

## POSUDEK OPONENTA DISERTAČNÍ PRÁCE

**Autor práce:** Vladimír Švígler (FAV ZČU)  
**Název práce:** Dynamické systémy na grafech  
**Vedoucí práce:** Petr Stehlík (FAV ZČU)  
**Oponent práce:** Pavel Řehák (FSI VUT)

Společným jmenovatelem úvah v dizertační práci Vladimíra Švíglera je vyšetřování dynamických systémů na grafech. Konkrétněji jde zejména o dva aspekty, které jsou na tuto problematiku napojeny, totiž evoluční hry (kde se objevují systémy s diskrétní časovou a prostorovou strukturou a stavovým prostorem). Dále jsou to reakčně-difúzní rovnice (na mřížkách), kde časová struktura a stavový prostor jsou spojitě. V práci je odvozena řada hlubokých tvrzení podstatně posunujících chápání chování dynamických systémů na grafech. Mj. je odhaleno několik významných rozdílů mezi spojitým a diskrétním případem.

Objekty vyšetřování a použité metody krásně demonstrují krásy moderní matematiky, zejména prolínání různých matematických disciplín, resp. práci na jejich pomezí. Autor práce byl nucen důkladně vstřebat úctyhodné množství velmi rozličných aparátů, které zasahují do dynamických systému, teorie grafů, parciálních diferenciálních rovnic, teorie her, kombinatoriky, funkcionálních diferenciálních rovnic a numerické matematiky. Musím konstatovat, že toto se mu povedlo; s velkou jistotou pohybuje ve všech těchto oblastech a hladce překračuje jejich hranice. Je schopen odhalovat souvislosti, odvozovat netriviální úvahy a patřičně je formulovat.

Samotná prezentace výsledků, které mají formu padesátistránkového výkladu s odkazy na detailní informace v příložených autorových článkách, je velmi zdařilá. Čtenář je uveden do všech potřebných (pokročilejších) souvislostí, případně jsou mu připomenuty i některé základy disciplín. Vždy je silně zastoupen i motivační prvek. Též jsou případně vysvětleny výhody či nevýhody různých přístupů. Práce je napsána velmi dobrou angličtinou. Má naprosto logické členění. Velmi též oceňuji popis klíčových myšlenek důkazů. Výborný je úvod i závěr. Text prakticky nemá slabá místa. Zkrátka, četlo se to jako pohádka. S tím není v rozporu, že to pro mne bylo velmi náročné čtení. Jak již bylo naznačeno, problematika se dotýká mnoha oblastí (ve většině z nich jsem prakticky laikem). Navíc jsou však prezentované úvahy značně hluboké a vysoce netriviální. Při své omezenosti vlastně ani nejsem schopen zcela pochopit a/nebo docenit obdržené výsledky, či volbu použitých metod. O důležitosti studované látky však není možno mít nejmenších pochyb; její význam je značný, a to praktický i teoretický. To je možno vydedukovat mj. i z blízkosti tematiky k činnosti významných zahraničních pracovišť a také z ohlasů (zde nemám na mysli pouze citace, ale také třeba reakce, které jsem zaznamenal osobně, či zprostředkovaně při diskusích s matematiky).

### Vybrané detailní komentáře a dotazy.

Práce téměř neobsahuje chyby a nedokonalosti. Jde pouze o pár drobností: (i) Překlepy (libovoné - s. ix; rovnic na mřížkách - s. ix; an usually - s. 1; to to - s. 2;  $\pi_i$  za systémem (2.8); evolutionary - s. 10; stat - s. 39). (ii) Stacionární problém na s. 49 má chybné znaménko. (iii)

Na několika místech, např. s. 22, by mělo být (3.3) místo (3.4). (iv) Dále (opět na několika místech, třeba s. 22, 27, 30) by patrně mělo být  $f$  místo  $g$ .

Při obhajobě můžeme diskutovat např. o následujících otázkách. Jak se chovají při limitním blížení (zmíněném na str. 19) např. trajektorie, či některé objekty kvalitativní teorie (jako třeba oblast stability)? Nápady typu „vztah v Lemmatu 3.2.1“ či „reprezentace pomocí slov, resp. zapojení teorie grup“ jsou v této oblasti standardní (starší), či relativně nové, či přímo pocházejí z plzeňské dílny (příp. v kooperaci se spoluautory)? Lze v některých studovaných oblastech (např. neomezíme-li se na periodická řešení a máme pak nekonečně mnoho rovnic) pomýšlet např. na využití kalkulu v Banachových prostorech? Prošly by některé úvahy, pokud by se např. místo uvažované skalární parciální diferenciální rovnice vystartovalo třeba se (smysluplným) systémem rovnic? (V rámci studia cestujících vln s ohledem na modelování reálných jevů se takové systémy často uvažují.) Dá se očekávat, že by se podobně mohly vyšetřovat příslušné objekty vycházející z reakčních-difúzních rovnic, kde místo nelinearity Nagumova typu je nelinearita Fisherova typu, či nelinearita objevující se v některých modelech hoření (obsahuje mj. skok)?

#### Závěr

Jde o nadprůměrnou dizertační práci. Vzhledem ke všem výše uvedeným skutečnostem rád **doporučuji** posuzovanou dizertační práci k obhajobě. Rovněž **doporučuji**, aby byl Vladimíru Švíglerovi udělen titul Ph.D. v oboru Aplikovaná matematika.

V Brně, 14. 5. 2021

Pavel Řehák (oponent)

RNDr. Vladimír Švígler: *Dynamické systémy na grafech*

Posudek oponenta disertační práce

Předložená práce je věnována dvěma typům dynamických systémů na diskretních prostorových oblastech: evolučním hrám na grafech a reakčně-difúzním rovnicím na jednorozměrné nekonečné mřížce. V prvním případě se jedná o dynamické systémy s diskretním časem, ve druhém případě se spojitým časem. Pozornost je zaměřena na existenci a stabilitu stacionárních, resp. periodických řešení, existenci multichromatických cestujících vln a některé související otázky.

Práce vychází z publikací, jejichž seznam je uveden v příloze A. Pět z nich je zařazeno přímo do disertační práce (přílohy B až F). Počet doktorandových článků je podle mého názoru nadprůměrný a ty, které již byly publikovány, vyšly v kvalitních časopisech.

Kromě samotných článků obsahuje disertace velmi zdařilou úvodní část, která je srozumitelná i pro nespecialisty. Autor zde uvádí motivaci ke studovaným problémům, cituje relevantní zdroje a popisuje své hlavní výsledky s odhlédnutím od technických detailů. Text je napsán kultivovaně, pěknou angličtinou, počet gramatických chyb a překlepů je minimální (např. ix<sup>14</sup>: libovoné → libovolné, 11<sup>12</sup>: An another → Another, 22<sup>6</sup>: reaction term  $g$  → reaction term  $f$ ). Text je doplněn velkým množstvím pěkných ilustrací.

V práci jsem nenalezl žádné věcné chyby, což není překvapivé, neboť prezentované výsledky již z velké části prošly recenzním řízením.

Témata studovaná v rámci práce považuji za velmi aktuální a zajímavá, a to nejen pro úzký okruh specialistů. Je třeba zdůraznit, že se nejedná o triviální zobecnování nebo modifikace existujících výsledků. V části věnované evolučním hrám bych vyzdvihl např. důmyslné konstrukce grafů s požadovanými vlastnostmi, zatímco v části věnované reakčně-difúzním rovnicím považuji za nejhodnotnější výsledky o existenci multichromatických vln. Geometrické oblasti vymežující hodnoty parametrů, pro které tyto vlny existují, byly získány netriviálními numerickými výpočty.

Na práci oceňuji i skutečnost, že není úzce zaměřená, ale prolínají se v ní poznatky z diferenciálních rovnic a diskretní matematiky s numerickými výpočty. V dnešní době, kdy se mnoho matematiků velmi úzce specializuje, to považuji za mimořádně cenné.

Podle mého názoru práce otevírá i řadu zajímavých otázek pro další výzkum; některé z nich autor zmiňuje v závěrech kapitol 2 a 3. I z tohoto důvodu výsledky hodnotím jako významné, neboť je velká šance, že inspirují další výzkum v oblasti dynamických systémů.

K práci nemám žádné kritické připomínky, při čtení mě však napadly následující otázky:

- (1) V příloze B, s. 810, poznámka 4, se hovoří o stabilitě koexistenčních ekviliбриí vzhledem ke změně parametrů. Co přesně je touto stabilitou myšleno? V sekci 7 na s. 812 je pak zmíněno, že studium stability představuje otevřený problém. Lze nějak jednoduše vysvětlit, v čem tkví obtížnost tohoto problému?
- (2) V kapitole 3 autor na několika místech zmiňuje, že některé výsledky zůstávají v platnosti nejen pro reakčně-difúzní rovnici s Nagumovou kubickou nelinearitou, ale i pro rovnice s jinými bistabilními reakčními funkcemi. Zajímalo by mě, co lze v tomto směru říct o existenci multichromatických vln – zkoušel např. autor provádět numerické experimenty pro jiné reakční funkce? Dají se použít stejné postupy jako pro Nagumovu nelinearitu?

Uvítal bych, kdyby se autor během obhajoby pokusil na tyto otázky odpovědět.

*Závěr:* Disertační práce obsahuje nové, správné a netriviální výsledky zajímavé pro širokou komunitu badatelů. Rozsah práce je nadprůměrný a není pochyb o tom, že získání všech výsledků vyžadovalo velké množství práce a času. Autor prokázal schopnost samostatné tvůrčí práce a orientaci v problematice, která propojuje několik disciplín teoretické i aplikované matematiky. S potěšením doporučuji disertační práci k obhajobě.

V Praze dne 25. května 2021

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.  
Matematicko-fyzikální fakulta UK

