosti na paměť při odhadu kovariancí šumů. Tento problém lze pro některé modely vyřešit vhodnou transformací

náhodné veličiny $\mathcal{W}_k \mathbf{W}_k^M$ do podoby $\mathcal{X}_k \mathcal{X}_k$, kde $\mathcal{X}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathcal{X}_k^M \in \mathbb{R}^{n_x}$. Po takovéto transformaci bude platit jednak rovnost následujících kovariančních matic $\mathcal{W}_k (\mathcal{N}_{(\mathbf{W}^M)^2})_M \mathcal{W}_k^T = \mathcal{X}_k (\mathcal{N}_{\mathcal{X}^2})_M \mathcal{X}_k^T$, ale také obě kovariance $\mathcal{N}_{(\mathbf{W}^M)^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{X}^2}$ budou parametrizované pouze pomocí unikátních prvků kovariance šumů stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^U$. Díky tomu lze použít místo původní rovnice dynamiky (7.28) rovnici s transformovaným šumem stavu

$$\mathbf{x}_{k+M} = \mathcal{F}_k \mathbf{x}_k + \mathcal{U}_k \mathbf{U}_k^M + \mathcal{X}_k \mathcal{X}_k \quad (7.29)$$

a odhadnutím kovariance $\mathcal{N}_{\mathcal{X}^2}^U$ budou získány i odhady původní kovariance šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^U$. Volba použité rovnice dynamiky (7.29), místo (7.28), má vliv na paměťovou náročnost při výpočtu, nikoliv na odhad kovariancí šumů. Poznamenejme, že transformace šumů stavu do podoby rovnice (7.29) zvyšuje výpočetní náročnost kvůli potřebě využít maticové rozklady. Ilustrativní příklad transformace bude později ukázán v kapitole 9.4.

Vybíráním každého M -tého měření je ale v každém kroku vynecháno celkem $M - 1$ měření, která obsahovala i šumy měření. To bohužel vede ke zhoršení kvality odhadu kovariance šumu měření. Nicméně je možné, kromě jedné sady rovnic pro časové okamžiky $k = 0, M, 2M, \dots$, využít i vynechaná měření, a to například následujícími dvěma způsoby.

První možnost je k rovnicím pro odhad kovariancí šumů dodefinovat a využít dalších $M - 1$ sad rovnic pro časové okamžiky $k = i, M + i, 2M + i, \dots$, kde $i \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$.

Druhá možnost je vynechaná měření $k = 1, 2, \dots, M - 1, M + 1, M + 2, \dots$ dodefinovat další sadou rovnic pomocí sensorové kalibrace z kapitoly 7.6 za předpokladu, že matice měření \mathbf{H}_k má plnou sloupcovou hodnotu a $n_z > n_x$.

Díky těmto sadám rovnic je možné sestavit jednu matici $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$ (6.16), která je použita k odhadu kovariancí šumů stavu a měření pro veškerá dostupná měření. První možnost je, oproti druhé možnosti, buď paměťově náročnější v případě využití (7.28), nebo výpočetně náročnější pro (7.29).

Poznamenejme, že druhou možnost je možné využít v případě odhadu šumů stavu a měření, kdy šum měření je uvažován časově závislý přes i okamžiků tj. $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j} \neq \mathbf{0}_{n_v^2}$ pro $\text{abs}(k - j) \leq i$, nicméně z kovariancí šumů měření je potřeba odhadnout pouze kovarianci $\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}$. V případě, že hodnota M je zvolená větší než časová korelace šumu měření i , díky použití každého M -tého měření budou šumy měření v těchto okamžicích již časově nezávislé. Proto druhou možnost lze využít k odhadu pouze kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}$.

Otázka, která vyvstává, je jak zvolit hodnotu M , aby se dospělo k požadovanému zlepšení kvality odhadu momentů šumů stavu. Jednou z možností je využít číslo podmíněnosti matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$, která je využita k odhadu kovariancí šumů, a zvolit takovou hodnotu M , pro kterou je číslo podmíněnosti

$\text{cond}(\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2)$ minimální. Jelikož je ale odhad kovariancí šumů ovlivněn mnoha faktory, je nutné brát toto doporučení o využití čísla podmíněnosti s dostatečnou opatrností.

7.12 Vážený odhad momentů šumů

V této kapitole se podíváme na možnost odhadu necentrálních momentů šumů pomocí metody vážených nejmenších čtverců.

MDM využívá toho, že m -té necentrální momenty procesu $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}_k}^{\mathcal{U}}$ pro všechny časové okamžiky lze vyjádřit jako m -tý necentrální moment vektoru sekvence šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{U}}$ podle (6.15a). Jelikož ale m -té momenty $\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}_k}^{\mathcal{U}}$ jsou neznámé, jsou jejich odhady nahrazeny $\Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_k}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{z}}_k^{\otimes m}$ (7.5). To znamená, že celkový odhad necentrálních momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{U}}$ (6.19) je dán řešením metodou nejmenších čtverců pro rovnici

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{z}}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{z}}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{z}}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix}}_{\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^m \text{ (6.18)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_N^{\otimes m} \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{N+1}^{\otimes m} \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m \text{ (6.16)}} \Psi_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{U}} \quad (7.30)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_N^{\otimes m} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{N+1}^{\otimes m} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Phi_{\tilde{\mathbf{z}}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\tau-L+1}^{\otimes m} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}^m} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_N \\ \boldsymbol{\eta}_{N+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{\tau-L+1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}^m}.$$

Z rovnice (7.5) lze vidět, že náhodný vektor $\boldsymbol{\eta}_k = \mathcal{E}_k^{\otimes m} - \Psi_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{U}}$ má nulovou střední hodnotu a jeho autokorelační funkce je definována v (7.6). Proto i chyba rovnice $\mathcal{L}^m \mathcal{Y}^m$ má nulovou střední hodnotu a její kovarianční matice

je definována následovně

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^m &= \mathcal{L}^m \mathbf{E} [\mathcal{Y}^m (\mathcal{Y}^m)^T] (\mathcal{L}^m)^T \\
&= \mathcal{L}^m \begin{bmatrix} (\mathcal{N}_{\eta_N^2})_{\mathbf{M}} & \cdots & (\mathcal{N}_{\eta_{\tau-L+1}, \eta_N})_{\mathbf{M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathcal{N}_{\eta_N, \eta_{\tau-L+1}})_{\mathbf{M}} & \cdots & (\mathcal{N}_{\eta_N^2})_{\mathbf{M}} \end{bmatrix} (\mathcal{L}^m)^T \\
&= \mathcal{L}^m \begin{bmatrix} (\mathcal{N}_{\mathcal{E}_N^{2m} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m^{\otimes 2}}})_{\mathbf{M}} & \cdots & (\mathcal{N}_{\mathcal{E}_{\tau-L+1}, \mathcal{E}_N^m - \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m^{\otimes 2}}})_{\mathbf{M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathcal{N}_{\mathcal{E}_N^m, \mathcal{E}_{\tau-L+1}^m - \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m^{\otimes 2}}})_{\mathbf{M}} & \cdots & (\mathcal{N}_{\mathcal{E}_N^{2m} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m^{\otimes 2}}})_{\mathbf{M}} \end{bmatrix} (\mathcal{L}^m)^T.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Díky kovarianční matici \mathcal{P}^m (7.31) je možné získat celkový *vážený* odhad necentrálních momentů šumů vztahem

$$\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}_m}^{\mathbf{U}} = \left((\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^T (\mathcal{P}^m)^{-1} \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m \right)^{-1} (\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^T (\mathcal{P}^m)^{-1} \widehat{\mathcal{N}}_{\mathbf{Z}_m}^m. \tag{7.32}$$

Navíc k tomuto odhadu $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}_m}^{\mathbf{U}}$ (7.32) je, díky kovarianční matici \mathcal{P}^m , možné dopočítat i kovarianční matici (chyby) odhadu

$$\text{COV} \left[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}_m}^{\mathbf{U}} \right] = \left((\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m)^T (\mathcal{P}^m)^{-1} \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^m \right)^{-1}, \tag{7.33}$$

kde je použito značení $\text{COV}[\mathbf{s}] = (\mathcal{C}_{\mathbf{s}^2})_{\mathbf{M}}$.

Bohužel kovarianční matice \mathcal{P}^m není předem známá, protože je funkcí neznámých momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^m, \mathcal{E}_j^m} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}_m^{\otimes 2}}$. Nicméně tento problém lze vyřešit dvěma následujícími způsoby, kdy jeden využívá odhadů nevážených momentů šumů a druhý způsob nahrazuje neznámou matici \mathcal{P}^m její aproximační verzí.

První přístup využívající nevážených odhadů momentů šumů lze popsat v několika jednoduchých krocích:

- Vypočítat celkový (nevážený) odhad (6.19) všech necentrálních momentů šumů, které se vyskytují v \mathcal{P}^m .
- Díky těmto neváženým odhadům necentrálních momentů šumů lze vypočítat jak odhady momentů $\widehat{\mathcal{N}}_{\eta_k^2}$ a $\widehat{\mathcal{N}}_{\eta_k, \eta_j}$, tak i celé kovarianční matice chyby rovnice $\widehat{\mathcal{P}}^m$.
- Nahradit v rovnici (7.32) kovarianční matici \mathcal{P}^m jejím odhadem a poté vypočítat celkový vážený odhad necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}_m}^{\mathbf{U}}$.

- Nahrazením kovarianční matice \mathcal{P}^m jejím odhadem v rovnici (7.33) je možné navíc získat i odhad kovarianční matice celkového váženého odhadu necentrálních momentů šumů $\text{COV}[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}]$.

Při výpočtu váženého odhadu lze pozorovat několik následujících vlastností. Pro výpočet celkového váženého odhadu m -tých momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}$ je potřeba znát nejen m -té, ale i $2m$ -té momenty rozšířeného vektoru šumů stavu a měření \mathcal{E}_k . Například pro odhad střední hodnoty šumů ($m = 1$) je potřeba znát jak první, tak i druhý necentrální moment šumů. Za určitých předpokladů, o distribuci šumů, lze vyjádřit vyšší momenty jako funkci nižších momentů. Například pro gaussovské šumy je možné veškeré vyšší momenty zapsat jako funkci prvních dvou momentů. V případě, že kovarianční matice \mathcal{P}^m či její odhad je pozitivně semidefinitní, tj. nelze vypočítat její inverzi $(\mathcal{P}^m)^{-1}$, je možné vypočítat celkový vážený odhad necentrálních momentů šumů využitím lineární transformace rovnice (7.30) a využitím Lagrangeových multiplikátorů. Poznamenejme, že pokud je odhad váhové matice $(\mathcal{P}^m)^{-1}$ a celkový vážený odhad m -tých necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}$ počítán na základě stejných měření, je tento celkový vážený odhad m -tých necentrálních momentů šumů (7.32) obecně stranným odhadem.

Druhý přístup nevyužívá nevážené odhady momentů šumů pro odhad kovarianční matice \mathcal{P}^m , ale počítá aproximativní hodnotu matice $\text{E}[\mathcal{Y}^m(\mathcal{Y}^m)^T]$, jež utváří matici \mathcal{P}^m , a to hned dvěma způsoby. První způsob je velmi podobný prvnímu přístupu, kde byly využity nevážené odhady momentů šumů k výpočtu matice $\text{E}[\widehat{\mathcal{Y}^m(\mathcal{Y}^m)^T}]$, ale místo těchto nevážených odhadů momentů šumů jsou využity počáteční znalosti o momentech šumů. Samozřejmě obdobně jako u prvního přístupu lze využít předpokladu o Gaussovosti šumů k výpočtu matice $\text{E}[\widehat{\mathcal{Y}^m(\mathcal{Y}^m)^T}]$. Druhý velmi jednoduchý způsob je nahrazení matice $\text{E}[\mathcal{Y}^m(\mathcal{Y}^m)^T]$ maticí jednotkovou, tj. $\widehat{\mathcal{P}}^m = \mathcal{L}^m(\mathcal{L}^m)^T$. Poté je možné, jako u prvního přístupu, nahradit v rovnici (7.32) kovarianční matici \mathcal{P}^m jejími odhady a tím získat i celkový aproximativní vážený odhad necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}$. Obdobně jako u předchozího přístupu lze využít Lagrangeových multiplikátorů v případě pozitivní semidefinitnosti kovarianční matice. Ovšem na rozdíl od prvního přístupu *nelze* očekávat, že nahrazením kovarianční matice \mathcal{P}^m jejím aproximativním odhadem v rovnici (7.33) je možné získat dobrý odhad kovarianční matice celkového váženého odhadu necentrálních momentů šumů $\text{COV}[\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}]$. Nicméně celkový aproximativní vážený odhad necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}^m}^{\text{U}}$ bude, oproti prvnímu přístupu, vždy odhadem *nestranným*.

7.13 Volba parametrů L a N v MDM

V této kapitole se podíváme na volbu parametrů L a N u MDM a na to, jaký má tato volba vliv na předpoklady o šumech, a na matice, které jsou využívány pro odhad samotný.

V kapitole (6.1) bylo řečeno, že parametr L s konečnou celou hodnotou musí být zvolený tak, aby platil vztah $L \geq 1$, ale zároveň musí být dostatečně velký, aby matice \mathcal{O}_k^L měla plnou sloupcovou hodnotu n_x , aby platil vztah $(\mathcal{O}_k^L)^\dagger \mathcal{O}_k^L = \mathbf{I}_{n_x}$, který je vyžadován v rovnicích (6.5) a (6.10). Podobně parametr N je zvolený tak, aby měl konečnou celou hodnotu a aby platil vztah $N \geq 1$. Nicméně zde bylo zmíněno a dále poté v kapitole 7.6 ukázáno, že pro jisté modely systému¹ je možná i volba parametrů $L = 1$ a $N = 0$.

Se zvětšujícími hodnotami parametrů L a N , případně parametru $P = L + N$, lze pozorovali několik vlivů, které zde budou diskutovány.

Pro větší hodnotu P budou mít větší dimenze i jednotlivé matice z MDM. Díky tomu bude odhad kovariancí šumů časově i paměťově náročnější než pro nižší hodnotu P .

Na vliv velikosti hodnoty P a velikosti dimenze odhadovaného vektoru obsahujícího prvky momentů šumů se dá dívat dvěma způsoby. První pohled je, že se zvětšující se hodnotou P může odhadovaný vektor obsahovat větší množství prvků momentů šumů jako například v případě vektorů (6.32a), (6.32c) a (6.32d) pro $P = 2, 3, 4$. To přirozeně způsobí zhoršení kvality výsledného odhadu. Druhý pohled je, že je potřeba mít určité předpoklady nebo znalosti šumů, díky čemuž není potřeba odhadovat více prvků momentů šumů. Například pokud je k dispozici znalost časové nezávislosti vektorů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ a $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, pak vektory (6.32c) a (6.32d) lze upravit do jedné rovnice (6.13b) pro $P = 3$ i $P = 4$.

Hodnoty jednotlivých parametrů L a N mají samozřejmě vliv na výslednou kvalitu odhadu momentů šumů, a to i v případě, že odhadovaný vektor nemění svojí dimenzi jako (6.13b) pro $P \geq 3$. Jednou z možností, jak tyto parametry zvolit, je využít číslo podmíněnosti, jak bylo diskutováno v kapitole 7.11. Nicméně opět je potřeba zdůraznit, že kvalita výsledného odhadu kovariancí šumů je ovlivněna mnoha faktory. Tudíž je potřeba doporučení o využití čísla podmíněnosti brát s opatrností.

Poznamenejme, že na základě dlouhodobého pozorování je vhodné, s ohledem na výslednou kvalitu a výpočetní náročnost, volit parametr $N = 1$ a druhý parametr nejlépe $L = 2$, popřípadě dostatečně velký s ohledem na nutnost platnosti vztahu $(\mathcal{O}_k^L)^\dagger \mathcal{O}_k^L = \mathbf{I}_{n_x}$.

¹U modelu systému musí mít matice \mathbf{H}_k plnou sloupcovou hodnotu kvůli platnosti vztahu $\mathbf{H}_k^\dagger \mathbf{H}_k = \mathbf{I}_{n_x}, \forall k$, a také musí být $n_z > n_x$ aby platilo $\mathcal{A}_k \neq \mathbf{0}_{n_z \times n_x}$ (7.20).

7.14 Stanovení maximálního počtu jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely

V této kapitole se zaměříme na problematiku odhadnutelnosti prvků kovariancí šumů v LTI modelech pro všechny významné CM, jež byly představeny v kapitole 4.

Uvažujme model systému diskutovaný v kapitole 4.1 popsaný rovnicemi (2.1) a (2.2) s nulovým² řízením $\mathbf{u}_k \forall k$, kde vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, má nulovou střední hodnotu a bude využito zjednodušeného zápisu momentů šumů $\mathbf{Q} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$, $\mathbf{R} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}$, $\mathbf{S} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}}$.

Pokud bychom chtěli pro takovýto model systému odhadnout kovariance šumů \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U , \mathbf{S} pomocí metody MDM, využili bychom toho, že šumy mají nulovou střední hodnotu. Díky tomu lze velice jednoduše ukázat, že rovnice (6.15a) má následující podobu

$$\mathcal{N}_{\mathbf{z}^2}^2 = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U \\ \mathbf{R}^U \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}}_{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U}. \quad (7.34)$$

Poté lze vypočítat odhad vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U$ například pomocí celkového odhadu necentrálních momentů šumů (6.19), jež poskytuje nestranné a konzistentní odhady. Podmínkou pro získání tohoto odhadu je mimo jiného³ plná sloupcová hodnost matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$, která může být pro LTI modely nesplněná.

Z důvodu zjednodušení zápisu budeme v této kapitole místo rovnice (7.34) využívat zápis (4.4) z kapitoly 4, který lze obecně využít pro veškeré CM a který pro připomenutí vypadá následovně

$$\check{\mathbf{C}} = \check{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}, \quad (7.35)$$

kde hodnost matice $\check{\mathbf{A}}$ stejně tak jako matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$ určuje, zda existuje jednoznačné řešení pro odhad kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U = \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_{\boldsymbol{\theta}}}$. Vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U$ stejně jako $\check{\mathbf{C}}$ obsahuje veškerá naměřená data. Proto pro zjednodušení budeme v této kapitole mluvit a pracovat pouze s maticí $\check{\mathbf{A}}$ a vektorem $\check{\mathbf{C}}$, jež budou zastupovat všech pět⁴ významných CM včetně MDM.

²Nenulové známé řízení nijak neovlivní pozorování představená v této kapitole.

³Hodnost matice může také ovlivnit volba parametru P , která byla ale předpokládána dostatečně velká.

⁴První čtyři významné korelační metody byly představeny v kapitole 4.

Pro lineární model systému, jak už bylo zmíněno v kapitole 4.7, byla napříč všemi CM⁵ pozorována nejednoznačnost odhadu všech prvků kovariancí šumů \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U a \mathbf{S} . Tento problém se pro určité modely vyskytuje i za předpokladu vzájemné nezávislosti šumů stavu a měření, tj. $\mathbf{S} = \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}$, kdy jsou odhadovány pouze kovariance \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Prvotní analýzu jednoznačnosti odhadu kovariancí šumů lze nalézt již v prvním článku o CM od Mehry [7]. V samotném článku je řečeno, že za předpokladu existence inverze matice dynamiky \mathbf{F} a vzájemné nezávislosti šumů stavu a měření, tj. $\mathbf{S} = \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}$, lze odhadnout všechny prvky kovariance \mathbf{R} , ale pouze $n_x n_z$ neunikátních prvků kovariance \mathbf{Q} . Tento názor byl přijat a opakován v mnoha následujících publikacích. Další analýza tohoto problému byla provedena v [91], kdy byla zjištěna dvě následující pozorování. Prvním je, že za předpokladu nezávislých šumů stavu a měření, tj. $\mathbf{S} = \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}$, lze odhadnout všechny unikátní prvky kovariancí \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U , což částečně koresponduje s výsledky od Mehry. Druhým výsledkem je, že není možné odhadnout (pro LTI model) všechny unikátní prvky kovariancí \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U a \mathbf{S} .

V případě, že matice $\check{\mathbf{A}}$ nemá plnou sloupcovou hodnotu a přesto chceme získat jednoznačné řešení, uživatel si může specifikovat některé prvky kovariancí a zbylé prvky odhadnout. To bylo ukázáno například v kapitole 7.7 pro zjednodušenou rovnici (7.35) zapsanou ve tvaru

$$\check{\mathbf{C}} = \check{\mathbf{A}}\{o\}\boldsymbol{\theta}\{o\} + \check{\mathbf{A}}\{z\}\boldsymbol{\theta}\{z\}, \quad (7.36)$$

kde matice $\check{\mathbf{A}}\{o\}$ obsahuje vybrané sloupce matice $\check{\mathbf{A}}$ odpovídající odhadovaným prvkům kovariancí ve vektoru $\boldsymbol{\theta}\{o\} \in \mathbb{R}^{n_{\boldsymbol{\theta}\{o\}}}$, a matice $\check{\mathbf{A}}\{z\}$ obsahuje zbylé sloupce matice $\check{\mathbf{A}}$ odpovídající uživatelem specifikovaným prvkům uspořádaným do vektoru $\boldsymbol{\theta}\{z\}$. Počet uživatelem specifikovaných prvků a tím i počet odhadovaných prvků musí být takový, aby matice $\check{\mathbf{A}}\{o\}$ měla plnou sloupcovou hodnotu. Nicméně odpověď na otázku „Kolik unikátních prvků kovariancí lze pro daný model jednoznačně odhadnout?“ nebyla v literatuře zodpovězena.

Samotná analýza problému identifikovatelnosti kovariancí šumů je v této práci provedená pro všech pět významných CM.

Analýza je ilustrována na pěti modelech systému s pozorovatelným stavem, jež zahrnují matice systému \mathbf{F} a \mathbf{H} s plnou i neúplnou hodnotí⁶, stabilní i nestabilní modely, a to vše pro různé dimenze stavu $n_x \in \{1, 2, 3, 4\}$ a měření $n_z \in \{1, 2, 3, 4\}$.

⁵Nejednoznačnost odhadu kovariancí šumů \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U , \mathbf{S} byla pozorována nejen pro CM, ale také i pro BM, MLM a MMM.

⁶Pokud matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{i \times j}$ má plnou hodnotu, znamená to, že platí $\text{rank}(\mathbf{A}) = \min(i, j)$.

Model 1: Matice \mathbf{F} je ve Frobeniově formě s póly $\{0.5, 0.4, \dots, 0.5 - 0.1(n_x - 1)\}$ a matice

$$\mathbf{H} = \begin{cases} [\mathbf{1}_{n_z \times 1}, \mathbf{I}_{n_z \times (n_x - 1)}], & \text{pokud } n_x \leq n_z, \\ [\mathbf{0}_{n_z \times 1}, \mathbf{I}_{n_z \times (n_x - 1)}] & \text{jinak.} \end{cases} \quad (7.37)$$

kde matice $\mathbf{I}_{n \times m}$ dimenze $n \times m$ má prvky na i -tém řádku a j -tém sloupečku dány Diracovu deltou $\delta_{i,j}$, která nabývá hodnoty 1, když $i = j$ a hodnoty 0, když $k \neq l$, a matice $\mathbf{1}_{n \times m}$ dimenze $n \times m$ obsahuje samé jedničky. Tento model má stabilní póly a má plnou hodnotu jak \mathbf{F} (tj. je to invertibilní matice), tak i \mathbf{H} .

Model 2: Matice \mathbf{F} je stejná jako u Modelu 1, ale matice \mathbf{H} je odlišná $\mathbf{H} = [\mathbf{1}_{n_z \times 1}, \mathbf{0}_{n_z \times (n_x - 1)}]$, tj. \mathbf{H} má hodnotu rovnou 1.

Model 3: Matice \mathbf{F} a \mathbf{H} jsou stejné jako u Modelu 1, ale s nulovou první řádkou matice \mathbf{F} . Proto tento model má plnou hodnotu pouze matice \mathbf{H} a matice \mathbf{F} má hodnotu $n_x - 1$ (tj. není to invertibilní matice).

Model 4: Matice \mathbf{F} je stejná jako u Modelu 3 a matice \mathbf{H} je stejná jako u Modelu 1, ale poslední řádek je nahrazen předposledním řádkem a poslední sloupeček je nahrazen předposledním sloupečkem (pokud $n_z > 1$ a $n_x > 1$). Tento model nemá plné hodnoty obou matic, protože \mathbf{F} má hodnotu $n_x - 1$ a matice \mathbf{H} má hodnotu $\min(n_x, n_z) - 1$.

Model 5: Matice \mathbf{F} je ve Frobeniově formě s póly definovanými $\{1.1, 1, \dots, 1.1 - 0.1(n_x - 1)\}$ a matice \mathbf{H} je definována jako součet matice (7.37) a matice $\mathbf{1}_{n_z \times n_x}$. Kvůli tomu má tento model plné hodnoty obou matic \mathbf{F} a \mathbf{H} , ale má stabilní póly.

Poznamenejme, že ačkoliv zvolené modely mohou působit poněkud *akademickým* dojmem, jsou zvoleny pouze tak, aby pokrývaly co největší oblast modelů z pohledu stability, hodnoty a dimenzí matic modelu systému. Nicméně *veškeré* dále prezentované výsledky, ilustrované na pěti modelech, mají na základě několikaletého pozorování platnost i pro mnoho dalších modelů zahrnujících i reálné modely systémů popsanych v literatuře. Kromě toho za celou tuto dobu *nebyl* nalezen žádný model systému, pro který by následně prezentované výsledky neodpovídaly.

Pro těchto pět modelů je vypočtená hodnota matice $\check{\mathbf{A}}$ označená jako

$$r = \text{rank}(\check{\mathbf{A}}). \quad (7.38)$$

Pokud je hodnota matice $\check{\mathbf{A}}$ menší než celkový počet unikátních prvků kovariancí, tj. $r < n_{\theta}$, je možné odhadnout (maximálně) $n_{\theta\{o\}} = r$ unikátních

prvků kovariancí šumů. Pokud uživatel požaduje jednoznačné řešení, je nucen si zvolit alespoň $n_{\theta\{z\}} = n_{\theta} - n_{\theta\{o\}}$ prvků. K těmto odhadovaným a specifikovaným prvkům lze najít odpovídající matice $\check{\mathbf{A}}\{o\}$ a $\check{\mathbf{A}}\{z\}$ (7.36). V tomto případě existuje celkem c různých matic $\check{\mathbf{A}}\{o\}$, přičemž c je kombinační číslo

$$c = \binom{n_{\theta}}{n_{\theta\{o\}}}, \quad (7.39)$$

kde i -tou maticí lze zapsat jako $\check{\mathbf{A}}\{o\}^i = [\check{\mathbf{A}}(:, i1), \check{\mathbf{A}}(:, i2), \dots, \check{\mathbf{A}}(:, ir)]$, symbol $\check{\mathbf{A}}(:, i)$ značí i -tý sloupec matice $\check{\mathbf{A}}$ a vektor $i = [i1, i2, \dots, ir] \in \mathbb{N}^r$ je tvořený kombinací r čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n_{\theta}\}$.

Naneštěstí jak bude ilustrováno později, tak hodnota matice $\check{\mathbf{A}}\{o\}^i$ závisí na konkrétním výběru sloupců. Samozřejmě z množiny všech $\check{\mathbf{A}}\{o\}^i$ musí existovat matice, jež má hodnost r , nicméně hodnota může být i nižší. Proto kromě výpočtu hodnosti r vztahem (7.38) bude hledán i *minimální počet identifikovatelných unikátních prvků* nezávisle na výběru, který bude definován jako

$$m = \min_i \text{rank} \left(\check{\mathbf{A}}\{o\}^i \right). \quad (7.40)$$

Poznamenejme, že platí $r = \max_i \text{rank} \left(\check{\mathbf{A}}\{o\}^i \right)$. Samotné výsledky mohou být rozděleny do dvou samostatných částí. První část je zaměřená na odhad pouze kovariancí $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U$ a druhá část na odhad trojice kovariancí $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U, \mathbf{S}$. Z pěti metod byly vynechány metody Mehry z kapitoly 4.3 a Bundicka z kapitoly 4.6 pro odhad trojice kovariancí $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U, \mathbf{S}$, jelikož pro tento problém nebyly navrženy.

Celkový počet unikátních prvků pro odhad $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U$ a $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U, \mathbf{S}$ je uveden v tabulce 7.3. Jednotlivé hodnoty maximálního (7.38) a minimálního (7.40) počtu identifikovatelných unikátních prvků kovariancí šumů jsou kompaktně sepsány pro odhad $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U$ v tabulce 7.4 a pro odhad $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U, \mathbf{S}$ v tabulce 7.5.

| $n_z \backslash n_x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 2 3 | 4 6 | 7 10 | 11 15 |
| 2 | 4 6 | 6 10 | 9 15 | 13 21 |
| 3 | 7 10 | 9 15 | 13 21 | 16 28 |
| 4 | 11 15 | 13 21 | 16 28 | 20 36 |

Tabulka 7.3: Celkový počet prvků pro odhad $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U \mid \mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U, \mathbf{S}$

| | $n_z \backslash n_x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| Model 1 | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 2 | 5 2 |
| | 2 | 4 4 | 6 6 | 8 7 | 10 7 |
| | 3 | 7 7 | 9 9 | 12 12 | 15 14 |
| | 4 | 11 11 | 13 13 | 16 16 | 20 20 |
| Model 2 | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 3 | 5 3 |
| | 2 | 4 4 | 5 4 | 6 3 | 7 4 |
| | 3 | 7 7 | 8 7 | 9 6 | 10 4 |
| | 4 | 11 11 | 12 11 | 13 10 | 14 8 |
| Model 3 | 1 | 1 1 | 2 1 | 3 2 | 4 2 |
| | 2 | 3 3 | 5 5 | 7 5 | 9 5 |
| | 3 | 6 6 | 8 8 | 11 10 | 14 12 |
| | 4 | 10 10 | 12 12 | 15 14 | 19 18 |
| Model 4 | 1 | 1 1 | 2 1 | 3 2 | 4 2 |
| | 2 | 3 3 | 4 3 | 5 2 | 6 3 |
| | 3 | 6 6 | 7 6 | 10 9 | 12 8 |
| | 4 | 10 10 | 11 10 | 14 13 | 18 16 |
| Model 5 | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 3 | 5 4 |
| | 2 | 4 4 | 6 6 | 8 7 | 10 7 |
| | 3 | 7 7 | 9 9 | 12 12 | 15 14 |
| | 4 | 11 11 | 13 13 | 16 16 | 20 20 |

Tabulka 7.4: Odhad $\mathbf{Q}^U, \mathbf{R}^U$: $r \mid m$ hodnoty.

| | | n_x | | | |
|---------|-------|---------|---------|---------|---------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Model 1 | n_z | | | | |
| | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 2 | 5 2 |
| | 2 | 5 5 | 7 6 | 9 6 | 11 5 |
| | 3 | 9 9 | 12 10 | 15 12 | 18 11 |
| Model 2 | 4 | 14 14 | 18 16 | 22 18 | 26 21 |
| | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 3 | 5 3 |
| | 2 | 5 5 | 7 5 | 9 6 | 11 5 |
| | 3 | 9 9 | 12 10 | 15 10 | 18 11 |
| Model 3 | 4 | 14 14 | 18 16 | 22 17 | 26 17 |
| | 1 | 2 1 | 3 2 | 4 2 | 5 2 |
| | 2 | 5 4 | 7 5 | 9 5 | 11 5 |
| | 3 | 9 8 | 12 9 | 15 11 | 18 11 |
| Model 4 | 4 | 14 13 | 18 15 | 22 17 | 26 19 |
| | 1 | 2 1 | 3 2 | 4 2 | 5 2 |
| | 2 | 5 4 | 7 5 | 9 5 | 11 5 |
| | 3 | 9 8 | 12 9 | 15 10 | 18 10 |
| Model 5 | 4 | 14 13 | 18 15 | 22 17 | 26 19 |
| | 1 | 2 2 | 3 2 | 4 3 | 5 4 |
| | 2 | 5 5 | 7 6 | 9 7 | 11 7 |
| | 3 | 9 9 | 12 10 | 15 12 | 18 14 |
| | 4 | 14 14 | 18 16 | 22 18 | 26 21 |

Tabulka 7.5: Odhad \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U , \mathbf{S} : r | m hodnoty

První pozorování: Všechny použité CM mají *stejný* maximální (7.38) i minimální (7.40) počet identifikovatelných unikátních prvků kovariancí šumů.

Druhé pozorování: Z tabulky (7.4) a celé řady dalších experimentů bylo zjištěno, že maximální počet identifikovatelných unikátních prvků kovariancí \mathbf{Q}^U a \mathbf{R}^U lze obecně dopočítat na základě hodnotí matic a dimenzí stavu a měření pomocí následující rovnice

$$r = r_H n_x - \frac{r_H(r_H-1)}{2} + u_R - \frac{(n_x-r_F)(n_x-r_F+1)}{2}, \quad (7.41)$$

kde $u_R = \frac{n_z(n_z+1)}{2}$ značí celkový počet unikátních prvků kovariance \mathbf{R}^U a dvojice r_F a r_H značí hodnoty matic \mathbf{F} a \mathbf{H} . V případě, že obě matice \mathbf{F} a \mathbf{H} mají plnou hodnotu a zároveň $n_x > n_z$ (tzn. $r_H = n_z$), lze vztah (7.41) zjednodušit na

$$r = u_Q - \frac{(n_x-n_z)(n_x-n_z+1)}{2} + u_R = n_z(n_x + 1), \quad (7.42)$$

kde $u_Q = \frac{n_x(n_x+1)}{2}$ značí celkový počet unikátních prvků matice \mathbf{Q}^U . Pokud matice \mathbf{F} a \mathbf{H} mají plnou hodnotu, avšak platí $n_x \leq n_z$ (tj., $r_H = n_x$), pak je možné vztah (7.41) upravit jako

$$r = u_Q + u_R. \quad (7.43)$$

Třetí pozorování: Z tabulky (7.5) a celé řady dalších experimentů bylo zjištěno, že maximální počet identifikovatelných unikátních prvků kovariancí \mathbf{Q}^U , \mathbf{R}^U a \mathbf{S} lze dopočítat na základě dimenzí stavu a měření pomocí následující rovnice

$$r = n_x n_z + u_R. \quad (7.44)$$

Z tabulek (7.4) a (7.5) je na první pohled vidět, že rozdíl mezi celkovým počtem jednoznačně odhadnutelných prvků a počtem unikátních prvků kovariančních matic šumů je významný při překročení hranice $n_x > n_z$. Stejně tak lze vidět, že minimální počet identifikovatelných unikátních prvků m (7.40) je závislý na konkrétním modelu systému.

Příklad

Předpokládejme, že máme Model 1 pro dimenze $n_x = 2$ a $n_z = 1$ s nezávislými šumy stavu a měření s využitím libovolné CM. V tom případě vektor všech unikátních prvků kovariancí \mathbf{Q}^U , R může být definován jako

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U(1) \\ \mathbf{Q}^U(2) \\ \mathbf{Q}^U(3) \\ R \end{bmatrix}, \quad (7.45)$$

kde dimenze vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je $n_\theta = 4$, $\mathbf{Q}^U(i)$ je prvek vektoru \mathbf{Q}^U na i -tém řádku a platí

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U(1) & \mathbf{Q}^U(2) \\ \mathbf{Q}^U(2) & \mathbf{Q}^U(3) \end{bmatrix}. \quad (7.46)$$

Matice $\check{\mathbf{A}}$ z (7.36) má nicméně hodnotu pouze

$$r = \text{rank}(\check{\mathbf{A}}) = 3, \quad (7.47)$$

což je zároveň i maximální počet identifikovatelných unikátních prvků. To znamená, že alespoň $n_{\theta\{z\}} = n_\theta - r = 1$ prvků kovariancí šumů musí být specifikováno uživatelem. To je celkem $c = 4$ (7.39) možných kombinací prvků kovariancí uspořádaných ve vektoru $n_{\theta\{o\}}$ a k nim odpovídajících matic $\check{\mathbf{A}}\{o\}$ z (7.36). Zvolme si tedy dva případy:

- Odhadovány jsou prvky $\boldsymbol{\theta}\{o\} = [\mathbf{Q}_1^U, \mathbf{Q}_2^U, R]^T$ (proto prvek $\boldsymbol{\theta}\{z\} = \mathbf{Q}_3^U$ musí být uživatelem specifikován), pak $\text{rank}(\check{\mathbf{A}}\{o\}) = 3 = r$. To znamená, že v tomto případě *může* být $\boldsymbol{\theta}\{o\}$ s maximálním počet identifikovatelných unikátních prvků odhadován.
- Odhadovány jsou prvky $\boldsymbol{\theta}\{o\} = [\mathbf{Q}_1^U, \mathbf{Q}_3^U, R]^T$ (proto prvek $\boldsymbol{\theta}\{z\} = \mathbf{Q}_2^U$ musí být uživatelem specifikován), pak $\text{rank}(\check{\mathbf{A}}\{o\}) = 2 \neq r$. To znamená, že v tomto případě *nelze* odhadnout maximální počet identifikovatelných unikátních prvků. Vektor $\boldsymbol{\theta}\{o\}$ musí být zredukován o další specifikovaný prvek v $\boldsymbol{\theta}\{z\}$.

Čtvrté pozorování: *Není* možné vždy odhadnout všechny diagonální prvky kovariančních matic šumů stavu a měření.

Příklad

Uvažujeme Model 2 s dimenzemi $n_x = 2$ a $n_z = 1$, kde kovariance \mathbf{S}^U a R jsou známé a je odhadovaná pouze kovariance stavu

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^U(1) & \mathbf{Q}^U(2) \\ \mathbf{Q}^U(2) & \mathbf{Q}^U(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.8 \\ 1.8 & 4 \end{bmatrix}. \quad (7.48)$$

V tomto případě je možné odhadnout pouze $\text{rank}(\check{\mathbf{A}}\{o\}) = 2$ prvky z celkových 3. Pokud jako odhadované prvky jsou zvoleny diagonální prvky, tj. $\boldsymbol{\theta}\{o\} = [\mathbf{Q}^U(1), \mathbf{Q}^U(3)]$, pak musí být specifikován mimodiagonální prvek $\boldsymbol{\theta}\{z\} = \mathbf{Q}^U(2)$. Nicméně pokud by tento prvek byl zvolen jako $\boldsymbol{\theta}\{z\} = \mathbf{Q}^U(2) = 0^a$, výsledný odhad^b by dopadl následovně

$$\widehat{\mathbf{Q}}_M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4.38 \end{bmatrix}, \quad (7.49)$$

kde tento odhad *není* pozitivní semidefinitní matice, tudíž ji nelze nazývat ani kovarianční maticí.

^aNulové mimodiagonální prvky se mohou na první pohled zdát přirozenou volbou.

^bZa předpokladu že vektor $\check{\mathbf{C}}$ z rovnice (7.36) by byl známý.

Páté pozorování: Prvky $\boldsymbol{\theta}\{z\}$ musí být vhodně specifikovány, protože výsledné odhady kovariančních matic šumů nemusí nutně být pozitivně semidefinitní, a to ani v případě, že by se počet měření blížil k nekonečnu. Upozorníme, že obdobné výsledky lze pozorovat i v případě nevhodné volby kovariance \mathbf{S} , kdy odhadované kovarianční matice šumů stavu \mathbf{Q}^U a měření \mathbf{R}^U také nemusí být pozitivně semidefinitní.

Šesté pozorování: Pokud má matice \mathbf{F} plnou hodnost, podmínky pro identifikovatelnost všech prvků kovariance \mathbf{R}^U jsou nezávislé na identifikovatelnosti dvojice kovariancí \mathbf{Q}^U a \mathbf{S} . Podmínky identifikovatelnosti prvků

kovariancí \mathbf{Q}^U a \mathbf{S} jsou totiž silně svázané. To znamená, že je možné vždy identifikovat všech u_R unikátních prvků kovariance \mathbf{R}^U , ale maximálně $r - u_R$ unikátních prvků z dvojice kovariancí \mathbf{Q}^U nebo \mathbf{S} .

Sedmé pozorování: Uvažujme libovolný odhad unikátních prvků kovariancí $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (4.6), který splňuje rovnici

$$\check{\mathbf{C}} = \check{\mathbf{A}}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (7.50)$$

kde pro odhadnuté kovariance šumů $\hat{\mathbf{Q}}^U, \hat{\mathbf{R}}^U, \hat{\mathbf{S}}$ zapsané jako kovarianční matice šumů $\hat{\mathbf{Q}}_M, \hat{\mathbf{R}}_M, \hat{\mathbf{S}}_M$ pro který existuje ustálené řešení $\bar{\mathbf{P}}$ diskrétní algebraické Riccatiho rovnice

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{F}^T - (\mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{S}}_M)(\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}}_M)^{-1}(\mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{S}}_M)^T + \hat{\mathbf{Q}}_M. \quad (7.51)$$

Pro příslušný zisk lineárního filtru

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{F}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{S}}_M)(\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}}_M)^{-1} \quad (7.52)$$

platí, že je identický s ustáleným Kálmánovým ziskem \mathbf{K}_U počítaným na základě skutečných kovariančních matic šumů, tj. $\mathbf{Q}_M, \mathbf{R}_M, \mathbf{S}_M$, to znamená, že

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_U. \quad (7.53)$$

Rovnice (7.53) je platná dokonce i v případě, že jsou odhady stranné z důvodu nevhodné volby specifikovaných prvků $\boldsymbol{\theta}\{z\}$. Tento závěr je konzistentní s pozorováním, že ustálený Kálmánův zisk \mathbf{K}_U může být (na rozdíl od kovariancí šumů) odhadnut vždy [7, 8, 91]. Upozorníme na skutečnost, že ačkoliv je možné získat optimální⁷ odhad stavu pomocí zisku $\bar{\mathbf{K}}$, tak ustálené řešení $\bar{\mathbf{P}}$ vypočtené na základě odhadnutých kovariančních matic šumů $\hat{\mathbf{Q}}_M, \hat{\mathbf{R}}_M, \hat{\mathbf{S}}_M$ je v tomto případě obecně jiné než ustálená kovarianční matice chyby odhadu stavu \mathbf{P}_U z Kálmánova filtru počítaná na základě skutečných kovariančních matic šumů $\mathbf{Q}_M, \mathbf{R}_M, \mathbf{S}_M$. To znamená, že k optimálně odhadnutému stavu *není* k dispozici kovarianční matice (chyby) odhadu stavu.

Příklad

Kálmánův filtr pro Model 2 s $n_x = 2, n_z = 1, \mathbf{Q}_M = \begin{bmatrix} 1 & 1.8 \\ 1.8 & 4 \end{bmatrix}, R = 1$ a $\mathbf{S}_M = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ poskytne následující ustálenou kovarianční matici chyby odhadu stavu \mathbf{P}_U a ustálený Kálmánův zisk \mathbf{K}_U

$$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} 3.4042 & 3.7916 \\ 3.7916 & 5.6684 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_U = \begin{bmatrix} 0.7729 \\ 0.8609 \end{bmatrix}.$$

Lineární filtr, který využije^a odhadu matice $\hat{\mathbf{Q}}_M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4.38 \end{bmatrix}$ (7.49), která

⁷Optimální ve smyslu střední kvadratické chyby.

je negativně definitní, poskytně následující ustálené řešení matice $\bar{\mathbf{P}}$ (7.51) a ustálený zisk $\bar{\mathbf{K}}$ (7.52)

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 3.4042 & 3.7916 \\ 3.7916 & \mathbf{7.6684} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0.7729 \\ 0.8609 \end{bmatrix}.$$

^aKovariance šumů R a \mathbf{S} jsou uvažovány jako známé.

Kapitola 8

Využití metody difference měření k dalšímu popisu šumů

V kapitole 6 bylo ukázáno několik různých způsobů, jak pomocí MDM získat odhad momentů šumů, a to jak časově nezávislých, tak i závislých šumů. Popis šumů pomocí momentů ale nemusí být vhodný nebo dostačující v navazujících výpočtech. Proto bude na počátku této kapitoly bude ukázáno, jak lze využít MDM k posouzení toho, zda šumy stavu a měření pochází z Gaussova rozdělení. Dodržení předpokladu o rozdělení šumů je nedílnou součástí některých kritických aplikací, u nichž může dojít k ohrožení zdraví. Dále bude ukázáno, jak díky odhadům momentů šumů získaných pomocí MDM získat vektor parametrů parametrizující nejen PDF šumů stavu a měření, ale i jiné funkce popisující například časovou závislost šumů.

8.1 Ověření gaussovosti šumů

V této kapitole se podíváme na to, jak využít MDM pro posouzení toho, zda šumy stavu a měření mají Gaussovo rozdělení.

Při testování gaussovosti náhodné veličiny se využívá statistické analýzy vlastnosti jejich vzorků κ_k , aby se rozhodlo o tom, zda vzorky pochází z Gaussova rozdělení. Mezi velice oblíbené a často využívané testy jsou takové, které poskytují rozhodnutí o gaussovosti navíc s požadovanou pravděpodobností falešného alarmu. Pro příklad uveďme dva testy gaussovosti s velice dobrými výsledky [K1]. Prvním je Shapiro–Wilk test [98], který porovnává transformované a seřazené naměřené vzorky se vzorky, které jsou generovány ze standardního Gaussova rozdělení. Druhým testem je Jarque–Bera test [98], který porovnává šikmosti a špičatosti vypočtené na základě naměřených vzorků a vzorků vypočtených teoreticky pro Gaussovo rozdělení.

Součástí výpočtu MDM je i výpočet vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$. Tento vektor je, viz rovnice (6.5), pouze váženým součtem šumů stavu a měření. To znamená, že pokud šumy stavu a měření mají Gaussovo rozdělení, tak i tento vektor $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ musí mít také Gaussovo rozdělení. To je také základní myšlenka, jak využít vektor $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ pro ověření gaussovosti šumů.

Testy gaussovosti jsou založené na předpokladu, že vzorky κ_k jsou identicky distribuované. V případě LTI modelu systému lze vektor MPE využít jako vzorky $\kappa_k = \tilde{\mathbf{Z}}_k$, protože pro ty platí, že jsou identicky distribuované. Naopak v případě, že systém je popsán LTV modelem, nejsou vektory $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ identicky distribuované. Pokud by ale byla dostupná kovarianční matice $(\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2})_M$ vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$, bylo by možné vypočítat¹ normalizované vzorky $\kappa_k = \mathcal{O}_k^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_k$. Matice \mathcal{O}_k je Choleského dekompozice kovarianční matice $(\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2})_M$, pro kterou platí $\mathcal{O}_k \mathcal{O}_k^T = (\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2})_M$. Díky této normalizaci by vzorky κ_k již byly identicky distribuované a bylo by možné je využít pro testy gaussovosti.

Bohužel kovariance $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2}$ a tudíž i její rozklad \mathcal{O}_k jsou neznámé. Nicméně je možné nejdříve pomocí MDM odhadnout kovariance šumů $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^2}^U$, a spolu s rovnicí (6.14b) získat i odhad kovariance $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2}$ ze vztahu

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2} = \mathcal{A}_k^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}^2}^C \widehat{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^2}^U. \quad (8.1)$$

Proto v případě LTV modelu systému lze použít normalizované vzorky κ_k počítané podle

$$\kappa_k = \widehat{\mathcal{O}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_k. \quad (8.2)$$

Díky tomu lze využít metodu MDM nejen k odhadu momentu šumů, ale i k posouzení, zda šumy stavu a měření pochází z Gaussova rozdělení.

8.2 Odhad parametrů šumů

V této kapitole se podíváme jak odhadnout vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$, které popisují šumy stavu a měření.

Uvažujme systém popsáný rovnicemi stavu (2.1) a měření (2.2), kde šum stavu a měření je popsán známou funkcí, která je parametrizována neznámým časově neproměnným vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta}$. V literatuře lze nalézt mnoho vzájemně se prolínajících oblastí a aplikací, jež spadají do této problematiky a které lze zjednodušeně rozdělit do dvou skupin.

¹Pokud je kovarianční matice $(\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{Z}}_k^2})_M$ pozitivně semidefinitní, tj. matice \mathcal{O}_k není invertovatelná, je možné nalézt normalizované vzorky κ_k s využitím lineární transformace vektoru $\tilde{\mathbf{Z}}_k$.

První skupina zahrnuje problematiku, kde vektor šumů stavu a měření $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$ a lze ho popsat známou funkcí hustoty pravděpodobnosti $p_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je hledaný vektor parametrů. Také je předpokládáno, že mezi parametry hustoty pravděpodobnosti a momenty existuje přepočítání, což platí například pro všechna rozdělení z tabulky 2.1. Mezi často využívané a předpokládané rozložení hustot pravděpodobnosti šumů patří například Gaussovo rozdělení šumů, rozdělení Gaussových směsí a šikmého Studentova rozdělení. Jako příklady aplikace uveďme oblast navigace, která zahrnuje například globální satelitní navigace [96], vnitřní navigaci pomocí ultra-širokopásmových zařízení [94], terénní navigací (anglicky zvané terrain aided navigation) [99].

Druhá skupina zahrnuje problematiku, kdy vektor šumů stavu a měření $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ je obecně závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $\text{abs}(k - j) > 0$ a lze ho popsat nějakou strukturou. Příkladem je Markovův proces, závislost vektorů šumů přes konečný počet okamžiků, popřípadě i jiné struktury závislosti, které je možné popsat vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta}$. Jako příklad výskytu časově závislých šumů uveďme měření pomocí inerciálních senzorů [95], měření z globálního navigačního satelitního systému [96], či chemické a průmyslové procesy [100].

Jak už bylo zmíněno v kapitole 2, mezi vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a momenty existuje vztah, který lze zapsat následujícím způsobem

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^U \\ \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^U \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^U \\ \mathcal{C}_{\mathcal{E}^3}^U \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}). \quad (8.3)$$

Rovnice (8.3) je obecně libovolná funkce hledaného vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$. Pokud by byly unikátní prvky necentrálních nebo centrálních momentů šumů známé, bylo by možné získat odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$. Tyto momenty šumů jsou neznámé, avšak je možné je odhadnout buď pomocí celkového, nebo postupného odhadu momentů šumů. Těmito odhady lze nahradit neznámé skutečné momenty v rovnici (8.3) a získat odhad vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ podle

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{N}}_{\varepsilon}^{\mathbf{U}} \\ \widehat{\mathcal{N}}_{\varepsilon^2}^{\mathbf{U}} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{C}}_{\varepsilon^2}^{\mathbf{U}} \\ \widehat{\mathcal{C}}_{\varepsilon^3}^{\mathbf{U}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (8.4)$$

Pro odhad vektoru parametrů $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ z rovnice (8.4) lze vždy využít optimační metodu jako například Gauss-Newtonovu metodu. V některých případech, v závislosti na struktuře funkce $\mathbf{g}(\cdot)$, lze vztah (8.4) upravit a využít analytického řešení. Poznamenejme, že složitost či jednoznačnost výpočtu odhadu vektoru parametrů $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ (8.4) je významnou měrou ovlivněna jednak celkovým počtem použitých momentů, ale také konkrétní volbou momentů, tj. využitím například pouze necentrálních momentů, nebo různorodá kombinace necentrálních a centrálních momentů. Vhodnost této volby není jednotná a je přirozeně dána konkrétním popisem šumů.

Využití momentů k odhadu parametrů je v literatuře také známé jako metoda momentů (anglicky zvanou method of moments [101]).

Poznamenejme, že vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ je také možné přímo odhadnout z měření $\mathbf{z}_k \forall k$ pomocí optimalizačního přístupu. Nicméně v této práci se zaměříme výhradně na odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ pomocí metody momentů s využitím MDM.

8.2.1 Odhad parametrů hustoty pravděpodobnosti

V této kapitole se podíváme na několik konkrétních příkladů, jak pomocí momentů šumů odhadnout vektor parametrů, který parametrizuje hustoty pravděpodobnosti těchto šumů. Vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ bude v této kapitole uvažován jako nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$ a bude využito zjednodušeného zápisu prvních dvou momentů šumů jako $\bar{\mathbf{w}} = \mathcal{N}_{\mathbf{w}}$, $\bar{\mathbf{v}} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{Q} = \mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}$, $\mathbf{R} = \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}$, $\mathbf{S} = \mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}}$.

První příklad obsahuje vektor Gaussových šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$, které lze zapsat jako

$$p_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}), \quad (8.5)$$

kde vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ popisující tuto hustotu pravděpodobnosti šumu lze zapsat

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{U}} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{U}} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Protože samotný vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ v tomto případě obsahuje pouze první dva momenty šumů, lze pro jejich odhad také využít dva momenty šumů, a to konkrétně první necentrální moment šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ (6.13a) a druhý necentrální moment šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$ (6.13b). Vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ lze z rovnice (8.3) samozřejmě odhadnout pomocí optimalizační metody, nicméně v tomto konkrétním případě lze rovnici upravit a přepsat do následující podoby

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x+n_z} & \mathbf{0}_{n_x+n_z \times n_{\mathcal{E}^2}} \\ \mathbf{0}_{\frac{n_{\mathcal{E}^2}}{2} \times n_x+n_z} & [1 \quad -1] \otimes \mathbf{I}_{\frac{n_{\mathcal{E}^2}}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}} \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

kde $n_{\mathcal{E}^2} = n_x(n_x + 1) + n_z(n_z + 1) + 2n_x n_z$. Pokud bychom znali první dva necentrální momenty šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$, bylo by k odhadu vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ možno využít rovnici (8.7). Bohužel první dva necentrální momenty šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$ jsou neznámé, ale mohou být získány jejich nestranné a konzistentní odhady z celkového odhadu necentrálních momentů šumů (6.19). Pokud necentrální momenty šumů v rovnici (8.7) nahradíme jejich odhady, je možné vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ vypočítat následovně

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x+n_z} & \mathbf{0}_{n_x+n_z \times n_{\mathcal{E}^2}} \\ \mathbf{0}_{\frac{n_{\mathcal{E}^2}}{2} \times n_x+n_z} & [1 \quad -1] \otimes \mathbf{I}_{\frac{n_{\mathcal{E}^2}}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}} \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Tento odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je pouze lineární funkcí nestranných a konzistentních odhadů necentrálních momentů šumů $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}}$, $\widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}}$ (6.19), a proto i tento odhad je nestranný a konzistentní. Všimněme si, že odhad (8.8) v sobě implicitně obsahuje celkový odhad druhého centrálního momentu (6.23).

Druhý příklad obsahuje šumy stavu \mathbf{w}_k a měření \mathbf{v}_k , které jsou navíc vzájemně nezávislé. Dále je předpokládáno, že šum stavu má Gaussovo rozdělení a lze jej zapsat jako

$$p_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{w}_k; \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}_k; \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}), \quad (8.9)$$

kde vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}$ je definován

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{U}} \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Šum měření je popsán směsí dvou Gaussových rozdělení

$$p_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}) = \text{GM}(\mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}) \quad (8.11)$$

s vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ definovaným

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \bar{\mathbf{v}}_1 \\ \bar{\mathbf{v}}_2 \\ \mathbf{R}_1^{\mathbf{U}} \\ \mathbf{R}_2^{\mathbf{U}} \end{bmatrix}, \quad (8.12)$$

kde $\bar{\mathbf{v}}_i, i \in \{1, 2\}$ je vektor středních hodnot a $\mathbf{R}_i^{\mathbf{U}}, i \in \{1, 2\}$ je kovariance šumů pro i -tý člen v Gaussově směsi. Skalární parametr $0 < \alpha_1 < 1$ určuje, s jakým poměrem tvoří jednotlivé členy celou hustotu Gaussově směsi, přičemž také platí vztah $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Poznamenejme, že náhodnou veličinu \mathbf{v}_k můžeme (neúplně) popsat střední hodnotou $\bar{\mathbf{v}}$ a kovariancí $\mathbf{R}^{\mathbf{U}}$.

Tento konkrétní problém lze z důvodu nezávislosti šumů stavu a měření rozdělit na dva samostatné problémy odhadu vektoru parametrů šumů stavu $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}$ (8.10) a měření $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ (8.12).

Nalezení vektoru parametrů šumů stavu $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}$ je obdobný problém jako u prvního příkladu. Stačí využít prvky prvních dvou necentrálních momentů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$, díky nimž lze upravenou rovnici (8.3) zapsat jako

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_x(n_x+1)} \\ \mathbf{0}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2} \times n_x} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ (\bar{\mathbf{w}}^{\otimes 2})^{\mathbf{U}} \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Připomeňme, že vektor $\bar{\mathbf{w}}$ je součástí vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$ (6.13a) a dvojice vektorů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}}$ a $(\bar{\mathbf{w}}^{\otimes 2})^{\mathbf{U}}$ jsou součástí vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$ (6.13b). První dva necentrální momenty šumu \mathbf{w}_k jsou sice neznámé, ale jsme schopni je nestranně a konzistentně odhadnout jako součást vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{U}}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^2}^{\mathbf{U}}$ pomocí celkového odhadu necentrálních momentů šumů (6.19). Pokud v rovnici (8.13) nahradíme necentrální momenty šumu \mathbf{w}_k jeho odhady, je možno získat nestranný a konzistentní odhad vektoru parametru $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}$ (8.10), obdobně jako v předchozím

případě podle vztahu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_x(n_x+1)} \\ \mathbf{0}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2} \times n_x} & [1 \quad -1] \otimes \mathbf{I}_{\frac{n_x(n_x+1)}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{w}} \\ \widehat{\mathcal{N}}_{\mathbf{w}^2}^{\mathbf{U}} \\ (\widehat{\mathbf{w}}^{\otimes 2})^{\mathbf{U}} \end{bmatrix}.$$

Pro nalezení vektoru parametrů šumů měření $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$, který obsahuje celkem pět členů, využijeme prvních pět necentrálních momentů šumů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^i}^{\mathbf{U}}$, $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tyto momenty je možné zapsat do podoby (8.3) jako funkce vektorů parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ (8.12), jak je ukázáno v příloze C, podle vztahů

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad (8.14a)$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(\mathbf{R}_i + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right)^{\mathbf{U}} \quad (8.14b)$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^3}^{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(\mathbf{E}^1 (\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right)^{\mathbf{U}} \quad (8.14c)$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^4}^{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^4 (\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \right)^{\mathbf{U}} \quad (8.14d)$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^5}^{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{E}^5 (\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{E}^8 (\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \right)^{\mathbf{U}}, \quad (8.14e)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 &= \mathbf{I}_{n_z^3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,2} \\ \mathbf{E}^2 &= \mathbf{I}_{n_z^4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,2,4,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,4,2,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{4,1,2,3} \\ \mathbf{E}^3 &= \mathbf{I}_{n_z^4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,2,4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,4,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,2,4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,4,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,4,1,2} \\ \mathbf{E}^4 &= (\mathbf{E}^2 (\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z}) - \mathbf{E}^3) \\ \mathbf{E}^5 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,2,3,5,4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,2,5,3,4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,5,2,3,4} + \boldsymbol{\Upsilon}^{5,1,2,3,4} \\ \mathbf{E}^6 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,2,4,5,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,4,2,5,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,4,5,2,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{4,1,2,5,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{4,1,5,2,3} \\ &\quad + \boldsymbol{\Upsilon}^{4,5,1,2,3} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,2,4,3,5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,4,2,3,5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{4,1,2,3,5} \\ \mathbf{E}^7 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,4,5,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,4,5,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,4,1,5,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,4,5,1,2} + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,2,4,5} \\ &\quad + \boldsymbol{\Upsilon}^{1,3,4,2,5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,2,4,5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,1,4,2,5} + \boldsymbol{\Upsilon}^{3,4,1,2,5} \\ \mathbf{E}^8 &= (\mathbf{E}^5 (\mathbf{E}^4 \otimes \mathbf{I}_{n_z}) - \mathbf{E}^6 (\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z^2}) + \mathbf{E}^7). \end{aligned}$$

Díky rovnicím (8.14) je možné necentrální momenty šumu \mathbf{v}_k zapsat v kompaktní podobě jako funkce hledaného vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$, obdobně

jako rovnici (8.3), podle vztahu

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^3}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^4}^{\mathbf{U}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}^5}^{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \bar{\mathbf{v}}_1 + (1 - \alpha_1) \bar{\mathbf{v}}_2 \\ \alpha_1 \left(\mathbf{R}_1 + \left(\bar{\mathbf{v}}_1^{\otimes 2} \right) \right)^{\mathbf{U}} + (1 - \alpha_1) \left(\mathbf{R}_2 + \left(\bar{\mathbf{v}}_2^{\otimes 2} \right) \right)^{\mathbf{U}} \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(\mathbf{E}^1 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right)^{\mathbf{U}} \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^4 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \right)^{\mathbf{U}} \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{E}^5 \left(\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \mathbf{E}^8 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \right)^{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}). \quad (8.15)$$

Pokud by byly necentrální momenty šumu \mathbf{v}_k známé, bylo by možné odhadnout vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ (8.12) pomocí vhodné numerické metody. Tyto momenty jsou bohužel neznámé, ale je možné je odhadnout jako součást vektorů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^i}^{\mathbf{U}}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pomocí buď celkového (6.19), nebo postupného (6.26) odhadu necentrálních momentů šumů. Těmito odhady lze nahradit momenty v rovnici (8.15) jako

$$\begin{bmatrix} \widehat{\bar{\mathbf{v}}} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2}^{\mathbf{U}}} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}^3}^{\mathbf{U}}} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}^4}^{\mathbf{U}}} \\ \widehat{\mathcal{N}_{\mathbf{v}^5}^{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}}), \quad (8.16)$$

a z ní numericky vypočítat vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ (8.12).

Poznamenejme, že odhadem prvních pěti necentrálních momentů vektoru \mathcal{E}_k celkovým (6.19), popřípadě postupným (6.25) odhadem necentrálních momentů šumů jsme získali nejen prvních pět necentrálních momentů vektoru \mathbf{v}_k , které byly potřeba v rovnici (8.16), ale také další prvky jako například momenty $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^i}^{\mathbf{U}}, i \in \{3, 4, 5\}$, které využity nebyly. Pokud by ale byly využity i vyšší momenty pro odhad vektoru parametrů šumu stavu $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}$ (8.10), nešel by tento problém vyjádřit v podobě lineární rovnice (8.13) a výsledný odhad by musel být řešen optimalizační metodou, kvůli čemuž by výsledný odhad (6.19) již nebyl nestranný a konzistentní.

8.2.2 Odhad parametrů časově korelovaných šumů

V této kapitole se podíváme na konkrétní příklad, jak pomocí momentů šumů odhadnout vektor parametrů, který parametrizuje časově korelované

šumy. Vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ tedy bude v této kapitole uvažován jako závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$.

Předpokládejme, že stavový časově závislý šum pouze přes jeden časový okamžik je generován jako

$$\mathbf{w}_k = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}_k + \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \quad (8.17)$$

kde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je neznámá, omezená a časově neproměnná matice. Vektor šumu měření je stacionární Markovův proces, který je generován jako

$$\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\beta}\mathbf{v}_{k-1} + \boldsymbol{\sigma}_{k-1}, \quad (8.18)$$

kde matice $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je neznámá, omezená, časově neproměnná a má vlastní čísla v jednotkové kružnici. Náhodný vektor $\boldsymbol{\zeta}_k = [\boldsymbol{\mu}_k^T \ \boldsymbol{\sigma}_k^T]^T \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$ je nezávislý na $\boldsymbol{\zeta}_j$ pro $k \neq j$ a lze ho popsat omezenými a časově neproměnnými prvními dvěma necentrálními momenty, které jsou neznámé.

Vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ může obsahovat různé prvky podle toho, co uživatel vyžaduje. V našem problému uvažujme, že hledaný vektor parametrů má následující podobu²

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_V \\ \boldsymbol{\beta}_V \\ \mathcal{N}_\mu \\ \mathcal{N}_V \\ \mathcal{C}_{\mu^2}^U \\ \mathcal{C}_{V^2}^U \\ \mathcal{C}_{\mu,\sigma} \end{bmatrix}, \quad (8.19)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}_V \in \mathbb{R}^{n_x^2}$ a $\boldsymbol{\beta}_V \in \mathbb{R}^{n_z^2}$ jsou vektorizované matice $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$.

Stejně tak je díky časové závislosti vektoru šumů $\boldsymbol{\xi}_k$ důležité myslet na to, že momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}^i}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^i}^U$ pro $i > 1$ budou obsahovat různý počet unikátních prvků v závislosti na typu časové korelace stejně tak jako na volbě parametru P , jak je vidět z rovnic (6.32). Proto v tomto případě budeme uvažovat, že hodnota parametru $P = 3$, a pro odhad bude využit první necentrální moment $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^U$ a druhý centrální moment $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^U$. Tyto momenty je možné zapsat do podoby (8.3) jako funkce vektorů parametrů $\boldsymbol{\theta}$ (8.19), jak

²Jinou možností, jak zvolit vektor parametrů, je například místo $\mathcal{N}_{\mu^2}^U$ z (8.19) odhadovat $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}^U$ nebo místo $\mathcal{N}_{V^2}^U$ odhadovat $\mathcal{N}_{\sigma^2}^U$.

je podrobně ukázáno v příloze D

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{I}_{n_x})\mathcal{N}_{\boldsymbol{\mu}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}} \\ \left((\boldsymbol{\alpha}^{\otimes 2} + \mathbf{I}_{n_x^2})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}^2} \right)^{\mathcal{U}} \\ (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\alpha})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}^2} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}^{\mathcal{U}} \\ (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2} \\ (\boldsymbol{\beta}^2 \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2} \\ \mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}} \\ \left((\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_{n_z}) + (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta}) \right)\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}} \\ \left((\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta}^2) \right)\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}). \quad (8.20)$$

Pokud by byly první dva momenty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k}^{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}_k^2}^{\mathcal{U}}$ známé, bylo by možné vypočítat vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ (8.19) numericky. Tyto momenty jsou neznámé a je možné je odhadnout pomocí celkového odhadu (6.19) necentrálních a postupného odhadu (6.30) centrálních momentů šumů. Těmito odhady lze nahradit momenty v rovnici (8.20) jako

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}} \\ \widehat{\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}} \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (8.21)$$

z rovnice (8.21) lze numericky vypočítat vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ (8.19).

Pro výsledný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je využito odhadů unikátních prvků prvních dvou momentů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{U}}$. Tyto momenty definují určitý počet unikátních prvků, které zároveň určují i počet rovnic, jež jsou funkcí prvků vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$. Tento počet rovnic je dán jednak konkrétní časovou korelací šumů, ale také tím, jak velký bude zvolen parametr P . To znamená, že parametr P musí být zvolený dostatečně velký tak, aby bylo možno jednoznačně odhadnout všechny prvky vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Například v rovnici (8.20), kde $P = 3$, je celkový počet těchto rovnic roven 10. Pokud by hodnota $P = 2$, tak by celkový počet rovnic byl roven pouze 6, což je o jeden méně než počet prvků ve vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$ (8.19).

Kapitola 9

Numerické ilustrace

V této kapitole bude ukázáno několik příkladů, na nichž budou ilustrovány schopnosti nejen samotné MDM, ale také její srovnání s dalšími významnými představiteli CM.

9.1 Porovnání korelačních metod - LTI model

V této kapitole bude porovnán celkový necentrální odhad MDM s odhady dalších čtyř významných CM, jmenovitě Mehrovou metodou z podkapitoly 4.3, Bélangerovou metodou z podkapitoly 4.4, Leeovou metodou z podkapitoly 4.5 a Bundickovou metodou z podkapitoly 4.6. Veškeré tyto CM jsou schopné odhadnout kovariance vzájemně a časově nekorelovaných šumů s nulovou střední hodnotou v LTI modelu. Proto uvažujme model systému (2.1), (2.2), kde známé matice a vektory jsou

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0.4 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

naopak neznámé jsou

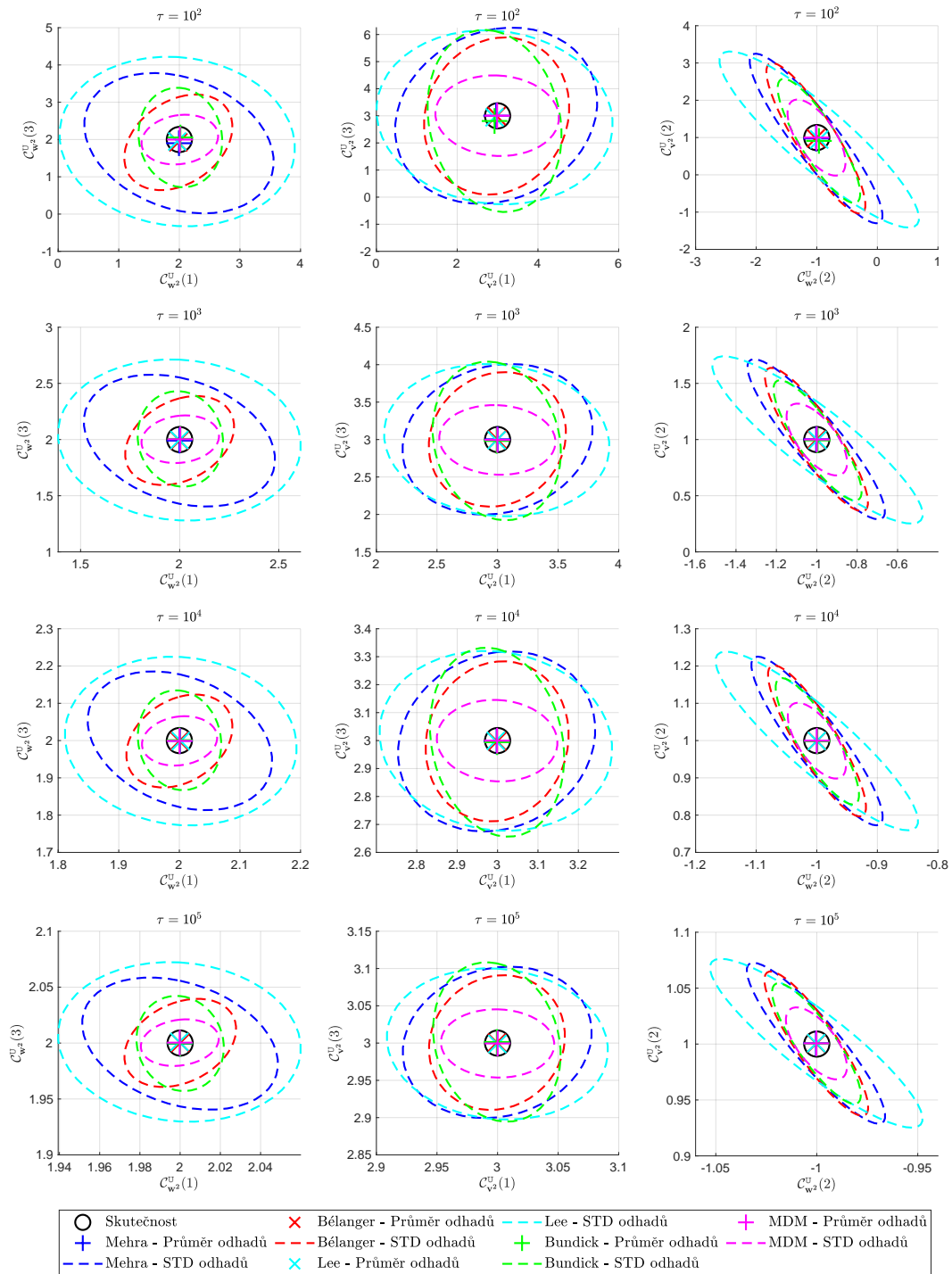
$$\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{C}_{\mathbf{x}_0^2})_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{C}_{\mathbf{w}^2})_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2})_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro takovýto model jsou jednotlivé CM analyzovány s využitím 10^4 Monte Carlo (MC) simulací, kde v každé simulaci bude k odhadu kovariancí šumů využito celkem $10^2, 10^3, 10^4$ a 10^5 měření τ . Dále předpokládejme, že CM^1 budou využívat dvě různé znalosti o počáteční střední hodnotě stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}$.

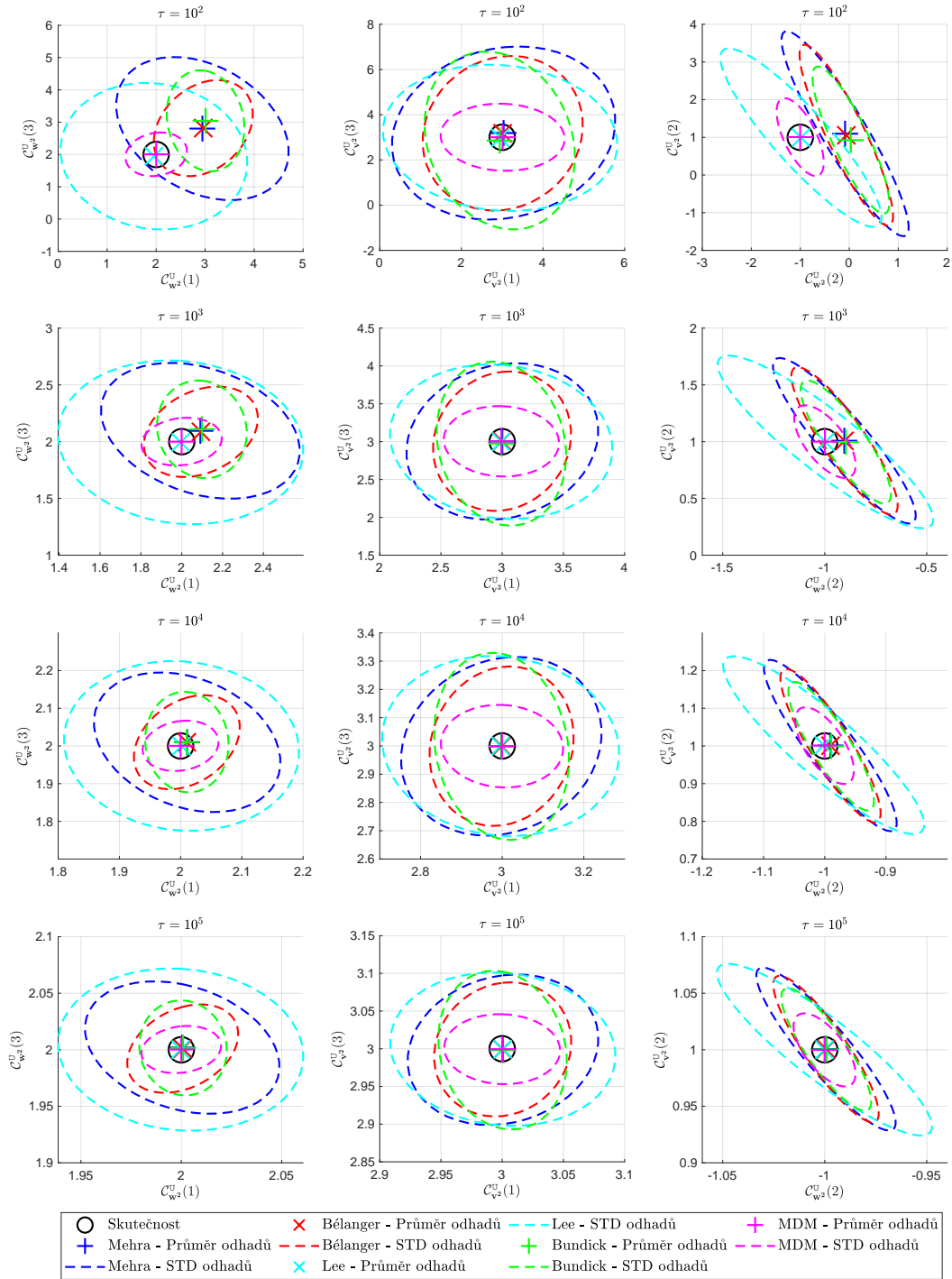
¹Mehra, Bélanger a Bundick využívají k odhadu kovariancí šumů informaci o počáteční střední hodnotě stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}}$.

Jednak bude uvažována (správná) nulová střední hodnota stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}$, ale také bude využita (nesprávná) počáteční střední hodnota stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = [10 \ 10]^T$.

Průměr a směrodatná odchylka (STD - z anglického standard deviation), odhadů kovariancí šumů získané průměrováním přes MC simulace jsou vykresleny v obrázcích 9.1 a 9.2. Připomeňme, že $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}}(i)$ je prvek vektoru $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}} = [c_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}}(1) \ c_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}}(2) \ c_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}}(3)]^T = [2 \ -1 \ 2]^T$ na i -tém řádku. Obdobně to platí i pro i -tý prvek $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}}(i)$ vektoru $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}} = [c_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}}(1) \ c_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}}(2) \ c_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}}(3)]^T = [3 \ 1 \ 3]^T$.



Obrázek 9.1: Odhad kovariancí šumů významnými CM pro $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}$



Obrázek 9.2: Odhad kovariancí šumů významnými CM pro $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = [10 \ 10]^T$

Z obou obrázků 9.1 a 9.2 můžeme vidět, že STD odhadů se pro všechny CM snižuje s narůstajícím počtem měření τ . Jednotlivé CM seřazené podle STD od největšího po nejmenší jsou Lee, Mehra, Bélanger, Bundick a MDM.

Z obrázku 9.1, kde $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = \mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}$, můžeme vidět, že průměry odhadů jsou pro všechny CM koncentrovány kolem skutečné hodnoty.

Naopak z obrázku 9.2, kde $\mathcal{N}_{\mathbf{x}_0}^{\text{CM}} = [10 \ 10]^T$, je vidět, že průměry odhadů jsou koncentrovány kolem skutečné hodnoty pouze pro Leeovu metodu a MDM, které poskytují nestranné odhady. U zbývajících CM Mehry, Bélanger a Bundicka je vidět, že strannost odhadů (převážně kovariance stavu $\mathcal{C}_{\mathbf{w}^2}^{\text{U}}$) je větší pro menší počet měření τ . Poznamenejme, že CM Mehry, Bélanger, Leea a Bundicka mají téměř stejné MSE odhadů pro $\tau = 10^2$. Přičemž odhady pomocí Leeovy metody jsou, oproti zbylým, koncentrovány kolem skutečné hodnoty nicméně, mají větší varianci odhadu.

9.2 Porovnání korelačních metod - LTV model

V této kapitole budou odhadovány kovariance vzájemně závislých a časově nezávislých šumů s nulovou střední hodnotou pro LTV model systému popsaný rovnicemi (2.1), (2.2). Jak je vidět i z tabulky 4.1, CM navržené pro takovýto model jsou pouze dvě, a to Bélangérova metoda a MDM. Znamé hodnoty modelu systému jsou

$$F_k = 0.8 + 0.1 \sin(0.007\pi k), \quad H_k = 1 + 0.99 \sin(0.1\pi k), \quad u_k = x_0 = \mathcal{N}_w = \mathcal{N}_v = 0,$$

naopak neznámé jsou kovariance šumů

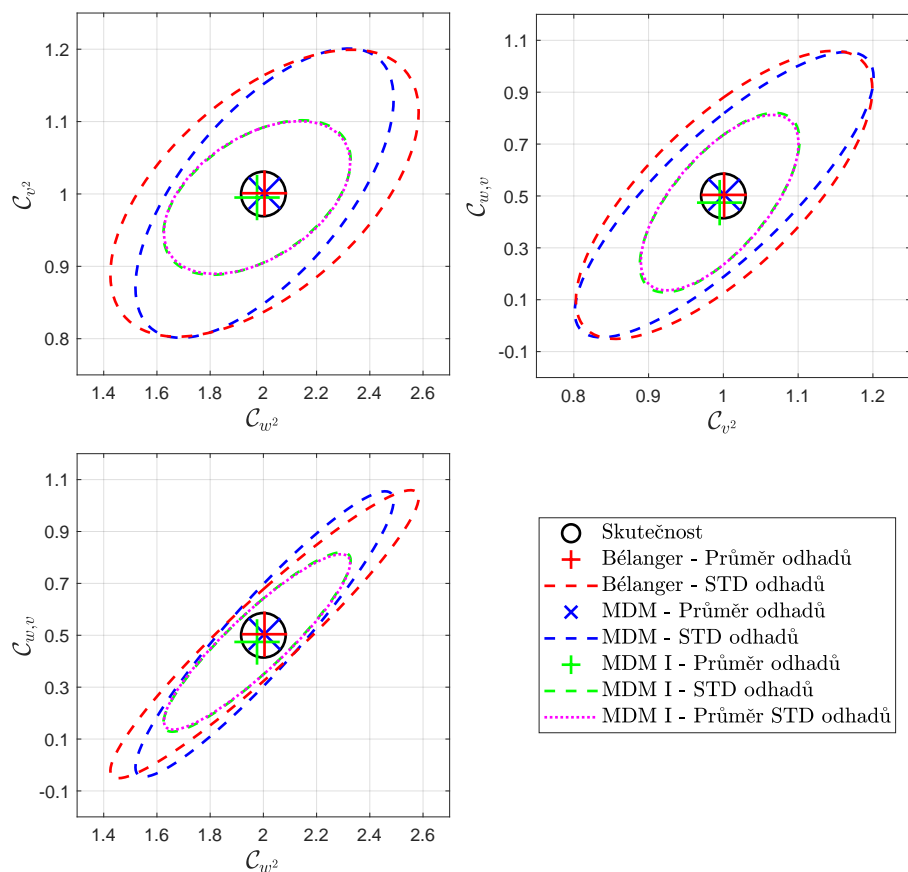
$$\mathcal{C}_{w^2} = 2, \quad \mathcal{C}_{v^2} = 1, \quad \mathcal{C}_{w,v} = 0.5.$$

Pro analýzu je využito 10^4 MC simulací, kde v každé simulaci bude k odhadu kovariancí šumů využito celkem $\tau = 10^3$ měření. Celkový odhad kovariancí šumů z MDM je získán několika způsoby. Zaprvé ve standardní verzi (6.19), ale také ve všech třech vážených verzích (7.32) představených v kapitole 7.12. Vážená verze využívající k výpočtu váhy nevážené odhady momentů šumů bude značena jako MDM I, aproximativní verze, která využívá počáteční znalosti druhých necentrálních momentů šumů zvolené jako $\mathcal{C}_{w^2}^{\text{P}} = 1, \mathcal{C}_{v^2}^{\text{P}} = 1, \mathcal{C}_{w,v}^{\text{P}} = 0$,² bude značena MDM II a poslední verze, kdy váhová matice je zvolena jako $\widehat{\mathcal{P}}^m = \mathcal{L}^m (\mathcal{L}^m)^T$, bude označována MDM III.

Průměr a STD odhadů kovariancí šumů získané průměrováním přes MC simulace pro Bélangérovu metodu, standardní MDM a váženou MDM I jsou

²Počáteční znalost veličiny \mathbf{X} je značena jako \mathbf{X}^{P} .

vykresleny v obrázku 9.3. Kromě toho je na obrázku vyobrazen i průměr odhadnutých kovariančních matic (či STD) odhadů kovariancí šumů (7.33), které poskytuje vážená MDM I.

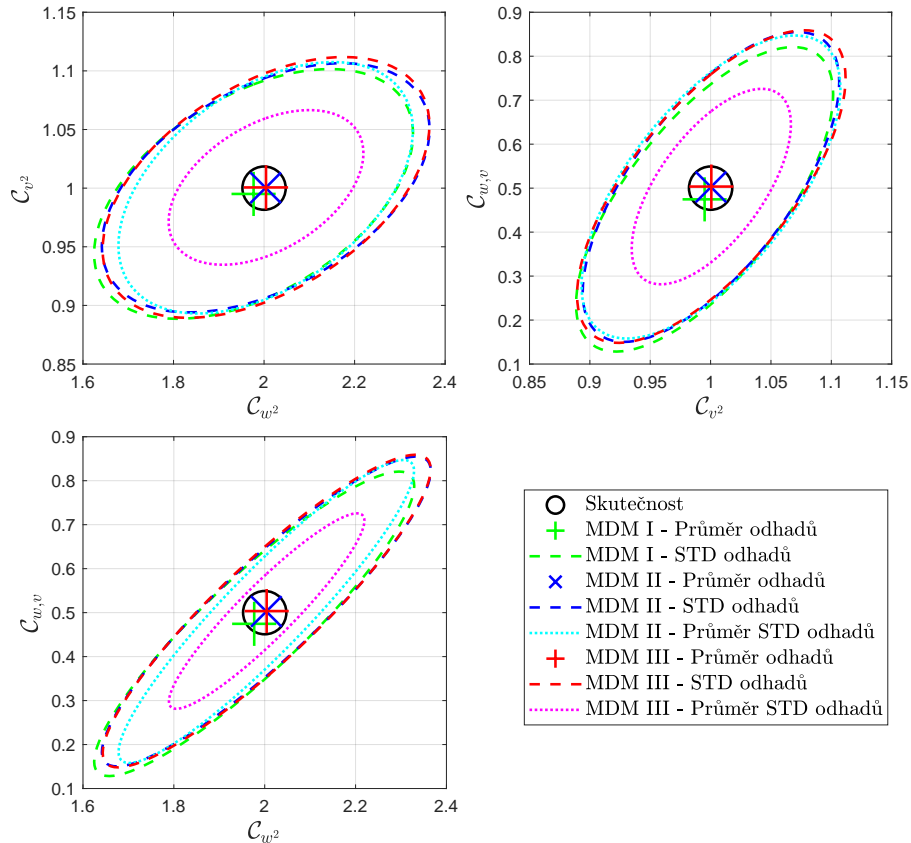


Obrázek 9.3: Odhady kovariancí vzájemně závislých šumů v LTV modelu

Z obrázku 9.3 plyne následující:

- Odhady získané pomocí Bélangerovy metody a standardní MDM jsou koncentrovány kolem skutečné hodnoty. Nicméně odhady získané pomocí vážené MDM I se mírně odchyľují od skutečné hodnoty.
- Hodnoty kovarianční matice (STD) odhadu získané pomocí vážené MDM I jsou významně menší než hodnoty kovarianční matice (STD) odhadů získaných pomocí Bélangerovy metody a standardní MDM, které jsou si navzájem velice podobné.
- Vážená MDM I poskytuje odhad kovarianční matice (STD) odhadu (7.33) (purpurová tečkovaná čára), která je téměř totožná s kovarianční maticí (STD) vypočtenou na základě MC simulací (zelená čárkovaná čára).

Průměr a STD odhadů kovariancí šumů získané průměrováním přes MC simulace pro vážené MDM I, MDM II a MDM III jsou vykresleny v obrázku 9.4. Kromě toho je na obrázku vyobrazen i průměr odhadnutých kovariančních matic (STD) odhadů kovariancí šumů (7.33), které poskytly vážené MDM II a MDM III.



Obrázek 9.4: Vážené odhady kovariancí vzájemně závislých šumů

Z obrázku 9.4 plyne následující:

- Odhady získané pomocí vážené MDM II a MDM III jsou, oproti vážené MDM I, koncentrovány kolem skutečné hodnoty.
- Hodnoty kovariančních matic (STD) odhadu získaných pomocí všech vážených MDM I, MDM II a MDM III jsou si velice podobné.
- Odhad kovarianční matice (STD) odhadu pro vážené MDM II a MDM III (tyrkysová a purpurová tečkovaná čára) se liší od kovarianční matice (STD) odhadů vypočtených na základě MC simulací (modrá a červená čárkovaná čára).

9.3 Celkový a postupný odhad MDM

V této kapitole budou pomocí MDM odhadovány necentrální i centrální momenty vzájemně a časově nezávislých šumů pro LTV model systému popsany rovnicemi (2.1), (2.2). MDM odhad bude získán jednak pomocí celkového výpočtu z podkapitoly 6.2.2, 6.2.3, ale i pomocí postupného výpočtu z podkapitoly 6.2.4, 6.2.5. Známé hodnoty použitého modelu systému jsou

$$F_k = 0.8 + 0.1 \sin(0.007\pi k), \quad H_k = 1 + 0.99 \sin(0.1\pi k), \quad u_k = C_{w,v} = 0,$$

naopak neznámé jsou momenty (Gaussových) šumů

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_w &= -2, \quad \mathcal{N}_{w^2} = 6, \quad \mathcal{N}_{w^3} = -20, \quad \mathcal{C}_{w^2} = 2, \quad \mathcal{C}_{w^3} = 0, \\ \mathcal{N}_v &= -1, \quad \mathcal{N}_{v^2} = 2, \quad \mathcal{N}_{v^3} = -4, \quad \mathcal{C}_{v^2} = 1, \quad \mathcal{C}_{v^3} = 0. \end{aligned}$$

Pro analýzy je využito 10^4 MC simulací, kde v každé simulaci, bude k odhadu momentů šumů využito celkem $\tau = 10^3$ měření.

Průměr a STD odhadů momentů šumů stavu a měření získané průměrováním přes MC simulace jsou uvedeny v tabulce 9.1.

| | Skutečnost | Celkový odhad | | Postupný odhad | |
|---------------------|------------|---------------|--------|----------------|--------|
| | | Průměr | STD | Průměr | STD |
| \mathcal{N}_w | -2 | -1.9992 | 0.0653 | -1.9992 | 0.0653 |
| \mathcal{N}_v | -1 | -0.9995 | 0.0861 | -0.9995 | 0.0861 |
| \mathcal{N}_{w^2} | 6 | 5.9907 | 0.5492 | 5.9698 | 0.4844 |
| \mathcal{N}_{v^2} | 2 | 1.9986 | 0.3081 | 2.0059 | 0.3268 |
| \mathcal{N}_{w^3} | -20 | -19.8539 | 7.0559 | -19.9235 | 2.7317 |
| \mathcal{N}_{v^3} | -4 | -3.9637 | 2.1482 | -4.0342 | 2.3276 |
| \mathcal{C}_{w^2} | 2 | 1.9964 | 0.3507 | 1.9850 | 0.2229 |
| \mathcal{C}_{v^2} | 1 | 1.0049 | 0.3941 | 1.0042 | 0.1327 |
| \mathcal{C}_{w^3} | 0 | 0.0327 | 3.4081 | 0.0018 | 0.8168 |
| \mathcal{C}_{v^3} | 0 | -0.0650 | 4.3757 | -0.0059 | 0.6115 |

Tabulka 9.1: MDM celkový a postupný odhad momentů šumů.

Poznamenejme, že v tabulce 9.1 jsou zapsány pouze nekřížové odhadnuté momenty šumů. Nicméně pomocí celkového odhadu druhého a třetího necentrálního momentu byly také odhadnuty další 3 ($\mathcal{N}_w^{\otimes 2}$, $\mathcal{N}_w \otimes \mathcal{N}_v$, $\mathcal{N}_v^{\otimes 2}$)

a 8 ($\mathcal{N}_{w^2} \otimes \mathcal{N}_w$, $\mathcal{N}_{w^2} \otimes \mathcal{N}_v$, $\mathcal{N}_{v^2} \otimes \mathcal{N}_v$, $\mathcal{N}_{v^2} \otimes \mathcal{N}_w$, $\mathcal{N}_w^{\otimes 2} \otimes \mathcal{N}_w$, $\mathcal{N}_v^{\otimes 2} \otimes \mathcal{N}_w$, $\mathcal{N}_w^{\otimes 3}$, $\mathcal{N}_v^{\otimes 3}$) prvků. Z tohoto důvodu u celkových odhadů lze vidět větší varianci odhadu než u postupného odhadu.

9.4 Vztah pořadí použití měření a kvality odhadu kovariance šumů

V této kapitole se podíváme, jak změny pořadí použití měření ovlivní model systému a tím i výslednou kvalitu odhadu kovariancí šumů pomocí MDM.

Uvažujme model systému (7.23), (7.24), který obsahuje vzájemně a časově nezávislé šumy stavu a měření, přičemž jednotlivé známé hodnoty modelu systému jsou následující

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_k = [1 \quad 0], \mathcal{W}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \mathcal{V}_k = 1, \mathcal{N}_w = \mathcal{N}_v = u_k = 0.$$

Naopak neznámé jsou kovariance šumů

$$\mathcal{N}_{w^2} = \mathcal{N}_{v^2} = 1.$$

Pro analýzu je využito 10^4 MC simulací, kde v každé simulaci bude k odhadu kovariancí šumů využito celkem $\tau = 10^3$ měření. Také bude použito každé $M \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ -té měření, díky čemuž lze rovnice dynamiky (7.28) zapsat v následující podobě

$$\mathbf{x}_{k+M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.2M \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_k} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} (M-1)0.2^2 & \dots & 0.2^2 & 0 \\ 0.2 & \dots & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{W}_k} \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_{k+M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_k^M}, \quad (9.1)$$

přičemž platí

$$\left(\mathcal{N}_{(\mathbf{w}_k^M)^2} \right)_M = \mathbf{I}_M \mathcal{N}_{w^2}, \quad (9.2)$$

$$\mathcal{W}_k \left(\mathcal{N}_{(\mathbf{w}_k^M)^2} \right)_M \mathcal{W}_k^T = \begin{bmatrix} \frac{2M^3-3M^2+M}{2} 0.2^4 & \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 \\ \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 & M 0.2^2 \end{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2}. \quad (9.3)$$

Tuto rovnici dynamiky (9.3) je možné také zapsat v alternativní podobě při použití náhodné veličiny $\mathcal{X}_k \mathcal{X}_k$ jako

$$\mathbf{x}_{k+M} = \mathcal{F}_k \mathbf{x}_k + \mathcal{X}_k \mathcal{X}_k, \quad (9.4)$$

kde

$$\mathcal{X}_k = (\mathcal{Z}_k)^{-1} \mathcal{W}_k \mathbf{W}_k^M \quad (9.5)$$

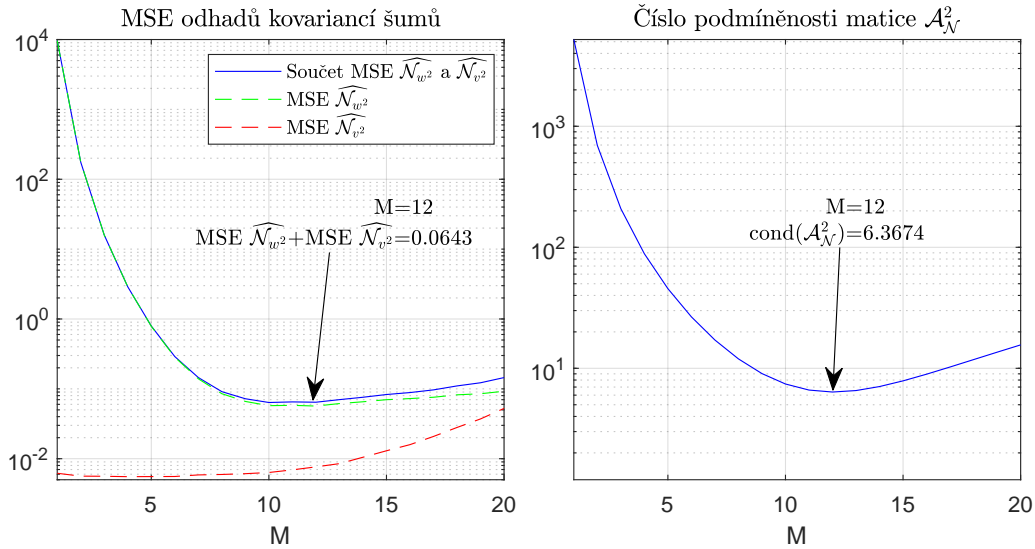
$$\mathcal{Z}_k = \text{chol} \left(\begin{bmatrix} \frac{2M^3-3M^2+M}{2} 0.2^4 & \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 \\ \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 & M 0.2^2 \end{bmatrix} \right), \quad (9.6)$$

a $\text{chol}(\mathbf{A})$ značí Choleského dekompozici matice \mathbf{A} , přičemž platí následující vztahy pro momenty

$$(\mathcal{N}_{\mathcal{X}_k^2})_M = \mathbf{I}_{n_x} \mathcal{N}_{w^2}, \quad (9.7)$$

$$\mathcal{Z}_k (\mathcal{N}_{\mathcal{X}_k^2})_M \mathcal{Z}_k^T = \begin{bmatrix} \frac{2M^3-3M^2+M}{2} 0.2^4 & \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 \\ \frac{M^2-M}{2} 0.2^3 & M 0.2^2 \end{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2}. \quad (9.8)$$

K celkovému odhadu kovariancí šumů je použita matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$, která obsahuje celkem M sad rovnic pro časové okamžiky $k = i, M + i, 2M + i, \dots$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, M - 1\}$, aby bylo využito co nejvíce měření jak bylo popsáno v kapitole 7.11. Výsledná kvalita odhadů kovariancí šumů popsána pomocí MSE získaná průměrováním přes MC simulace a číslo podmíněnosti matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$ jsou vykresleny v obrázku 9.5.



Obrázek 9.5: Vliv kvality odhadu kovariancí šumů pomocí přeskládání měření

Z obrázku 9.5 plyne následující:

- MSE odhadů kovariancí šumů je závislé na volbě parametru M .

- Průběh hodnot čísel podmíněnosti a součtu MSE odhadů kovariancí šumů v závislosti na M je velmi podobné.
- Pro hodnotu $M = 12$ vybranou podle čísla podmíněnosti matice $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}^2$ je hodnota součtu MSE odhadů momentů šumů 0.0643, což je velice podobné hodnotě minimum součtu MSE odhadů 0.0638 v $M = 10$.

Z tohoto příkladu je vidět, že vztah pořadí použití měření může mít významně pozitivní vliv na výslednou kvalitu odhadovaných kovariancí šumů.

9.5 Odhad parametrů šumů

V této kapitole budou pomocí MDM odhadnuty parametry hustoty pravděpodobnosti vzájemně a časově nezávislých šumů pro LTV model systému popsaného rovnicemi (2.1), (2.2). Známé hodnoty použitého modelu systému jsou

$$F_k = 0.9 + 0.1 \sin\left(\frac{5k}{\tau}\right), \quad H_k = \begin{bmatrix} 2 + \sin\left(\frac{13k}{\tau}\right) \\ \cos\left(\frac{9k}{\tau}\right) \end{bmatrix}, \quad u_k = 0.$$

Šumy stavu a měření se uvažují vzájemně a časově nezávislé. Šum stavu je popsán Gaussovou PDF $\mathbf{G}(w_k; \boldsymbol{\theta}_w)$ s neznámými parametry $\boldsymbol{\theta}_w = [\bar{w} \quad Q]^T$ (8.10), kde $\bar{w} = Q = 1$. Oproti tomu šum měření popsán bimodální Gaussovou směsí PDF $\mathbf{GM}(\mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}_v)$ s neznámými parametry $\boldsymbol{\theta}_v = [\alpha_1 \quad \bar{\mathbf{v}}_1^T \quad \bar{\mathbf{v}}_2^T \quad (\mathbf{R}_1^U)^T \quad (\mathbf{R}_2^U)^T]^T$ (8.12), kde

$$\alpha_1 = 0.8, \quad \bar{\mathbf{v}}_1 = [4 \quad -3]^T, \quad \mathbf{R}_1^U = [3 \quad 0.5 \quad 2]^T, \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = [6 \quad 7]^T, \quad \mathbf{R}_2^U = [4 \quad 2 \quad 4]^T.$$

Problém ale i řešení odhadu parametrů pro takovýto model systému byl popsán v druhém příkladu v kapitole 8.2.1. Proto bude tohoto postupu řešení, kdy byly samostatně pro šum stavu a měření nejdříve odhadnuty momenty, díky nimž byly následně odhadnuty i parametry těchto šumů, využito i v tomto případě. Poznamenejme, že k odhadu prvních pěti necentrálních momentů šumů je využito postupného odhadování, jak bylo popsáno v kapitole 6.2.4. Pro analýzu je využito 10^3 MC simulací, kde v každé simulaci bude k odhadu momentů šumů využito celkem 10^5 a 10^6 měření τ .

Průměr a STD odhadů momentů a parametrů šumů stavu získané průměrováním přes MC simulace jsou zapsány v tabulce 9.2.

| | \mathcal{N}_w | \mathcal{N}_{w^2} | \mathcal{N}_{w^3} | \mathcal{N}_{w^4} | \mathcal{N}_{w^5} | \bar{w} | Q |
|------------------------|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|-------|
| Skutečnost | 1 | 2 | 4 | 10 | 26 | 1 | 1 |
| Průměr ($\tau=10^5$) | 1 | 1 | 3.999 | 10.003 | 26.012 | 1 | 1 |
| Průměr ($\tau=10^6$) | 1 | 2 | 4 | 10.001 | 25.998 | 1 | 1 |
| STD ($\tau=10^5$) | 0.004 | 0.035 | 0.118 | 0.628 | 2.74 | 0.004 | 0.032 |
| STD ($\tau=10^6$) | 0.001 | 0.011 | 0.038 | 0.2 | 0.874 | 0.001 | 0.009 |

Tabulka 9.2: Skutečné a odhadnuté momenty a parametry šumu stavu w_k .

Průměr a STD několika vybraných prvků³ z odhadů momentů šumů měření získané průměrováním přes MC simulace jsou sepsány v tabulce 9.3. Připomeňme, že $\mathcal{N}_{\mathbf{v}^m}^{\mathbf{U}}(i)$ je prvek vektoru $\mathcal{N}_{\mathbf{v}^m}^{\mathbf{U}}$ na i -tém řádku. Z těchto odhadnutých momentů šumu měření byly následně odhadnuty parametry šumů měření $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$ a průměr a STD těchto odhadů jsou sepsány v tabulce 9.4.

³Z důvodu úspory místa jsou v tabulce 9.3 vykresleny pouze první dva prvky pro každý z pěti odhadnutých momentů šumů měření.

| | $\mathcal{N}_v(1)$ | $\mathcal{N}_v(2)$ | $\mathcal{N}_{v^2}^U(1)$ | $\mathcal{N}_{v^2}^U(2)$ | $\mathcal{N}_{v^3}^U(1)$ | $\mathcal{N}_{v^3}^U(2)$ | $\mathcal{N}_{v^4}^U(1)$ | $\mathcal{N}_{v^4}^U(2)$ | $\mathcal{N}_{v^5}^U(1)$ | $\mathcal{N}_{v^5}^U(2)$ |
|--------------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Skutečnost | 4.4 | -1 | 23.2 | -0.4 | 137.6 | 18.4 | 898.4 | 234 | 6358.4 | 2341.6 |
| Průměr ($\tau = 10^5$) | 4.399 | -1 | 23.196 | -0.403 | 137.575 | 18.369 | 898.257 | 233.739 | 6355.802 | 2339.178 |
| Průměr ($\tau = 10^6$) | 4.4 | -1 | 23.199 | -0.402 | 137.591 | 18.387 | 898.303 | 233.842 | 6357.979 | 2340.359 |
| STD ($\tau = 10^5$) | 0.031 | 0.014 | 0.295 | 0.098 | 2.693 | 0.762 | 27.854 | 8.023 | 317.64 | 90.45 |
| STD ($\tau = 10^6$) | 0.01 | 0.004 | 0.091 | 0.03 | 0.824 | 0.24 | 8.525 | 2.53 | 98.342 | 27.662 |

Tabulka 9.3: Skutečné a odhadnuté momenty šumu měření \mathbf{v}_k .

| | α_1 | $\bar{\mathbf{v}}_1$ | $\bar{\mathbf{v}}_2$ | \mathbf{R}_1^U | \mathbf{R}_2^U |
|--------------------------|------------|----------------------|----------------------|------------------|------------------|
| Skutečnost | 0.8 | 4 | -3 | 6 | 7 |
| Průměr ($\tau = 10^5$) | 0.803 | 3.989 | -2.988 | 6.061 | 7.078 |
| Průměr ($\tau = 10^6$) | 0.801 | 3.999 | -2.997 | 6.015 | 7.02 |
| STD ($\tau = 10^5$) | 0.025 | 0.132 | 0.099 | 0.359 | 0.417 |
| STD ($\tau = 10^6$) | 0.012 | 0.065 | 0.039 | 0.165 | 0.178 |
| | | | | 3 | 3 |
| | | | | 0.5 | 2 |
| | | | | 2.025 | 4 |
| | | | | 3.901 | 2 |
| | | | | 3.975 | 4 |
| | | | | 0.575 | 2 |
| | | | | 0.264 | 4 |
| | | | | 0.089 | 2 |
| | | | | 0.326 | 4 |
| | | | | 0.805 | 4 |
| | | | | 0.805 | 4 |

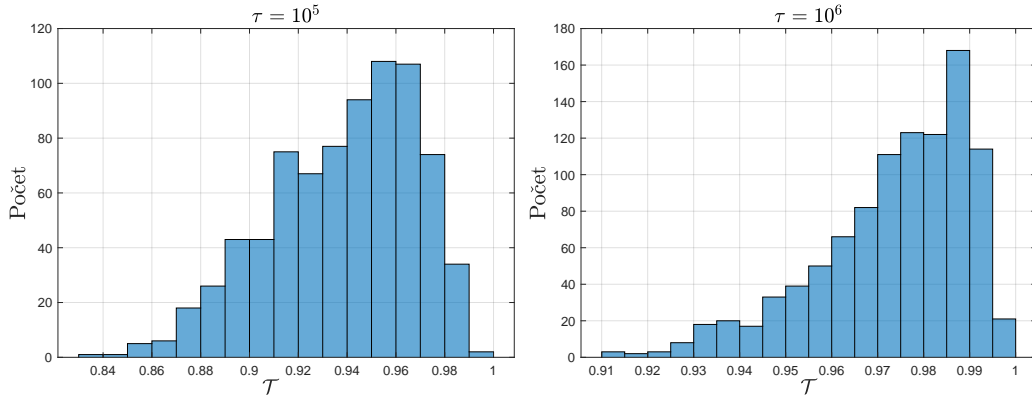
Tabulka 9.4: Skutečné a odhadnuté parametry šumu měření \mathbf{v}_k .

Z tabulek 9.2, 9.3 a 9.4 je vidět, že výsledné odhady momentů, stejně jako parametrů, jsou velmi blízko ke skutečným hodnotám. Dále hodnoty ukazují, že pro větší počet dat τ má odhad momentů a parametrů šumů nižší varianci.

Z odhadnutých parametrů šumu měření $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}}$ je vypočítáno kritérium hodnotící celé PDF zapsané následujícím vztahem

$$\mathcal{T} = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{abs} \left(\text{GM}(\mathbf{v}_k; \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}) - \text{GM}(\mathbf{v}_k; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}}) \right) d\mathbf{v}_k}{2}. \quad (9.9)$$

Tato hodnota reprezentuje, jak moc podobná je odhadnutá hustota pravděpodobnosti té skutečné. Pokud jsou odhadnutá a skutečná hustoty pravděpodobnosti totožné, tak $\mathcal{T} = 1$. Naopak pokud by se hustoty ani částečně nepřekrývaly, pak bude hodnota kritéria $\mathcal{T} = 0$. Veškeré hodnoty \mathcal{T} pro počet měření $\tau = 10^5$ a $\tau = 10^6$ jsou vykresleny pomocí histogramů v obrázku 9.6.



Obrázek 9.6: Hodnoty \mathcal{T} pro veškeré MC simulace.

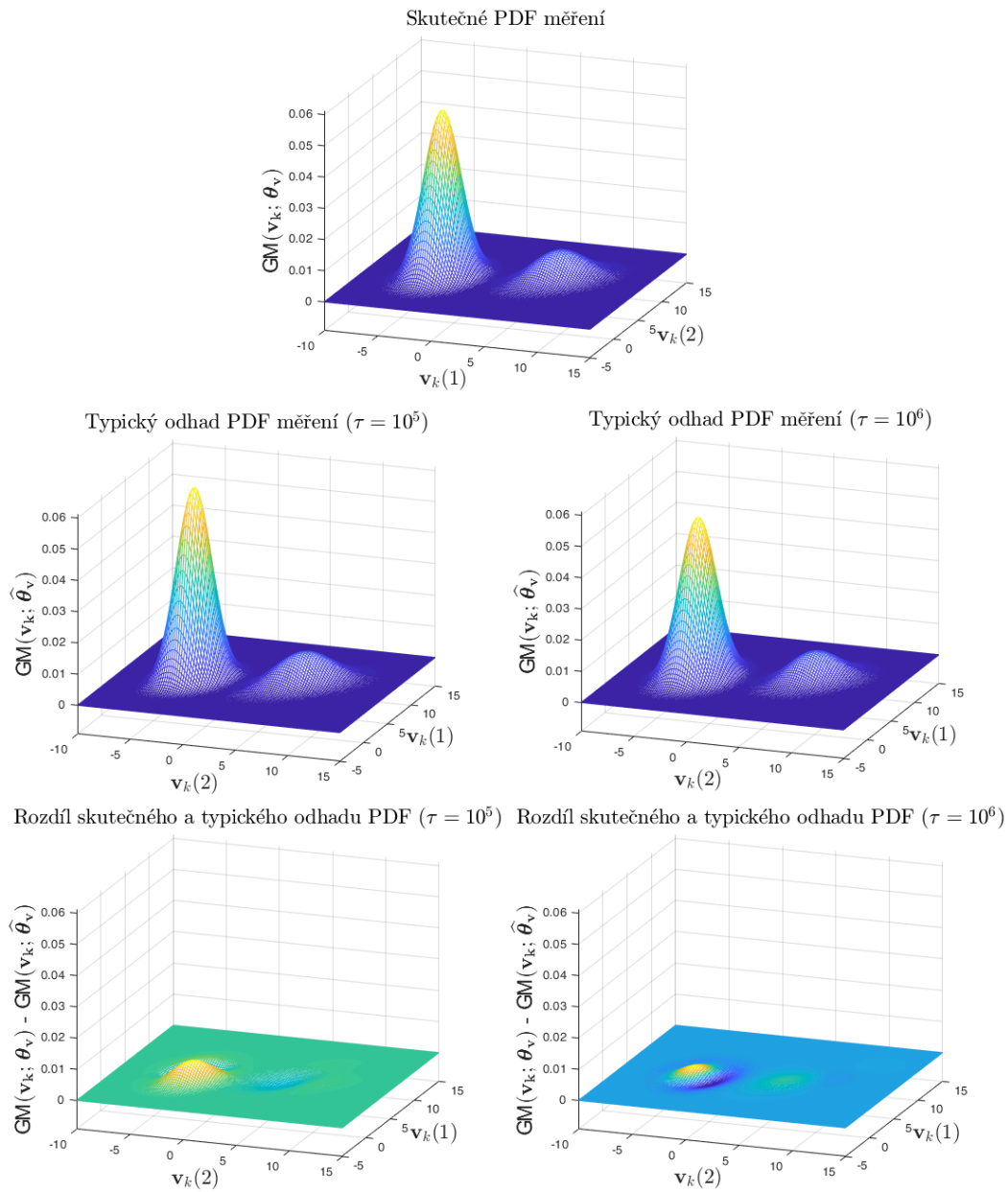
Odhadnutá hustota pravděpodobnosti měření $\text{GM}(\mathbf{v}_k; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}})$, která odpovídá mediánu mezi všemi hodnotami \mathcal{T} , je nazývána typickým odhadem. Pro $\tau = 10^5$ má medián hodnotu $\mathcal{T} = 0.9435$ a příslušný typický odhad vektoru parametrů $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}}$ je dán parametry

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_1 &= 0.7756, \widehat{\mathbf{v}}_1 = [4.1814 \quad -3.0631]^T, \widehat{\mathbf{R}}_1^{\text{U}} = [2.4028 \quad 0.6091 \quad 1.8453]^T, \\ \widehat{\mathbf{v}}_2 &= [5.7632 \quad 6.6186]^T, \widehat{\mathbf{R}}_2^{\text{U}} = [4.1453 \quad 2.5191 \quad 4.6204]^T. \end{aligned}$$

Obdobně pro $\tau = 10^6$ má medián hodnotu $\mathcal{T} = 0.9779$ a příslušným typickým odhadem vektoru parametrů $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{v}}$ je dán odhady

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_1 &= 0.8081, \widehat{\mathbf{v}}_1 = [3.9840 \quad -2.9561]^T, \widehat{\mathbf{R}}_1^{\text{U}} = [3.1251 \quad 0.4863 \quad 2.1084]^T, \\ \widehat{\mathbf{v}}_2 &= [6.0897 \quad 7.1191]^T, \widehat{\mathbf{R}}_2^{\text{U}} = [3.8480 \quad 1.8021 \quad 3.8122]^T. \end{aligned}$$

Skutečné PDF měření, typické odhady PDF měření pro $\tau = 10^5$ a $\tau = 10^6$ a jejich rozdíly jsou pro úplnost vykresleny na obrázku 9.7.



Obrázek 9.7: Ilustrace skutečné PDF měření, jejich typických odhadů a jejich rozdílů.

Z obrázku 9.7 je vidět, že typické odhady PDF měření jsou velice blízko skutečné PDF měření.

9.6 Odhad kovariancí šumů - nelineární model

V této kapitole bude využito MDM k odhadu kovariancí šumů pro nelineární model. Konkrétně se bude jednat o model objektu, kde informace o jeho poloze je získávána využitím globálního navigačního satelitního systému (GNSS) [96, 102].

Na počátku podkapitoly v 9.6.1 bude představen systém jakožto generátor dat kde budou definován nejen rovnice samotné dynamiky a měření ale také popis šumů stavu a měření. Následně bude představen model, který bude využit k odhadu kovariancí šumů. Jednotlivé parametry pro generování dat a odhad kovariancí budou ukázány v následujících podkapitolách 9.6.3 a 9.6.4. Protože budou v tomto případě dostupné skutečný popis šumů z 9.6.1, budou závěrem této podkapitoly výsledné odhady vlastností šumů přímo porovnávat se skutečnými hodnotami.

9.6.1 Systém - generátor dat

Dynamika stavu je v tomto případě popsána pomocí následující rovnice

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_k} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} T_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_k} \mathbf{u}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} T_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_k} \mathbf{w}_k, \quad (9.10)$$

kde první tři složky stavu $\mathbf{x}_k(1)$, $\mathbf{x}_k(2)$ a $\mathbf{x}_k(3)$ představují pozici objektu v souřadnicích x , y a z v metrech v souřadném systému ECEF (anglickou zkratkou Earth-Centred-Earth-Fixed). Hodiny přijímače GNSS signálu umístěné na objektu, pomocí kterých se počítá poloha daného přijímače, se budou vlivem poruch jako například změny teploty odchylovat od hodin satelitního systému. Proto čtvrtá složka stavu $\mathbf{x}_k(4)$ představuje chybu hodin přijímače vyjádřenou po vynásobení rychlostí světla v metrech. Poslední pátá složka stavu $\mathbf{x}_k(5)$ představuje změnu chyby hodin přijímače vyjádřenou po vynásobení rychlostí světla v metrech za sekundu. Hodnota T_k v rovnici dynamiky určuje dobu mezi časovými okamžiky k a $k+1$ v sekundách⁴.

Skutečné akční zásahy působící změnu polohy ve všech osách polohy $T_k(\mathbf{u}_k(i) + \mathbf{w}_k(i))$, $i \in \{1, 2, 3\}$ z okamžiku k do $k+1$ nejsou známé. Nicméně

⁴Veškeré časové hodnoty v této kapitole jsou brány v pozemském smyslu.

jsou dostupná jejich měření jako $T_k \mathbf{u}_k(i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, která jsou získána pomocí zpracování měření z dostupných senzorů v pohybujícím se objektu⁵. Poslední prvek vektoru řízení $\mathbf{u}_k(4)$ představuje dostupný reset chyby hodin⁶, kterým se udržuje chyba hodin v rozumně velkých hodnotách v porovnání s hodnotami polohy objektu $\mathbf{x}_k(i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. První tři složky šumu $T_k \mathbf{w}_k(i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ představují chybu měření skutečného akčního zásahu. Poslední čtvrtá složka šumu $T_k \mathbf{w}_k(4)$ reprezentuje kolísání změny chyby hodin přijímače za jednu sekundu.

Rovnici měření lze v tomto případě popsat pomocí následujícího vztahu

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k, \quad (9.11)$$

přičemž počet měření a tím i dimenze vektorů \mathbf{z}_k , $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k)$ a \mathbf{v}_k jsou dány počtem viditelných satelitů v daný okamžik, tj. lze od nich přijímat signál. Měření \mathbf{z}_k z těchto viditelných satelitů představuje zašuměnou pseudovzdálenost od přijímače k tomuto satelitu, kterou konkrétně pro j -tý prvek měření lze zapsat pomocí vztahu

$$z_k(j) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\mathbf{x}_k(i) - \mathbf{p}_k^j(i))^2} + \mathbf{x}_k(4) + \mathbf{v}_k(j), \quad (9.12)$$

kde $z_k(j)$ je j -tá složka vektoru měření, $\mathbf{p}_k^j(1)$, $\mathbf{p}_k^j(2)$ a $\mathbf{p}_k^j(3)$ je dostupná⁷ poloha satelitu j -tého měření v čase k v souřadnicích x , y a z v ECEF a $\mathbf{v}_k(j)$ je chyba pseudovzdálenosti j -tého měření v čase k .

Poznamenejme, že parametry použitého modelu GNSS jsou velmi podobné globálnímu pozičnímu systému (GPS - z anglického global positioning system). Například jednotlivé satelity se pohybují ve výšce 20350 km s dobou jednoho oběhu 12 hodin a obíhají ve čtveřicích na celkem šesti oběžných drahách, které jsou navzájem posunuty vždy o 60° se sklonem 55° .

Dále uvažujme, že šum stavu \mathbf{w}_k má nulovou střední hodnotu, je časově nekorelovaný a má časově neměnnou kovarianční matici

$$(\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2})_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

⁵U automobilu to může být využití odometrického, inerciálního navigačního či jiného systému, který využívá měření z celé řady senzorů, jako jsou například akcelerometr, gyroskop, kamera, radar, otáčky a natočení kol.

⁶Pokud odhad chyby hodin přijímače překročí uživatelem zvolenou hodnotu, je proveden reset hodin o přesně známé velikosti.

⁷Polohu satelitů lze vypočítat pomocí informací obsažených v navigační zprávě, které jsou nazývány efemeridy.

Také předpokládejme, že zpoždění signálu odeslaného ze satelitu k přijímači, jako například ionosférické zpoždění, je potlačeno s využitím dvou různých frekvencí vysílaných ze satelitů. Obdobně i další zdroje různých zpoždění a chyb jako například troposférické zpoždění, Sagnacův efekt či chyby času odeslání zprávy ze satelitu jsou potlačeny také díky dostupným informacím z navigační zpráv. Díky tomu budeme uvažovat, že šum měření \mathbf{v}_k má nulovou střední hodnotu. Kovariance šumu měření je ovšem proměnná v čase s tím, jak se mění elevace⁸ jednotlivých satelitů. Za standardních podmínek a výše uvedených korekcí zpoždění lze očekávat [103], že varianci chyby pro j -té měření pseudovzdálenosti lze zapsat jako

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{(\mathbf{v}_k(j))^2} &= \mathbf{R}_{URA} + \mathbf{R}_{user,k}^j + \mathbf{R}_{tropo,k}^j, \\ \mathbf{R}_{URA} &= 0.5625, \\ \mathbf{R}_{user,k}^j &= \frac{f_{L1}^4 + f_{L5}^4}{(f_{L1}^2 - f_{L5}^2)^2} \left(\left(0.13 + 0.5 \exp \frac{-e_k^j \pi}{1800} \right)^2 + \left(0.15 + 0.43 \exp \frac{-e_k^j \pi}{1242} \right)^2 \right), \\ \mathbf{R}_{tropo,k}^j &= \frac{0.12012^2}{0.002001 + (\sin(e_k^j))^2},\end{aligned}\tag{9.14}$$

kde $f_{L1} = 1\,575.42\text{MHz}$ a $f_{L5} = 1\,176.45\text{MHz}$ jsou nosné frekvence, na nichž je přenášena navigační zprava od satelitu k přijímači, e_k^j je elevace satelitu v j -tém měření v čase k , \mathbf{R}_{URA} představuje varianci šumu způsobeného chybou pozice satelitu a chyby hodin času odeslání zprávy, $\mathbf{R}_{user,k}^j$ je variance šumu vzniklého zpracování signálu v přijímači pro j -té měření v čase k a $\mathbf{R}_{tropo,k}^j$ je variance šumu vzniklého při průchodu signálu skrze troposféru pro j -té měření v čase k . Mimodiagonální prvky kovarianční matice $(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2})_M$ jsou uvažovány nulové, tj. šumy v jednotlivých měřeních pseudovzdáleností jsou předpokládány vzájemně nezávislé. Šumy měření jsou také časově závislé s časovou konstantou 100 sekund [96].

Poznamenejme, že šumy stavu a měření jsou uvažovány vzájemně nezávislé a signály ze satelitu jsou přijímány již od elevace 0° .

9.6.2 Model rovnice měření a šumů pro úlohu identifikace

Jelikož MDM je navržena pro lineární modely, je potřeba linearizovat nelineární funkci v rovnici měření (9.11) například využitím Taylorovy řady. Díky tomu lze získat Taylorův polynom prvního řádu, který je z důvodu zanedbání vyšších členů aproximativní, nicméně požadovanou lineární funkcí

⁸Elevace satelitu je úhel od horizontu k satelitu.

stavu. S vědomím, že se jedná o aproximativní vztah, zapíšeme tento polynom jako

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) + \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (9.15)$$

kde $\hat{\mathbf{x}}_k$ je dostupný odhadu stavu⁹, který je v tomto případě také nazývaný linearizačním bodem, a \mathbf{H}_k je Jacobiho matice v bodě $\hat{\mathbf{x}}_k$. Díky vztahu (9.15) je možné upravit nelineární měření \mathbf{z}_k (9.11) a zapsat jej v linearizované podobě podle

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (9.16)$$

Dále, pro zjednodušení zápisu a objasnění dílčích problémů budeme uvažovat, že šum měření je časově nezávislý. Nicméně tento problém nebude opomenut a bude řešen v další kapitole s názvem „Parametry pro odhad kovariancí šumů“ 9.6.4.

Přestože jsou rovnice stavu (9.10) a měření (9.16) lineárními rovnicemi, nelze je využít v této podobě MDM k odhadu kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$, a to ze dvou důvodů. První důvod je, že jednotlivé kovariance $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ pro různé časové okamžiky k mohou obecně obsahovat různý počet prvků v závislosti na tom, kolik satelitů je viditelných. Druhým problémem je, že hodnota kovariance měření je proměnná v čase (9.14). Rovnici (6.14a) lze tedy v tomto případě zapsat jako

$$\mathcal{N}_{\mathbf{z}_k^2}^{\mathbf{U}} = \Phi_{\mathbf{z}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}_k^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^2}^{\mathbf{U}}, \quad (9.17)$$

kde unikátní prvky kovariance šumu měření v čase k uspořádané ve vektoru $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^2}^{\mathbf{U}}$ jsou bohužel časově proměnné. Nicméně oba výše zmíněné problémy lze vyřešit pomocí dostupné znalosti o elevaci \mathbf{e}_k^j jednotlivých satelitů následujícím způsobem.

Z rovnice (9.14) je vidět, že kovariance šumu měření mění svoji hodnotu v čase s tím, jak se mění elevace k jednotlivým satelitům. Je ale možné rozdělit prostor hodnot elevace¹⁰ na libovolný počet intervalů $\mathcal{I}_i, i = 1, 2, \dots, n_{\mathcal{I}}$, které jsou disjunktní a jejich sjednocení tvoří celý prostor hodnot elevace. Dále předpokládejme, že veškeré signály přijímané od satelitů, jejichž elevace jsou v jednom intervalu \mathcal{I}_i , jsou ovlivněné šumy s nulovou střední hodnotou a se stejnou variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}, i = 1, 2, \dots, n_{\mathcal{I}}$. Hodnotu variance $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ lze přibližně

⁹Odhad prvních čtyř prvků stavu je získán v každém okamžiku z měření \mathbf{z}_k pomocí nevážených nelineárních nejmenších čtverců (tzn. Gaussova-Newtonova metoda). K samotné linearizaci jsou potřeba odhady pouze prvních tří prvků stavu reprezentující polohu objektu, jak je vidět z rovnice (9.12).

¹⁰Uvažujme hodnoty elevace od 0° od 90°

očekávat takovou, jaká je hodnota variance (9.14) pro elevaci odpovídající středu příslušného intervalu \mathcal{I}_i . S vědomím, že se jedná o aproximativní vztah, lze zapsat vektor $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^2}^U$ (9.17) v následující podobě

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^2}^U = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2}^U \\ \mathcal{N}_{v_{k-N}^2}^U \\ \mathcal{N}_{v_{k-N+1}^2}^U \\ \vdots \\ \mathcal{N}_{v_{k+L-1}^2}^U \end{bmatrix} = \mathcal{I}_k \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2}^U \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_1} \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_2} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_{n_{\mathcal{I}}}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}}, \quad (9.18)$$

kde \mathcal{L} je nový vektor hledaných časově *neproměnných* kovariancí a \mathcal{I}_k je *známá* matice obsahující jedničky a nuly jejíž dimenze a struktura je dána aktuálními elevacemi a počtem viditelných satelitů.

Příklad

Uvažujme zjednodušený^a model objektu s měřením zašuměné pseudo-vzdálenosti, kde $n_x = 1$ a uvažujme že elevace je rozdělena do třech intervalů $\mathcal{I}_1 = \langle 0^\circ, 30^\circ \rangle$, $\mathcal{I}_2 = \langle 30^\circ, 60^\circ \rangle$ a $\mathcal{I}_3 = \langle 60^\circ, 90^\circ \rangle$. Pokud $L = N = 1$, v okamžik $k - 1$ jsou přijaty dva signály přičemž elevace satelitů jsou na intervalu \mathcal{I}_2 a \mathcal{I}_1 a v okamžik k je přijat jeden signál kde elevace satelitu je na intervalu \mathcal{I}_2 tak rovnice (9.18) bude vypadat následovně

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k^2}^U = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2} \\ \mathcal{N}_{(v_{k-1}(1))^2} \\ \mathcal{N}_{(v_{k-1}(2))^2} \\ \mathcal{N}_{v_k^2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{I}_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{w^2} \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_1} \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_2} \\ \mathbf{R}_{\mathcal{I}_3} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}}. \quad (9.19)$$

^aSmysl takto zjednodušeného příkladu spočívá v ilustraci hlavní myšlenky úpravy rovnice (9.18), přestože v jednodimenzionálním prostoru stavu ($n_x = 1$) nelze elevaci definovat. Zápis pro třídimenzionální prostor je značně komplikovaný.

Díky vztahu (9.18) je možné upravit rovnici (9.17) do podoby

$$\mathcal{N}_{\bar{\mathbf{Z}}_k^2}^U = \Phi_{\bar{\mathbf{Z}}_k^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_k^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}_k^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{I}_k \mathcal{L}, \quad (9.20)$$

kterou lze dále použít jen s několika mála úpravami jako v představené verzi MDM. Například rovnici (6.15a), která sjednocuje rovnice (9.20) pro všechny časové okamžiky do kompaktní podoby, je možné v tomto případě upravit

do podoby

$$\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^2}^2 = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{Z}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_N^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}_N^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{I}_N \\ \Phi_{\mathbf{Z}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{N+1}^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}_{N+1}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{I}_{N+1} \\ \vdots \\ \Phi_{\mathbf{Z}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\tau-L+1}^{\otimes 2} \Psi_{\mathcal{E}_{\tau-L+1}^2}^{\mathcal{N}} \mathcal{I}_{\tau-L+1} \end{bmatrix} \mathcal{L}, \quad (9.21)$$

kde vektor $\mathcal{N}_{\mathbf{Z}^2}^2$ (6.16) zůstává nezměněn.

Poznamenejme že matice \mathbf{H}_k v (9.16) nemá plnou sloupcovou hodnotu proto ji v této podobě nelze využít pro sensorovou kalibraci z kapitoly 7.6. Pokud se podíváme na matice měření \mathbf{H}_k , zjistíme že není funkcí změny chyby hodin GNSS přijímače, ale pouze polohy a chyby hodin GNSS přijímače. To znamená že matice měření \mathbf{H}_k má poslední sloupec nulový díky čemuž nesplňuje podmínku plné sloupcové hodnotnosti. Nicméně je možné, za účelem využití sensorové kalibrace, upravit rovnici měření (9.16) tak, aby neobsahoval poslední neměřený stav. Díky tomu se odstraní poslední nulový sloupec matice měření \mathbf{H}_k a pokud takto upravená matice měření

$$\bar{\mathbf{H}}_k = [\mathbf{H}_k(:, 1) \quad \mathbf{H}_k(:, 2) \quad \mathbf{H}_k(:, 3) \quad \mathbf{H}_k(:, 4)] \quad (9.22)$$

bude mít plnou sloupcovou hodnotu a počet řádku matice bude větší než počet sloupců je možné takto upravenou rovnici měření využít v kalibračním přístupu.

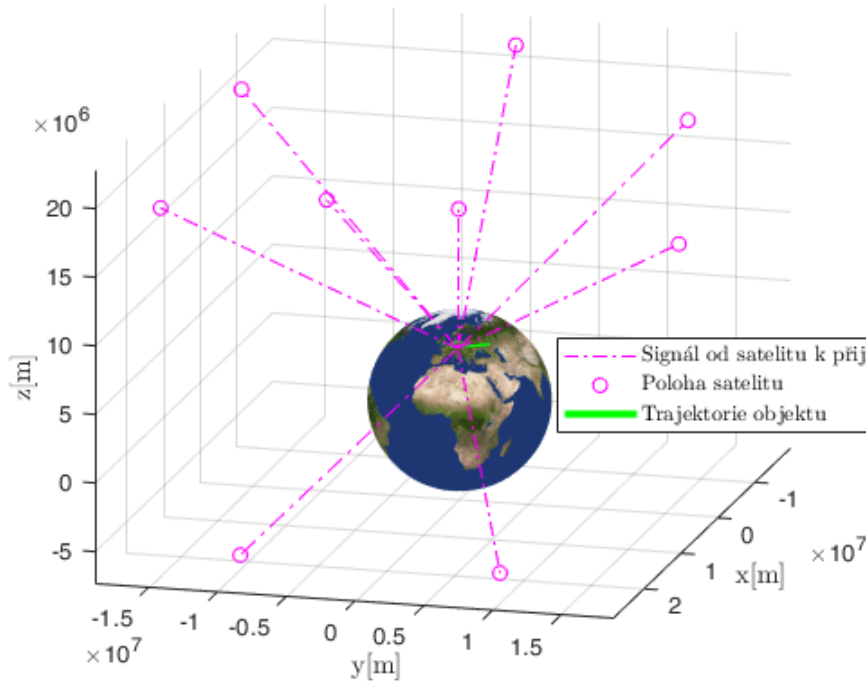
9.6.3 Parametry pro generování dat

Pro výše představený model je vygenerováno celkem $\tau = 86\,400$ měření, což přibližně odpovídá 24 hodinovému měření. Počáteční poloha pohybujícího se objektu a chyba hodin a změna chyby hodin GNSS přijímačem na něm umístěném je

$\mathbf{x}_0 = [4\,017\,325.26 \quad 956\,119.659 \quad 4\,844\,798.39 \quad 299\,792.458 \quad 3\,469.82]^T$, tj. objekt je na počátku na klíčovém místě¹¹, chyba hodin přijímače je 1 milisekunda a změna chyby hodin přijímače by bez resetu způsobila za jeden den průměrnou chybu hodin 1 sekundu. Šumy stavu a měření jsou generovány jako gaussovské náhodné veličiny s příslušnými kovariancemi (9.13) a (9.14). Doba mezi měřeními je generována podle vztahu $T_k = 1 + t_k$, kde t_k je gaussovská náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a kovariancí 0.01. Skutečný akční zásah na poloze $T_k (\mathbf{u}_k(i) + \mathbf{w}_k(i))$, $i \in \{1, 2, 3\}$ je takový, aby se objekt pohyboval po rovnoběžce rychlostí 100 km/h východním

¹¹Vstup do plzeňského pivovaru.

směrem. Reset chyby hodin $\mathbf{u}_k(4)$ vynuluje chybu hodin, když její hodnota překročí přibližně 10^7 metru¹². Zjednodušené vyobrazení počáteční polohy objektu, polohy viditelných satelitů a jejich signálů vysílaných k přijímači a celková trajektorie objektu jsou na obrázku 9.8.



Obrázek 9.8: Počáteční polohy satelitů a objektu s celou trajektorií.

9.6.4 Parametry pro odhad kovariancí šumů

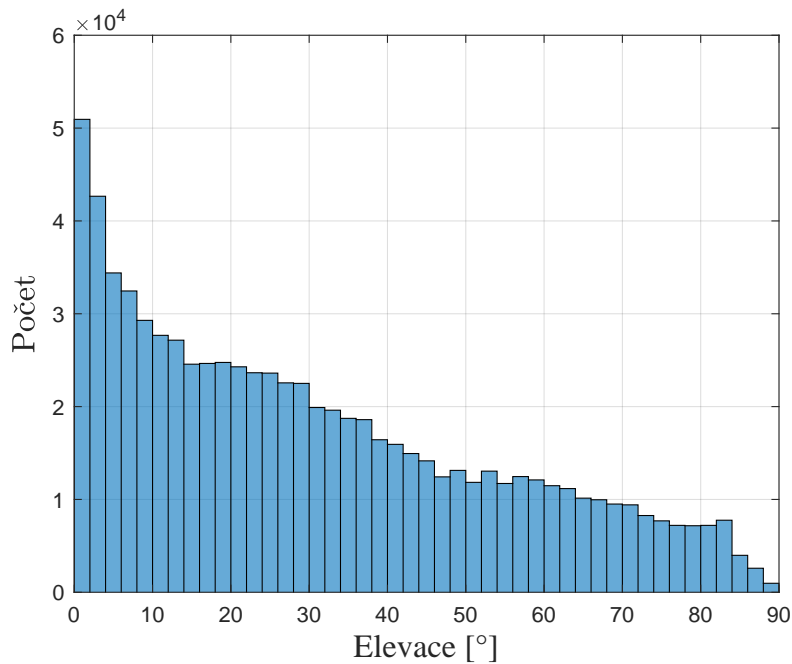
Nyní se vraťme k problému časové závislosti šumů měření. Uvažujme, že je potřeba odhadnout pouze kovariance šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$) a časovou korelací šumu měření popsánou pomocí $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j}$, $k \neq j$ není potřeba odhadovat. Jestliže je předpokládáno, že šum měření je časově závislý s časovou konstantou 100 sekund, lze očekávat, že šumy měření vzdálených alespoň 300 sekund od sebe budou již nezávislé¹³. To znamená, že k odhadu kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$) využijeme každé 300. měření, tj. $k = 0, 300, 600, \dots, 86\,400$, což odpovídá celkovému množství 289 měření, jak bylo ukázáno v kapitole 7.11. Zbývající měření, tj. $k = 1, 2, \dots, 299, 301, \dots, 86\,399$, kterých je celkem 86 112, budou využity k odhadu kovariancí šumu měření $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$)

¹²To odpovídá chybě přibližně 33 milisekund.

¹³Časová závislost daná momentem $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+300}}$ bude mít hodnotu přibližně $0.0025\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$.

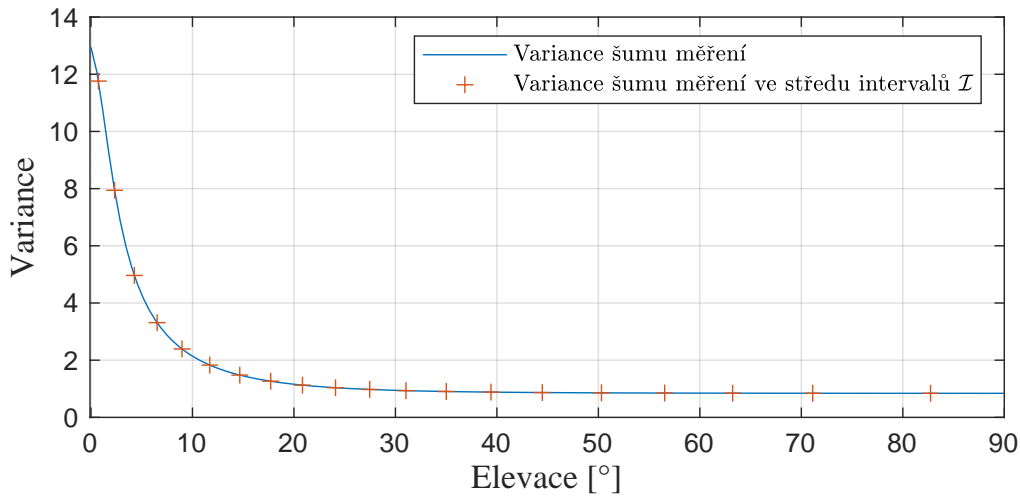
pomocí sensorové kalibrace z kapitoly 7.6.

Z důvodu odhadu kovariance šumu měření $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$) je prostor elevace rozdělen do celkem $n_{\mathcal{I}} = 20$ intervalů \mathcal{I}_i (9.18). Pro volbu hranic jednotlivých intervalů se nejdříve podíváme na elevace satelitů pro všechna dostupná měření, kterých je přibližně 774 600. Pro danou trajektorii objektu jsou elevace k jednotlivým satelitům vykresleny na obrázku 9.9.



Obrázek 9.9: Hodnoty elevací satelitů pro veškerá dostupná měření.

Pro jinou pozici na Zemi lze samozřejmě očekávat jiné rozdělení elevace, než je ukázáno na obrázku 9.9. Hranice intervalů jsou zvoleny tak, aby celkové množství dostupných měření bylo přibližně rovnoměrně rozděleno do všech 20 intervalů, tj. aby vycházelo přibližně 38 730 měření na každý jeden interval $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$. Díky tomu lze očekávat, že kvalita odhadů kovariancí pro jednotlivé intervaly bude podobná. Konkrétně hodnoty kovariance pro hodnoty elevace ze středu jednotlivých intervalů $\mathcal{I}_i, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$ spolu s kovariancemi šumů měření pro všechny hodnoty elevace jsou vykresleny na obrázku 9.10.



Obrázek 9.10: Kovariance šumů měření a středů intervalů \mathcal{I}_i .

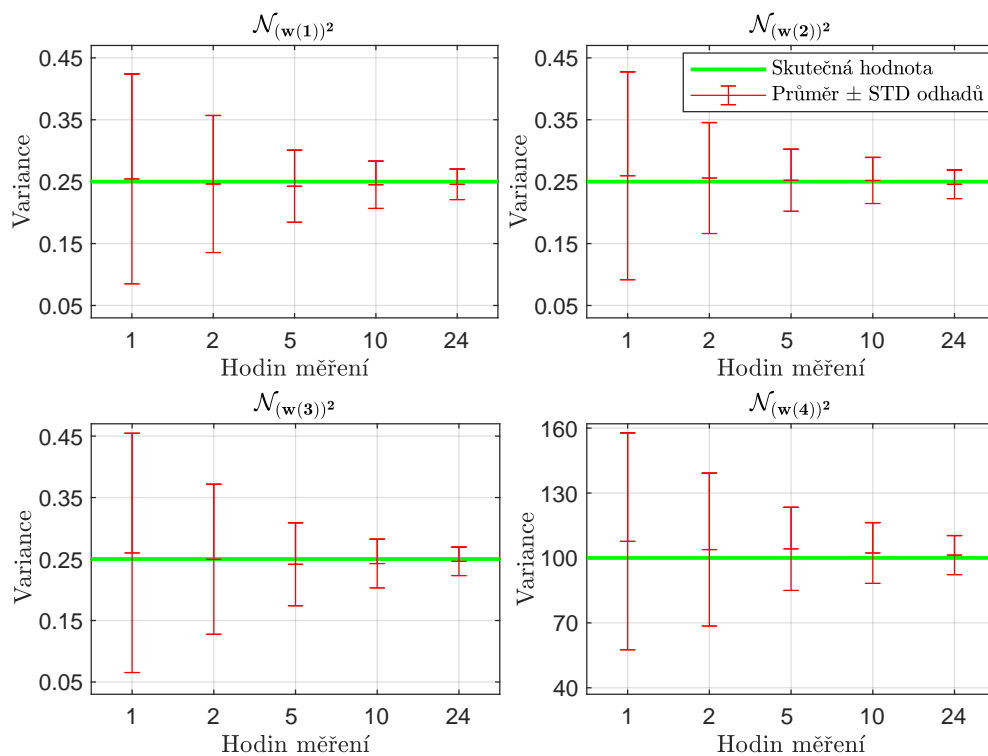
Protože bylo využito každého 300. měření pro odhad kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$), bylo z důvodu nižší výpočetní náročnosti před samotným odhadem využito transformace šumu stavu, jak to bylo ukázáno v kapitole 7.11.

Použitá počáteční znalost pro odhad kovariancí šumů pomocí rekurzivních nejmenších čtverců byla pro všechny hodnoty 1 s mírou důvěry 10^6 . Samotný odhad kovariancí šumů je proveden ve dvou krocích. Nejdříve jsou využita „vynechaná měření“ $k = 1, 2, \dots, 299, 301, \dots, 86\ 399$ k odhadu kovariancí šumu měření $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$), a to pomocí rekurzivních nejmenších čtverců hlavně z důvodu nižší náročnosti na paměť. Poté je výsledný odhad $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$) použit jako počáteční znalost kovariance šumu měření pro odhad obou kovariancí šumů $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ a $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ (či $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$) pro měření $k = 0, 300, 600, \dots, 86\ 400$, který je také počítán pomocí rekurzivních nejmenších čtverců.

Také je využit nejjednodušší způsob vážení diskutovaný v kapitole 7.12, tj. $\widehat{\mathcal{P}}^m = \mathcal{L}^m (\mathcal{L}^m)^T$ (7.32) v případě nerekurzivních nejmenších čtverců. Parametry MDM jsou zvoleny $N = 1$ a $L = 2$ a pro analýzu bylo použito celkem 100 MC simulací.

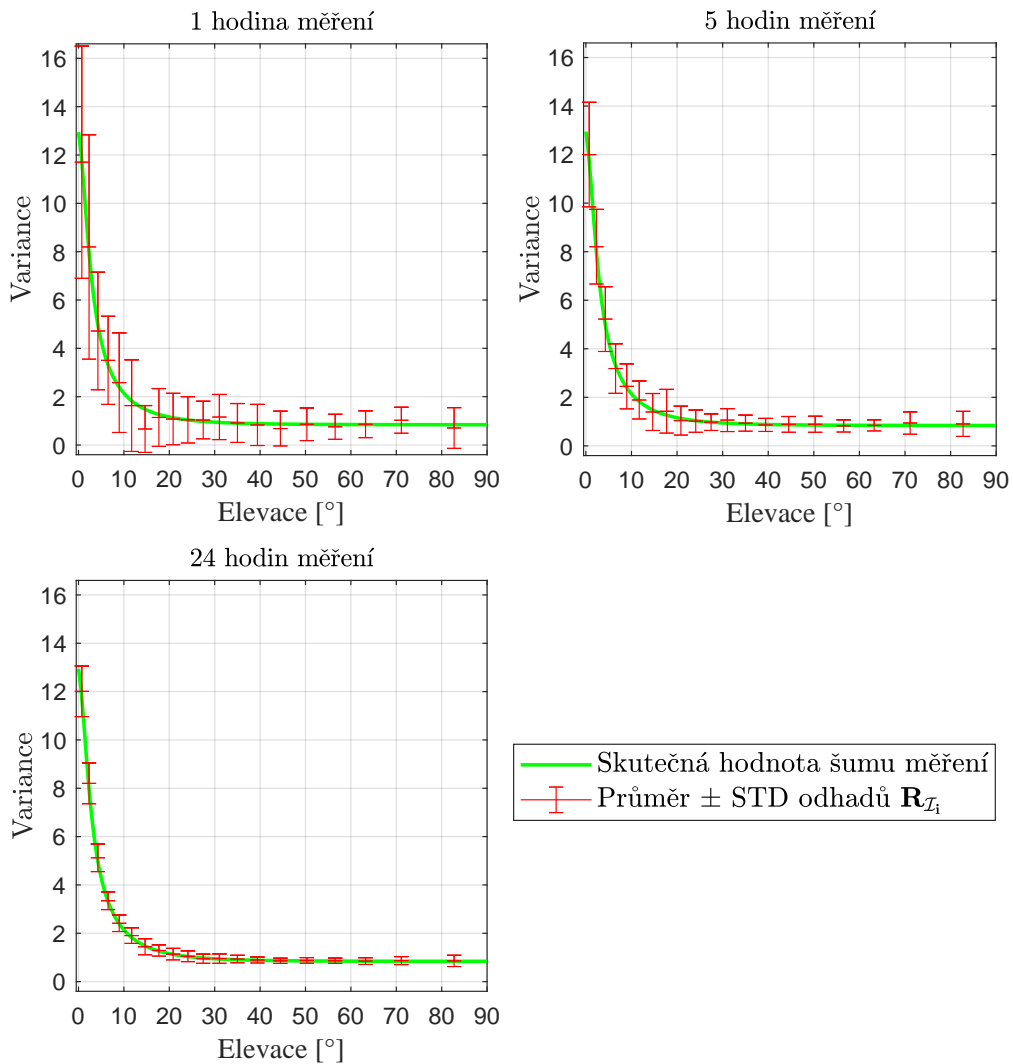
9.6.5 Výsledky odhadů kovariancí šumů

Průměr a STD odhadů vektoru $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ získaný průměrováním přes MC simulace pro data za dobu 1, 3, 5, 10 a 24 hodin jsou vykresleny na obrázku 9.11.



Obrázek 9.11: Kovariance skutečného a odhadovaného šumu stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$.

Obdobně i průměr a STD odhadů variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, 20\}$, který určuje i odhad momentu šumu měření $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ skrze vztah (9.18), získaný průměrováním přes MC simulace pro data za dobu 1, 5 a 24, hodin jsou vykresleny na obrázku 9.12.



Obrázek 9.12: Kovariance skutečných šumů měření a odhadů $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ ve středu jednotlivých intervalů \mathcal{I}_i .

Z obrázků 9.11 a 9.12 plyne následující:

- Odhady kovariance stavu $\mathcal{N}_{\mathbf{w}^2}$ jsou koncentrovány kolem skutečné hodnoty.
- Odhady variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ jsou koncentrovány kolem skutečné hodnoty kovariance šumu měření ve středu příslušného intervalu \mathcal{I}_i .
- S narůstajícím počtem měření se snižuje variance (STD) odhadů.

Poznamenejme, že odhady variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ v obrázku 9.12 jsou získány pomocí přístupu sensorové kalibrace, tudíž pro její odhad není potřeba žádná znalost rovnice dynamiky (tj. není potřeba znalost řízení \mathbf{u}_k a popisu šumu

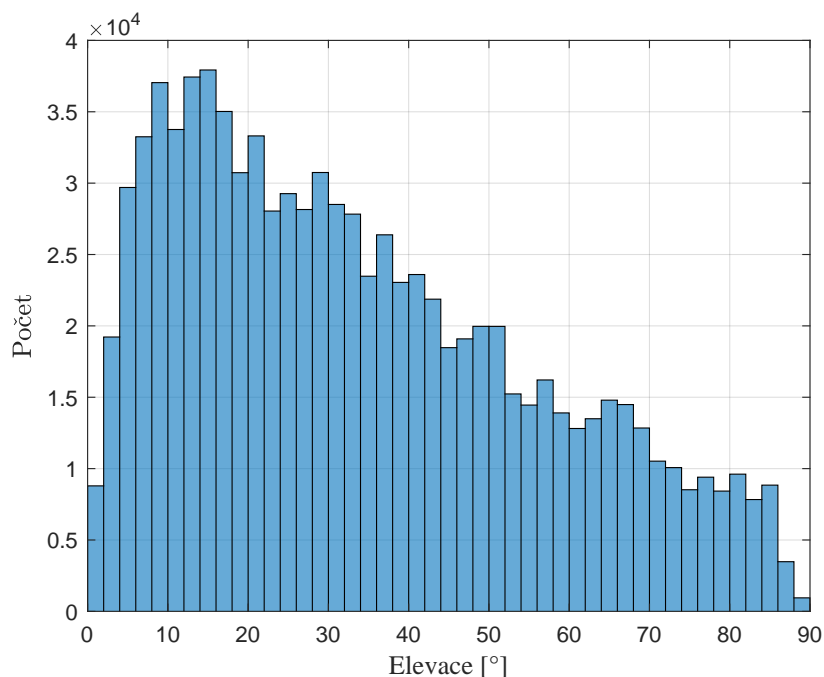
stavu \mathbf{w}_k), a dokonce ani časová závislost šumu měření \mathbf{v}_k , která je v tomto případě uvažována s časovou konstantou 100 sekund. K odhadu $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ je využito 86 112 měření z celkově 86 400 dostupných, takže pokud bychom využili veškerá měření k odhadu $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ výsledek by byl velmi podobný tomu z obrázku 9.12. Získaný odhad variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ lze využít například pro výpočet váhové matice v odhadu stavu v každém jednotlivém časovém okamžiku k .

9.7 Reálná měření pseudovzdáleností GNSS

V této podkapitole bude využito reálných dat z evropského GNSS Galileo k odhadu variance chyby pseudovzdáleností pomocí MDM. V porovnání s předchozí kapitolou není v tomto případě znám skutečný popis šumů, nicméně je dostupná geodeticky zaměřená poloha antény GNSS přijímače. Proto budou výsledné odhady variancí šumů měření pseudovzdáleností metodou MDM využity pro výpočet váženého odhadu polohy antény a chyby hodin GNSS přijímače. Díky dostupné zaměřené poloze bude vypočítána chyba tohoto váženého odhadu polohy antény GNSS přijímače a bude porovnána s chybou neváženého odhadu polohy antény GNSS přijímače.

9.7.1 Odhad variance šumu pseudovzdálenosti

Měření bylo prováděno na GNSS přijímači u-blox C099-F9P, kde za dobu měření 24.3 hodin bylo získáno celkem 711 817 pseudovzdáleností pro signál E1 na frekvenci $f_{E1} = 1\,575.42\text{MHz}$ a 734 795 pseudovzdáleností pro signál E5b na frekvenci $f_{E5b} = 1\,207.14\text{MHz}$. Poloha antény GNSS přijímače byla po celou dobu měření neměnná. Elevace dostupných satelitů za celou dobu měření je vykreslena na obrázku 9.13.

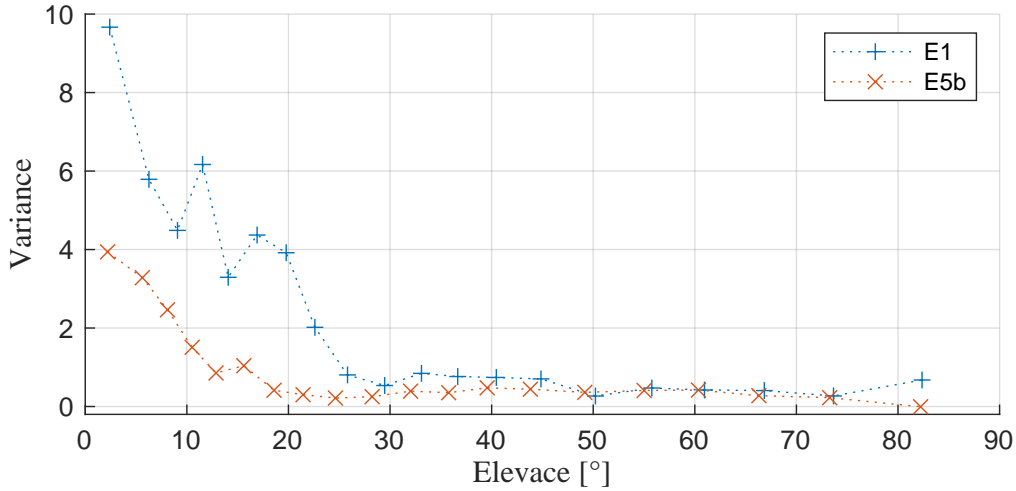


Obrázek 9.13: Hodnoty elevací satelitů pro veškerá dostupná měření.

Oproti obrázku 9.9 je vidět méně dostupných satelitů na elevaci nižší než 10° , což bylo způsobeno tím, že GNSS přijímač měl viditelnost oblohy pro nižší hodnoty elevace zakryt okolními kopci.

Obdobně jako v podkapitole 9.6.2 je pro odhad kovariance elevace satelitů rozdělena do celkem $n_{\mathcal{I}} = 20$ intervalů \mathcal{I}_i (9.18). Hranice jednotlivých intervalů je zvolena tak, aby měření byla přibližně rovnoměrně rozdělena do všech 20 intervalů, tj. přibližně 35 591 měření pro signál E1 a 36 740 měření pro signál E5b na každý jeden interval $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$.

Odhady variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$ určující i odhad momentu šumů měření $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2}$ skrze vztah (9.18) pro veškeré dostupné měření a signály E1 a E5b jsou vykresleny na obrázku 9.14.



Obrázek 9.14: Odhad variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ ve středu intervalů \mathcal{I}_i pro signály z GNSS Galileo.

Z obrázku 9.14 plyne následující:

- Odhady variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ pro signál E1 mají větší hodnotu než pro E5b.
- Odhady variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ mají téměř neměnnou hodnotu pro elevaci větší než 30° , obdobně jako na obrázku 9.10.

Odhadnuté hodnoty $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ určují variance chyby pseudovzdáleností pro jednotlivé intervaly $\mathcal{I}_i, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$. Nicméně pokud chceme variance $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ využít jako váhu pro odhad polohy antény a chyby hodin GNSS přijímače, je vhodné tyto odhady vyhladit, aby byly hodnoty variancí definované spojitě pro celý prostor elevace. Pro nalezení vyhlazené křivky variance měření v závislosti na elevaci je vhodné využít vztahů pro výpočet kovariance chyby pseudovzdáleností (9.14), který lze upravit do podoby vhodné pro využití jednofrekvenčních měření pseudovzdáleností zapsané následující funkcí

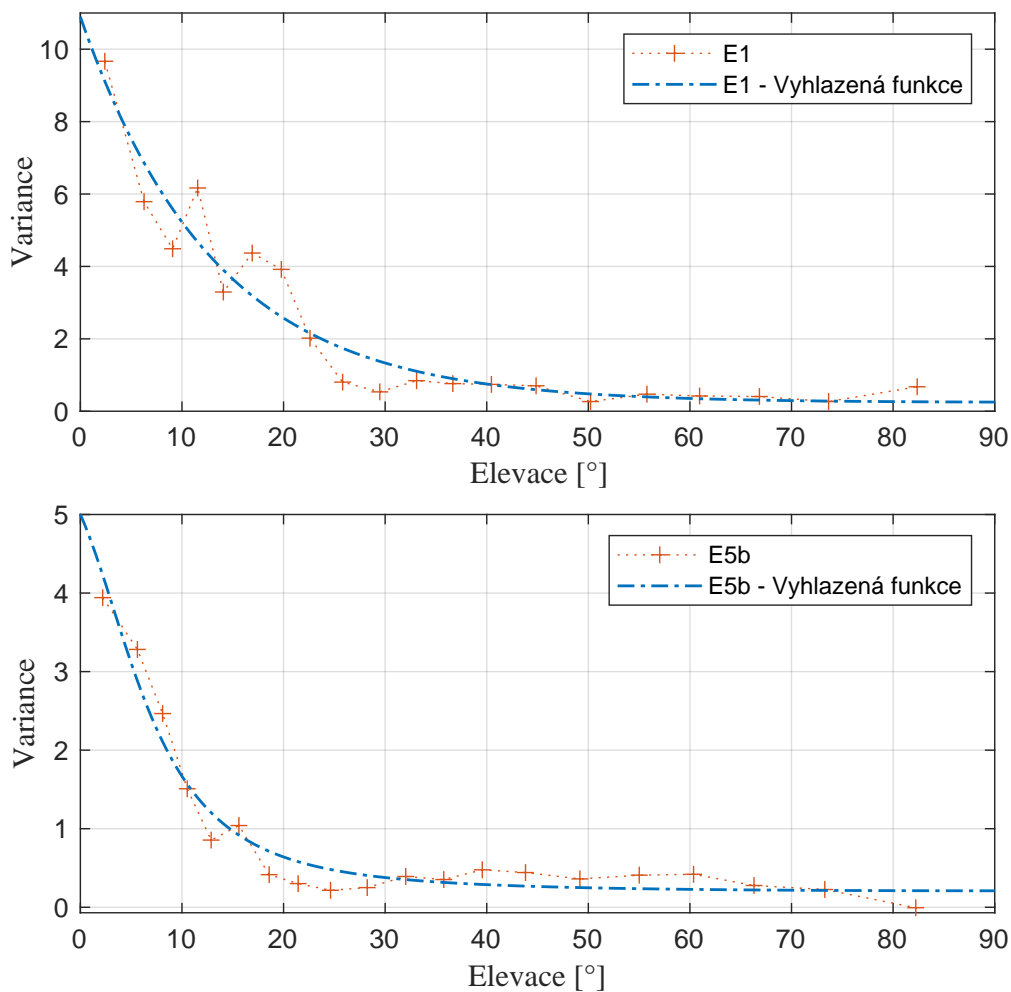
$$\mathcal{N}_{(\mathbf{v}_k^{(j)})^2} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \exp^{c e_k^j} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{f} + (\sin(e_k^j))^2} \quad (9.23)$$

s parametry \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} a \mathbf{f} . Parametry funkce (9.23) nalezené optimalizací, které vyhlazují odhady $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}, i \in \{1, 2, \dots, 20\}$ pro signály E1 a E5b, mají následující hodnoty

$$\text{E1: } \mathbf{a} = 0.2181, \mathbf{b} = 10.5281, \mathbf{c} = -4.4044, \mathbf{d} = 0.0296, \mathbf{f} = 0.2016, \quad (9.24a)$$

$$\text{E5b: } \mathbf{a} = 0.1543, \mathbf{b} = 1.8458, \mathbf{c} = -9.3625, \mathbf{d} = 0.0565, \mathbf{f} = 0.0188 \quad (9.24b)$$

a samotné funkce jsou vykreslené na obrázku 9.15.



Obrázek 9.15: Odhad variancí $\mathbf{R}_{\mathcal{I}_i}$ pro signály E1 a E5b a vyhlazené funkce.

9.7.2 Využití odhadu variance šumu pseudovzdálenosti k váženému odhadu polohy

Následující odhady jsou počítány samostatně pro signály E1 a pro signály E5b. Nevážený odhad polohy antény GNSS přijímače $\bar{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k(1) \ \mathbf{x}_k(2) \ \mathbf{x}_k(3)]^T$ a chyby hodin GNSS přijímače lze vypočítat pomocí matice $\bar{\mathbf{H}}_k$ (9.22) a linearizovaného měření \mathbf{z}_k (9.16) podle

$$\begin{bmatrix} \widehat{\bar{\mathbf{x}}_k} \\ \widehat{\mathbf{x}_k(4)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{H}}_k^\dagger \mathbf{z}_k. \quad (9.25)$$

Díky tomu, že je dostupná geodeticky zaměřená poloha antény¹⁴ $\bar{\mathbf{x}}$, je možné vypočítat chybu polohy GNSS přijímače v lokálním souřadném systému NED (zkratkou anglických slov North, East, Down) následujícím vztahem

$$\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}} = \left[\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(1) \quad \widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(2) \quad \widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(3) \right]^T = \mathbf{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} (\widehat{\bar{\mathbf{x}}_k} - \bar{\mathbf{x}}), \quad (9.26)$$

kde složky odhadu $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(1)$, $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(2)$ a $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}(3)$ představují chybu neváženého odhadu v souřadnicích sever, východ a dolů v souřadném systému NED. $\mathbf{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}}$ je rotační matice ze souřadného systému ECEF do NED.

Pro výpočet váženého odhadu polohy antény GNSS přijímače $\widehat{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w}}}$ a chyby hodin GNSS přijímače je kromě matice $\bar{\mathbf{H}}_k$ (9.22) a měření \mathbf{z}_k (9.16) využít vztah pro výpočet diagonály¹⁵ kovarianční matice chyby pseudovzdálenosti $\mathbf{W}_k = \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k^2} \right)_M$ (9.23) s příslušnými parametry (9.24). Výpočty váženého odhadu a chyby tohoto odhadu v lokálním souřadném systému NED lze provést pomocí vztahů

$$\left[\begin{array}{c} \widehat{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w}}} \\ \mathbf{x}_k(4)^{\text{w}} \end{array} \right] = \left(\bar{\mathbf{H}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \bar{\mathbf{H}}_k \right)^{-1} \bar{\mathbf{H}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{z}_k, \quad (9.27)$$

$$\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}} = \left[\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(1) \quad \widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(2) \quad \widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(3) \right]^T = \mathbf{D}_{\text{ECEF}}^{\text{NED}} \left(\widehat{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w}}} - \bar{\mathbf{x}} \right), \quad (9.28)$$

kde složky odhadu $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(1)$, $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(2)$ a $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}(3)$ představují chybu váženého odhadu v souřadnicích sever, východ a dolů v souřadném systému NED.

Hodnota odmocniny střední kvadratické chyby (RMSE - z anglického root mean squared error) vážených $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{w,NED}}}$ a nevážených $\widetilde{\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{NED}}}$ odhadů polohy antény GNSS přijímače získaných průměrováním přes všechny časové okamžiky k a jejich porovnání pro signály E1 a E5b je sepsána v tabulce 9.5.

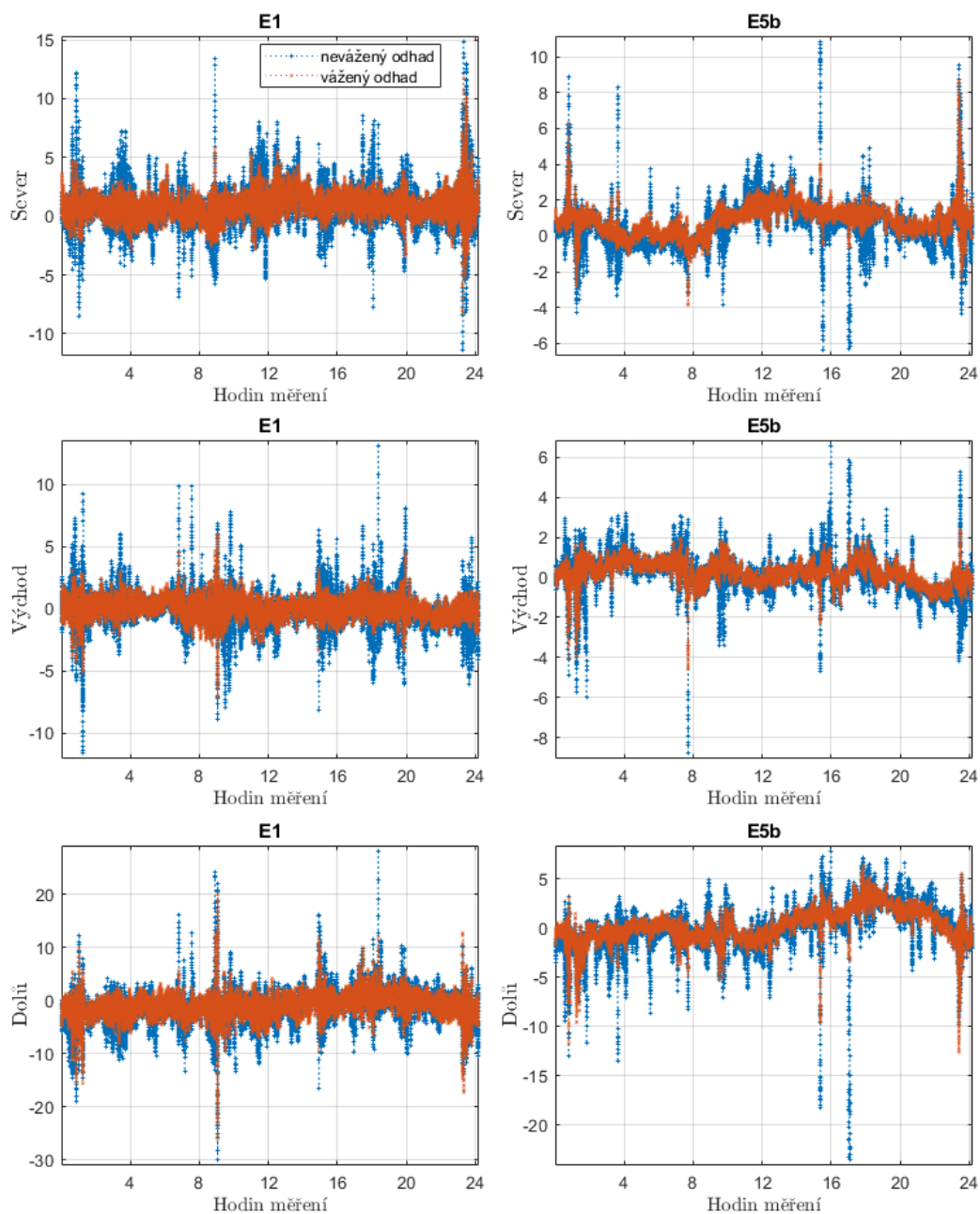
| Signály | RMSE | | |
|---------|-------------------|-----------------|--------------|
| | neváženého odhadu | váženého odhadu | zlepšení |
| E1 | 3.2617 | 2.5632 | 21 % (70 cm) |
| E5b | 2.3294 | 1.9838 | 15 % (35 cm) |

Tabulka 9.5: Porovnání RMSE vážených a nevážených odhadů polohy antény GNSS přijímače pro signály E1 a E5b

¹⁴Geodeticky zaměřená poloha antény GNSS přijímače bude uvažována jako skutečná poloha antény GNSS přijímače.

¹⁵Mimodiagonální prvky jsou zde nulové.

Porovnání chyb váženého $\widetilde{\bar{x}}_k^{w,NED}$ a neváženého $\widetilde{\bar{x}}_k^{NED}$ odhadu polohy antény GNSS přijímače nejen pro jednotlivé souřadnice sever, východ a dolů v souřadném systému NED, ale i oba signály E1 a E5b je vykresleno na obrázku 9.16.



Obrázek 9.16: Chyby neváženého a váženého odhadu polohy antény GNSS přijímače.

Z obrázku 9.16 plyne následující:

- Vážené odhady polohy antény GNSS přijímače poskytují, pro oba signály E1 a E5b, průměrně lepší kvalitu odhadu ve všech směrech než nevážené odhady.
- Vážené odhady polohy antény GNSS přijímače výrazně omezují krátkodobé, ale velké chyby v odhadu polohy v porovnání s neváženým odhadem.

9.7.3 Modelování variancí pseudovzdáleností

V literatuře existuje několik modelů, které určují, jak zvolit variance chyby pseudovzdálenosti [96, 103]. Využití těchto modelů je ovšem velmi často podmíněné řadou předpokladů, jako jsou například použití konkrétních korekcí ionosféry a troposféry, použití dvoufrekvenčních měření pseudovzdáleností nebo použití signálu z jednoho konkrétního GNSS. Nicméně pokud není některý z předpokladů splněn, neměly by se tyto modely variance chyby pseudovzdálenosti používat. Poznamenejme, že také existuje celá řada modelů, které jsou poskytnuty ve formě funkce elevací satelitů, poměru signálu k šumu a dalších veličin. Naneštěstí tyto funkce bývají často parametrizovány vektorem neznámých parametrů, které si každý uživatel musí zvolit sám.

Přístup pro získání modelu popisujícího variance šumů pseudovzdáleností a založeného na MDM, který byl popsán v předchozích podkapitolách, představuje atraktivní alternativu k výše uvedeným přístupům. Není totiž vázán na konkrétní sadu použitých korekcí, GNSS signály nebo na použitý typ GNSS přijímače. Umožňuje nalezení parametrů funkce přepočítávající elevací satelitů na varianci šumů pseudovzdáleností pro konkrétní uživatelem zvolený GNSS přijímač a postup zpracování dat.

Kapitola 10

Závěr

Tato disertační práce se zabývala odhadem vlastností šumů v dynamických modelech. Znalost popisu šumů je jednou z důležitých součástí při návrhu optimálních řídicích, sledovacích, rozhodovacích či navigačních systémů. Jak bylo ukázáno v kapitole 3, současné metody odhadující vlastnosti šumů lze rozdělit dle způsobu odhadu do čtyř skupin: bayesovské metody, metody založené na maximální věrohodnosti, metody odpovídajících momentů a korelační metody. Díky velmi příznivým vlastnostem korelačních metod, jako jsou například dokazatelnost vlastností odhadů popisu šumů a malé množství požadovaných počátečních znalostí o modelu, se disertační práce zaměřila výhradně na korelační metody. V kapitole 4 byly z korelačních metod vybrány čtyři významné korelační metody, které historicky jako první představily jedinečný způsob odhadu vlastností šumů, a zbylé metody k nim byly přiřazeny jako jejich nástupci či rozšíření. U korelačních metod byly uvedeny jejich společné vlastnosti a bylo poukázáno na jejich slabé stránky, jejichž odstranění se stalo cíli této disertační práce.

V kapitole 5 byly definovány následující cíle disertační práce:

- Cíl 1: Odhad středních hodnot šumů
- Cíl 2: Odhad vyšších momentů šumů
- Cíl 3: Odhad momentů časově závislých šumů
- Cíl 4: Nestranný odhad kovariancí šumů
- Cíl 5: Ověření gaussovosti šumů
- Cíl 6: Stanovení maximálního počtu jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely
- Cíl 7: Odhad parametrů popisujících šumy
- Cíl 8: Ilustrace použití navržených metod a algoritmů

Díky analýze způsobu odhadu jednotlivých korelačních metod bylo zjištěno, že zde existuje další možnost odhadu vlastnosti šumů. Proto byla v kapitole 6 podrobně představena nová korelační metoda difference měření (MDM),

kteřá přinesla nový jedinečný způsob odhadu vlastností šumů. V následujících podsekcích byly postupně prezentovány možnosti, vlastnosti a výhody MDM, které zároveň řešily i jednotlivé cíle disertační práce.

Cíl 1 byl splněn v kapitole 6.2.2, kde byl představen odhad nejen středních hodnot šumů, ale i libovolných necentrálních momentů šumů. Díky tomu je možné využít korelačního přístupu k odhadu nejen kovariancí šumů, ale i středních hodnot šumů. Odhad středních hodnot šumů byl prezentovaný na konferenci *2018 American Control Conference* [K2].

Cíl 2 byl splněn v kapitole 6.2, kde byl představen způsob výpočtu libovolných necentrálních a centrálních momentů šumů, a to dokonce ve dvou verzích celkového a postupného odhadu. Díky tomu je možné získat lepší celkový popis modelů například s obecně negaussovými šumy stavu či měření. Odhad vyšších momentů byl prezentován na konferencích *18th IFAC Symposium on System Identification* [K3] a *21st IFAC World Congress* [K4].

Cíl 3 byl splněn v kapitole 6.3, kde byl představen odhad libovolných necentrálních a centrálních momentů časově i vzájemně závislých šumů stavu a měření. Tento výpočet je velice důležitý v oblastech využívajících například inerciální senzory, jejichž měření obsahují závislé šumy. Odhad momentů závislých šumů byl prezentován na konferencích *18th International Conference on Information Fusion* [K5] a *57th IEEE Conference on Decision and Control* [K6].

Cíl 4 byl splněn v kapitole 7.3, kde bylo dokázáno, že celkový odhad momentů šumů pomocí MDM je nestranný. Tato vlastnost je velice důležitá, především pokud je dostupné malé množství měření, která jsou využitelná k odhadu momentů šumů. Důkaz nestrannosti odhadů byl prezentován v publikacích, mezi které patří časopis *Automatica* [K7], a také na konferenci *13th IFAC European Workshop on Advanced Control and Diagnosis* [K8].

Cíl 5 byl splněn v kapitole 8.1, kde bylo ukázáno, jak velice dobře lze využít nejen odhady kovariancí šumů, ale i vztahu v MDM k ověření, zda šumy stavu a měření pocházejí z Gaussova rozdělení. Ověření gaussovosti při využití MDM bylo prezentováno v časopise *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* [K1] a na konferenci *2018 IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium* [K9].

Cíl 6 byl splněn v kapitole 7.14, kde byl představen vztah, který určuje maximální počet jednoznačně odhadnutelných prvků kovariancí šumů pro LTI modely na základě hodnotí a dimenzí matic dynamiky a měření. Také je v této kapitole představena celá řada důležitých pozorování, která uživateli pomohou v situaci, kdy není možné jednoznačně odhadnout veškeré prvky kovariance šumů. Identifikovatelnost prvků kovariancí šumů pro LTI modely byla prezentována na konferenci *19th IFAC Symposium on System Identification* [K10].

Cíl 7 byl splněn v kapitole 8.2, kde bylo využito MDM odhadů momentů šumů k nalezení vektoru parametrů, který parametrizuje funkci popisující šumy. Takový přístup je vhodný, pokud jsou šumy popsány funkcí jako například PDF nebo Markovův proces, který je parametrizován neznámým vektorem parametrů. Využití MDM k odhadu vektoru parametrů bylo prezentováno na konferencích *18th IFAC Symposium on System Identification* [K3] a *21th IFAC World Congress* [K4].

Cíl 8 byl splněn v kapitole 9.6, kde bylo ilustrováno použití navržených a implementovaných metod a algoritmů, které byly porovnávány se současnými korelačními metodami. Poznamenejme, že využití odhadu popisu šumů pomocí MDM v problematice GNSS je v této kapitole detailně diskutováno a ilustrováno nejen pro simulovaná data, ale i pro reálná data.

Proto veškeré cíle disertační práce byly splněny.

Jelikož na problému odhadu popisu šumů autor pracoval již od roku 2014, vznikla řada autorových publikací, které tyto problémy řešily, ale nebyly v této práci dosud zmíněny. Jedním z nich je článek, který podává komplexní pohled na metody odhadující kovariance šumů se zvláštní pozorností na CM publikovaný v časopise *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* [K11], který má aktuálně 46 citací podle serveru Web of Science. Další je článek, ve kterém byl ukázán vliv volby počtu rovnic na výslednou kvalitu odhadu kovariancí šumů pro MDM a Bélangerovu (ALS) metodu, který byl prezentován na konferenci *55th IEEE Conference on Decision and Control* [K12]. Článek, ve kterém byly porovnávány kvality odhadu kovariancí šumů vybraných představitelů z CM, MLM, BM, MMM pro linealizovaný LTI model, byl prezentován na konferenci *56th IEEE Conference on Decision and Control* [K13]. Článek, ve kterém byla popsána implementace metody ALS do toolboxu NEF, byl prezentován na konferenci *12th IFAC European Workshop on Advanced Control and Diagnosis* [K14]. Článek nezaměřující se přímo na odhad parametrů popisující vlastnosti šumů, ale na přístup využívající záznam z kamery k rozpoznání konkrétního módu z Gaussovy směsi v problematice terénní navigace, byl prezentován na konferenci *2020 IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium* [KO1].

Příloha A

Vztahy v MDM

Výraz $\mathcal{A}_k^v \mathbf{Z}_{k-N}^P$ lze díky matici \mathcal{A}_k^v (6.9) zapsat jako

$$\mathcal{A}_k^v \mathbf{Z}_{k-N}^P = \mathbf{Z}_k^L - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger \mathbf{Z}_{k-N}^L,$$

který díky rovnicím (2.1) a (6.2) lze dále upravit do následující podoby

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^v \mathbf{Z}_k^P &= \mathcal{O}_k^L \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger (\mathcal{O}_{k-N}^L \mathbf{x}_{k-N} + \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) \\ &= \mathcal{O}_k^L \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N \mathbf{x}_{k-N} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger (\mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) \\ &= \mathcal{O}_k^L \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L (\mathbf{F}_{k-1} \dots \mathbf{F}_{k-N+1}) (\mathbf{x}_{k-N+1} - \mathbf{w}_{k-N} - \mathbf{u}_{k-N}) \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger (\mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) \\ &= \mathcal{O}_k^L \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \mathbf{\Gamma}_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k - \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{w}_{k-2} - \dots - (\mathbf{F}_{k-1} \dots \mathbf{F}_{k-N+1}) \mathbf{w}_{k-N} \\ - \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{u}_{k-2} - \dots - (\mathbf{F}_{k-1} \dots \mathbf{F}_{k-N+1}) \mathbf{u}_{k-N} \end{pmatrix} \\ &\quad - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger (\mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \mathbf{\Gamma}_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Výraz (A.1) lze upravit a zapsat v kompaktní formě

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_k^v \mathbf{Z}_k^P &= \mathcal{O}_k^L \Xi_{k-N+1}^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma_k^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger \Gamma_{k-N}^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} \\
&\quad + \mathbf{V}_k^L - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger \mathbf{V}_{k-N}^L \\
&\quad + \mathcal{O}_k^L \Xi_{k-N+1}^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Gamma_k^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} - \mathcal{O}_k^L \mathcal{F}_{k-N}^N (\mathcal{O}_{k-N}^L)^\dagger \Gamma_{k-N}^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \\
&= \mathcal{A}_k \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} + \mathcal{A}_k^w \mathbf{U}_{k-N}^P.
\end{aligned}$$

Díky tomu lze velmi jednoduše ukázat, že platí vztah (6.5) a (6.10), jelikož

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{A}_k \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_k} = \mathcal{A}_k \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Díky rovnici (A.2) lze rovněž ukázat, že jádro (anglicky zvané kernel), matice \mathcal{A}_k je rovno

$$\text{Ker}(\mathcal{A}_k) = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} = \mathcal{K}_{k-N}^P \mathbf{X}_{k-N}^P,$$

kde $\mathcal{K}_{k-N}^P \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + Pn_z \times Pn_x}$ a $\mathbf{X}_{k-N}^P \in \mathbb{R}^{Pn_x}$ jsou definovány vztahy

$$\mathcal{K}_{k-N}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-N} & -\mathbf{I}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{F}_{k-N+1} & -\mathbf{I}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{F}_{k+L-3} & -\mathbf{I}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{F}_{k+L-2} & -\mathbf{I}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H}_{k-N} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{H}_{k-N+1} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{H}_{k+L-2} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \cdots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{H}_{k+L-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{k-N}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-N} \\ \mathbf{x}_{k-N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k+L-2} \\ \mathbf{x}_{k+L-1} \end{bmatrix}.$$

Příloha B

Konzistence odhadů

Předpokládejme, že matice $\Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}}$ je známá, matice \mathcal{A}_k je časově neproměnná a má plnou sloupcovou hodnotu (takže jí lze zkráceně zapisovat pouze jako \mathcal{A}). Pokud bychom chtěli počítat odhad střední hodnoty $\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}$ podle (6.19), vypadaly by rovnice (7.5) následovně

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{Z}}_k = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\mathcal{N}} \mathcal{A} \mathcal{E}_k = \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\mathcal{N}} \mathcal{A} (\Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} + \boldsymbol{\eta}_k).$$

Rovnici (7.7) je možné zapsat jako

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} &= \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} + \left(\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \right)^{-1} \sum_{i=N}^{\tau-L+1} \Pi \boldsymbol{\eta}_k \\ &= \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} + \frac{1}{\bar{\tau}} (\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1} \Pi \sum_{i=N}^{\tau-L+1} \boldsymbol{\eta}_k, \end{aligned}$$

kde $\bar{\tau} = \tau - P + 2$ a $\Pi = \left(\Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\mathcal{N}} \mathcal{A} \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}} \right)^T \Phi_{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}$. Kovariance chyby tohoto odhadu podle (7.8) lze zapsat do následující podoby

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \left(\frac{(\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1}}{\bar{\tau}} \right)^{\otimes 2} \Pi^{\otimes 2} \sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j}.$$

Poté matice Λ může být zvolena jako

$$\Lambda = \Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}},$$

která jistě splňuje nerovnost (7.10). Rovnice (7.6) bude vypadat následovně

$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{N}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\otimes 2} = \mathcal{C}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j}$$

proto lze vektor (7.11) zapsat jako

$$\Pi^{\otimes 2} \sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{C}_{\varepsilon_k, \varepsilon_j}. \quad (\text{B.1})$$

Pro dokázání konzistence odhadů momentů šumů je potřeba nalézt maticovou funkci $\Omega(\bar{\tau})$ takovou, aby platila nerovnost (7.14). Určení této maticové funkce $\Omega(\bar{\tau})$ stejně jako následné dokázání konzistence bude nyní prezentováno na dvou různých případech.

V prvním případě je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, a proto autokorelace $\boldsymbol{\eta}_k$ nabývá následujících hodnot

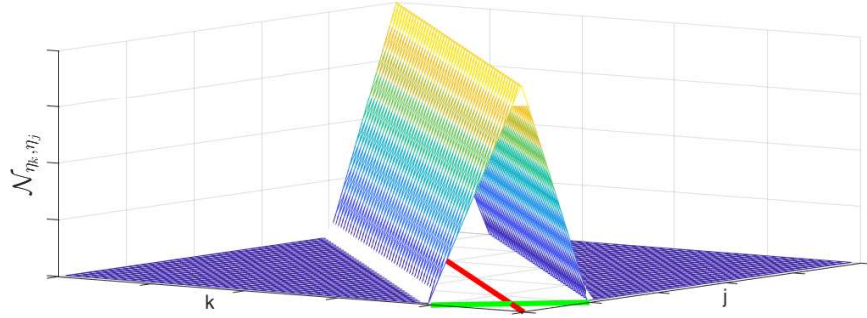
$$\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{C}_{\varepsilon_k, \varepsilon_j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{k,j}, & \text{pro } \text{abs}(k-j) < P \\ \mathbf{0}, & \text{pro } \text{abs}(k-j) \geq P \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

kde $\mathbf{X}_{k,j}$ je nenulový konečný vektor tvořený kovariancemi $\mathcal{C}_{\mathbf{w}_2}^{\text{U}}, \mathcal{C}_{\mathbf{v}_2}^{\text{U}}$, a $\mathcal{C}_{\mathbf{w}, \mathbf{v}}$. Díky vztahu (B.2) lze ukázat, že nerovnost (7.14) bude splněná, když funkce $\Omega(\bar{\tau})_{\text{V}}$ bude zvolena jako

$$\Omega(\bar{\tau})_{\text{V}} = \Pi^{\otimes 2} 2P \mathcal{C}_{\varepsilon^2 \bar{\tau}} \stackrel{\text{M}}{\geq} \Pi^{\otimes 2} \underbrace{\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{C}_{\varepsilon_k, \varepsilon_j}}_{\text{abs}(k-j) < P}. \quad (\text{B.3})$$

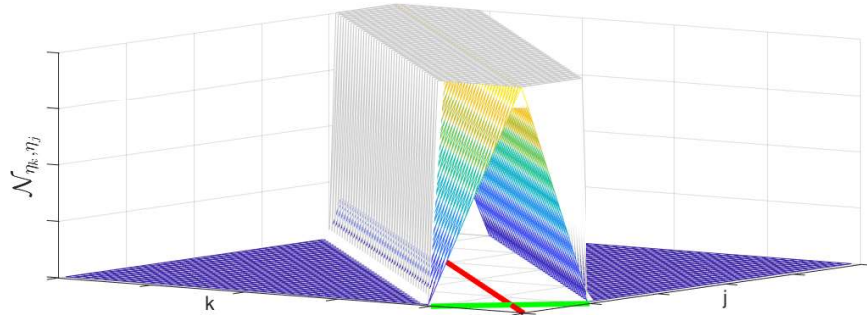
Příklad

Pokud je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$, pak argument sumy $\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathbb{E} [\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_k^T]$ z (B.1) lze zjednodušeně graficky znázornit jako



Horizontální osy značí jednotlivé časové posuvy k a j v jednotlivých sumách a hodnota vynesena do vertikální osy značí hodnotu $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_j}$. Červená čára má délku $\bar{\tau}$ a značí místo, kde $\text{abs}(k - j) = 0$. Zelená čára je kolmá na červenou čáru, značí oblast, kde moment $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j}$ nabývá nenulové hodnoty, a má délku menší než $2P$. Poznamenejme, že hodnoty momentu nad červenou čarou nabývají největší hodnoty, tj. $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}^2} = \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}^2}$.

Tato červená a zelená čára společně charakterizují kvádr o délkách stran $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}^2}$, $2P$ a $\bar{\tau}$, který překrývá celou nenulovou oblast reprezentující argument sumy z (B.1), jak také zjednodušeně graficky znázornit v následujícím obrázku



Proto hodnota celé rovnice (B.1) bude jistě menší než $\Omega(\bar{\tau})_{\mathbf{V}} = \Pi^{\otimes 2} 2P \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \bar{\tau}$, a proto bude platit i nerovnost (7.14).

Poté lze zapsat nerovnost (7.15) jako

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] \stackrel{\text{M}}{\leq} \frac{\left((\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1} \right)^{\otimes 2} \Pi^{\otimes 2} 2PC_{\mathcal{E}^2}}{\bar{\tau}}.$$

Protože platí limita (7.16)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\left((\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1} \right)^{\otimes 2} \Pi^{\otimes 2} 2PC_{\mathcal{E}^2}}{\bar{\tau}} = \mathbf{0},$$

jistě platí i limita (7.17)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \mathbf{0},$$

která dokazuje, že výsledný odhad střední hodnoty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}$ (6.19) je konzistentní, pokud je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $k \neq j$.

V druhém případě je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ pro $\text{abs}(k - j) > 0$, kde závislost vychází z popisu šumů pomocí Markovova procesu podle

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\mu}_k, \quad (\text{B.4})$$

kde matice $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je omezená, časově neproměnná a má vlastní čísla v jednotkové kružnici a náhodný vektor $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^{n_x + n_z}$ je nezávislý na vektoru $\boldsymbol{\mu}_j$ pro $k \neq j$ a je popsán neznámými, omezenými a časově neproměnnými momenty.

V tomto případě lze autokorelace $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_j}$ rozdělit do dvou oblastí. První oblast popisuje $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_j}$ pro $\text{abs}(k - j) < P$ a lze pro ni velice jednoduše ukázat jako v (B.3), že jistě platí vztah

$$\underbrace{\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_j}}_{\text{abs}(k-j) < P} \stackrel{\text{M}}{\leq} 2PC_{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \bar{\tau}. \quad (\text{B.5})$$

Druhá oblast popisuje autokorelaci $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_j}$ pro $\text{abs}(k - j) \geq P$, kde lze díky časové závislosti danou rovnicí (B.4) ukázat, že její hodnota exponenciálně klesá podle vztahu

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+P+l}, \boldsymbol{\varepsilon}_k} = (\mathcal{A}^l \otimes \mathbf{I}_{n_{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+P}, \boldsymbol{\varepsilon}_k}, \quad (\text{B.6a})$$

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+P+l}} = (\mathbf{I}_{n_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes \mathcal{A}^l) \mathcal{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+P}}, \quad (\text{B.6b})$$

pro $l \geq 0$, kde $n_{\mathcal{E}} = (P - 1)n_x + Pn_z$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}} \times n_{\mathcal{E}}}$ je známá matice, která má vlastní čísla v jednotkové kružnici, jelikož je tvořena prvky matice α a $\mathcal{A}^l = \prod_{i=1}^l \mathcal{A}$. Díky vztahům (B.6) lze ukázat, že jistě platí následující nerovnosti

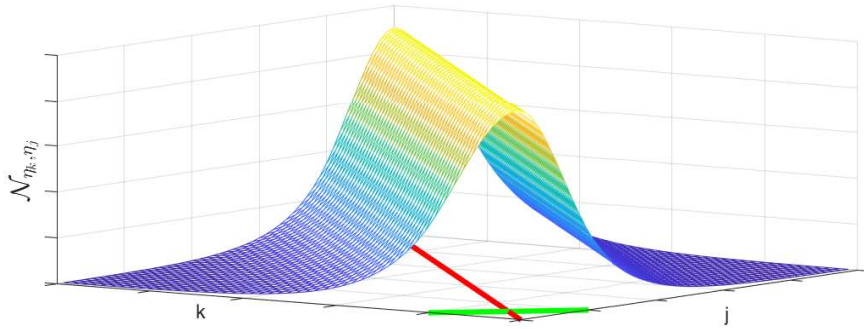
$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{C}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j}}_{\text{abs}(k-j) \geq P} &\stackrel{M}{\leq} 2 \sum_{k=0}^{\bar{\tau}-1} \left((\mathcal{A}^k \otimes \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}}) \mathcal{C}_{\mathcal{E}_{k+P}, \mathcal{E}_k} + (\mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{A}^k) \mathcal{C}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k+P}} \right) \bar{\tau} \\
&\stackrel{M}{\leq} 2 \sum_{k=0}^{\bar{\tau}-1} \left((\mathcal{A}^k \otimes \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}}) + (\mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{A}^k) \right) \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} \bar{\tau} \\
&\stackrel{M}{\leq} 2 \underbrace{\left(\left((\mathcal{A} \otimes \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}}) - \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}^2} \right)^{-1} \left((\mathcal{A}^{\bar{\tau}} \otimes \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}}) - \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}^2} \right) + \right.}_{\mathbf{t}(\bar{\tau})} \\
&\quad \left. \left((\mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{A}) - \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}^2} \right)^{-1} \left((\mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{A}^{\bar{\tau}}) - \mathbf{I}_{n_{\mathcal{E}}^2} \right) \right) \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} \bar{\tau}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Díky vztahům (B.5) a (B.7) lze ukázat, že nerovnost (7.14) bude splněná, když funkce $\Omega(\bar{\tau})_{\mathcal{V}}$ bude zvolena jako

$$\Omega(\bar{\tau})_{\mathcal{V}} = \Pi^{\otimes 2} 2(P + \mathbf{t}(\bar{\tau})) \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2} \bar{\tau} \stackrel{M}{\geq} \Pi^{\otimes 2} \sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathcal{C}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j}.$$

Příklad

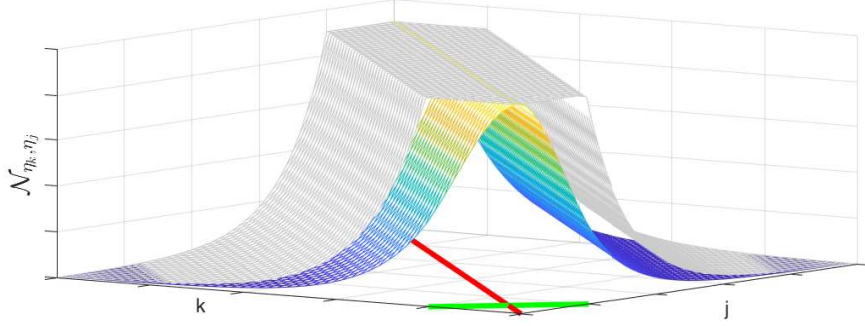
Pokud je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ podle (B.4), pak argument sumy $\sum_{k=N}^{\tau-L+1} \sum_{j=N}^{\tau-L+1} \mathbb{E} [\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_k^T]$ z (B.1) lze zjednodušeně graficky znázornit následujícím obrázkem



Horizontální osy značí jednotlivé časové posuvy k a j v jednotlivých sumách a hodnota vynesená do vertikální osy značí hodnotu $\mathcal{N}_{\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_j} = \mathcal{C}_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j}$. Červená čára má délku $\bar{\tau}$ a značí místo, kde $\text{abs}(k - j) = 0$. Zelená čára je kolmá na červenou čáru, má délku menší než $2P$. Poznamenejme, že

korelace nad červenou čarou nabývají největší hodnoty, tj. $\mathcal{N}_{\eta^2} = \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}$.

Tato červená a zelená čára společně se vztahem (B.7) charakterizují šedivou plochu, která překrývá celou nenulovou oblast reprezentující argument sumy z (B.1), jak také zjednodušeně graficky znázornit v následujícím obrázku



Šedivá rovina omezující křivku shora má výšku $\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}$, šířku $2P$ a délku $\bar{\tau}$. Celkovou hodnotu šedivé klesající oblasti po stranách lze popsat díky vztahům B.7 jako $2\mathbf{t}(\bar{\tau})\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}\bar{\tau}$. Tudiž hodnota celé rovnice (B.1) bude jistě menší než $\Pi^{\otimes 2}2(P + \mathbf{t}(\bar{\tau}))\mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}\bar{\tau} = \Omega(\bar{\tau})_{\mathcal{V}}$, a proto platí nerovnost (7.14).

Poté lze zapsat nerovnost (7.15) jako

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] \stackrel{\text{M}}{\leq} \frac{\left((\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1} \right)^{\otimes 2} \Pi^{\otimes 2} 2(P + \mathbf{t}(\bar{\tau})) \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}}{\bar{\tau}}.$$

Protože platí limita (7.16)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\left((\Pi \Psi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}})^{-1} \right)^{\otimes 2} \Pi^{\otimes 2} 2(P + \mathbf{t}(\bar{\tau})) \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}}{\bar{\tau}} = \mathbf{0},$$

jistě platí i limita (7.17)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mathcal{N}}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} \right)^{\otimes 2} \right] = \mathbf{0},$$

která dokazuje, že výsledný odhad střední hodnoty $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}}$ (6.19) je konzistentní, pokud je vektor šumů $\boldsymbol{\xi}_k = [\mathbf{w}_k^T, \mathbf{v}_k^T]^T$ závislý na vektoru $\boldsymbol{\xi}_j$ podle (B.4).

Příloha C

Momenty Gaussovy směsi

Uvažujme náhodnou veličinu \mathbf{v}_k , která je popsána směsí dvou¹ Gaussových rozdělení (8.11) parametrizovaných vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}} = [\alpha_1 \quad \bar{\mathbf{v}}_1^T \quad \bar{\mathbf{v}}_2^T \quad (\mathbf{R}_1^{\mathbf{U}})^T \quad (\mathbf{R}_2^{\mathbf{U}})^T]^T$ (8.12) a navíc platí vztah $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Náhodnou veličinu \mathbf{v}_k je možné také (neúplně) popsat pomocí střední hodnoty $\bar{\mathbf{v}}$ a kovariance $\mathbf{R}^{\mathbf{U}}$. Dále bude ukázáno jak vyjádřit prvních pět necentrálních momentů náhodné veličiny \mathbf{v}_k pomocí vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}}$. Z důvodu zjednodušení zápisu vynecháme dolní časový index u náhodné veličiny, tj. $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$.

V následujících vztazích využijeme dvou gaussovských náhodných veličin $\mathbf{v}_i \sim \mathbf{G}(\mathbf{v}_i; \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{R}_i^{\mathbf{U}}), i \in \{1, 2\}$, která usnadní samotné odvození. Dále využijeme toho, že libovolný m -tý necentrální moment náhodné veličiny \mathbf{v} lze zapsat jako vážený součet m -tých necentrálních momentů náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i = \{1, 2\}$ podle vztahu

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^m} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^m}$$

První necentrální moment náhodné veličiny \mathbf{v} lze jednoduše vyjádřit jako funkci vektoru parametrů (8.12) podle

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \bar{\mathbf{v}}_i.$$

Pokud chceme vyjádřit druhý necentrální moment náhodné veličiny \mathbf{v} jako funkci vektoru parametrů (8.12), musíme se nejdřív podívat na druhé

¹Odvození lze velice jednoduše upravit pro libovolný počet členů Gaussovy směsi.

centrální momenty náhodných veličiny $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$, které lze zapsat jako

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} &= \mathbf{R}_i = \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2},\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

protože $\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} = \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}$. Díky vztahu (C.1) lze vyjádřit druhý necentrální moment \mathbf{v} jako funkci vektoru parametrů (8.12) podle

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^2} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(\mathbf{R}_i + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right).$$

Pro vyjádření třetího necentrálního momentu náhodné veličiny \mathbf{v} se nejdříve podívejme na třetí centrální momenty náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$, které jsou definovány následovně

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^3} &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} - \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) - \Upsilon^{1,3,2} \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} - \Upsilon^{3,1,2} \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2} + 2\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} - \mathbf{E}^1 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} - \mathbf{E}^1 \left(\left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} - \mathbf{E}^1 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3},\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

protože platí vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^1 &= \mathbf{I}_{n_z^3} + \Upsilon^{1,3,2} + \Upsilon^{3,1,2}, \\ 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} &= \mathbf{E}^1 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}.\end{aligned}$$

Z (C.2) lze vyjádřit třetí necentrální moment \mathbf{v} jako funkci vektoru parametrů (8.12) jako

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^3} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(\mathbf{E}^1 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right),$$

kde je využito, že Gaussovo náhodné veličiny $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$ mají liché centrální momenty $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^3}$ nulové.

Čtvrtý centrální moment náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$ lze vyjádřit dvěma způsoby. Jedním z nich je

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^4} &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i^2} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i} \\ &\quad - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^3} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^3} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i^2} \\ &\quad - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^3, \mathbf{v}_i} + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4} - \mathbf{E}^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \mathbf{E}^3 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) - 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4},\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^2 &= \mathbf{I}_{n_z^4} + \Upsilon^{1,2,4,3} + \Upsilon^{1,4,2,3} + \Upsilon^{4,1,2,3}, \\ \mathbf{E}^3 &= \mathbf{I}_{n_z^4} + \Upsilon^{1,3,2,4} + \Upsilon^{1,3,4,2} + \Upsilon^{3,1,2,4} + \Upsilon^{3,1,4,2} + \Upsilon^{3,4,1,2}.\end{aligned}$$

Druhým způsobem, jak vyjádřit čtvrté centrální momenty náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$, je pomocí Isserlisova teoremu [104]

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^4} &= \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} + \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} + \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^2} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2}.\end{aligned}$$

Pokud tento vztah dosadíme na levou stranu rovnice (C.3) a využijeme vztahů již vypočtených nižších necentrálních momentů, lze tuto rovnici upravit do rovnice pro čtvrté necentrální momenty náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$ jako

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4} &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) - \mathbf{E}^3 \left(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\left(\mathbf{E}^1 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) \\ &\quad - \mathbf{E}^3 \left(\left(\mathbf{R}_i + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\left(\mathbf{E}^1 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) \right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \right) \\ &\quad - \mathbf{E}^3 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) - \mathbf{E}^3 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} + 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\left(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z} \right) \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \right) - \mathbf{E}^3 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) - 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z} \right) \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \mathbf{E}^2 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} - \mathbf{E}^3 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) - 3\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^2 \left(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z} \right) \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) - \mathbf{E}^3 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \\ &= 3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^4 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4},\end{aligned}\tag{C.4}$$

protože platí vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^4 &= \left(\mathbf{E}^2 \left(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z} \right) - \mathbf{E}^3 \right), \\ 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} &= \mathbf{E}^2 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4}, \\ 6\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} &= \mathbf{E}^3 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4}.\end{aligned}$$

Výsledná požadovaná podoba čtvrtého necentrálního momentu náhodné veličiny \mathbf{v} jako funkce vektoru parametrů (8.12) se dá díky (C.4) zapsat jako

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^4} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^4 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4} \right).$$

Obdobně pro vyjádření posledního pátého necentrálního momentu náhodné veličiny \mathbf{v} se nejdříve podíváme na páté centrální momenty náhodných veličin $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$, které lze zapsat následovně

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^5} &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^5} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^3} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i^2} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^3, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^4} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2} \\
&\quad - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i^3} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^3, \mathbf{v}_i^2} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^4, \mathbf{v}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4, \bar{\mathbf{v}}_i} \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3, \bar{\mathbf{v}}_i^2} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i^3} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2} \\
&\quad - \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} + \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^4} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^3, \bar{\mathbf{v}}_i} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i^2} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} \\
&\quad + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^3} - \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i^2, \bar{\mathbf{v}}_i} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^2, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i^2} + \mathcal{N}_{\bar{\mathbf{v}}_i^3, \mathbf{v}_i, \bar{\mathbf{v}}_i} - \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&= \mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^5} - \mathbf{E}^5(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{E}^6(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}) - \mathbf{E}^7(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}, \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^5 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \Upsilon^{1,2,3,5,4} + \Upsilon^{1,2,5,3,4} + \Upsilon^{1,5,2,3,4} + \Upsilon^{5,1,2,3,4}, \\
\mathbf{E}^6 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \Upsilon^{1,2,4,5,3} + \Upsilon^{1,4,2,5,3} + \Upsilon^{1,4,5,2,3} + \Upsilon^{4,1,2,5,3} + \Upsilon^{4,1,5,2,3} \\
&\quad + \Upsilon^{4,5,1,2,3} + \Upsilon^{1,2,4,3,5} + \Upsilon^{1,4,2,3,5} + \Upsilon^{4,1,2,3,5}, \\
\mathbf{E}^7 &= \mathbf{I}_{n_z^5} + \Upsilon^{1,3,4,5,2} + \Upsilon^{3,1,4,5,2} + \Upsilon^{3,4,1,5,2} + \Upsilon^{3,4,5,1,2} + \Upsilon^{1,3,2,4,5} \\
&\quad + \Upsilon^{1,3,4,2,5} + \Upsilon^{3,1,2,4,5} + \Upsilon^{3,1,4,2,5} + \Upsilon^{3,4,1,2,5}.
\end{aligned}$$

Z (C.5) lze při využití vztahů již vypočtených nižších necentrálních momentů a platnosti vztahu, že Gaussovy náhodné veličiny $\mathbf{v}_i, i \in \{1, 2\}$ mají liché centrální momenty $\mathcal{C}_{\mathbf{v}_i^5}$ nulové, vyjádřit pátý necentrální moment jako

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^5} &= \mathbf{E}^5(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^4} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{E}^6(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^3} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}) + \mathbf{E}^7(\mathcal{N}_{\mathbf{v}_i^2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) - 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&= \mathbf{E}^5\left(\left(3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} + \mathbf{E}^4(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 4}\right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i\right) \\
&\quad - \mathbf{E}^6\left(\left(\mathbf{E}^1(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}\right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}\right) + \mathbf{E}^7\left(\left(\mathbf{R}_i + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 2}\right) \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}\right) - 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&= \mathbf{E}^5\left(\left(3\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i\right) + \left(\mathbf{E}^4 \otimes \mathbf{I}_{n_z}\right)(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}\right) \\
&\quad - \mathbf{E}^6\left(\left(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z^2}\right)(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}\right) + \mathbf{E}^7\left(\left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}\right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}\right) - 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&= 3\mathbf{E}^5(\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{E}^5(\mathbf{E}^4 \otimes \mathbf{I}_{n_z})(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \mathbf{E}^5\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&\quad - \mathbf{E}^6(\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z^2})(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) - \mathbf{E}^6\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} + \mathbf{E}^7(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \mathbf{E}^7\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} - 4\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \\
&= 3\mathbf{E}^5(\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{E}^8(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3}) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}, \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

přičemž platí vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^8 &= (\mathbf{E}^5 (\mathbf{E}^4 \otimes \mathbf{I}_{n_z}) - \mathbf{E}^6 (\mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{I}_{n_z^2}) + \mathbf{E}^7), \\ 5\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} &= \mathbf{E}^5 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}, \\ 10\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} &= \mathbf{E}^6 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}, \\ 10\bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} &= \mathbf{E}^7 \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5}.\end{aligned}$$

Konečná podoba pátého necentrálního momentu náhodné veličiny \mathbf{v} jako funkce vektoru parametrů (8.12) se dá díky (C.6) zapsat jako

$$\mathcal{N}_{\mathbf{v}^5} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left(3\mathbf{E}^5 \left(\mathbf{R}_i^{\otimes 2} \otimes \bar{\mathbf{v}}_i \right) + \mathbf{E}^8 \left(\mathbf{R}_i \otimes \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 3} \right) + \bar{\mathbf{v}}_i^{\otimes 5} \right).$$

Příloha D

Momenty časově korelovaných šumů

Uvažujme náhodné veličiny \mathbf{w}_k (8.17) a \mathbf{v}_k (8.18), kde je hledaný vektor parametrů definován jako $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\alpha}_V^T \ \boldsymbol{\beta}_V^T \ \mathcal{N}_\mu^T \ \mathcal{N}_v^T \ (\mathcal{C}_{\mu^2}^U)^T \ (\mathcal{C}_{v^2}^U)^T \ \mathcal{C}_{\mu,\sigma}^T]^T$. (8.19). Pro odhad je využito prvního necentrálního $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k}^U$ a druhého centrálního $\mathcal{C}_{\mathcal{E}_k^2}^U$ momentu, přičemž parametr $P = 3$. V tomto případě první dva momenty obsahují následující unikátní prvky

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^U \\ \mathcal{C}_{\mathcal{E}^2}^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathbf{w}_k} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k^2}^U \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_k^2}^U \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} \\ \mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}} \end{bmatrix}.$$

Vyjádření všech členů momentů $\mathcal{N}_{\mathcal{E}_k}^U$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{E}_k^2}^U$ jako funkce prvků vektoru

parametrů θ (8.19) bude následující

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathbf{w}_k} &= (\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{I}_{n_x})\mathcal{N}_{\boldsymbol{\mu}}, \\
\mathcal{N}_{\mathbf{v}_k} &= \mathcal{N}_{\mathbf{v}}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k^2} &= (\boldsymbol{\alpha}^{\otimes 2} + \mathbf{I}_{n_x^2})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}^2}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}} &= (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\alpha})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}^2}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k^2} &= \mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}} &= (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k-1}} &= (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}} = (\boldsymbol{\beta}^2 \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\mathbf{v}^2}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k} &= \mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k-1}} &= \mathbf{0}_{n_x n_z \times 1}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} &= (\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_{n_z})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}_{k-1}, \boldsymbol{\sigma}_{k-1}} + (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta})\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}_{k-2}, \boldsymbol{\sigma}_{k-2}} \\
&= ((\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{I}_{n_z}) + (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta}))\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}}, \\
\mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}} &= (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta})\mathcal{C}_{\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k} = ((\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{I}_{n_x} \otimes \boldsymbol{\beta}^2))\mathcal{C}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Literatura

- [1] Y. Bar-Shalom, P. Willett, and X. Tian, *Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms*. YBS Press, 2011.
- [2] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. UpperSaddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [3] S. J. Qin, “An overview of subspace identification,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 30, no. 10-12, pp. 1502–1513, 2006.
- [4] T. Söderström, *Discrete-time Stochastic Systems: Estimation and Control*, ser. Prentice-Hall international series in systems and control engineering, 1994.
- [5] A. P. Sage. and J. L. Melsa, *Estimation theory with applications to communications and control*, ser. McGraw-Hill series in systems science, 1971.
- [6] R. K. Mehra, “Approaches to adaptive filtering,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 10, pp. 693–698, 1972.
- [7] —, “On the identification of variances and adaptive filtering,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 2, pp. 175–184, 1970.
- [8] B. Carew and P. R. Bélanger, “Identification of optimum steady-state gain for systems with unknown noise covariances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, no. 6, pp. 582–587, 1973.
- [9] S. Godbole, “Kalman filtering with no a priori information about noise-white noise case: Identification of covariances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, no. 5, pp. 561–563, 1974.
- [10] P. R. Bélanger, “Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process,” *Automatica*, vol. 10, no. 3, pp. 267–275, 1974.
- [11] T. Lee, “A direct approach to identify the noise covariances of Kalman filtering,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 4, pp. 841–842, Aug. 1980.
- [12] B. Friedland, “Estimating noise variances by using multiple observers,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 442–448, Jul. 1982.
- [13] D. P. Dee, E. Cohn, A. Dachler, and M. Ghil, “An efficient algorithm for estimating noise covariances in distributed systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, no. 11, pp. 1057–1065, 1985.
- [14] W. Bundick, “Development of a technique for estimating noise covariances using multiple observers,” NASA Technical Memorandum, Tech. Rep., 1988.
- [15] J. Zhou and R. H. Luecke, “Estimation of the covariances of the process noise and measurement noise for a linear discrete dynamic system,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 19, no. 2, pp. 187–195, 1995.

- [16] G. Noriega and S. Pasupathy, "Adaptive estimation of noise covariance matrices in real-time preprocessing of geophysical data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, no. 5, pp. 1146–1159, 1997.
- [17] B. J. Odelson, M. R. Rajamani, and J. B. Rawlings, "A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances," *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 303–308, 2006.
- [18] M. R. Rajamani, J. B. Rawlings, and T. A. Soderstrom, "Application of a new data-based covariance estimation technique to a nonlinear industrial blending drum," *Texas-Winsconsin Modeling and Control Consortium, Tech. Report*, vol. 3, 2007.
- [19] B. M. Åkesson, J. B. Jørgensen, N. K. Poulsen, and S. B. Jørgensen, "A generalized autocovariance least-squares method for Kalman filter tuning," *Journal of Process Control*, vol. 18, no. 7–8, pp. 769–779, 2008.
- [20] M. R. Rajamani and J. B. Rawlings, "Estimation of the disturbance structure from data using semidefinite programming and optimal weighting," *Automatica*, vol. 45, no. 1, pp. 142–148, 2009.
- [21] T. Ma, J. Chen, Z. Peng, and W. Chen, "Estimation of time series noise covariance using correlation technology," *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 2, pp. 165–170, 2011.
- [22] M. Šimandl and J. Duník, "Estimation of noise covariance matrices for periodic systems," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 25, pp. 928–942, 2011.
- [23] F. V. Lima and J. B. Rawlings, "Nonlinear stochastic modeling to improve state estimation in process monitoring and control," *AIChE Journal*, vol. 57, no. 4, pp. 996–1007, 2011.
- [24] M. F. Abdel-Hafez, "On the GPS/IMU sensors' noise estimation for enhanced navigation integrity," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 86, pp. 101–117, 2012.
- [25] F. V. Lima, M. R. Rajamani, T. A. Soderstrom, and J. B. Rawlings, "Covariance and state estimation of weakly observable systems: Application to polymerization processes," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 1249–1257, 2013.
- [26] M. Ge and E. C. Kerrigan, "Noise covariance estimation for time-varying and nonlinear systems," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 19, pp. 9545–9550, 2014.
- [27] Z. Liqiang, W. Jianlin, Y. Tao, C. Kunyun, and J. Huan, "Colored noise estimation algorithm based on autocovariance least-squares method," in *12th IEEE International Conference on Electronic Measurement Instruments (ICEMI)*, vol. 01, Jul. 2015, pp. 481–486.
- [28] J. Duník, O. Straka, and M. Šimandl, "Estimation of noise covariance

- matrices for linear systems with nonlinear measurements,” in *Proceedings of the 17th IFAC Symposium on System Identification*, Beijing, China, Oct. 2015.
- [29] M. Zagrobelny and J. Rawlings, “Practical improvements to autocovariance least-squares,” *AIChE Journal*, vol. 61, no. 6, pp. 1840–1855, 2015.
- [30] Y. Zhen and J. Harlim, “Adaptive error covariances estimation methods for ensemble Kalman filters,” *Journal of Computational Physics*, vol. 294, pp. 619–638, 2015.
- [31] J. Duník, O. Straka, and Šimandl, “On autocovariance least-squares method for noise covariance matrices estimation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 2, pp. 967–972, 2017.
- [32] J. C. Shellenbarger, “Estimation of covariance parameters for an adaptive Kalman filter,” Ph.D. dissertation, Iowa State University of Science and Technology, 1966.
- [33] A. R. Dennis, “Functional updating and adaptive noise variance determination in recursive-type trajectory estimators,” in *Special Projects Branch Astrodynamics Conference NASA-GSFCy*, Greenhelty MD, USA, 1967.
- [34] A. Sage and G. W. Husa, “Adaptive filtering with unknown prior statistics,” in *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, 1969.
- [35] D. Alspach, “Comments on “On the identification of variances and adaptive Kalman filtering”,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 6, pp. 843–845, 1972.
- [36] R. J. McAulay and E. Denlinger, “A decision - directed adaptive tracker,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 229–236, 1973.
- [37] K. A. Myers and B. D. Tapley, “Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, no. 8, pp. 520–523, 1976.
- [38] J. F. Leathrum, “On sequential estimation of state noise variances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 3, pp. 745–746, 1981.
- [39] A. Moghaddamjoo and R. L. Kirilin, “Robust adaptive Kalman filtering with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 8, pp. 1166–1175, 1989.
- [40] P. O. Gutman and M. Velger, “Tracking targets using adaptive Kalman filtering,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 5, pp. 691–699, 1990.
- [41] R. Daley, “Estimating model-error covariances for application to atmospheric data assimilation,” *Monthly Weather Review*, vol. 120, no. 8, pp. 1735–1746, 1992.
- [42] D. P. Dee, “On-line estimation of error covariance parameters for at-

- mospheric data assimilation,” *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 1128–1145, 1995.
- [43] Z. M. Durovic and B. D. Kovacevic, “Robust estimation with unknown noise statistics,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 6, pp. 1292–1296, 1999.
- [44] Y. Shi, C. Han, and Y. Liang, “Adaptive UKF for target tracking with unknown process noise statistics,” in *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion*, Seattle, WA, USA, Jul. 2009.
- [45] P. Matisko and V. Havlena, “Noise covariances estimation for Kalman filter tuning,” in *Proceedings of the 2010 IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, Antalya, Turkey, Aug. 2010, pp. 31–36.
- [46] T. Berry and T. Sauer, “Adaptive ensemble Kalman filtering of nonlinear systems,” *Tellus, Series A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, vol. 65, 2013.
- [47] H. F. Wahab and R. Katebi, “Robust adaptive estimators for nonlinear systems,” in *Proceedings of the 2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, Nice, France, Oct. 2013, pp. 67–72.
- [48] A. Solonen, J. Hakkarainen, A. Ilin, M. Abbas, and A. Bibov, “Estimating model error covariance matrix parameters in extended Kalman filtering,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 21, no. 5, pp. 919–927, 2014.
- [49] B. Gao, G. Hu, and Y. Zhong, “Windowing and random weighting-based adaptive unscented Kalman filter,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 29, pp. 201–223, 2015.
- [50] X. Wang, M.-Q. Liu, Z. Fan, and S.-L. Zhang, “A novel approach of noise statistics estimate using H_∞ filter in target tracking,” *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering*, vol. 17, no. 5, pp. 449–457, 2016.
- [51] P. D. Abramson, “Simultaneous estimation of the state and noise statistics in linear dynamical systems,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1968.
- [52] R. L. Kashyap, “Maximum likelihood identification of stochastic linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 1, pp. 25–34, 1970.
- [53] W. Tsang, J. Glover, and R. Bach, “Identifiability of unknown noise covariance matrices for some special cases of a linear, time-invariant, discrete-time dynamic system,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 4, pp. 970–974, 1981.
- [54] R. H. Shumway and D. S. Stoffer, “An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm,” *Journal of Time Series*

- Analysis*, vol. 3, no. 4, pp. 253–264, 1982.
- [55] V. Poor and D. Looze, “Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 4, pp. 902–906, August 1981.
- [56] S. Verdú and H. V. Poor, “Minimax linear observers and regulators for stochastic systems with uncertain second-order statistics,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 6, pp. 499–511, 1984.
- [57] W. S. Chaer, R. H. Bishop, and J. Ghosh, “A mixture-of-experts framework for adaptive kalman filtering,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 27, no. 3, pp. 452–464, June 1997.
- [58] R. H. Shumway and D. S. Stoffer, *Time Series Analysis and its Applications*. Springer-Verlag, 2000.
- [59] M. Waller and H. Saxén, “Estimating the degree of time variance in a parametric model,” *Automatica*, vol. 36, no. 4, pp. 619 – 625, 2000.
- [60] G. C. Goodwin and J. C. Aguero, “Approximate EM algorithms for parameter and state estimation in nonlinear stochastic models,” in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, Oct. 2005, pp. 368–373.
- [61] J. L. Crassidis and Y. Cheng, “Generalized multiple-model adaptive estimation using an autocorrelation approach,” in *Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion*, vol. 47, Jul. 2006, pp. 2138–2152.
- [62] V. A. Bavdekar and S. C. Patwardhan, “Identification of noise covariances for state estimation of a continuous fermenter using extended EM algorithm,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 43, no. 5, pp. 697–702, 2010.
- [63] P. Axelsson, U. Orguner, F. Gustafsson, and M. Norrlöf, “ML estimation of process noise variance in dynamic systems,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Aug. 2011, pp. 5609–5614.
- [64] T. B. Schön, A. Wills, and B. Ninness, “System identification of nonlinear state-space models,” *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 39–49, 2011.
- [65] V. A. Bavdekar, A. P. Deshpande, and S. C. Patwardhan, “Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter,” *Journal of Process Control*, vol. 21, no. 4, pp. 585–601, 2011.
- [66] D. T. Magill, “Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 10, no. 4, pp. 434–439, 1965.
- [67] G. L. Smith, “Sequential estimation of observation error variances in a trajectory estimation problem,” *AIAA Journal*, vol. 5, no. 11, pp. 1964–1970, 1967.

- [68] C. G. Hilborn and D. G. Lainiotis, "Optimal estimation in the presence of unknown parameters," *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, vol. 5, no. 1, pp. 38–43, 1969.
- [69] F. Sims, D. Lainiotis, and D. Magill, "Recursive algorithm for the calculation of the adaptive Kalman filter weighting coefficients," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, no. 2, pp. 215–218, 1969.
- [70] D. G. Lainiotis, "Optimal adaptive estimation: Structure and parameters adaptation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 2, pp. 160–170, 1971.
- [71] H. F. Martz and G. H. Borni, "Empirical Bayes estimation of observation error variances in linear systems," *AIAA Journal*, vol. 9, no. 6, pp. 1183–1187, 1971.
- [72] R. G. Reynolds, "Robust estimation of covariance matrices," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 9, pp. 1047–1051, 1990.
- [73] X. R. Li and Y. Bar-Shalom, "A recursive hybrid system approach to noise identification," in *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Control Applications*, Sep. 1992, pp. 847–852.
- [74] D. M. Wiberg and D. G. DeWolf, "A convergent approximation of the continuous-time optimal parameter estimator," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 4, pp. 529–545, 1993.
- [75] X. R. Li and Y. Bar-Shalom, "A recursive multiple model approach to noise identification," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 30, no. 3, pp. 671–684, 1994.
- [76] D. M. Wiberg, T. D. Powell, and D. Ljungquist, "An on-line parameter estimator for quick convergence and time-varying linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 10, pp. 1854–1863, 2000.
- [77] J. S. Liu and M. West, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, ser. Statistics for Engineering and Information Science. Springer, 2001, ch. Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering, pp. 197–223, (Ed. Doucet A., de Freitas N., and Gordon N.).
- [78] J. R. Stroud and T. Bengtsson, "Sequential state and variance estimation within the ensemble Kalman filter," *Monthly Weather Review*, vol. 135, pp. 3194–3208, 2007.
- [79] D. M. Wiberg, S. Oh, J. Youn, L. C. Johnson, and S. Hong, "A fix-up for the EKF parameter estimator," in *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, Jul. 2008, pp. 6502–6505.
- [80] S. Särkkä and A. Nummenmaa, "Recursive noise adaptive Kalman filtering by variational Bayesian approximations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 3, pp. 596–600, 2009.
- [81] M. Frei and H. R. Künsch, "Sequential state and observation noise covariance estimation using combined ensemble Kalman and particle filters,"

- Monthly Weather Review*, vol. 140, no. 5, pp. 1476–1495, 2012.
- [82] P. Matisko and V. Havlena, “Noise covariance estimation for Kalman filter tuning using Bayesian approach and Monte Carlo,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 27, no. 11, pp. 957–973, 2013.
- [83] E. Özkan, V. Šmídl, S. Saha, C. Lundquist, and F. Gustafsson, “Marginalized adaptive particle filtering for nonlinear models with unknown time-varying noise parameters,” *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1566–1575, 2013.
- [84] C. Magnant, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, and B. Joseph, “Bayesian non-parametric methods for dynamic state-noise covariance matrix estimation: Application to target tracking,” *Signal Processing*, vol. 127, pp. 135–150, 2016.
- [85] R. K. Mehra, “On-line identification of linear dynamic systems with application to Kalman filtering,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 1, pp. 12–21, 1971.
- [86] K. J. Åström and P. Eykhoff, “System identification – a survey,” *Automatica*, vol. 7, no. 2, pp. 123–162, 1971.
- [87] P. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation, and Control*, ser. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1982.
- [88] A. R. Moghaddamjoo and R. L. Kirlin, *Approximate Kalman Filtering*, ser. Series in Approximations and Decompositions. World scientific, 1993, vol. 2, ch. Robust Adaptive Kalman Filtering, pp. 65–85.
- [89] J. Duník, M. Šimandl, and O. Straka, “Methods for estimating state and measurement noise covariance matrices: Aspects and comparison,” in *Proceedings of 15th IFAC Symposium on System Identification*, Saint-Malo, France, Jul. 2009.
- [90] J. Vil-Valls, P. Closas, and C. Fernández-Prades, “On the identifiability of noise statistics and adaptive KF design for robust GNSS carrier tracking,” in *Proceedings of the 2015 IEEE Aerospace Conference*, Mar. 2015.
- [91] T. J. Arnold and J. B. Rawlings, “Uniqueness conditions for ALS problems,” in *Proceedings of the 6th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control*, Madison, WI, USA, Aug. 2018.
- [92] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. Mc Graw Hill, 2002.
- [93] J. J. Shynk, *Probability, Random Variables, and Random Processes*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.
- [94] H. Nurminen, T. Ardeshiri, R. Piché, and F. Gustafsson, “A NLOS-robust TOA positioning filter based on a skew-t measurement noise model,” in *Proceedings of 2015 International Conference on Indoor Positio-*

- ning and Indoor Navigation*, Banff, AB, Canada, 2015.
- [95] R. M. Rogers, *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems (2nd Edition)*. AIAA, 2003.
 - [96] P. D. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House, 2008.
 - [97] B. P. Gibbs, *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modelling*. John Wiley & Sons, 2011.
 - [98] T. Thadewald and H. Büning, “Jarque–bera test and its competitors for testing normality – a power comparison,” *Journal of Applied Statistics*, vol. 34, no. 1, pp. 87–105, 2007.
 - [99] P. Nordlund and F. Gustafsson, “Nonlinear Kalman filtering techniques for terrain aided navigation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 45, no. 4, pp. 1385–1399, 2009.
 - [100] V. A. Bavdekar and S. C. Patwardhan, “Development of grey box state estimators for systems subjected to time correlated unmeasured disturbances,” *Journal of Process Control*, vol. 22, pp. 1543–1558, 2012.
 - [101] R. J. Larsen and M. L. Marx, *An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications (5th Edition)*. Boston: Prentice Hall, 2012.
 - [102] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, 2001.
 - [103] I. Martini, M. Rippl, and M. Meurer, “Advanced raim architecture design and user algorithm performance in a real gps, glonass and galileo scenario,” 2013.
 - [104] L. Isserlis, “On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables,” *Biometrika*, vol. 12, no. 1-2, p. 134–139, 1918.

Publikace autora

- [K1] J. Duník, O. Kost, O. Straka, and E. Blasch, “Covariance estimation and gaussianity assessment for state and measurement noise,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 43, no. 1, pp. 132–139, 2020.
- [K2] O. Kost, J. Duník, and O. Straka, “Estimation of noise means and covariance matrices for linear time-varying models,” in *Proceedings of American Control Conference (ACC)*, Milwaukee, WI, USA, 06 2018, pp. 265–271.
- [K3] —, “Noise moment and parameter estimation of state-space model,” in *Proceedings of 18th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, vol. 51, no. 15, Stockholm, Sweden, 2018, pp. 891–896.
- [K4] J. Duník, O. Kost, and O. Straka, “Estimation of parameters of gaussian sum distributed noises in state-space models,” in *Proceedings of 21st IFAC World Congress*, vol. 53, no. 2, Berlin, Germany, 01 2020, pp. 2415–2422.
- [K5] J. Duník, O. Straka, M. Šimandl, O. Kost, J. Ajgl, M. Soták, R. Baránek, and Z. Kaňa, “Estimation of state and measurement noise characteristics,” in *Proceedings of the 18th International Conference on Information Fusion*, Washington, DC, USA, 7 2015, pp. 1817–1824.
- [K6] O. Kost, J. Duník, and O. Straka, “Correlated noise characteristics estimation for linear time-varying systems,” in *Proceedings of 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Miami, FL, USA, 12 2018, pp. 650–655.
- [K7] J. Duník, O. Kost, and O. Straka, “Design of measurement difference autocovariance method for estimation of process and measurement noise covariances,” *Automatica*, vol. 90, pp. 16 – 24, 04 2018.
- [K8] O. Kost, J. Duník, and O. Straka, “Noise covariance matrices estimation for systems with time-varying availability of sensors,” in *Proceedings of 13th IFAC European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD)*, vol. 783, no. 1, Lille, France, 2016, p. 012059.
- [K9] J. Duník, O. Kost, O. Straka, and E. Blasch, “State and measurement noise in positioning and tracking: Covariance matrices estimation and gaussianity assessment,” in *Proceedings of IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, Monterey, CA, USA, 2018, pp. 1326–1335.
- [K10] O. Kost, J. Duník, and O. Straka, “Identifiability of unique elements of noise covariances in state-space models,” in *Proceedings of 19th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, vol. 54, no. 7, Padua, Italy, 2021, pp. 316–321.

- [K11] J. Duník, O. Straka, O. Kost, and J. Havlík, “Noise covariance matrices in state-space models: A survey and comparison of estimation methods - part I,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 31, no. 11, pp. 1505–1543, 2017.
- [K12] J. Duník and O. Straka, O. Kost, “Measurement difference autocovariance method for noise covariance matrices estimation,” in *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Las Vegas, NV, USA, Dec. 2016, pp. 365–370.
- [K13] O. Kost, J. Duník, and O. Straka, “Noise covariance matrix estimation in navigation and tracking: Impact of linearisation error,” in *Proceedings of 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Melbourne, Australia, 12 2017, pp. 958–964.
- [K14] O. Kost, O. Straka, and J. Duník, “Identification of state and measurement noise covariance matrices using nonlinear estimation framework,” in *Proceedings of 12th IFAC European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD)*, vol. 659, Pilsen, Czech Republic, 11 2015, p. 012057.

Ostatní publikace autora

- [KO1] J. Duník, O. Kost, O. Straka, and E. Blasch, “Navigation and estimation improvement by environmental-driven noise mode detection,” in *Proceedings of IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, Portland, OR, USA, 04 2020, pp. 925–932.