ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ROVNICE A NEROVNICE V ÚLOHÁCH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Barbora Mouleová

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky pro základní školy

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2023

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 26. dubna 2023

....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Chtěla bych poděkovat PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D, vedoucímu mé diplomové práce, za odborné vedení a cenné rady při tvorbě diplomové práce.

OBSAH

Úvod

Jako téma své diplomové práce jsem si zvolila Rovnice a nerovnice v úlohách Matematické olympiády. Žáci se setkávají s rovnicemi už na základní škole. Na střední škole se tomuto tématu věnují více než na základní škole a své poznatky rozvíjejí. Velký přínos znalostí a poznatků má pro žáky účast na různých olympiádách. V oblasti matematiky a logiky rozvíjí žákovy vědomosti Matematická olympiáda.

První kapitola je věnována historii Matematické olympiády a její organizaci. Historie Matematické olympiády je zpracována od roku 1951, kdy se konalo první kolo Matematické olympiády. V práci je také uvedeno, kdo stál za vznikem Matematické olympiády a jaký byl důvod jejího vzniku. Nejprve byla Matematická olympiáda určena pouze pro střední školy, poté se rozšířila i o základní školy.

V druhé kapitole je popsána organizace Matematické olympiády. Soutěž se koná každoročně a vyhlašuje ji Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. V této kapitole je vysvětleno, pro jaké ročníky základních škol, gymnázií a víceletých gymnázií jsou určeny jednotlivé kategorie a jaká kola jsou pro jednotlivé kategorie vyhlašovány. Jednotlivé úlohy jsou jednotné pro celou Českou republiku a současně i pro Slovensko.

Třetí kapitola se věnuje ukotvení rovnic, nerovnic a jejich soustav v Rámcovém vzdělávacím plánu pro základní vzdělávání a v Rámcovém vzdělávacím plánu pro gymnázia. Je zde popsáno učivo a očekávané výstupy uvedené v RVP ZV a RVP G. Na základní škole se žáci seznamují pouze s lineárními rovnicemi a jejich soustavami. Na některých základních školách se žáci seznamují i s lineárními nerovnicemi, ale toto téma není uvedeno v RVP ZV. Na gymnáziu žáci toto téma rozvíjejí o lineární nerovnice, kvadratické rovnice a nerovnice, exponenciální rovnice, logaritmické rovnice, goniometrické rovnice, rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou a s neznámou ve jmenovateli a rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou.

Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny základní metody řešení jednotlivých druhů rovnic, nerovnic a jejich soustav. První podkapitola je věnována metodám řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav na základní škole. Druhá podkapitola se věnuje metodám řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav na gymnáziu. K jednotlivým typům rovnic, nerovnic a jejich soustavám jsou uvedeny konkrétní příklady řešení.

Pátá kapitola je nejobsáhlejší. Tato kapitola je tvořena vybranými úlohami s komentovaným řešením z různých kol a z různých ročníků Matematické olympiády. Z každé kategorie je vždy uveden alespoň jeden příklad. Řešení úloh je komentováno tak, aby bylo pochopitelné pro žáky z určených ročníků.

1 HISTORIE MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Matematickou olympiádu v tehdejším Československu založilo několik matematiků pod vedením profesora Karlovy univerzity Dr. Eduarda Čecha v roce 1951. Jednalo se o soutěž žáků středních škol, tedy tzv. výběrových škol. Tato matematická soutěž byla později rozšířena i pro žáky základních škol. Profesor Dr. Eduard Čech se znal s Dr. Františkem Kahudem, který byl po 2. světové válce náměstkem a pak také ministrem školství. Mohl tedy podpořit vznik matematické olympiády a několik jejich prvních kol. Odborným garantem matematické olympiády se stal Matematický ústav Akademie věd České republiky a Jednota československých matematiků a fyziků, kde několik let byl předsedou Dr. František Kahuda.

Matematická olympiáda měla za cíl získat studenty středních škol pro studium na vysokých školách, hlavně pro studium technických oborů. Protože se v této době u nás velmi rozvíjel hlavně těžký průmysl, tak se měli stát generací budující tento průmysl. Na diplomech byl obrázek matematika, jak počítá mezi kouřícími továrními komíny. Matematická olympiáda měla podle učitelů zvýšit zájem o matematiku. Velkou motivací zúčastnit se matematické olympiády byla také finanční odměna pro vítěze.

Matematická olympiáda navazovala na různé matematické soutěže. Navázala například na soutěž Jednoty československých matematiků a fyziků v řešení matematických úloh, kterou vydávali ve svém časopise. Vzorem pro matematickou olympiádu v Československu byla matematická olympiáda v jiných zemích, například v Sovětském svazu, Maďarsku nebo v Polsku.

Prvním předsedou ústředního výboru matematické olympiády se stal profesor Českého vysokého učení technického Dr. František Vyčichlo. I tímto bylo propojeno technické studium na vysoké škole s matematickou olympiádou. Profesor Dr. František Vyčichlo musel ze zdravotních důvodů svoji funkci po roce opustit. Jeho nástupcem se stal ředitel Matematického ústavu Československé akademie věd profesor Dr. Josef Novák. Z dalších předsedů ústředního výboru matematické olympiády je vhodné připomenout docenta Jana Vyšína známého jako velkého propagátora moderní výuky matematiky a autora mnoha učebnic matematiky a spousty příruček a matematických článků pro učitele matematiky. Za zmínku také stojí Dr. František Zítek, který velmi dbal na správnou formulaci úloh z hlediska spisovné češtiny.

Prvním tajemníkem ústředního výboru matematické olympiády byl zástupce ředitele Matematického ústavu Československé akademie věd Dr. Rudolf Zelinka. Ten se věnoval hlavně výběru úloh a většinu úloh také sám vymyslel. Podílel se také na přípravě 4. mezinárodní matematické olympiády, která se konala v Československu. Na matematické olympiádě se samozřejmě nepodílí pouze předseda a tajemník ústředního výboru, jedná se o několik desítek lidí, jež nejsme schopni všechny uvést.

V posledních letech se o výběr úloh starají dvě výběrové komise. Jedna komise má na starosti výběr úloh pro kategorie Z – základní školy, druhá má na starosti výběr úloh pro kategorie A, B, C – střední školy. Tyto komise vznikly na popud doc. Dr. Jaromíra Šimši z Matematického ústavu Akademie věd, který vede komisi pro výběr úloh pro kategorie A, B, C. Ve výběrových komisí pracuje mnoho lidí, většinou se jedná o bývalé reprezentanty v mezinárodních matematických olympiádách. Jsou tedy schopni přinášet zajímavé a netradiční úlohy inspirované mezinárodní matematickou olympiádou. Obě komise spolupracují se svými slovenskými kolegy. Výsledkem jsou stejné zadání úloh a termíny kol matematické olympiády v České republice i na Slovensku. Matematická olympiáda tedy zůstala československou záležitostí až na výsledkové listiny celostátních kol.

V roce 1986 vznikla kategorie P – programování. Důležitou osobou v této oblasti je doc. Dr. Pavel Töpfer z MFF UK Praha. Je autorem velkého množství úloh, komentářů k jejich řešení a také hodnotí řešení žáků. I připravuje studenty na mezinárodní soutěže v informatice.

2 ORGANIZACE MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Matematickou olympiádu vyhlašuje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Ústřední komise je řídícím orgánem matematické olympiády. Ústřední komisi matematické olympiády představuje několik vědeckých pracovníků a učitelů matematiky na základních, středních a vysokých školách, kteří připravují matematickou olympiádu ve svém volném čase. Zabývá se přípravou letáků, konečným zněním úloh, řešením a komentáři úloh, a i soustředěním úspěšných řešitelů. Na závěr každého ročníku matematické olympiády musí zpracovat hodnotící zprávu, kterou zašle Ministerstvu školství, mládeže a tělovýchovy a Jednotě českých matematiků a fyziků. Ústřední komise také koordinuje krajské komise a propaguje matematickou olympiádu. Je důležité, aby ústřední komise úzce spolupracovala s vysokými školami pedagogického a matematicko-fyzikálního zaměření kvůli přípravě odborných soustředění pro soutěžící.

Důležité je také zmínit práci několika stovek učitelů matematiky na základních a středních školách, kteří jsou těmi prvními, kdo seznámí žáky s existencí a průběhem matematické olympiády. Věnují spoustu času návodným úlohám a doporučují žákům odbornou literaturu. Sami také opravují řešení úloh žáků školního kola matematické olympiády.

Matematická olympiáda je organizována v devíti kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie B je určena pro žáky 2. ročníků středních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií.

Kategorie C je určena pro žáky 1. ročníků a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie Z9 je určena pro žáky 9. ročníků základních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie Z8 je určena pro žáky 8. ročníků základních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie Z7 je určena pro žáky 7. ročníků základních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie Z6 je určena pro žáky 6. ročníků a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Kategorie Z5 je určena pro žáky 5. ročníků základních škol. Kategorie P se zaměřuje na informatiku a je určena pro žáky 1. až 4. ročníku středních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií. Všechny kategorie probíhají ve školním kole. V okresním kole probíhají kategorie Z5 až Z9. V krajském kole probíhají kategorie A, B, C, P a Z9. Pouze kategorie A a P probíhají v ústředním kole.

Matematická olympiáda se koná každoročně. Každý rok je tematické zaměření olympiády, které je vymezené úlohami domácí částí školního kola. Úlohy jsou jednotné na území České republiky.

3 VYMEZENÍ V RVP

Rámcové vzdělávací programy jsou vytvořeny pro vzdělávání od mateřských škol až po školy střední. Pro vzdělávání na základních školách je učen Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV). Pro další vzdělávání jsou určené Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) a Rámcové vzdělávací programy středního odborného vzdělávání (RVP SOV). RVP ZV je tvořen devíti vzdělávacími oblastmi (RVP ZV 2021, s. 14):

- Jazyk a jazyková komunikace,
- Matematika a její aplikace,
- Informatika,
- Člověk a jeho svět,
- Člověk a příroda,
- Člověk a společnost,
- Umění a kultura,
- Člověk a zdraví,
- Člověk a svět práce.

RVP G je tvořen osmi vzdělávacími oblastmi (RVP G 2021, s. 11):

- Jazyk a jazyková komunikace,
- Matematika a její aplikace,
- Člověk a příroda,
- Člověk a společnost,
- Člověk a svět práce,
- Umění a kultura,
- Člověk a zdraví,
- Informatika a informační a komunikační technologie.

Vzdělávací oblasti v RVP jsou členěny do vzdělávacích oborů nebo jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem. Očekávané výstupy a učivo vytváří vzdělávací obsah vzdělávacího oboru. RVP se snaží o praktické propojení klíčových kompetencí se vzdělávacím obsahem, které má být realizováno u vytváření Školních vzdělávacích programů (ŠVP). U očekávaných výstupů je kladen důraz na praktické zaměření v běžném životě.

3.1 VYMEZENÍ V RVP ZV

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání řadí lineární rovnice a jejich soustavy do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je tvořena vzdělávacím oborem Matematika a její aplikace. Ten je na druhém stupni ZŠ rozdělen na čtyři témata (RVP ZV 2021, s. 34-37):

- Číslo a proměnná,
- Závislosti, vztahy a práce s daty,
- Geometrie v rovině a v prostoru,
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Každé téma má své vymezené učivo a s tím související očekávané výstupy, a i minimální doporučenou úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření. Do tématu Číslo a proměnná je řazeno učivo (RVP ZV 2021, s. 35):

- rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

K tomuto učivu je pouze jeden očekávaný výstup (RVP ZV 2021, s. 35):

- formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

S lineárními rovnicemi se žáci částečně setkávají již na prvním stupni, např. když mají do rámečku doplnit číslo, které v součtu s číslem 2 dává výsledek 5. S nerovnicemi se žáci na základní škole přímo nesetkávají. Nejsou proto ani uvedené v RVP ZV. Žáci se s nimi setkají obdobně jako se setkají s lineárními rovnicemi na prvním stupni. Například řeší úlohu, kdy mají určit celá kladná čísla, která jsou menší než devět.

Lineární rovnice se většinou probírají v osmém ročníku základní školy. Případně se v osmém ročníku probírají lineární nerovnice a rovnice v součinovém tvaru. V devátém ročníku se probírají lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli. Také se v devátém ročníku probírají soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými.

3.2 VYMEZENÍ V RVP G

Rovnice, nerovnice a jejich soustavy jsou v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia zařazeny do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a ta je tvořena vzdělávacím oborem Matematika a její aplikace. Tento obor je rozdělen na pět témat (RVP G 2021, s. 22-24):

- Argumentace a ověřování,

- Číslo a proměnná,
- Práce se daty, kombinatorika, pravděpodobnost,
- Závislosti a funkční vztahy,
- Geometrie.

V každém tématu je vymezené učivo a k němu se vztahující očekávané výstupy. Do tématu Číslo a proměnná je zařazeno učivo (RVP G 2021, s. 22):

- rovnice a nerovnice – lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratická rovnice (diskriminant, vztahy mezi kořeny a koeficienty), rovnice a nerovnice v součinové a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou, logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice.

K tomuto učivu se vztahují tyto očekávané výstupy (RVP G 2021, s. 22):

- upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu,
- rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic,
- řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení,
- rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy,
- geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav,
- analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.

Studenti se setkávají s rovnicemi po celé čtyři roky studia na čtyřletém gymnáziu, případně poslední čtyři roky studia na osmiletém nebo šestiletém gymnázium. Nelze jednoznačně říci, v jakém ročníku se který typ rovnic vyučuje. Každé gymnázium si sestavuje svůj školní vzdělávací program, podle kterého se na daném gymnáziu vyučuje. Jednotlivé školní vzdělávací programy se liší podle daného gymnázia, a tudíž liší i doba výuky jednotlivých typů rovnic.

4 ROVNICE, NEROVNICE, JEJICH SOUSTAVY A JEJICH ŘEŠENÍ

V této kapitole je uvedeno několik jednoduchých postupů řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav.

4.1 ROVNICE, NEROVNICE, JEJICH SOUSTAVY A JEJICH ŘEŠENÍ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Na základní škole se vyučují pouze lineární rovnice, jednoduché nerovnice a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Řešení těchto typů rovnic na základní škole uvádějí následující dvě podkapitoly.

4.1.1 LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Lineární rovnice se řeší pomocí ekvivalentních úprav. V některých učebnicích pro základní školy se u řešení lineárních rovnic uvádí i řešení lineárních nerovnic pomocí ekvivalentních úprav. V některých učebnicích je toto téma úplně vynecháno.

Příklad 4.1.1.1

Řešte rovnici: $2(3+4x)-2=3-5(1-x)$.

Řešení rovnice:

$$2(3+4x)-2=3-5(1-x),$$
$$6+8x-2=3-5+5x,$$
$$8x+4=5x-2,$$
$$3x=-6,$$
$$x=-2.$$

V některých učebnicích se navíc uvádí i řešení rovnic v součinovém tvaru, kde jedna strana rovnice je rovna nule. Tyto rovnice se řeší rozdělením na několik jednodušších lineárních rovnic, jejich počet je stejný jako počet činitelů v původní rovnici. Vzniklé lineární rovnice se vyřeší pomocí ekvivalentních úprav.

Příklad 4.1.1.2

Řešte rovnici: $(x-1)(2+x)=0$.

První činitel je roven nule:

$$x-1=0,$$
$$x=1.$$

Druhý činitel je roven nule:

$$2+x=0,$$
$$x=-2.$$

U lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli se ještě před samotným řešením, musí uvést všechny podmínky, za kterých má levá i pravá strana rovnice smysl, tzn. jmenovatel obsahující neznámou se nesmí rovnat nule. Pak se provede samotné řešení rovnice pomocí ekvivalentních úprav. Řešení, které vyjde, se musí porovnat s podmínkou, aby zadaná rovnice dávala smysl.

Příklad 4.1.1.3

Řešte rovnici: $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{2x}$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x + 1 \neq 0 \text{ a } 2x \neq 0\text{, tedy } x \neq -1 \text{ a } x \neq 0.$$

Samotné řešení rovnice:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{3}{2x},$$

$$1 \cdot 2x = 3 \cdot (x + 1),$$

$$2x = 3x + 3,$$

$$x = -3.$$

4.1.2 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC A JEJICH ŘEŠENÍ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Soustavy lineárních rovnic se také řeší pomocí ekvivalentních úprav. Při řešení soustav lineárních rovnice se využívají dvě metody. Jedná se o sčítací a dosazovací metodu. U dosazovací metody vyjádříme z jedné rovnice jednu neznámou. Vyjádřenou neznámou pak dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme druhou neznámou. Vypočítanou neznámou dosadíme do výrazu vyjadřujícího první neznámou a vypočítáme ji. Při využití sčítací metody využíváme toho, že sečtení pravých a levých stran rovnic se zbavíme jedné neznáme a získanou rovnici vypočítáme pomocí ekvivalentních úprav. Vypočítanou neznámou dosadíme do jedné ze soustavy rovnic a vypočítáme druhou neznámou.

Příklad 4.1.2.1

Řešte soustavu rovnic:

$$8x - 3y = 10$$

$$-8x - 2y = 0.$$

Dosazovací metoda:

Nejprve vyjádření jedné neznámé:

$$8x - 3y = 10,$$

$$3y = 8x - 10,$$

$$y = \frac{8x - 10}{3}.$$

Dosazení do druhé rovnice:

$$-8x - 2 \cdot \frac{8x - 10}{3} = 0,$$

$$-24x - 2(8x - 10) = 0,$$

$$-24x - 16x + 20 = 0,$$

$$-40x = -20,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Do výrazu vyjadřující y dosadíme za x:

$$y = \frac{8x - 10}{3} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2} - 10}{3} = \frac{4 - 10}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Sčítací metoda:

Sečtení první a druhé rovnice:

$$0 - 5y = 10,$$

$$5y = -10,$$

$$y = -2.$$

Dosazení za y do libovolné rovnice:

$$8x - 3y = 10,$$

$$8x - 3 \cdot (-2) = 10,$$

$$8x + 6 = 10,$$

$$8x = 4,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Řešením soustavy rovnic je $[x, y] = \left[\frac{1}{2}, -2\right]$.

4.2 ROVNICE, NEROVNICE, JEJICH SOUSTAVY A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Na gymnáziu se vyučuje početní i grafické řešení rovnic a nerovnic. Větší důraz se klade na početní řešení rovnic a nerovnic. Proto v následujících podkapitolách uvádím základní početní metody řešení různých typů rovnic a nerovnic vyučovaných na gymnáziích.

4.2.1 Lineární rovnice, nerovnice, jejich soustavy a jejich řešení na gymnáziu

Lineární rovnice se gymnáziu řeší pomocí ekvivalentních úprav rovnic jako na základní škole. Také se na gymnáziu řeší pomocí ekvivalentních úprava lineární nerovnice. Soustavy lineárních rovnic se řeší na gymnáziu stejně jako na základní škole, tedy dosazovací a sčítací metodou. Navíc se řeší na gymnáziu soustavy lineárních nerovnic pomocí ekvivalentních úprav. Lineární rovnice a nerovnice řeší studenti na gymnáziu i grafickou metodou.

Příklad 4.2.1.1

Řešte soustavu nerovnic:

$$4x < -4$$
$$5 - x > 0.$$

Každou nerovnici vyřešíme zvlášť:

$$4x < -4,$$
$$x < -1,$$
$$K_1 = (-\infty, -1).$$

$$5 - x > 0,$$
$$5 > x,$$
$$K_2 = (-\infty, 5).$$

Na závěr uděláme průnik jednotlivých řešení:

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty, -1) \cap (-\infty, 5) = (-\infty, -1).$$

4.2.2 Kvadratické rovnice a jejich řešení na gymnáziu

Kvadratická rovnice se nejčastěji řeší pomocí diskriminantu. Z kvadratické rovnice se vypočte diskriminant. Ten může být buď kladný, nulový nebo záporný. Pokud je diskriminant kladný, tak má kvadratická rovnice dvě reálná řešení, pokud je nulový, tak má kvadratická rovnice jedno reálné řešení, a pokud je nulový, tak má kvadratická rovnice dvě řešení v oboru komplexních čísel. Je-li kvadratická rovnice neúplná, bez absolutního členu nebo bez lineární členu, nemusí se nutně řešit pomocí diskriminantu. Takovouto rovnici můžeme řešit jako rovnici v součinovém tvaru.

Příklad 4.2.2.1

Řešte rovnici: $x^2 + 4x - 5 = 0.$

Nejprve vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36.$$

Protože je diskriminant kladný, rovnice bude mít dvě řešení v oboru reálných čísel:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = -5.$$

$$K = \{-1, -5\}$$

4.2.3 ROVNICE A NEROVNICE V SOUČINOVÉM A PODÍLOVÉM TVARU A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Možností, jak řešit nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, je několik. Vybrala jsem tedy jednu variantu řešení, která si myslím, je velmi užívaná. Jedná se o metodu nulových bodů. Pro řešení rovnic v součinovém a podílovém tvaru používají žáci jeden způsob řešení.

Rovnice v součinovém tvaru se řeší tím, že vytvoříme několik jednodušších rovnic podle počtu činitelů v rovnici. Jednotlivé činitele položíme rovno nule a vypočteme neznámou. Sjednocením výsledků jednotlivých rovnic získáme řešení původní rovnice.

Příklad 4.2.3.1

Řešte rovnici v součinovém tvaru: $(x-1)(5-x) = 0$.

Jednotlivé činitele položíme rovno nule:

$$x - 1 = 0, \qquad\qquad 5 - x = 0,$$

$$x = 1. \qquad\qquad x = 5.$$

$$K = \{1, 5\}$$

Nerovnice v součinovém tvaru se nejlépe řeší pomocí tabulky. Nejprve se najdou nulové body nerovnice a určí se intervaly řešení ohraničené těmito nulovými body. Tyto intervaly zapíšeme společně s jednotlivými činiteli nerovnice do tabulky. V tabulce se určí, ve kterém intervalu jsou jednotliví činitelé kladní nebo záporní. Z toho se potom určí, jestli je zadaná nerovnice v daných intervalech kladná nebo záporná. Na závěr se sjednotí intervaly, které odpovídají řešení původní nerovnice a získá se výsledné řešení nerovnice.

Příklad 4.2.3.2

Řešte nerovnici: $(x+2)(6-x)(4+x) > 0$.

Nejprve vypočteme nulové body:

$$x = -2, x = -4, x = 6.$$

Určíme intervaly ohraničené těmito body, protože v nerovnici je ostrá nerovnost, nebudeme do intervalů zahrnovat nulové body:

$$(-\infty, -4), (-4, -2), (-2, 6), (6, \infty).$$

Sestavíme tabulku:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 6)$	$(6, \infty)$
$(x+2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(6-x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$(4+x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)(6-x)(4+x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Tabulka 1: Hodnoty činitelů příkladu 4.2.3.2

Z této tabulky je zřejmé, že nerovnice platí v intervalech $(-4, -2)$ a $(6, \infty)$.

$$K = (-4, -2) \cup (6, \infty)$$

Při řešení rovnic v podílovém tvaru se nejprve musí určit podmínky, kdy rovnice platí. Pak se rovnice zjednoduší tím, že se čitatel položí rovno nule. Vypočte se tato rovnice a pak se výsledek porovná s podmínkami platnosti. Výsledkem je výsledné řešení původní rovnice.

Příklad 4.2.3.3

Řešte rovnici: $\frac{3x-3}{x-1} = 0$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x \neq 1.$$

Čitatele položíme rovno nule:

$$3x - 3 = 0,$$

$$x = 1.$$

Protože výsledek je v rozporu s podmínkou, rovnice nemá řešení:

$$K = \{\,\}.$$

Při řešení nerovnic v podílovém tvaru se také nejprve musí určit podmínky platnosti. Pak se zjistí nulové body čitatele a jmenovatele a podle nich se vytvoří jednotlivé intervaly. Poté se určí, jestli je nerovnice v těchto intervalech kladná nebo záporná. Na závěr se sjednotí intervaly, které odpovídají řešení původní nerovnice, porovnají se s podmínkami platnosti a tím se získá výsledné řešení nerovnice.

Příklad 4.2.3.4

Řešte nerovnici: $\frac{x-9}{4-2x} < 0$.

Nejprve určíme podmínky:

$$4 - 2x \neq 0,$$

$$x \neq 2.$$

Vypočteme nulové body:

$$x = 2, x = 9$$

Určíme intervaly ohraničené těmito body, protože v nerovnici je ostrá nerovnost, nebudeme do intervalů zahrnovat nulové body:

$$(-\infty, 2), (2,9), (9, \infty).$$

Sestavíme tabulku:

	$(-\infty, 2)$	$(2,9)$	$(9, \infty)$
$x - 9$	$-$	$-$	$+$
$4 - 2x$	$+$	$-$	$-$
$\frac{x-9}{4-2x}$	$-$	$+$	$-$

Tabulka 2: Hodnoty činitelů příkladu 4.2.3.4

Z tabulky je vidět, že nerovnice platí v intervalech $(-\infty, 2)$ a $(9, \infty)$.

$$K = (-\infty, 2) \cup (9, \infty)$$

4.2.4 ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou se také řeší metodou nulových bodů. U výrazů v absolutní hodnotě se určí nulové body a tím se vytvoří několik intervalů, ve kterých se bude rovnice nebo nerovnice řešit. Z rovnice nebo z nerovnice odstraníme absolutní hodnotu pro jednotlivé intervaly zvlášť a pak takto upravené rovnice či nerovnice vypočteme pomocí ekvivalentních úprav. Poté se udělá průnik výsledků a intervalu, ve kterém se rovnice nebo nerovnice počítala, aby řešení bylo pouze z intervalu, ve kterém se rovnice nebo nerovnice počítala. Řešením původní rovnice nebo nerovnice je sjednocení všech řešení rovnic nebo nerovnic.

Příklad 4.2.4.1

Řešte rovnici $|3x + 9| = x + 7$.

Vypočteme nulový bod a podle něho určíme intervaly:

$$x = -3, \text{ tedy } (-\infty, -3), \langle -3, \infty).$$

Řešení rovnice v jednotlivých intervalech:

I. $x \in (-\infty, -3)$

$$-(3x + 9) = x + 7,$$

$$-3x - 9 = x + 7,$$

$$4x = -16,$$

$$x = -4.$$

$$K_1 = \{-4\}$$

II. $x \in \langle -3, \infty)$

$$3x + 9 = x + 7,$$

$$2x = -2,$$

$$x = -1.$$

$$K_2 = \{-1\}$$

Na závěr provedeme sjednocení jednotlivých výsledků:

$$K = K_1 \cup K_2 = \{-4\} \cup \{-1\} = \{-4, -1\}$$

4.2.5 ROVNICE A NEROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI A POD ODMOCNINOU A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Rovnice s neznámou ve jmenovateli se řeší pomocí ekvivalentních úprav. Jen před samotným řešením se musí určit podmínky, za kterých dává daná rovnice smysl, nebo na závěr udělat zkoušku, jestli všechna řešení jsou kořenem rovnice.

Příklad 4.2.5.1

Řešte rovnici: $\frac{2x}{3+2x} = \frac{x-1}{x}$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x \neq 0, x \neq -\frac{3}{2}.$$

Samotné řešení rovnice:

$$\frac{2x}{3+2x} = \frac{x-1}{x},$$

$$2x \cdot x = (x-1)(3+2x),$$

$$2x^2 = x - 3 + 2x^2,$$

$$0 = x - 3,$$

$$x = 3.$$

$$K = \{3\}$$

Nerovnice s neznámou ve jmenovateli se řeší stejně jako rovnice s neznámou ve jmenovateli.

Příklad 4.2.5.2

Řešte nerovnici: $\frac{2x}{3-x} \leq 1$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x \neq 3.$$

Samotné řešení nerovnice:

$$\frac{2x}{3-x} \leq 1,$$

$$2x \leq 3 - x,$$

$$3x \leq 3,$$

$$x \leq 1.$$

$$K = (-\infty, 1\rangle$$

Při řešení rovnic s neznámou pod odmocninou se nejprve obě strany rovnice musí umocnit, aby se žáci zbavili odmocniny v rovnici. Umocnění obou stran rovnice není ekvivalentní úpravou a umocněná rovnice tedy může mít více řešení než původní rovnice. Proto se buď musí před výpočtem určit podmínky, za kterých dává rovnice smysl, nebo na závěr udělat zkoušku, aby se vyřadila nadbytečná řešení.

Příklad 4.2.5.3

Řešte rovnici: $\sqrt{x-5} = 2$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x \geq 5.$$

Samotné řešení rovnice:

$$\sqrt{x-5} = 2,$$

$$x - 5 = 4,$$

$$x = 9.$$

$$K = \{9\}$$

Řešení nerovnic s neznámou ve jmenovateli je shodné s řešením rovnic s neznámou pod odmocninou, jen výsledkem nebývá číslo ale interval.

Příklad 4.2.5.4

Řešte nerovnici: $\sqrt{x-5} < \sqrt{2x+6}$.

Nejprve určíme podmínky:

$$x \geq 5 \text{ a } x \geq -3, \text{tedy } x \geq 5.$$

Samotné řešení rovnice:

$$\sqrt{x-5} < \sqrt{2x+6},$$

$$x - 5 < 2x + 6,$$

$$-11 < x.$$

$$K = \langle 5, \infty)$$

4.2.6 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Řešení exponenciálních rovnic vypadá složitě, ale při správné úpravě je řešení snadné. Nejprve se rovnice musí upravit, aby na každé straně byl jeden mocněnec umocněný na nějaký exponent. Poté se mocněnec na obou stranách rovnice musí upravit tak, aby byl na obou stranách stejný. Jelikož je na obou stranách stejný mocněnec, musí být i stejný exponent, aby byla zachována rovnost. Proto tedy pak se položí jeden exponent roven druhému exponentu a vyřeší se jednoduchá rovnice.

Příklad 4.2.6.1

Řešte rovnici: $3^{2x-5} = 27$.

Řešení rovnice:

$$3^{2x-5} = 27,$$

$$3^{2x-5} = 3^3,$$

$$2x - 5 = 3,$$

$$2x = 8,$$

$$x = 4.$$

$$K = \{4\}$$

4.2.7 LOGARITMICKÉ ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

Logaritmické rovnice se řeší obdobně jako exponenciální rovnice. U logaritmických funkcí musíme navíc stanovit podmínky, protože funkce logaritmus je definovaná pouze pro kladné hodnoty. Rovnice se upraví tak, aby na obou stranách byl jeden logaritmus o stejném základu. Aby byla zachována rovnost dvou logaritmů o stejném základu, tak musejí mít stejný argument. Proto se pak položí jeden argument roven druhému argumentu a vyřeší se tato jednoduší rovnice.

Příklad 4.2.7.1

Řešte rovnici: $\log(x + 5) = 2$.

Nejprve určíme podmínky

$$x > -5.$$

Samotné řešení rovnice:

$$\log(x+5) = 2,$$

$$\log(x+5) = \log 10^2,$$

$$x + 5 = 10^2,$$

$$x = 95.$$

$$K = \{95\}$$

4.2.8 GONIOMETRICKÉ ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ NA GYMNÁZIU

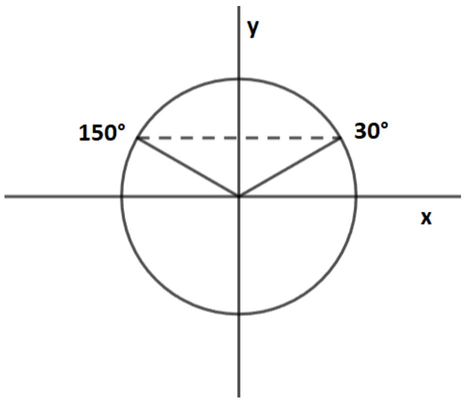
Základní goniometrické rovnice se řeší pomocí jednotkové kružnice. Žáci na této kružnici určí všechna řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Jelikož se jedná o periodickou funkci je nutné určit všechna řešení v definičním oboru funkce. Pokud se řeší složitější goniometrické rovnice, tak se velmi využívá substituce.

Příklad 4.2.8.1

Řešte rovnici: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Řešení určíme pomocí jednotkové kružnice a zároveň víme, že $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Výsledek budeme uvádět v radiánech, proto převedeme stupně na radiány:

$$30° = \frac{\pi}{6}.$$



Obrázek 1: Jednotková kružnice

Z jednotkové kružnice je patrné, že rovnice má dvě řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Funkce sinus má periodu 2π:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in Z$$

$$K = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\}, k \in Z$$

5 KOMENTOVANÉ ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY TÝKAJÍCÍCH SE ROVNIC, NEROVNIC A JEJICH SOUSTAV

V této kapitole uvádím několik komentovaných řešení úloh Matematické olympiády. Příklady jsem vybírala z různých ročníků. Snažila jsem se uvést z každé kategorie vždy alespoň jeden příklad. Příklady jsou z různých kol. Příklady jsem řadila podle jednotlivých kategorií.

5.1 PŘÍKLAD Z5-II-1 Z 57. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z5

Zadání:

Polovina dětí 5.A chodí na taneční kroužek. Dívky chodí všechny a z 18 chlapců chodí jedna třetina.

a) Kolik dětí chodí do 5.A?

b) Kolik dívek chodí do 5.A?

Možné řešení:

Do tanečního kroužku chodí všechny dívky a jedna třetina z 18 chlapců. To znamená, že do kroužku nechodí dvě třetiny z chlapců, což je:

$$\frac{2}{3} \cdot 18 = \frac{36}{3} = 12.$$

Počet všech dětí ve třídě je dvojnásobek počtu chlapců, kteří nechodí do tanečního kroužku:

$$2 \cdot 12 = 24.$$

Abychom zjistili počet dívek, odečteme od celkového počtu dětí počet chlapců:

$$24 - 18 = 6.$$

Do 5.A chodí 24 dětí a z toho je 6 dívek.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i pomocí soustavy dvou lineárních rovnic. Toto řešení je pro žáky pátého ročníku příliš složité.

Počet dětí v 5.A označíme x. Počet dívek v 5.A označíme y. Počet dětí, které chodí do kroužku vyjádříme takto:

$$y + \frac{1}{3} \cdot 18 = y + 6.$$

Víme, že do kroužku chodí přesně polovina dětí z 5.A. Vytvoříme tedy rovnici:

$$\frac{1}{2} \cdot x = y + 6.$$

Celkový počet dětí v 5.A zapíšeme pomocí rovnice:

$$x = y + 18.$$

Vytvořili jsme soustavu rovnic a tu vypočteme dosazovací metodou:

$$\frac{1}{2} \cdot (y + 18) = y + 6,$$

$$\frac{1}{2} \cdot y + 9 = y + 6,$$

$$y + 18 = 2 \cdot y + 12,$$

$$18 = y + 12,$$

$$y = 6.$$

Ještě dopočteme počet všech dětí 5.A:

$$x = y + 18 = 6 + 18 = 24.$$

Počet dětí v 5.A je 24 a z toho je 6 dívek.

5.2 Příklad Z5-I-1 z 70. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z5

Zadání:

Pan Krbec s kocourem Kokešem prodávali na hradě Kulíkově vstupenky. V sobotu prodali 210 dětských vstupenek po 25 groších a také nějaké vstupenky pro dospělé po 50 groších. Celkem za ten den utržili 5950 grošů.

Kolik prodali vstupenek pro dospělé?

Možné řešení:

Nejdříve spočítáme, kolik grošů utržili za prodané vstupenky pro děti. To znamená, že počet dětských vstupenek vynásobíme jejich cenou:

$$210 \cdot 25 = 5250.$$

Abychom mohli vypočítat, kolik bylo prodaných vstupenek pro dospělé, musíme vědět, kolik grošů utržili za prodané vstupenky pro dospělé. To spočítáme, že od celkové utržené částky odečteme utrženou částku za vstupenky pro děti:

$$5950 - 5250 = 700.$$

Za prodané vstupenky pro dospělé utržili 700 grošů. Když víme, že vstupenka pro dospělé stála 50 grošů, tak dokážeme spočítat počet prodaných vstupenek pro dospělé. Částku utrženou za vstupenky pro dospělé vydělíme cenou vstupenky pro dospělé:

$$700 : 50 = 14.$$

Prodali 14 vstupenek pro dospělé.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i pomocí rovnice. Toto řešení je pro žáky pátého ročníku příliš složité.

Počet prodaných vstupenek pro dospělé označíme d. Částku utrženou za prodané vstupenky pro dospělé vyjádříme:

$$50 \cdot d.$$

Sestavíme rovnici, kde na levou stranu rovnice zapíšeme celkovou částku a na pravou stranu rovnice částku utrženou za vstupenky pro děti a částku utrženou za vstupenky pro dospělé:

$$5950 = 25 \cdot 210 + 50 \cdot d.$$

Tuto lineární rovnici vypočteme:

$$5950 = 5250 + 50 \cdot d,$$

$$700 = 50 \cdot d,$$

$$d = 14.$$

Prodali 14 vstupenek pro dospělé.

5.3 PŘÍKLAD Z5-II-1 Z 70. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z5

Zadání:

Tatínek chodí běhat se svojí dcerou Janou. Zatímco Jana oběhla třikrát malý okruh kolem školy, tatínek oběhl čtyřikrát velký okruh kolem přilehlého parku. Takto tatínek uběhl dvojnásobnou vzdálenost než Jana. Malý okruh měří 400 metrů.

O kolik metrů je velký okruh delší než malý?

Možné řešení:

Malý okruh měří 400 metrů. Tento okruh oběhla Jana třikrát. Z toho vypočítáme, kolik metrů uběhla Jana. Vynásobíme délku malého okruhu třikrát:

$$400 \cdot 3 = 1200.$$

Jana uběhla 1200 metrů. Víme, že tatínek uběhl dvakrát více než Jana. Z toho vypočítáme, kolik uběhl tatínek. Vzdálenost uběhnutou Janou vynásobíme dvěma:

$$1200 \cdot 2 = 2400.$$

Tatínek uběhl 2400 metrů a zároveň uběhl čtyřikrát velký okruh. Z tohoto vypočítáme délku většího okruhu. Uběhnutou vzdálenost tatínkem vydělíme čtyřmi:

$$2400: 4 = 600.$$

Delší okruh měří 600 metrů. Když víme, kolik měří oba okruhy, tak spočítáme o kolik je větší okruh delší. Od délky většího okruhu odečteme délku menšího okruhu:

$$600 - 400 = 200.$$

Větší okruh je o 200 metrů delší než menší okruh.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i pomocí rovnice. Toto řešení je pro žáky pátého ročníku příliš složité.

Délku většího okruhu označíme x. Délku čtyř okruhů, které uběhl tatínek, vyjádříme:

$$4 \cdot x.$$

Tatínek uběhl dvojnásobek toho, co uběhla Jana, což vyjádříme rovnicí:

$$4 \cdot x = 2 \cdot 3 \cdot 400.$$

Tuto jednoduchou rovnici vypočítáme:

$$4 \cdot x = 2400,$$

$$x = 600.$$

Délka většího okruhu je 600 metrů.

Od délky většího okruhu odečteme délku menšího okruhu, abychom zjistili rozdíl vzdáleností těchto dvou okruhů:

$$600 - 400 = 200.$$

Větší okruh je o 200 metrů delší než menší okruh.

5.4 PŘÍKLAD Z6-II-1 Z 57. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z6

Zadání:

Na zahradě pana Kozla kvetlo několik třešní. Na každé třešni seděli tři špačci a ještě jeden seděl na plotě. Pes pana Kozla je vyplašil a špačci uletěli. Za chvilku se všichni vrátili a usadili na třešně. Třešeň, pod kterou spal pes, zůstala prázdná, na každé z ostatních třešní se usadili čtyři špačci. Kolik třešní má pan Kozel a kolik bylo na zahradě špačků?

Možné řešení:

Když víme, že špačci se usadili na třešně po čtyřech, musí být počet špačků násobek čísla čtyři. Dále víme, že když se jeden špaček posadí na plot a ostatní špačci po třech na třešně, musí být počet špačků o jedno menší násobkem čísla tři. Ještě víme, že když se všichni špačci posadí na třešně po čtyřech je potřeba o jednu třešni více, než když se jeden špaček posadí na plot a ostatní špačci po třech na třešně. Sestavíme tabulku, kam budeme tyto poznatky zaznamenávat. Budeme uvažovat pouze do desetinásobku čtyř:

Špačci sedí po čtyřech na třešni		Špačci sedí po třech na třešni a jeden sedí na plotě		
Počet obsazených třešní špačky	Počet špačků na třešních	Počet špačků na plotě	Počet špačků na třešních	Počet obsazených třešní špačky
1	4	1	3	1
2	8	1	7	-
3	12	1	11	-

4	16	1	15	5
5	20	1	19	-
6	24	1	23	-
7	28	1	27	9
8	32	1	31	-
9	36	1	35	-
10	40	1	39	-

Tabulka 3: Počty špačků

Z tabulky jsou vidět pouze tři možnosti, kdy se špačci mohou posadit po čtyřech na třešně a zároveň jeden špaček na plot a zbylí špačci po třech na třešně. Ještě musíme zahrnout podmínku, že když jeden špaček sedí na plotě a zbylí po třech na třešních, tak jsou obsazeny všechny třešně a když sedí špačci po čtyřech na třešních, tak jedna třešeň zůstane neobsazená. Této podmínce vyhovuje pouze jedna možnost z tabulky. Počet špačků je tedy 16 a počet třešní 5.

Z tabulky je vidět, že toto je jediné řešení. Pokud bychom tabulku rozšířili o větší počty třešní, tak by rozdíl počtu třešní obsazených čtyřmi špačky a počtu třešní obsazených třemi špačky postupně zvětšoval.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i pomocí soustavy lineárních rovnic. Toto řešení je pro žáky šestého ročníku příliš složité.

Počet špačků označíme x, počet třešní označíme y.

Na všech třešních seděli špačci po třech a jeden seděl na plotě, což zapíšeme rovnicí:

$$x = 3y + 1.$$

Kromě jedné třešně na všech seděli špačci po čtyřech, což zapíšeme rovnicí:

$$x = 4(y - 1).$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Soustavu vyřešíme dosazovací metodou, protože v obou rovnicích máme vyjádřené x:

$$3y + 1 = 4(y - 1),$$

$$3y + 1 = 4y - 4,$$

$$1 = y - 4,$$

$$y = 5.$$

Počet třešní na zahradě je pět. Dosazením do jedné z rovnic dopočítáme počet špačků:

$$x = 3y + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16.$$

Na zahradě je 5 třešní a na zahradě bylo 16 špačků.

5.5 Příklad Z6-I-1 z 59. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z6

Zadání:

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojmírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojmír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojmír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojmír při prvním kapesném v lednu?

Možné řešení:

Kapesné, které dostal Mojmír v lednu, označíme k.

Kapesné v únoru bylo o 4 Kč vyšší, což je $k + 4$.

V březnu bylo kapesné opět o 4 Kč vyšší než v únoru, což je $k + 4 + 4 = k + 8$.

V dubnu bylo kapesné vyšší o 4 Kč než v březnu, což je $k + 8 + 4 = k + 12$.

V květnu bylo kapesné vyšší o 4 Kč než v dubnu, což je $k + 12 + 4 = k + 16$.

V červnu bylo kapesné vyšší o 4 Kč než v květnu, což je $k + 16 + 4 = k + 20$.

V červenci bylo kapesné vyšší o 4 Kč než v červnu, což je $k + 20 + 4 = k + 24$.

V srpnu bylo kapesné vyšší o 4 Kč než v červenci, což je $k + 24 + 4 = k + 28$.

V září bylo kapesné vyšší o 4 Kč vyšší než v srpnu, což je $k + 24 + 4 = k + 28$.

V říjnu bylo kapesné vyšší o 4 Kč vyšší než v září, což je $k + 28 + 4 = k + 32$.

V listopadu bylo kapesné vyšší o 4 Kč vyšší než v říjnu, což je $k + 32 + 4 = k + 36$.

V prosinci bylo kapesné vyšší o 4 Kč vyšší než v listopadu, což je $k + 36 + 4 = k + 40$.

Mojmír dostal kapesné od tatínka za celý rok ve výši 900 Kč. Můžeme sestavit rovnici kdy na pravé straně bude výše kapesného za celý rok a na levé straně bude vypsané kapesné za jednotlivé měsíce:

$$k + k + 4 + k + 8 + k + 12 + k + 16 + k + 24 + k + 28 + k + 32 + k + 36 + k + 40 = 900$$

Rovnici upravíme:

$$12 \cdot k + 264 = 900.$$

Pro lepší pochopení, můžeme rovnici rozepsat:

$$12 \cdot k + 264 = 636 + 264.$$

Na obou stranách rovnice je číslo 264. Proto můžeme zapsat tuto rovnici ve tvaru:

$$12 \cdot k = 636.$$

Nyní již jednoduchou ekvivalentní úpravou nebo metodou pokusu vypočteme výsledek rovnice:

$$k = 53.$$

Z rovnice jsme zjistili, že kapesné v lednu bylo 53 Kč.

Mojmír dostal v lednu při prvním kapesném 53 Kč.

5.6 Příklad Z6-I-6 z 62. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z6

Zadání:

Číšník v restauraci U Šejdíře vždy započítává platícímu hostovi do účtu i datum: celkovou utracenou částku zvětší o tolik korun, kolikátý den v měsíci zrovna je.

V září se v restauraci dvakrát sešla trojice přátel. Poprvé platil každý z nich zvlášť, číšník tedy vždy přičetl datum a žádal od každého 168 Kč. Za čtyři dny tam obědvali znovu a dali si přesně totéž co minule. Tentokrát však jeden platil za všechny dohromady. Číšník tedy připsal datum do účtu jen jednou a řekl si o 486 Kč. Přátelům se nezdálo, že ač se ceny v jídelním lístku nezměnily, mají oběd levnější než minule, a číšníkův podvod ten den odhalili. Kolikátého zrovna bylo?

Možné řešení:

Nejprve spočítáme, kolik by přátelé platili, kdyby platili každý zvlášť. Číšník k útratě přičetl datum o 4 větší než předtím proto:

$$168 + 4 = 172.$$

Všichni tři by dohromady zaplatili:

$$3 \cdot 172 = 516.$$

Toto je částka, když by číšník započítal do útraty datum třikrát. Když od této částky odečteme útratu, kde je datum započítaný pouze jednou, vyjde nám součet dvou datumů, který zrovna byl:

$$516 - 486 = 30.$$

Toto je součet dvou datumů, které číšník do útraty nepřipočetl. Číslo vydělíme dvěma a získáme datum, kdy přátelé podvod odhalili:

$$30 : 2 = 15.$$

Přátelé podvod odhalili 15. září.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i pomocí soustavy lineárních rovnic. Toto řešení je pro žáky šestého ročníku příliš složité.

Cenu za oběd označíme o, datum, kdy přátelé odhalili podvod, označíme d.

Při prvním setkání každý z přátel zaplatil 168 Kč, což můžeme pomocí rovnice vyjádřit takto:

$$168 = o + d - 4.$$

Při druhém setkání zaplatili přátelé dohromady 486 Kč, což může pomocí rovnice vyjádřit takto:

$$486 = 3o + d.$$

Z první rovnice vyjádříme d:

$$d = 172 - o.$$

A dosadíme do druhé rovnice:

$$486 = 3o + 172 - o.$$

Rovnici dopočteme:

$$314 = 2o,$$

$$o = 157.$$

Vypočítanou hodnotu dosadíme do rovnice, kde máme vyjádřené d:

$$d = 172 - 157 = 15.$$

Přátelé podvod odhalili 15. září.

5.7 Příklad Z6-I-1 z 70. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z6

Zadání:

Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka.

Určete pořadí a délky skoků všech králíků.

Možné řešení:

V zadání je uvedená délka skoku Řízka. Řízek skočil 2730 mm, délku skoku převedeme na centimetry a to je 273 cm.

Délku skoku ostatních králíků, také budeme počítat v centimetrech, abychom je na závěr snadno seřadili.

Řízek skočil o 1 m a 1 dm dál než Pečínka. Rozdíl skoků převedeme na centimetry a to je 110 cm. Abychom zjistili délku skoku Pečínky, odečteme od délky skoku Řízka rozdíl jejich skoků:

$$273 - 110 = 163 \text{ cm}.$$

Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka. Délku skoku Fašírky spočítáme, že od délky skoku Pečínky odečteme 15 cm:

$$163 - 15 = 148 \text{ cm}.$$

Fašírka skočila o 2 dm méně než Guláš, to je o 20 cm. Délku skoku Guláše spočítáme, že k délce skoku Fašírky přičteme 20 cm:

$$148 + 20 = 168 \text{ cm}.$$

Na závěr délky skoků seřadíme podle velikosti. Nejvyšší hodnota je 273 cm, menší hodnota je 168 cm, menší hodnota je 163 cm a nejmenší hodnota je 148 cm.

Guláš skočil 168 cm, Pečínka skočila 163 cm, Řízek skočil 273 cm a Fašírka skočila 148 cm. První byl Řízek, druhý byl Guláš, třetí byla Pečínka a čtvrtá byla Fašírka.

Poznámka:

Úlohu je možné řešit pomocí soustavy rovnic. Toto řešení je pro žáky šestého ročníku příliš složité.

Délku skoku Guláše označíme g. Délku skoku Fašírky označíme f. Délku skoku Pečínky označíme p. Všechny délky budeme uvádět v centimetrech.

Řízek skočil o 110 cm dál než Pečínka:

$$p + 110 = 273.$$

Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka:

$$f + 15 = p.$$

Fašírka skočila o 20 cm méně než Guláš:

$$g - 20 = f.$$

Soustavu tří rovnic vyřešíme:

$$p = 163 \text{ cm},$$

$$f = 148 \text{ cm},$$

$$r = 168 \text{ cm}.$$

Guláš skočil 168 cm, Pečínka skočila 163 cm, Řízek skočil 273 cm a Fašírka skočila 148 cm. První byl Řízek, druhý byl Guláš, třetí byla Pečínka a čtvrtá byla Fašírka.

5.8 PŘÍKLAD Z7-I-5 Z 54. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY KRAJSKÉHO KOLA KATEGORIE Z7

Zadání:

Myška Hryzalka našla cihlu sýra. První den snědla $\frac{1}{8}$, druhý den $\frac{1}{7}$ zbytku, třetí den $\frac{1}{6}$ zbytku a čtvrtý den $\frac{1}{5}$ zbytku. Pak už z cihly zůstala jen krychle s povrchem 150 cm². Jaký objem měla původní cihla sýra?

Možné řešení:

Nejprve si vypočteme objem krychle sýra, která myšce zbyla. Ze vzorce pro povrch krychle vyjádříme a, což je velikost hrany krychle:

$$S = 6 \cdot a^2,$$

$$\frac{S}{6} = a^2,$$

$$\sqrt{\frac{S}{6}} = a.$$

Do tohoto vzorce dosadíme a zjistíme velikost hrany a:

$$a = \sqrt{\frac{S}{6}} = \sqrt{\frac{150}{6}} = 5.$$

Již známe hranu krychle a můžeme dopočítat její objem:

$$V = a \cdot a \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Objem krychle sýra, která myšce zbyla, je 125 cm³. Objem původní cihly sýra označíme x. Pomocí proměnné x vyjádříme kolik sýra myška každý den snědla a kolik sýra jí ten den ještě zbylo:

1.den … snědla $\frac{1}{8} \cdot x$ … zbylo $x - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{7}{8} \cdot x$;

2. den … snědla $\frac{1}{7}$ z $\frac{7}{8} \cdot x \rightarrow \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot x = \frac{1}{8} \cdot x$ … zbylo $\frac{7}{8} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{6}{8} \cdot x$;

3. den … snědla $\frac{1}{6}$ z $\frac{6}{8} \cdot x \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} \cdot x = \frac{1}{8} \cdot x$ … zbylo $\frac{6}{8} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot x$;

4. den … snědla $\frac{1}{5}$ z $\frac{5}{8} \cdot x \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot x = \frac{1}{8} \cdot x$ … zbylo $\frac{5}{8} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{4}{8} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x$.

Vypočítali jsme, že myšce zbyla jedna polovina objemu původní cihly sýra. Z předchozího výpočtu víme, že tento objem odpovídá 125 cm³, což můžeme zapsat jako jednoduchou lineární rovnici:

$$\frac{1}{2} \cdot x = 125.$$

Z této lineární rovnice vypočítáme objem původní cihly sýra. Nebo logickou úvahou zjistíme, že když měla okousaná krychle poloviční objem než původní cihla sýra, tak že objem krychle sýra vynásobíme dvěma a výsledkem je původní objem cihly sýra:

$$x = 250.$$

Původní cihla sýra měla objem 250 cm^3.

5.9 PŘÍKLAD Z7-II-3 Z 57. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z7

Zadání:

U Nováků napekli svatební koláče. Čtvrtinu zavezli příbuzným na Moravu, šestinu rozdali kolegům v práci a devítinu dali sousedům. Kdyby jim zůstalo o tři koláče více, byla by to polovina původního počtu. Kolik koláčů napekli?

Možné řešení:

Počet napečených koláčů označíme k. Čtvrtinu koláčů dostali příbuzní z Moravy. Tuhle část koláčů vyjádříme jako jednu čtvrtinu z k:

$$\frac{1}{4} \cdot k.$$

Jednu šestinu koláčů dostali kolegové. Tuhle část koláčů vyjádříme jako jednu šestinu z k:

$$\frac{1}{6} \cdot k.$$

Jednu devítinu koláčů dostali sousedi. Tuhle část koláčů vyjádříme jako jednu devítinu z k:

$$\frac{1}{9} \cdot k.$$

Novákovi rozdali koláčů dohromady:

$$\frac{1}{4} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k + \frac{1}{9} \cdot k.$$

Kdyby Novákovi rozdali o tři koláče méně, tak by rozdali přesně polovinu napečených koláčů. Což můžeme napsat pomocí rovnice:

$$\frac{1}{4} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k + \frac{1}{9} \cdot k - 3 = \frac{1}{2} \cdot k.$$

Rovnici vypočteme:

$$9 \cdot k + 6 \cdot k + 4 \cdot k - 108 = 18 \cdot k,$$

$$19 \cdot k - 108 = 18 \cdot k,$$

$$k - 108 = 0,$$

$$k = 108.$$

Nowákovi napekli 108 koláčů.

5.10 PŘÍKLAD Z7-II-2 Z 64. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z7

Zadání:

Sedmé třídy z naší školy soutěžily ve sbírání víček od PET lahví. Třída A posbírala polovinu toho, co třídy B a C dohromady, třída B posbírala třetinu toho, co třídy A a C dohromady, a třída C posbírala 150 víček.

Určete, kolik víček posbíraly tyto tři třídy dohromady.

Možné řešení:

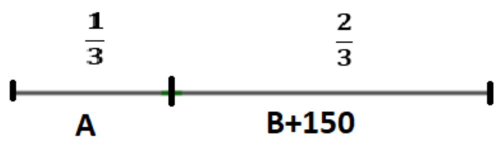
Celkový počet víček označíme x. Počet víček, které nasbírala třída A, označíme a. Počet víček, které nasbírala třída B, označíme b. Třídy dohromady nasbíraly:

$$x = a + b + 150.$$

Počet víček, které nasbírala třída A, můžeme zapsat takto:

$$a = \frac{1}{2} \cdot (b + 150).$$

Tento zápis znázorníme graficky:



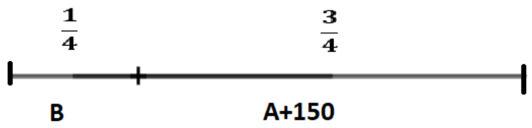
Obrázek 2: Grafické znázornění počtu víček 1

Z grafické znázornění je vidět, že třída A nasbírala jednu třetinu celkového počtu víček.

Počet víček, které nasbírala třída B, můžeme zapsat takto:

$$b = \frac{1}{3} \cdot (a + 150).$$

Tento zápis znázorníme graficky:



Obrázek 3: Grafické znázornění počtu víček 2

Z grafického znázornění je vidět, že třída B nasbírala jednu čtvrtinu celkového počtu víček.

Třída A a třída B nasbíraly dohromady z celkového počtu víček:

$$\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x = \frac{4}{12} \cdot x + \frac{3}{12} \cdot x = \frac{7}{12} \cdot x.$$

Třída C nasbírala zbytek víček, což je:

$$x - \frac{7}{12} \cdot x = \frac{12}{12} \cdot x - \frac{7}{12} \cdot x = \frac{5}{12} \cdot x.$$

Tomuto počtu odpovídá 150 víček:

$$\frac{5}{12} \cdot x = 150.$$

Tuhle rovnici vyřešíme logickou úvahou. 150 víček je pět dvanáctin z celkového počtu. 150 vydělíme pěti a získáme jednu dvanáctinu víček:

$$150 : 5 = 30.$$

Když známe jednu dvanáctinu víček, tak dopočítáme celek, což je dvanáct dvanáctin:

$$30 \cdot 12 = 360.$$

Třídy posbíraly dohromady 150 víček.

5.11 PŘÍKLAD Z8-I-2 Z 59. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY DOMÁCÍHO KOLA KATEGORIE Z8

Zadání:

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbonů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?

2. Jak se měly podle Pepy podělit?

Možné řešení:

Počet nasbíraných hřibů Líbou označíme l, počet hřibů nasbíraných Maruškou označíme m a počet hřibů nasbíraných Šárkou označíme s. Děvčata nasbírala dohromady 55 hřibů, může toto vyjádřit pomocí rovnice:

$$l + m + s = 55.$$

Každá z děvčat dala na smaženici část svých hřibů. Každé pak zbyl stejný počet hřibů, ten můžeme označit x.

Líba dala na smaženici 6 hřibů. Počet hřibů, který nasbírala Líba můžeme zapsat takto:

$$l = 6 + x.$$

Maruška dala na smaženici 8 hřibů. Počet hřibů, který nasbírala Maruška můžeme zapsat takto:

$$m = 8 + x.$$

Šárka dala na smaženici 5 hřibů. Počet hřibů, který nasbírala Šárka můžeme zapsat takto:

$$s = 5 + x.$$

Ze zadání jsme vytvořili čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Soustavu čtyř rovnic vyřešíme pomocí dosazovací metody tím, že do první rovnice dosadíme zbývající čtyři rovnice:

$$6 + x + 8 + x + 5 + x = 55.$$

Tuto rovnici vyřešíme:

$$3x + 19 = 55,$$

$$3x = 36,$$

$$x = 12.$$

Každému z děvčat zbylo 12 hřibů. Z toho snadno dopočítáme, že Líba nasbírala 18 hřibů, Maruška 20 hřibů a Šárka 17 hřibů.

Na smaženici dala děvčata dohromady $6 + 8 + 5 = 19$ hřibů. Smaženici rozdělila na čtyři stejné porce. Počet hřibů na jednu porci byl:

$$\frac{19}{4}.$$

Líba přispěla na smaženici šesti hřiby. Z těchto šesti hřibů snědla $\frac{19}{4}$ hřibů. Na Pepovu porci přispěla:

$$6 - \frac{19}{4} = \frac{24}{4} - \frac{19}{4} = \frac{5}{4}.$$

Maruška přispěla na smaženici osmi hřiby. Z těchto osmi hřibů snědla $\frac{19}{4}$ hřibů. Na Pepovu porci přispěla:

$$8 - \frac{19}{4} = \frac{32}{4} - \frac{19}{4} = \frac{13}{4}.$$

Šárka přispěla na smaženici pěti hřiby. Z těchto pěti hřibů snědla $\frac{19}{4}$ hřibů. Na Pepovu porci přispěla:

$$5 - \frac{19}{4} = \frac{20}{4} - \frac{19}{4} = \frac{1}{4}.$$

Líba, Maruška a Šárka přispěly na Pepovu porci díly v tomto poměru:

$$\frac{5}{4} : \frac{13}{4} : \frac{1}{4}.$$

Postupný poměr vynásobíme čtyřmi, aby se nám s ním lépe pracovalo:

$$5 : 13 : 1.$$

Poměr je tvořen z 19 dílů, proto musíme bonbony v bonboniéře rozdělit na 19 dílů. Bonboniéra obsahuje 38 bonbonů a ty rozdělíme na 19 dílů:

$$38 : 19 = 2.$$

Na každý díl připadají 2 bonbony z bonboniéry.

Líba přispěla na Pepovu porci 5 díly, a proto má nárok na 5 dílů bonbonů:

$$5 \cdot 2 = 10.$$

Maruška přispěla na Pepovu porci 13 díly, a proto má nárok na 13 dílů bonbonů:

$$13 \cdot 2 = 26.$$

Šárka přispěla na Pepovu porci 1 dílem, a proto má nárok na 1 díl bonbonů:

$$1 \cdot 2 = 2.$$

Líba našla 18 hřibů, Maruška našla 20 hřibů a Šárka našla 17 hřibů. Podle Pepy měla Líba dostat 10 bonbonů, Maruška 26 bonbonů a Šárka 2 bonbony.

5.12 Příklad Z8-I-5 z 61. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z8

Zadání:

Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P, S a B let. Víme, že P, S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$P = \frac{5}{2}(B - S),$$

$$S = 2(B - P),$$

$$B = 8(S - P).$$

Určete stáří všech bratrů.

Možné řešení:

Jelikož všem bratrům je méně než 16 let, musí být Bonifácovi 8 let. Protože ve třetí rovnici je definován jeho věk jako součin osmi a rozdílu věku Serváce a Pankráce. Aby byl věk nižší než 16, musí být jednonásobek osmi, proto:

$$S - P = 1.$$

Rovnici upravíme do tvaru:

$$S = P + 1.$$

Do první rovnice dosadíme, co již víme:

$$P = \frac{5}{2}[8 - (P + 1)].$$

Rovnici vypočteme:

$$P = \frac{5}{2}(7 - P),$$

$$P = \frac{5}{2} \cdot 7 - \frac{5}{2}P,$$

$$2P = 35 - 5P,$$

$$7P = 35,$$

$$P = 5.$$

Do druhé rovnice dosadíme věk Pankráce a Bonifáce, abychom dopočítali věk Serváce:

$$S = 2(8 - 5),$$

$$S = 6.$$

Pankrácovi je 5 let, Servácovi je 6 let a Bonifácovi je 8 let.

5.13 PŘÍKLAD Z8-I-1 Z 62. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY DOMÁCÍHO KOLA KATEGORIE Z8

Zadání:

Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost?

Možné řešení:

Jednotlivé činitele označíme po řadě a, b, c. Součin těchto tří čísel je 600, což zapíšeme rovnicí:

$$abc = 600.$$

Jednoho činitele zmenšíme o 10, což je $a - 10$ a součin se zmenší o 400. Toto zapíšeme rovnicí:

$$(a - 10)bc = 200.$$

Nyní jednoho činitele zvětšíme o 5, což je $b + 5$ a součin se tím zvětší na dvojnásobek. Toto zapíšeme rovnicí:

$$a(b + 5)c = 1200.$$

Druhou rovnici roznásobíme:

$$abc - 10bc = 200.$$

Z první rovnice víme, že abc je 600 a dosadíme do roznásobené rovnice:

$$600 - 10bc = 200.$$

Rovnici upravíme:

$$10bc = 400,$$

$$bc = 40.$$

Toto dosadíme do první rovnice:

$$a \cdot 40 = 600.$$

Rovnici dopočítáme:

$$a = 15.$$

Třetí rovnici roznásobíme:

$$abc + 5ac = 1200.$$

Do této rovnice dosadíme jako do předchozí:

$$600 + 5ac = 1200.$$

Rovnici upravíme:

$$5ac = 600,$$

$$ac = 120.$$

Do této rovnice dosadíme za a:

$$15c = 120.$$

Rovnici dopočítáme:

$$c = 8.$$

Do první rovnice dosadíme za a a za c:

$$15 \cdot b \cdot 8 = 600.$$

Rovnici dopočítáme:

$$b = 5.$$

Tuto vlastnost mají čísla $15, 5$ a 8.

5.14 PŘÍKLAD Z8-II-3 Z 64. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY OKRESNÍHO KOLA KATEGORIE Z8

Zadání:

Pokud jeden rozměr kvádru zdvojnásobíme, druhý rozměr kvádru vydělíme dvěma a třetí rozměr zvětšíme o 6 cm, dostaneme krychli, která má stejný povrch jako původní kvádr.

Určete rozměry tohoto kvádru.

Možné řešení:

Rozměry kvádru v centimetrech po řadě označíme a, b, c. Délku hrany krychle v centimetrech označíme x.

Když první rozměr kvádru zdvojnásobíme, dostaneme velikost hrany krychle. Toto můžeme zapsat rovnicí:

$$2a = x.$$

Z tohoto zápisu vyjádříme a:

$$a = \frac{x}{2}.$$

Když druhý rozměr kvádru vydělíme dvěma, dostaneme velikost hrany krychle. Toto můžeme zapsat rovnicí:

$$\frac{b}{2} = x.$$

Z tohoto zápisu vyjádříme b:

$$b = 2x.$$

Když třetí rozměr kvádru zvětšíme o 6 cm, dostaneme velikost hrany krychle. Toto můžeme zapsat rovnicí:

$$c + 6 = x.$$

Z tohoto zápisu vyjádříme c:

$$c = x - 6.$$

Vyjádřené rozměry kvádru dosadíme do vzorce pro povrch kvádru:

$$S = 2(ab + ac + bc) = 2\left[\frac{x}{2} \cdot 2x + \frac{x}{2} \cdot (x - 6) + 2x \cdot (x - 6)\right].$$

Dosadíme do vzorce pro povrch krychle:

$$S = 6a^2 = 6x^2.$$

Povrch krychle a povrch kvádru se rovnají. Tuhle rovnost zapíšeme pomocí rovnice:

$$6x^2 = 2\left[\frac{x}{2} \cdot 2x + \frac{x}{2} \cdot (x - 6) + 2x \cdot (x - 6)\right].$$

Rovnici dopočítáme:

$$6x^2 = 2\left[\frac{2x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{6x}{2} + 2x^2 - 12x\right],$$

$$6x^2 = 2x^2 + x^2 - 6x + 4x^2 - 24x,$$

$$6x^2 = 7x^2 - 30x,$$

$$0 = x^2 - 30x,$$

$$0 = x(x - 30).$$

Rovnice má dvě řešení a to 0 a 30. Jelikož jsme počítali délku hrany krychle, tak řešení je pouze jedno a to 30, protože délka hrany nemůže mít rozměr nula.

Postupně dopočítáme rozměry kvádru. První rozměr kvádru v centimetrech:

$$a = \frac{x}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Druhý rozměr kvádru v centimetrech:

$$b = 2x = 2 \cdot 30 = 60.$$

Třetí rozměr kvádru v centimetrech:

$$c = x - 6 = 30 - 6 = 24.$$

Rozměry kvádru jsou 15 cm, 60 cm a 24 cm.

5.15 Příklad Z8-II-2 z 65. ročníku Matematické olympiády okresního kola kategorie Z8

Zadání:

Děda chová husy, prasata, kozy a slepice – celkem 40 kusů. Na každou kozu připadají 3 husy. Kdyby bylo slepic o 8 méně, bylo by jich stejně jako hus a prasat dohromady. Kdyby děda vyměnil čtvrtinu hus za slepice v poměru 3 slepice za 1 husu, měl by celkem 46 kusů zvířat.

Kolik kterých zvířat děda chová?

Možné řešení:

Počty jednotlivých zvířat budeme značit také jejich počátečními písmeny. Z první věty sestavíme rovnici:

$$h + p + k + s = 40.$$

Z poslední věty víme, že děda vyměnil $\frac{1}{4}$ hus za slepice. Za každou vyměněnou husu dostal 3 slepice, tedy dostal $\frac{1}{4}h \cdot 3$ slepic, což můžeme upravit do tvaru $\frac{3}{4}h$ slepic. Z tohoto a poslední věty zadání sestavíme rovnic:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)h + p + k + \frac{3}{4}h + s = 46, \text{ tedy } \frac{6}{4}h + p + k + s = 46.$$

Ve vytvořené rovnici máme $\frac{6}{4}h$ a to můžeme zapsat jako $\frac{2}{4}h + h$. Rovnici z první věty a upravenou rovnici z poslední věty zapíšeme pod sebe pro větší přehlednost:

$$h + p + k + s = 40,$$

$$\frac{2}{4}h + h + p + k + s = 46.$$

Porovnáme-li obě rovnice, zjistíme, že na levé straně je ve druhé rovnici navíc oproti první rovnici $\frac{2}{4}h$. Pravá strana druhé rovnice je o 6 větší než pravá stran v první rovnici. Z toho vyplívá jednoduchá rovnice:

$$\frac{2}{4}h = 6.$$

Po vypočtení této jednoduché rovnice, zjistíme, že děda chová 12 hus. Z druhé věty víme, že na každou kozu připadají 3 husy. Z toho lze jednoduše vypočítat, že děda chová 4 kozy. Ze třetí věty zadání sestavíme rovnici:

$$s - 8 = h + p.$$

Dosadíme do první a poslední rovnice hodnoty, které už jsme spočítali:

$$12 + p + 4 + s = 40,$$

$$s - 8 = 12 + p.$$

Rovnice upravíme:

$$s + p = 24,$$

$$s - p = 20.$$

Z těchto dvou rovnic, již jednoduše dopočteme, že děda chová 22 slepic a 2 prasata.

Děda chová 12 hus, 2 prasata, 4 kozy a 22 slepic.

5.16 Příklad Z9-III-3 z 54. ročníku Matematické olympiády krajského kola kategorie Z9

Zadání:

Maminka připravila na oslavu Jirkových narozenin pomerančový džus tak, že smíchala 1 litr 100% džusu s $\frac{2}{3}$ litru 30% džusu. Jirka si odlil do skleničky a ochutnal. Protože má radši slabší koncentraci, dolil připravený džus na původní množství. Výsledný džus měl koncentraci 61,2%, a to mu vyhovovalo. Jaké množství džusu si odlil do skleničky?

Možné řešení:

Koncentraci džusu, který připravila maminka, označíme x. Koncentraci džusu budeme uvádět desetinným číslem nikoli procenty, jak je uvedeno v zadání, protože žáci jsou zvyklí z jiných předmětů počítat s koncentrací pomocí desetinného čísla. Pomocí proměnné x sestavíme rovnici, kde na levé straně uvedeme objem džusů v litrech, které maminka smíchala, a jejich koncentrace a na pravé straně uvedeme výsledný objem džusu a jeho koncentraci pomocí proměnné x:

$$1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot x.$$

Tuto lineární rovnici vypočteme:

$$1 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 = \frac{5}{3} \cdot x,$$

$$3 + 0{,}6 = 5 \cdot x,$$

$$3{,}6 = 5 \cdot x,$$

$$x = 0{,}72.$$

Koncentrace džusu, který maminka připravila, je 0,72, což je 72%. Pomocí vypočítané koncentrace dopočítáme objem odlitého džusu do skleničky v litrech a objem vody dolité do připraveného džusu maminkou. Objem džusu, který si Jirka odlil do skleničky označíme proměnnou s. Pomocí proměnné s vyjádříme objem džusu v litrech, který zůstal v původní nádobě, poté co Jirka odlil skleničku džusu z této nádoby:

$$\frac{5}{3} - s.$$

Již víme, kolik džusu zůstalo v původní nádobě, když si Jirka odlil skleničku džusu. Můžeme sestavit podobnou rovnici, jako jsme sestavili v úvodu řešení úlohy. Na levé straně rovnice uvedeme objem v litrech namíchaného džusu, který zůstal po odlití sklenice v původní nádobě, a jeho koncentraci a objem vody dolité k tomuto džusu a její koncentraci. Koncentraci vody budeme uvádět 0%, protože voda neobsahuje žádný džus. Na pravou stranu rovnice uvedeme celkový objem džusu a jeho koncentraci:

$$\left(\frac{5}{3} - s\right) \cdot 0{,}72 + s \cdot 0 = \frac{5}{3} \cdot 0{,}612.$$

Sestavenou lineární rovnici vypočteme:

$$\left(\frac{5}{3} - s\right) \cdot 0{,}72 + s \cdot 0 = \frac{5}{3} \cdot 0{,}612,$$

$$1{,}2 - s \cdot 0{,}72 + s \cdot 0 = \frac{5}{3} \cdot 0{,}612,$$

$$3{,}6 - s \cdot 2{,}16 + s \cdot 0 = 5 \cdot 0{,}612,$$

$$3{,}6 - s \cdot 2{,}16 = 3{,}06,$$

$$s \cdot 2{,}16 = 0{,}54,$$

$$s = 0{,}25.$$

Jelikož jsme do rovnice dosazovali objem v litrech, v rovnici vyšlo, že odlité množství džusu je 0,25 litru.

Jirka si odlil do skleničky 0,25 litru džusu.

5.17 Příklad Z9-I-3 z 60. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z9

Zadání:

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně?

Možné řešení:

Objem prvního soudku v litrech označíme x. Objem druhého soudku v litrech označíme y. Pomocí proměnné x vyjádříme objem v prvním soudku po odlití jednoho litru moštu:

$$x - 1.$$

Pomocí proměnné y vyjádříme objem v druhém soudku po přilití jednoho litru moštu z prvního soudku:

$$y + 1.$$

Jelikož víme, že po přelití jednoho litru moštu z prvního soudku do druhého, je objem obou soudků stejný, můžeme to zapsat pomocí rovnice:

$$x - 1 = y + 1.$$

Víme, že po přelití 9 litrů moštu z druhého soudku do prvního, bude první soudek plný. Což můžeme pomocí proměnné x vyjádřit takto:

$$x + 9.$$

Dále víme, že po odlití 9 litrů z druhého soudku do prvního, bude druhý soudek naplněný jen z jedné třetiny. Pokud objem moštu, který je ve druhém soudku, vynásobíme třemi, máme objem celého soudku, což můžeme pomocí proměnné y zapsat takto:

$$3 \cdot (y - 9).$$

V zadání je uvedeno, že objemy soudků jsou stejné. Proto objem moštu v prvním soudku po přilití 9 litrů moštu se rovná trojnásobnému objemu moštu v druhém soudku po odlití 9 litrů moštu. Toto můžeme zapsat jako druhou rovnici:

$$x + 9 = 3(y - 9).$$

Ze zadání jsme vytvořili dvě rovnice se dvěma neznámými:

$$x - 1 = y + 1,$$

$$x + 9 = 3(y - 9).$$

Tyto dvě rovnice upravíme a dopočítáme pomocí dosazovací metody:

$$x = y + 2,$$

$$\underline{x + 9 = 3y - 27,}$$

$$y + 2 + 9 = 3y - 27,$$

$$y + 11 = 3y - 27,$$

$$38 = 2y,$$

$$y = 19,$$

$$x = y + 2 = 19 + 2 = 21.$$

Ze soustavy rovnic jsme spočítali, že v prvním soudku bylo 21 litrů moštu a ve druhém soudku bylo 19 litrů moštu. Z toho jednoduše spočítáme, kolik litrů moštu vylisovali:

$$x + y = 21 + 19 = 40.$$

Spočítali jsme, že Vlčkovi vylisovali 40 litrů moštu. Nyní ještě spočítáme objem soudku. V prvním soudku bylo 21 litrů moštu a víme, že po přilití 9 litrů moštu do první soudku, byl soudek plný. Což vede k jednoduchému výpočtu:

$$21 + 9 = 30.$$

Zjistili jsme, že soudky mají objem 30 litrů.

Vlčkovi vylisovali 40 litrů moštu, objem soudků je 30 litrů a původně bylo v prvním soudku 21 litrů moštu a ve druhém soudku 19 litrů moštu.

5.18 PŘÍKLAD Z9-III-1 Z 60. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY KRAJSKÉHO KOLA KATEGORIE Z9

Zadání:

Pořadatelům výstavy „Na Měsíc a ještě dál“ se po prvním výstavním dni zdálo, že mají malou návštěvnost, proto snížili vstupné o 12 Kč. Tím se sice druhý den zvýšil počet návštěvníků o 10%, ale celková denní tržba se snížila o 5%. Kolik korun stálo vstupné po slevě?

Možné řešení:

Vstupné na výstavu první den označíme x. Druhý den se vstupné snížilo o 12 Kč, což vyjádříme takto:

$$x - 12.$$

Počet návštěvníků první den označíme y. Počet návštěvníků se druhý den zvýšil o 10%. Druhý den navštívilo výstavu tedy 110% počtu návštěvníků první den. Toto můžeme zapsat:

$$1{,}1y.$$

Tržbu za první den můžeme vyjádřit jako součin počtu návštěvníků a vstupného:

$$xy.$$

Tržbu za druhý den můžeme vyjádřit obdobně jako za první den:

$$1{,}1y(x - 12).$$

Víme, že tržba za druhý den byla o 5% nižší než za první den. Můžeme říci, že tržba za druhý den se rovná 95% tržby z prvního dne. Tuto skutečnost můžeme zapsat pomocí rovnice:

$$1{,}1y(x - 12) = 0{,}95xy.$$

Proměnná y v rovnici označuje počet návštěvníků, musí tedy y být kladné celé číslo. Když y splňuje tuto podmínku, můžeme rovnici vydělit y:

$$1{,}1 \cdot (x - 12) = 0{,}95x.$$

Nyní již je jedna rovnice s jednou neznámou a tuto rovnici dopočítáme:

$$1{,}1x - 13{,}2 = 0{,}95x,$$

$$0{,}15x = 13{,}2,$$

$$x = 88.$$

Z rovnice jsme spočítali, že vstupné první den bylo 88 Kč. Vstupné druhý den byl o 12 Kč levnější, což je snadný výpočet:

$$88 - 12 = 76.$$

Vstupné druhý den stálo 76 Kč.

5.19 Příklad Z9-I-3 z 62. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie Z9

Zadání:

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku."

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku."

Jak bylo nádraží daleko od horské chaty?

Možné řešení:

Budeme vycházet ze vzorečku pro výpočet rychlosti:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Délku cesty od chaty na nádraží označíme d. Čas do odjezdu vlaku označíme c. Rychlost naší skupiny je $v_1 = 4$ km/h, rychlost druhé skupiny je $v_2 = 6$ km/h. Vzoreček upravíme:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Do vzorečku dosadíme délku cesty a rychlost naší skupinky:

$$t = \frac{d}{4}.$$

Když víme, že naše skupinka dorazí touto rychlostí 45 minut po odjezdu vlaku, tj. $\frac{3}{4}$ hodiny, dosadíme do vzorečku i za t:

$$c + \frac{3}{4} = \frac{d}{4}.$$

Z této rovnice vyjádříme c:

$$c = \frac{d}{4} - \frac{3}{4}.$$

Do upraveného vzorečku dosadíme délku cesty a rychlost druhé skupinky:

$$t = \frac{d}{6}.$$

Tato skupinka dorazí na nádraží 30 minut před odjezdem vlaku, tj. $\frac{1}{2}$ hodiny. Dosadíme do vzorečku i za t:

$$c - \frac{1}{2} = \frac{d}{6}.$$

Z této rovnice vyjádříme c:

$$c = \frac{d}{6} + \frac{1}{2}.$$

Čas c do odjezdu vlaku je v obou rovnicích stejný, a tak vznikne nová rovnice s jednou neznámou:

$$\frac{d}{4} - \frac{3}{4} = \frac{d}{6} + \frac{1}{2}.$$

Rovnici vypočítáme:

$$3d - 9 = 2d + 6,$$

$$d - 9 = 6,$$

$$d = 15.$$

Nádraží bylo vzdálené 15 kilometrů od chaty.

5.20 PŘÍKLAD Z9-III-3 Z 66. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY KRAJSKÉHO KOLA KATEGORIE Z9

Zadání:

Velitel svolal ostatní obránce hradu a rozhodl, jak se rozdělí o svou odměnu:

„První si vezme jeden zlaťák a sedminu zbytku, druhý si vezme dva zlaťáky a sedminu nového zbytku a tak dále. Tedy n-tý obránce si vezme n zlaťáků a k tomu ještě sedminu ze zbývajícího množství zlaťáků, dokud nějaké budou.“

Takto se podařilo rozdělit všechny zlaťáky a přitom všichni obránci dostali stejně.

Kolik obránců se dělilo o odměnu?

Možné řešení:

Počet všech zlaťáků označme z. Pomocí proměnné z vyjádříme počet zlatých, které dostal první obránce:

$$1 + \left(\frac{z-1}{7}\right) = \frac{7+z-1}{7} = \frac{z+6}{7}.$$

Když víme, kolik zlaťáků dostal první obránce, vypočítáme, kolik zlaťáků si dělí zbytek obránců:

$$z - \frac{z+6}{7} = \frac{7z-z+6}{7} = \frac{6z+6}{7}.$$

Druhý obránce si ze zbytku zlaťáků vezme 2 a jednu sedminu ze zbytku, což vyjádříme:

$$2 + \left(\frac{\frac{6z+6}{7}-2}{7}\right) = 2 + \left(\frac{\frac{6z+6-14}{7}}{7}\right) = 2 + \left(\frac{\frac{6z-20}{7}}{7}\right) = 2 + \frac{6z-20}{49} =$$

$$= \frac{98+6z-20}{49} = \frac{6z+78}{49}.$$

Jelikož ze zadání víme, že oba obránci dostali stejnou odměnu, musí platit:

$$\frac{z+6}{7} = \frac{6z+78}{49}.$$

Tuto lineární rovnici vypočteme:

$$7z + 42 = 6z + 78,$$

$$z + 42 = 78,$$

$$z = 36.$$

Vypočítali jsme, že dohromady si obránci rozdělili 36 zlaťáků. Vypočítáme z toho, kolik dostal každý obránce:

$$\frac{z+6}{7} = \frac{36+6}{7} = \frac{42}{7} = 6.$$

Každý obránce dostal 6 zlaťáků. Nyní z toho již snadno spočítáme, kolik bylo obránců:

$$\frac{36}{6} = 6.$$

O odměnu se dělilo 6 obránců.

5.21 Příklad 5. z 59. ročníku Matematické olympiády domácího kola kategorie C

Zadání:

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

Možné řešení:

Nejprve dokážeme levou nerovnost:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)}.$$

Abychom se zbavili na levé straně odmocniny, nerovnici umocníme:

$$ab \leq \frac{4(a^2 + 3ab + b^2)^2}{25(a+b)^2}.$$

V nerovnici se zbavíme zlomků:

$$ab25(a+b)^2 \leq 4(a^2 + 3ab + b^2)^2.$$

Nerovnici upravíme:

$$25ab(a^2 + 2ab + b^2) \leq 4(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 2a^2b^2 + 6ab^3),$$

$$25a^3b + 50a^2b^2 + 25ab^3 \leq 4a^4 + 36a^2b^2 + 4b^4 + 24a^3b + 8a^2b^2 + 24ab^3,$$

$$a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 \leq 4a^4 + 4b^4.$$

Abychom mohli upravovat nerovnici podle vzorců pro umocnění, musíme od obou stran nerovnice odečíst $8a^2b^2$:

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 \leq 4a^4 + 4b^4 - 8a^2b^2.$$

Z pravé strany nerovnice vytkneme 4, z levé strany nerovnice vytkneme ab a upravíme obě strany nerovnice podle vzoreců:

$$ab(a^2 - 2ab + b^2) \leq 4(a^4 - 2a^2b^2 + b^4),$$

$$ab(a-b)^2 \leq 4(a^2 - b^2)^2.$$

Výraz na pravé straně nerovnice ještě rozložíme podle vzorce a nerovnici upravíme:

$$ab(a-b)^2 \leq 4(a^2-b^2)(a^2-b^2),$$

$$ab(a-b)^2 \leq 4(a-b)(a+b)(a-b)(a+b),$$

$$ab(a-b)^2 \leq 4(a-b)^2(a+b)^2.$$

Pro $a \neq b$ můžeme nerovnici vydělit nenulovým výrazem $(a-b)^2$. Z toho vyplývá, že pro $a=b$ platí rovnost. Rovnici vydělíme nenulovým výrazem $(a-b)^2$ a vhodně upravíme:

$$ab \leq 4(a+b)^2,$$

$$ab \leq 4(a^2+2ab+b^2),$$

$$ab \leq 4a^2+8ab+4b^2,$$

$$0 \leq 4a^2+8ab+4b^2.$$

Pro všechna kladná reálná čísla nerovnost platí.

Zbývá dokázat pravou nerovnost:

$$\frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2}.$$

V nerovnici se zbavíme zlomků:

$$4(a^2+3ab+b^2) \leq 5(a+b)(a+b).$$

Nerovnici vhodně upravíme:

$$4a^2+12ab+4b^2 \leq 5(a^2+2ab+b^2),$$

$$4a^2+12ab+4b^2 \leq 5a^2+10ab+5b^2,$$

$$0 \leq a^2-2ab+b^2,$$

$$0 \leq (a-b)^2.$$

Pro všechna kladná reálná čísla nerovnost platí. Rovnost nastane pokud $a=b$.

Levá nerovnost platí a rovnost v ní nastane, když platí $a=b$ a pravá nerovnost platí a rovnost v ní nastane, když platí $a=b$.

5.22 PŘÍKLAD 1. Z 61. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY KRAJSKÉHO KOLA KATEGORIE C

Zadání:

Pro libovolná reálná čísla x, y, z taková, že $x < y < z$, dokažte nerovnost

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Možné řešení:

Pravou stranu nerovnice můžeme upravit podle vzorce pro druhou mocninu trojčlenu:

$$x^2 - y^2 + z^2 > x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Nerovnici upravíme tak, abychom na pravé straně nerovnice měli nulu:

$$x^2 - y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2xz + 2yz > 0,$$

$$-2y^2 + 2xy - 2xz + 2yz > 0.$$

V této nerovnici upravíme levou stranu nerovnici na součin pomocí vytýkání:

$$2y(-y + x) + 2z(-x + y) > 0,$$

$$2y(-y + x) - 2z(x - y) > 0,$$

$$(x - y)(2y - 2z) > 0,$$

$$2(x - y)(y - z) > 0.$$

Protože ze zadání víme, že x je menší než y, tak je činitel $(x - y)$ záporný. Také y je menší než z, proto také činitel $(y - z)$ je záporný. Součinem dvou záporných činitelů vznikne kladné číslo, což vyhovuje nerovnici.

Dokázali jsme, že nerovnice za podmínek daných v zadání platí.

5.23 PŘÍKLAD 1. Z 66. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY ŠKOLNÍHO KOLA KATEGORIE C

Zadání:

Najděte všechna řešení rovnice

$$1 = \frac{|3x - 7| - |9 - 2x|}{|x + 2|}.$$

Možné řešení:

Ze zadání je vidět, že se jedná o rovnici s neznámou ve jmenovateli, a navíc tahle rovnice obsahuje absolutní hodnotu. Proto je důležité udělat podmínku, za které dává rovnice smysl. Podmínku vypočítáme ze jednoduché nerovnice:

$$|x+2| \neq 0,$$

$$x+2 \neq 0,$$

$$x \neq -2.$$

Z vypočtené podmínky víme, že do rovnice za x nesmíme dosadit -2, aby daná rovnice dávala smysl. Tuhle podmínku musíme zohlednit při řešení rovnice.

Jelikož rovnice obsahuje absolutní hodnotu, budeme ji řešit pomocí nulových bodů. Rovnice obsahuje tři absolutní hodnoty s proměnnou x, proto budeme mít tři nulové body. Nulové body jsou $-2; 3{,}5$ a $4{,}5$. Pomocí těchto tří nulových bodů rozdělíme množinu reálných čísel na čtyři intervaly:

$$(-\infty;\ -2);\ \langle -2; 3{,}5);\langle 3{,}5; 4{,}5);\langle 4{,}5;\ \infty).$$

Nyní v každém intervalu odstraníme z rovnice absolutní hodnotu a dopočteme ji. Absolutní hodnotu budeme odstraňovat tak, že pokud je výraz v absolutní hodnotě v daném intervalu kladný tak pouze odstraníme absolutní hodnotu. Pokud je výraz v daném intervalu záporný tak před výraz v absolutní hodně zapíšeme znaménko mínus a odstraníme absolutní hodnotu.

Budeme řešit čtyři rovnice ve čtyřech intervalech.

I. $x \in (-\infty;\ -2)$

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}$$

$$1 = \frac{-(3x-7) - (9-2x)}{-(x+2)}$$

$$1 = \frac{-3x+7-9+2x}{-x-2}$$

$$-x-2 = -x-2$$

$$0 = 0$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jelikož jsme řešili rovnici pouze v intervalu $(-\infty;\ -2)$, bude řešením pouze tento interval:

$$x \in (-\infty;\ -2).$$

II. $x \in \langle -2;\ 3{,}5)$

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}$$

$$1 = \frac{-(3x-7) - (9-2x)}{(x+2)}$$

$$1 = \frac{-3x+7-9+2x}{x+2}$$

$$x+2 = -x-2$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

Řešením rovnice vyšlo -2, což je v rozporu s podmínkou, proto rovnice v tomto intervalu nemá řešení:

$$x \in \{\,\}.$$

III. $x \in \langle 3{,}5;\ 4{,}5)$

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}$$

$$1 = \frac{(3x-7) - (9-2x)}{(x+2)}$$

$$1 = \frac{3x-7-9+2x}{x+2}$$

$$x+2 = 5x-16$$

$$4x = 18$$

$$x = 4{,}5$$

Řešením rovnice vyšlo $4{,}5$, což je mimo interval, ve kterém jsme rovnici počítali, proto rovnice v tomto intervalu nemá řešení:

$$x \in \{\,\}.$$

IV. $x \in \langle 4{,}5;\ \infty)$

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}$$

$$1 = \frac{(3x-7) + (9-2x)}{(x+2)}$$

$$1 = \frac{3x - 7 + 9 - 2x}{x+2}$$

$$x + 2 = x + 2$$

$$0 = 0$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jelikož jsme řešili rovnici pouze v intervalu $\langle 4{,}5;\ \infty)$, bude řešením pouze tento interval:

$$x \in \langle 4{,}5;\ \infty).$$

Rovnice jsme řešili v jednotlivých intervalech, a proto je nyní nezbytné sjednotit jednotlivá řešení rovnic, abychom získali řešení rovnice v množině reálných čísel:

$$(-\infty;\ -2) \cup \{\,\} \cup \{\,\} \cup \langle 4{,}5;\ \infty).$$

Řešením rovnice jsou všechna čísla z intervalu $(-\infty;\ -2) \cup \langle 4{,}5;\ \infty)$.

5.24 PŘÍKLAD 2. Z 67. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY KRAJSKÉHO KOLA KATEGORIE C

Zadání:

Pro celá čísla x, y, z platí $x^2 + y - z = 10$, $x^2 - y + z = 22$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $x^2 + y^2 + z^2$.

Možné řešení:

Rovnice se na levé straně liší pouze znaménky u druhého a třetího členu. Proto je vhodné je sečíst:

$$2x^2 = 32.$$

Tuto rovnici již snadno dopočteme:

$$x^2 = 16,$$

$$x = \pm 4.$$

Pro další počítání je pro nás důležité, že $x^2 = 16$. Do rovnic dosadíme za x:

$$16 + y - z = 10,$$

$$16 - y + z = 22.$$

Tyto dvě rovnice upravíme:

$$y - z = -6,$$

$$-y + z = 6.$$

Z obou rovnic vyšlo:

$$z = 6 + y.$$

Nyní dosadíme do výrazu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 + y^2 + (6 + y)^2.$$

Dosazený výraz upravíme do nejvhodnějšího tvaru:

$$16 + y^2 + (6 + y)^2 = 16 + y^2 + 36 - 12y + y^2 = 2y^2 - 12y + 52 =$$

$$= 2(y^2 + 6y + 26) = 2[(y + 3)^2 + 17].$$

Tento výraz má mít nejmenší možnou hodnotu. V upraveném výrazu spočívá jeho hodnota pouze na proměnné y. Hodnota celého výrazu spočívá na výrazu $(y + 3)^2$, který je vždy kladný nebo roven nule:

$$(y + 3)^2 \geq 0.$$

Jeho nejmenší hodnota je rovna nule. Z tohoto vznikne rovnice:

$$(y + 3)^2 = 0.$$

Tuto rovnici dopočítáme:

$$y = -3.$$

Hodnotu z již snadno vypočítáme, dosadíme do první rovnice:

$$16 - 3 - z = 10,$$

$$z = 3.$$

Dopočítali jsme poslední hodnotu a již zbývá pouze dosadit do výrazu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 + (-3)^2 + 3^2 = 34.$$

Nejmenší možná hodnota výrazu, která splňuje podmínky, je 34.

5.25 Příklad 1. z 60. ročníku Matematické olympiády školního kola kategorie B

Zadání:

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou x a reálným parametrem p.

Možné řešení:

Protože levá strana rovnice obsahuje odmocniny, musíme určit podmínky, kdy rovnice platí. Výraz pod odmocninou musí být kladný nebo roven nule:

$$x \geq 0.$$

Z této podmínky vyplývá, že rovnice bude mít řešení pro všechna $p \geq \sqrt{3}$.

Samotné řešení rovnice:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p,$$

$$x + 3 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} + x = p^2,$$

$$2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} = p^2 - 2x - 3,$$

$$2\sqrt{x(x+3)} = p^2 - 2x - 3,$$

$$4[x(x+3)] = p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x,$$

$$4x^2 + 12x = p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x,$$

$$4p^2x = p^4 - 6p^2 + 9,$$

$$x = \frac{p^4 - 6p^2 + 9}{2p^2},$$

$$x = \frac{(p^2-3)^2}{2p^2}.$$

Zkouškou se přesvědčíme, že pro parametr $p \geq \sqrt{3}$ je vypočítané x řešením rovnice:

$$L\left(\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}\right)=\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}+3}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}}=\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}+\frac{6p^2}{2p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p^2-3)^2+6p^2}{2p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}}=\sqrt{\frac{p^4-6p^2+9+6p^2}{2p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{2p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}}=\frac{p^2+3}{2p}+\frac{p^2-3}{2p}=\frac{2p^2}{2p}=p$$

$$P\left(\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}\right)=p$$

$$L\left(\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}\right)=P\left(\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}\right)$$

Při odmocňování ve zkoušce jsme využívali, že $p\geq\sqrt{3}$, abychom odmocňovali nezáporné číslo.

Pro parametr $p\geq\sqrt{3}$ je řešením rovnice $x=\frac{(p^2-3)^2}{2p^2}$. Pro jiné hodnoty parametru nemá rovnice v oboru reálných čísel řešení.

5.26 PŘÍKLAD 4. Z 67. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY DOMÁCÍHO KOLA KATEGORIE B

Zadání:

Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí

$$a+ab+abc+ac+c=2017.$$

Možné řešení:

Nejprve upravíme levou stranu rovnice. Z prvního a druhého členu levé strany rovnice lze vytknout a:

$$a(1+b)+abc+ac+c=2017.$$

Z dalších dvou členů levé strany rovnice lze vytknou ac:

$$a(1+b)+ac(b+1)+c=2017.$$

Nyní lze vytknout z prvních dvou členů levé strany rovnice $a(b+1)$:

$$a(b+1)(1+c)+c=2017.$$

Abychom mohli na levé straně dále vytýkat, přičteme k obou stranám rovnice 1:

$$a(b+1)(1+c)+(c+1)=2018.$$

Po této úpravě lze na levé straně rovnice vytknout $(c+1)$:

$$(c+1)[a(b+1)+1]=2018.$$

Levou stranu rovnice jsme zapsali jako součin dvou činitelů. Číslo 2018 můžeme napsat dvěma způsoby jako součin dvou činitelů:

$$1\cdot 2018, 2\cdot 1009.$$

Jelikož číslo a, b, c jsou přirozená čísla, tak musí platit:

$$c+1\geq 2,$$

$$a(b+1)+1\geq 3.$$

Proto připadá v úvahu jen jediná možnost:

$$c+1=2,$$

$$a(b+1)+1=1009.$$

Z první rovnice je zjevné, že $c=1$. Nyní již budeme hledat dvojici přirozených čísel a, b, které vyhovují druhé rovnici. Tuto rovnici můžeme také upravit do tvaru, kdy bude na levé straně součin dvou činitelů:

$$a(b+1)=1008.$$

Číslo 1008 rozepíšeme jako součin prvočinitelů:

$$1008=\ 2^4\cdot 3^2\cdot 7.$$

Mohli bychom zdlouhavě hledat všechny možnosti dvojic přirozených čísel a, b, ale jelikož máme určit pouze počet možností, a ne najít všechny možnosti, budeme hledat, kolik dělitelů má číslo 1008. Což nám určí počet hodnot, kterých můžou nabývat dvojice přirozených čísel a, b. Počet dělitelů čísla 1008 určíme jako součin exponentů v jeho prvočíselném rozkladu zvětšených o 1:

$$5\cdot 3\cdot 2=30.$$

Počet všech dělitelů čísla 1008 je 30 včetně 1 a sebe sama. Jelikož čísla a, b jsou přirozená čísla, musí platit:

$$b + 1 \geq 2.$$

Z této nerovnice je viditelné, že číslo a nemůže nabývat hodnoty 1008. Proto počet hodnot, kterých mohou nabývat dvojice přirozených čísel a, b je 29. Jelikož přirozené číslo c nabývá pouze hodnoty 1 a dvojice přirozených čísel a, b může nabývat 29, trojice přirozených čísel a, b, c může nabývat 29 hodnot.

Počet všech trojic přirozených čísel a, b, c je 29.

5.27 PŘÍKLAD 1. Z 59. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY DOMÁCÍHO KOLA KATEGORIE A

Zadání:

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1,$$

$$\sqrt{y^2 - z} = x - 1,$$

$$\sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$

Možné řešení:

Levé strany rovnic jsou výrazy pod odmocninou a levé strany rovnic tedy budou nabývat pouze kladných nebo nulových hodnot. Proto i pravé strany rovnic musí být kladné nebo rovno nule:

$$z - 1 \geq 0,$$

$$x - 1 \geq 0,$$

$$y - 1 \geq 0.$$

Z toho plynou podmínky:

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1.$$

Abychom se zbavili odmocnin v rovnicích, tak je umocníme:

$$x^2 - y = (z - 1)^2,$$

$$y^2 - z = (x-1)^2,$$

$$z^2 - x = (y-1)^2.$$

Rovnice upravíme:

$$x^2 - y = z^2 - 2z + 1,$$

$$y^2 - z = x^2 - 2x + 1,$$

$$z^2 - x = y^2 - 2y + 1.$$

Abychom se zbavili druhých mocnin v rovnicích, tak rovnice sečteme:

$$x^2 - y + y^2 - z + z^2 - x = z^2 - 2z + 1 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1.$$

Rovnici upravíme:

$$-y - z - x = -2z + 1 - 2x + 1 - 2y + 1,$$

$$y + z + x = 3.$$

V úvodu jsme určili podmínky, za kterých soustava rovnic platí. Tyto podmínky musí splňovat i námi upravená rovnice. Z toho plyne, že soustava rovnic má pouze jedno řešení a to:

$$x = 1, y = 1, z = 1.$$

Protože jsme řešili soustavu rovnic s odmocninami a prováděli jsme neekvivalentní úpravy, musíme provést zkoušku dosazením vypočítaného řešení do soustavy rovnic:

$$\sqrt{1^2 - 1} = 1 - 1,$$

$$\sqrt{1^2 - 1} = 1 - 1,$$

$$\sqrt{1^2 - 1} = 1 - 1.$$

Soustavu rovnic upravíme:

$$0 = 0,$$

$$0 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Zkouškou jsme dokázali, že nalezení řešení je opravdu řešením soustavy.

Řešením soustavy rovnic je trojice čísel $[1,1,1]$.

5.28 Příklad 1. z 67. ročníku Matematické olympiády školního kola kategorie A

Zadání:

Určete všechna reálná čísla p, pro která má soustava nerovnic

$$x^2 + (p-1)x + p \leq 0,$$

$$x^2 - (p-1)x + p \leq 0$$

alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

Možné řešení:

Jedná se o soustavu dvou nerovnic o jedné neznámé. Nerovnice se od sebe liší pouze znaménkem u druhého členu na levé straně nerovnic. Pokud nerovnice sečteme vznikne jednodušší nerovnice:

$$2x^2 + 2p \leq 0.$$

Na této nerovnici je vidět, že první člen na levé straně nerovnice bude vždy kladný nebo roven nule. Proto aby tato nerovnice měla řešení, musí být druhý člen na levé straně nerovnice záporný:

$$2p \leq 0.$$

Z této jednoduché nerovnice je patrné, že číslo p musí být záporné nebo rovno nule, aby měla soustava nerovnic řešení v oboru reálných čísel.

Soustava nerovnic má řešení v oboru reálných čísel pro $p \leq 0$.

ZÁVĚR

V diplomové práci jsem se snažila vytvořit přehled několika komentovaných řešení úloh z Matematické olympiády pomocí rovnic, nerovnic a jejich soustav. Také jsem se snažila shrnout jejich řešení na základní a střední škole.

První dvě kapitoly jsou věnované historii a organizaci Matematické olympiády. Matematická olympiáda byla vytvořena, aby přilákala mladé studenty k technickým oborům a mohl se rozvíjet průmysl v tehdejším Československu.

V dále je práce věnována ukotvení rovnic, nerovnic a jejich soustav v Rámcovém vzdělávacím plánu. Nejprve se zaměřuje na Rámcový vzdělávací plán pro základní vzdělávání, kde jsem zjistila, že obsahuje pouze lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých. Rámcový vzdělávací plán pro gymnázia obsahuje rozšíření tohoto učiva o lineární nerovnice, rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou a s neznámou ve jmenovateli, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou kvadratické rovnice a nerovnice, exponenciální rovnice, logaritmické rovnice a goniometrické rovnice.

V diplomové práci je utvořen jednoduchý přehled, jak jednotlivé druhy rovnic, nerovnic a jejich soustav řeší žáci na základní a střední škole. Tento přehled je doplněný o jednoduché příklady doplňující popis řešení jednotlivých rovnic a nerovnic.

Největší část diplomové práce je věnována komentovaným řešení úloh z Matematické olympiády. Jsou vybrány úlohy z různých ročníků a různých kol. Ke všem z osmi kategorií je uvedena vždy alespoň jedna úloha, která do této kategorie spadá. Řešení jednotlivých úloh je komentované úměrně k věku a znalostem žáků na základní či střední škole.

RESUMÉ

Diplomová práce je věnována rovnicím a nerovnicím v úlohách Matematické olympiády. Nejprve je práce věnována organizaci a historii Matematické olympiády. Dále je v práci uvedeno vymezení rovnic a nerovnic v Rámcovém vzdělávacím plánu pro základní vzdělávání a v Rámcovém vzdělávacím plánu pro gymnázia. Jedna kapitola se zabývá základními postupy řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav. Největší část práce je věnována komentovaným řešením úloh Matematické olympiády. V této kapitole jsem snažila uvést jednoduché a pochopitelné řešení jednotlivých úloh. Zjistila jsem, že v každé kategorii Matematické olympiády se nacházejí úlohy, které lze řešit pomocí rovnic, nerovnic a jejich soustav.

Diploma thesis is dedicated to equations and inequation in tasks of the mathematical Olympiads. First of all, the thesis is dedicated to the organization and history of the Mathematical Olympiads. Next, there is mentioned delimitation of equations and inequations within the framework of educational plan for basic education and the framework of educational plan for grammar schools. One chapter follows up primary processes solutions of equations, inequations and their systems. Biggest part of the thesis is dedicated to commented mathematical Olympiads solutions. In this chapter I tried to introduce simple and understandable solutions to individual tasks. I figured out that in every category of the mathematical Olympiads are situated tasks which can be solved by equations, inequations and their systems.

SEZNAM LITERATURY

1. BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, c2007. ISBN 978-80-87000-11-3.
2. BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.
3. CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 987-80-7196-362-2.
4. LAUBEOVÁ, Alena, Blanka MATASOVÁ, Tomáš MIERVA, Petra NÁDVORNÍKOVÁ, Jana PRESOVÁ a Robert WEINLICH. *Hravá matematika 8: učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP*. Praha: Taktik, 2021. ISBN 978-80-7563-265-4.
5. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-435-3.
6. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-439-1.
7. ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-85849-09-7.
8. ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-359-2.
9. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/07/RVP-ZV-2021.pdf
10. *54. ročník Matematické olympiády: Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491915/z54i-7r.pdf
11. *54. ročník Matematické olympiády: III. kolo kategorie Z9* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491923/z54iii-9r.pdf
12. *57. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z5* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491955/z57ii-5.pdf
13. *57. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z6* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491956/z57ii-6r.pdf
14. *57. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z7* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491957/z57ii-7r.pdf
15. *59. ročník Matematické olympiády: Úlohy domácí části I. kola kategorie A* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471818/a59i.pdf

16. *59. ročník Matematické olympiády: Úlohy domácí části I. kola kategorie C* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471820/c59i.pdf
17. *59. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z6* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491975/z59i-6.pdf
18. *59. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z8* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491977/z59i-8.pdf
19. *60. ročník Matematické olympiády: Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471837/b60s.pdf
20. *60. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z9* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491991/z60i-9.pdf
21. *60. ročník Matematické olympiády: III. kolo kategorie Z9* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491997/z60iii-9.pdf
22. *61. ročník Matematické olympiády: Úlohy krajského kola kategorie C* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471859/c61ii.pdf
23. *61. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z8* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492002/z61i-8.pdf
24. *62. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z6* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492013/z62i-6.pdf
25. *62. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z8* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492015/z62i-8.pdf
26. *62. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z9* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492016/z62i-9.pdf
27. *64. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z7* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492036/z7ii-r.pdf
28. *64. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z8* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492037/z8ii-r.pdf
29. *65. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z8* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492045/z8ii-r.pdf
30. *66. ročník Matematické olympiády: Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471947/c66s.pdf
31. *66. ročník Matematické olympiády: III. kolo kategorie Z9* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492060/z9iii-r.pdf
32. *67. ročník Matematické olympiády: Úlohy domácí části I. kola kategorie B* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471962/b67i.pdf
33. *67. ročník Matematické olympiády: Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471964/a67s.pdf

34. *67. ročník Matematické olympiády: Úlohy krajského kola kategorie C* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471969/c67ii.pdf
35. *70. ročník Matematické olympiády: I. kolo kategorie Z5* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492100/z70i-5.pdf
36. *70. ročník Matematické olympiády: II. kolo kategorie Z5* [online]. [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492105/z70ii-5-r.pdf

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Seznam obrázků

Seznam tabulek