Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

# Bakalářská práce

## Aktivní tlumení vibrací nosníkových konstrukcí

Plzeň, 2012

Tomáš Korima

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne .....  Podpis autora

# Poděkování

Chtěl bych poděkovat panům prof. Dr. Ing. Janu Dupalovi a prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc, prvnímu z nich za vedení bakalářské práce, za poskytnutou literaturu a konzultace, druhému z nich za konzultace týkající se návrhu řízení.
Děkuji též svým rodičům za sponzorování mého studia.

# Abstrakt

V této práci je odvozen konečný nosníkový prvek s piezoelektrickými záplatami o šesti stupních volnosti, který je následně použit k vytvoření matematického modelu nosníku s piezoelektrickými senzory a aktuátory ve v čase spojité stavové reprezentaci respektující prvních $m$ vlastních tvarů kmitu modelovaného nosníku. Dále je zde uveden postup pro výpočet ziskových matic lineárního rekonstruktoru stavu a stavové zpětné vazby. Nakonec jsou uvedené postupy aplikovány při numerické simulací tlumení vibrací vetknutého nosníku ve výpočtovém prostředí `MATLAB-Simulink`.



## Klíčová slova

konečný prvek, piezoelektrika, piezoelektrický aktuátor, piezoelektrický senzor, stavová reprezentace dynamického systému, přiřazení pólů, rekonstruktor stavu, stavový regulátor, tlumení vibrací, řízení



# Abstract

This thesis first aims on derivation of a 6DOF finite beam element with attached piezoelectric patches. The element is then used to create a mathematical model of a beam with attached piezoelectric sensors and actuators in a continuous-time state variable representation, which respects first $m$ vibratory modes. The following part describes how to calculate the state feedback and state observer gain matrices. The final part presents a numerical simulation of vibration control of a cantilever beam using the `MATLAB-Simulink` computational environment.



## Keywords

finite element, piezoelectricity, piezoelectric actuator, piezoelectric sensor, state variable model, pole placement, state observer, state controller, vibration damping, control

# Obsah

**Úvod** **3**

**1 Stručný přehled základních poznaků** **4**
1.1 Aktivní tlumení vibrací . . . . . 4
1.2 Piezoelektrické materiály . . . . . 4
1.3 Metoda konečných prvků . . . . . 5
1.4 Stavová reprezentace modelu . . . . . 6
1.5 Dynamický kompenzátor . . . . . 7

**2 Odvození pohybové rovnice** **9**
2.1 Odvození konečného prvku . . . . . 9
2.1.1 Vyjádření a aproximace polí posuvů elementu . . . . . 9
2.1.2 Matice hmotnosti, tuhosti a vektor buzení elementu . . . . . 12
2.2 Netlumený model . . . . . 15
2.3 Matice tlumení . . . . . 15
2.4 Výsledná pohybová rovnice modelu . . . . . 16

**3 Stavová reprezentace modelu nosníku** **17**
3.1 Stavová rovnice . . . . . 17
3.2 Výstupní rovnice . . . . . 18
3.2.1 Odvození matice **C** . . . . . 18
3.2.2 Výstupní rovnice měření zobecněné souřadnice . . . . . 19

**4 Návrh zákona řízení** **20**
4.1 Návrh rekonstruktoru stavu . . . . . 20
4.2 Návrh stavové zpětné vazby . . . . . 21

**5 Počítačový model soustavy** **22**
5.1 Ověření implementace algoritmů . . . . . 22
5.2 Použitý model . . . . . 22
5.3 Odezva na silový puls . . . . . 27
5.4 Frekvenční odezva . . . . . 28
5.5 Control spillover . . . . . 31

**Závěr** **32**

**Seznam obrázků** **33**

**Seznam tabulek** **34**

**Použitá označení** **35**

**Literatura** **38**

# Úvod

Hlavními cíli předkládané bakalářské práce jsou odvození konečného nosníkového prvku s piezoelektrickým senzorem a aktuátorem, sestavení matematického modelu nosníku s piezoelektrickými aktuátory a senzory a návrh regulátoru pro potlačení vibrací modelované soustavy.

První kapitola stručně pojednává o poznatcích potřebných k vytvoření modelu nosníku s piezoelektrickými senzory a aktuátory a k následnému návrhu regulátoru.

Ve druhé kapitole je odvozen konečný nosníkový prvek se dvěma piezy, jedním sloužícím jako aktuátor, druhým jako senzor mechanických kmitů. Následně je sestavena pohybová rovnice slabě tlumeného vetknutého nosníku s piezoelektrickými aktuátory a senzory.

Třetí kapitola ukazuje, jak převést pohybovou rovnici nosníku do stavové reprezentace a je v ní též uvedeno odvození vztahu pro výstupní veličiny senzorů. Čtvrtá kapitola se zabývá postupem použitým pro návrh ziskové matice rekonstruktoru stavu a ziskové matice stavové zpětné vazby.

V páté kapitole jsou uvedené postupy a odvození aplikovány při vytvoření modelu vetknutého nosníku s jedním piezoelektrickým aktuátorem a jedním senzorem, pro který je následně navržen regulátor. Funkčnost regulátoru je poté zkoušena počítačovými simulacemi prováděnými na vytvořeném modelu.

K sestavení pohybové rovnice, k získání matic stavové reprezentace modelu a výpočtu ziskových matic použitých v regulátoru je využito výpočtové prostředí `MATLAB`, chování modelu je simulováno pomocí nástroje `Simulink`.

# Kapitola 1

# Stručný přehled základních poznaků

## 1.1 Aktivní tlumení vibrací

Nežádoucí mechanické vibrace přinášejí řadu negativních projevů, například šíření hluku, pocity nepohodlí a zdravotní obtíže, nepřesnosti měření či snížení životnosti konstrukcí. Z těchto důvodů se snažíme vibrace návrhem potlačovat návrhem vhodných tlumičů.

Návrh pasivních tlumičů byl do relativně nedávné doby dominantním způsobem eliminace nežádoucích vibrací a je již dobře prozkoumán. S rozvojem výpočetní techniky a s příchodem rychlých signálových procesorů, digitálně-analogových a analogovo-digitálních převodníků došlo k rozvoji moderních řídicích metod, které je možno aplikovat mimo jiné právě na úlohu aktivního řízení vibrací.

Problematikou aktivního tlumení, úzce spjatou také s použitím tzv. chytrých konstrukcí (smart structures) tvořených chytrými materiály (smart materials) [1], se ve svých pracích zabývají Fuller, Elliott a Nelson, [2], Bandyopadhyay, Manjunath a Umapathy, [3] či Preumont, [1].

## 1.2 Piezoelektrické materiály

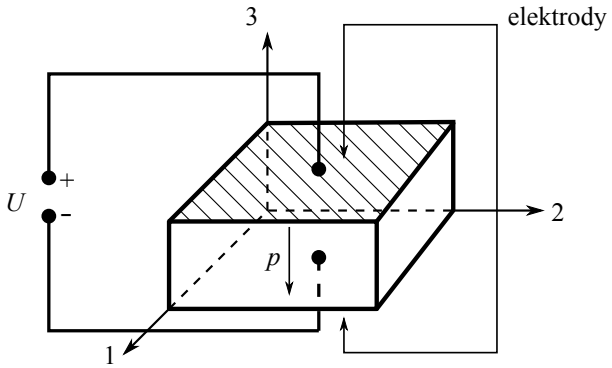
Pro tlumení vibrací jsou v předkládané práci pro své vlastnosti uvažovány senzory a aktuátory na bázi piezoelektrických materiálů.

Piezoelektrický (PE) jev byl objeven v roce 1880 bratry Jacquesem a Pierrem Currieovými, kteří pozorovali, že při deformaci jistých krystalických materiálů vzniká na jejich povrchu elektrický náboj (přímý PE jev), případně naopak – při zavedení náboje dochází k deformacím PE materiálu (obrácený PE jev). Díky tomu, že dovedou tyto materiály při zavedení elektrického napětí vyvinout poměrně velké síly, je možno je využít jako aktuátory řadě aplikací. Obráceného PE jevu lze potom využít pro měření například materiálových deformací, [2], [4].

Na obrázku 1.1 je znázorněn element PE materiálu s elektrodami připojenými na zdroj elektrického napětí $U$. Vektor polarizace $\vec{p}$, který udává směr polarizace materiálu, je rovnoběžný s osou 3.

V případě jednoosé napjatosti, jenž je uvažován v této práci, lze vztah mezi elektrickým napětím $U$ přiváděným na elektrody kolmé na osu 3 a deformací $\varepsilon^1_{pe}$ ve směru 1 zapsat zjednodušeným vztahem [2, (5.2.3)] vycházejícím z [2, (5.2.1a)]:

$$\varepsilon^1_{pe} = \varepsilon_{pe} = \frac{d_{31}}{h_{pe}} U, \tag{1.1}$$




Obrázek 1.1: Element pieza

přičemž $d_{31}$ [m/V] je tzv. *piezoelectric strain constant*, [2], a $h_{pe}$ značí tloušťku pieza. Vztah (1.1) je aproximací používající statický přístup, kdy jsou zanedbány dynamické děje v piezu, [2]. Jelikož je tento vztah použit v [3] pro elektrická napětí proměnlivá v čase, je možné jej pro účely této práce považovat za dostačující a je ve tvaru

$$\varepsilon_{pe}(t) = \frac{d_{31}}{h_{pe}} u(t) \tag{1.2}$$

použit k odvození konečného nosníkového prvku.

Mezi přetvořením piezoelektrického materiálu a velikostí vzniklé plošné hustoty elektrického náboje $D_z$ na povrchu pieza platí rovnost [3, (2.30)]:

$$D_z = e_{31}\varepsilon_1, \tag{1.3}$$

kde $e_{31} = E_{pe}d_{31}$ [C/m$^2$], [1], označuje tzv. *piezoelectric stress constant*[1], [2]. Vztahu (1.3) využijeme pro odvození výstupní rovnice v kapitole 3.

## 1.3 Metoda konečných prvků

K modelování soustavy je v této práci využita metoda konečných prvků. Jde o numerickou metodu pro řešení široké škály fyzikálních problémů (mechanika kontinua, elektřina, magnetismus, vedení tepla), její princip spočívá v hledání minima funkcionálu $\Pi$ vyjádřeného pomocí funkcí aproximujících průběhy zkoumaných veličin.
Výpočet metodou konečných prvků probíhá v těchto krocích:

1. Diskretizace kontinua na konečný počet konenčých prvků.

2. Aproximace průběhů funkcí, pomocí nichž je funkcionál vyjádřen. Tuto aproximaci provádíme v lokálních souřadnicích jednotlivých elementů funkcemi splňujícími požadované podmínky (funkční hodnoty, hodnoty derivací, spojitost na hranici prvku) v uzlových bodech.

[1] V [3] je označována jako piezoelectric stress/charge constant.

3. Aproximace okrajových podmínek na konečném prvku.

4. Vyjádření funkcionálu Π pomocí aproximačních funkcí a aproximovaných okrajových podmínek.

5. Minimalizace funkcionálu.

V případě dynamiky pružného kontinua jsou výstupem tohoto procesu matice hmotnosti $\mathbf{M}_e$, tuhosti $\mathbf{K}_e$ a pravé strany $\mathbf{f}_e(t)$ jednotlivých elementů, vyjádřené v lokálním souřadném systému. Do globálních matic umístíme tyto členy transformacemi, [5]:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{T}_e^{(i)^T} \mathbf{M}_e^{(i)} \mathbf{T}_e^{(i)}, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{T}_e^{(i)^T} \mathbf{K}_e^{(i)} \mathbf{T}_e^{(i)}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{T}_e^{(i)^T} \mathbf{f}_e^{(i)}, \tag{1.6}$$

kde $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ jsou globální matice hmotnosti a tuhosti, $\mathbf{f}(t)$ je globální vektor pravé strany, $n_e$ počet elementů a $\mathbf{T}_e^{(i)}$ jsou transformační matice z lokálního souřadného systému $i$-tého elementu do globálního souřadného systému:

$$\mathbf{q}_e^{(i)} = \mathbf{T}_e^{(i)} \mathbf{q}(t) \tag{1.7}$$

Výsledkem je pohybová rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{1.8}$$

kde $\mathbf{q}(t)$ je globální vektor zobecněných souřadnic, [5], [6].

## 1.4 Stavová reprezentace modelu

Pohybová rovnice kmitání nosníku je z hlediska teorie řízení klasifikována jako tzv. *vnější popis systému*, [7]. Tento popis vyjadřuje dynamiku systému relací vstup–výstup. K návrhu regulátoru pro pro nosník s piezy však využijeme tzv. *vnitřního popisu* neboli *stavové reprezentace*, [7]. Narozdíl od vnějšího popisu systému zavádí vnitřní popis vektor vnitřních proměnných – *stav*, [7]. Dynamika systému je při vnitřním popisu vyjádřena relací vstup–stav–výstup.

Uvažujeme-li lineární systém, jehož parametry se v čase nemění (*t-invariantní*, [7]), je takový systém možno v základním případě popsat rovnicemi, [7]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{1.10}$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je stavový vektor, $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupních veličin, $\mathbf{u}(t)$ vektor vstupních veličin, matice $\mathbf{A}$ se nazývá *matice (dynamiky) systému*, $\mathbf{B}$ *vstupní matice*, $\mathbf{C}$ *výstupní matice* a $\mathbf{D}$ *matice přímého působení vstupu na výstup*, [7]. Dodejme ještě, že rovnice (1.9) a (1.10) mohou být s ohledem na modelovanou soustavu podle potřeb doplněny o další matice modelující například poruchové signály na vstupu či výstupu.

Převod pohybové rovnice nosníku s piezy na stavový popis je v této práci podrobněji řešen v kapitole 3.

## 1.5 Dynamický kompenzátor

Mějme systém s uvažovaným poruchovým vnějším buzením, nechť je popsán rovnicemi

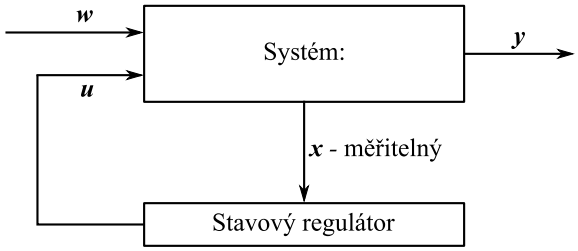
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t), \tag{1.11}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{1.12}$$

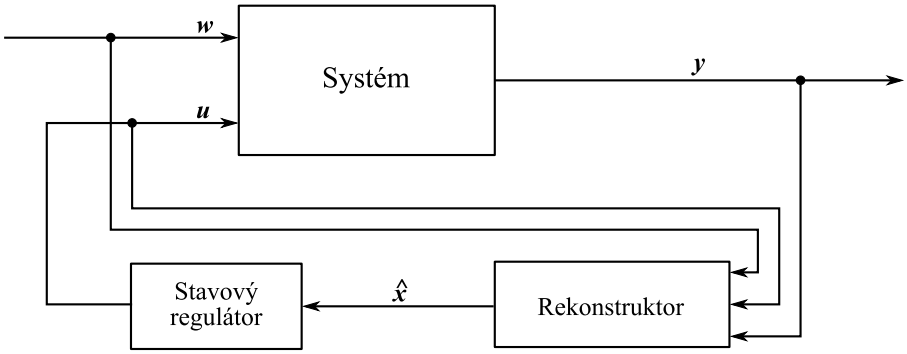
kde $\mathbf{w}(t)$ je poruchový signál a $\mathbf{E}$ vstupní matice poruchového signálu. Má-li uvažovaný systém přímo měřitelný stavový vektor $\mathbf{x}(t)$, je možné k jeho řízení použít přímo *statické stavové zpětné vazby*, [8], (obr. 1.2). V mnoha praktických případech však stavové veličiny systému zůstávají pozorovateli například kvůli neexistenci čidla měřícího danou veličinu skryty a je nutné je získat jinou cestou než přímým měřením, a to *rekonstruktorem stavu*, [8]. Rekonstruovaný stav je poté vstupem stavového regulátoru a celý systém skládající se z dynamické části (rekonstruktor) a statické části (stavový regulátor) označujeme jako *dynamický kompenzátor* (obr. 1.3), [8, kap. 10].

Otázkou zůstává, jak se projeví použití rekonstruktoru stavu v uzavřeném systému a je-li možné řešit úlohy návrhu rekonstruktoru a návrhu regulátoru separátně. V [8, kap 10.3] je psáno, že *návrh stavového regulátoru ... a návrh rekonstruktoru stavu ... jsou separovatelné úlohy* a že *v ustáleném stavu je chování systému s dynamickým kompenzátorem stejné jako při řízení systému stavovým regulátorem, který využívá skutečný stav systému.*

Samotný návrh rekonstruktoru stavu a stavového regulátoru je v této práci podrobněji řešen v kapitole 4.




Obrázek 1.2: Blokové schéma stavového regulátoru, $\mathbf{u}(t)$ - řízení, $\mathbf{x}(t)$ - měřitelný stav $\mathbf{y}(t)$ - výstupní veličiny, $\mathbf{w}(t)$ - vnější buzení (poruchový/testovací signál)




Obrázek 1.3: Blokové schéma dynamického kompenzátoru, $\mathbf{u}(t)$ - řízení, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ - rekonsruovaný stav $\mathbf{y}(t)$ - výstupní veličiny, $\mathbf{w}(t)$ - vnější buzení (poruchový/testovací signál)

# Kapitola 2

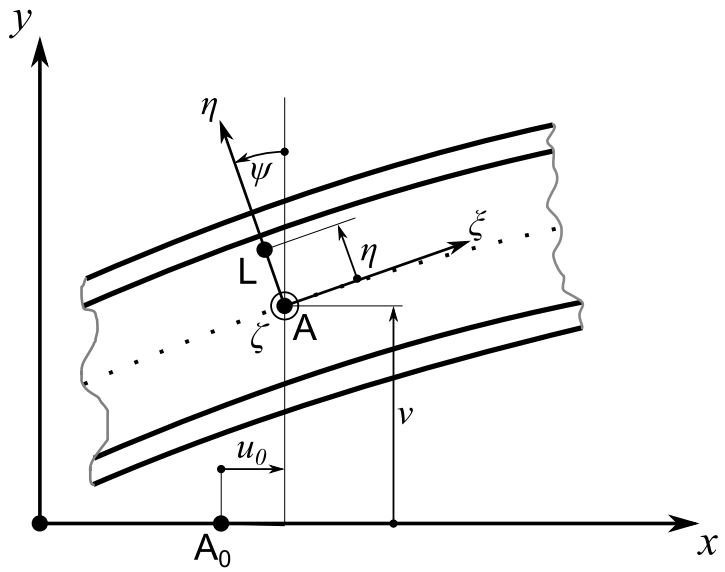
# Odvození pohybové rovnice modelu nosníku s PE senzory a aktuátory

## 2.1 Odvození konečného prvku

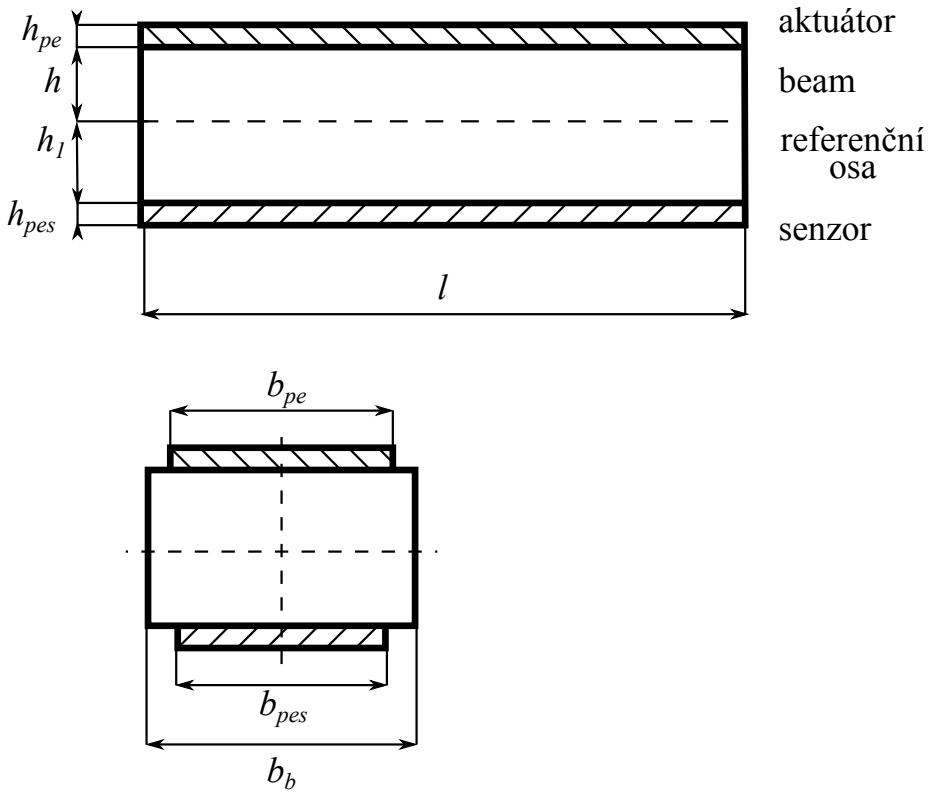
V [9] je uvedeno odvození matic hmotnosti a tuhosti beamového prvku s nalepeným PE aktuátorem. Tento postup bude nyní aplikován na případ elementu s nalepeným senzorem i aktuátorem současně.

### 2.1.1 Vyjádření a aproximace polí posuvů elementu

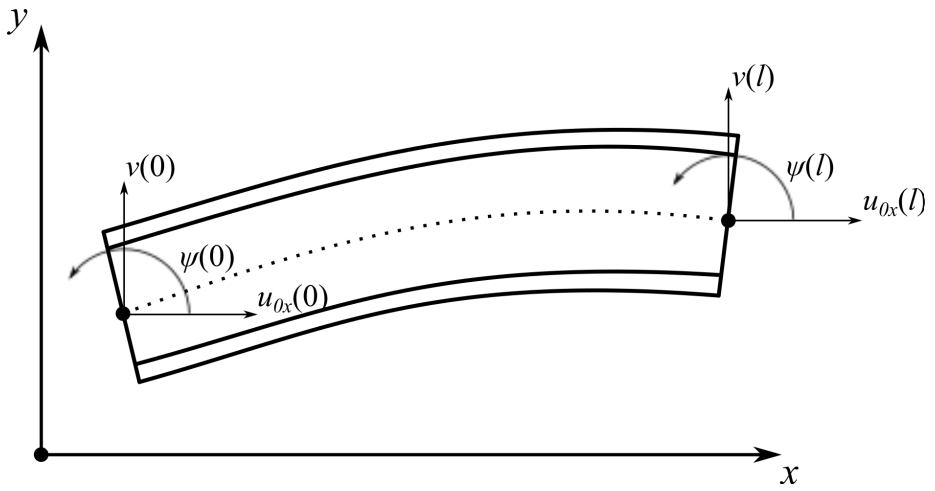
**Průběhy posuvů a úhlů natočení v elementu**




Obrázek 2.1: Posunutí libovolného bodu L při deformaci prvku




Obrázek 2.2: Konečný prvek - geometrické poměry




Obrázek 2.3: Deformovaný element s vyznačenými směry posunutí a úhlů natočení v uzlech, roviny řezu jsou kolmé na referenční osu

Uvažujeme prizmatický nosníkový (beam) konečný prvek se šesti stupni volnosti (6DOF), rozměry jsou znázorněny na obrázku 2.2, deformovaný element potom na obrázku 2.3. Předpokládáme dokonalý spoj mezi piezy a beamem, deformace v rozsahu platnosti Hookeova zákona a všechny řezy rovinné a kolmé na referenční osu.

Posuv $u(x,\eta,t)$ ve směru osy $x$ je vyjádřen vztahem

$$u(x,\eta,t) = u_0(x,t) - \eta\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = u_0(x,t) - \eta v'(x,t), \tag{2.1}$$

kde $u_0(x,t)$ je posunutí na referenční ose, $v(x,t)$ posunutí ve směru osy $y$ a apostrof značí parciální derivaci podle proměnné $x$. Člen

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) \tag{2.2}$$

je úhel natočení. Pro přetvoření $\varepsilon(x,t)$ platí

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,\eta,t)}{\partial x} = \varepsilon_0 - \eta\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 - \eta v''(x,t) \tag{2.3}$$

**Aproximace průběhů posuvů a úhlů natočení v elementu**

Pro posuv $u_0(x,t)$ na referenční ose zvolme aproximaci polynomem prvního stupně:

$$u_0(x,t) = c_0(t) + c_1(t)x = [\ 1,\quad x\ ][\ c_0(t),\quad c_1(t)\ ]^T = \mathbf{\Phi}_1(x)\mathbf{c}_1(t). \tag{2.4}$$

Posuv $v(x,t)$ je aproximován polynomem třetího stupně:

$$v(x,t) = c_2(t) + c_3(t)x + c_4(t)x^2 + c_5x^3 = \mathbf{\Phi}_3(x)\mathbf{c}_3(t). \tag{2.5}$$

Pole úhlů natočení získáme derivací předchozího vztahu podle proměnné $x$:

$$\psi(x,t) = \mathbf{\Phi}_3'(x)\mathbf{c}_3(t). \tag{2.6}$$

Ve výše uvedených vztazích je nutné se zbavit neznámých $c_i(t),\ i = 1,2,3,4,5$. Zavedeme vektory zobecněných posunutí uzlových bodů elementu[1]:

$$\mathbf{q}_{e1}(t) = [\ u_0(0,t),\quad u_0(l_e,t)\ ]^T, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{q}_{e3}(t) = [\ v(0,t),\quad \psi(0,t),\quad v(l_e,t),\quad \psi(l_e,t)\ ]^T, \tag{2.8}$$

kde $l_e$ je délka elementu. Tato posunutí musejí vyhovovat vztahům (2.4), (2.5) a (2.6), maticově vyjádřeno:

$$\mathbf{q}_{e1}(t) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 1, & l_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1\mathbf{c}_1(t), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{q}_{e3}(t) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & l, & l_e^2, & l_e^3 \\ 0, & 1, & 2l_e, & 3l_e^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2(t) \\ c_3(t) \\ c_4(t) \\ c_5(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3\mathbf{c}_3(t) \tag{2.10}$$

[1]Oproti [9] bylo indexování vektorů $\mathbf{q}_{e1}(t)$ a $\mathbf{q}_{e3}(t)$ a s nimi souvisejících matic otočeno, aby číselné indexy reflektovaly stupně odpovídajících aproximačních polynomů.

Vektory $\mathbf{c}_1(t)$ a $\mathbf{c}_3(t)$ je tedy možné pomocí vektorů zobecněných souřadnic vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t), \tag{2.11}$$
$$\mathbf{c}_3(t) = \mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t). \tag{2.12}$$

Posuvy a přetvoření máme nyní v aproximovaném tvaru:

$$u(x,\eta,t) = \mathbf{\Phi}_1(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3'(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t), \tag{2.13}$$
$$v(x,t) = \mathbf{\Phi}_3(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t), \tag{2.14}$$
$$\varepsilon(x,\eta,t) = \mathbf{\Phi}_1'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3''(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t). \tag{2.15}$$

### 2.1.2 Matice hmotnosti, tuhosti a vektor buzení elementu

Pro vyjádření matic tuhosti a hmotnosti konečného prvku využijeme princip virtuálních prací. Pro nosník bez vnějšího zatížení jej můžeme vyjádřit předpisem

$$\int_{V_b} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_b\,\mathrm{d}V + \int_{V_{pe}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_{pe}\,\mathrm{d}V + \int_{V_{pes}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_{pes}\,\mathrm{d}V + \int_{V_b} \delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}\rho_b\,\mathrm{d}V + \tag{2.16}$$
$$+ \int_{V_{pe}} \delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}\rho_{pe}\,\mathrm{d}V + \int_{V_{pes}} \delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}\rho_{pe}\,\mathrm{d}V = 0,$$

kde $V_b$, $V_{pe}$, $V_{pes}$ značí objemy beamu, PE aktuátoru, respektive PE senzoru a $\rho_b$, $\rho_{pe}$, $\rho_{pes}$ hustotu beamu, aktuátoru, senzoru. Dále v této rovnosti figurují veličiny $\boldsymbol{\sigma}_b$, $\boldsymbol{\sigma}_{pe}$ a $\boldsymbol{\sigma}_{pes}$, jde o vektory napětí [2], jejichž vyjádření získáme dosazením aproximativního vztahu (2.15) do Hookeova zákona:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = E_b(\varepsilon_0 - \eta v'') = E_b(\mathbf{\Phi}_1'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3''(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t)), \tag{2.17}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{pe} = E_{pe}(\varepsilon_0 - \eta v'' - \varepsilon_{pe}) = E_{pe}(\mathbf{\Phi}_1'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3''(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) - \varepsilon_{pe}), \tag{2.18}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{pes} = E_{pes}(\varepsilon_0 - \eta v'') = E_{pes}(\mathbf{\Phi}_1'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3''(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t)). \tag{2.19}$$

Vektory $\mathbf{u}(x,\eta,t)$, respektive $\ddot{\mathbf{u}}(x,\eta,t)$ mají tvar

$$\mathbf{u}(x,\eta,t) = \begin{bmatrix} u(x,\eta,t) \\ v(x,\eta,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3'(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) \\ \mathbf{\Phi}_3(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(x,\eta,t) = \begin{bmatrix} \ddot{u}(x,\eta,t) \\ \ddot{v}(x,\eta,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1(x)\mathbf{S}_1^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_{e1}(t) - \eta\mathbf{\Phi}_3'(x)\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_{e3}(t) \\ \mathbf{\Phi}_3(x)\mathbf{S}_3^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_{e3}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

[2] Pro případ uvažovaný v této práci jde o skaláry, ale kvůli obecnosti je s nimi pracováno jako s vektory.

Po dosazení (2.15), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) a (2.21) do (2.16) a následné integraci získáme rovnost

$$
\begin{aligned}
& E_b A_b\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\ \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - E_b S_b\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{21}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& E_b S_b\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{12}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + E_b J_b\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& E_{pe} A_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11'}\,1 - E_{pe} S_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{21}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& E_{pe} S_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{12}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + E_{pe} J_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) - \\
- \;& E_{pe} A_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{1}^{1}\,\varepsilon_{pe} + E_{pe} S_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{2}^{3}\,\varepsilon_{pe} + \\
+ \;& E_{pes} A_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\ \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - E_{pes} S_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{21}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& E_{pes} S_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{12}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + E_{pes} J_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_b A_b\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\ \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \rho_b S_b\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{10}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& \rho_b S_b\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{01}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \rho_b J_b\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_b A_b\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_{pe} A_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\ \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \rho_{pe} S_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{10}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& \rho_{pe} S_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{01}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \rho_{pe} J_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_{pe} A_{pe}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_{pes} A_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\ \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \rho_{pes} S_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{10}^{31}\,\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) - \\
- \;& \rho_{pes} S_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e1}^T(t)\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{01}^{13}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \rho_{pes} J_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) + \\
+ \;& \rho_{pes} A_{pes}\, \delta\mathbf{q}_{e3}^T(t)\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\,\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

ve které figurují nové veličiny, a to integrální matice $\mathbf{I}_{ij}^{kl}$ a $\mathbf{I}_i^k$, definované vztahy, [9]:

$$
\mathbf{I}_{ij}^{kl} = \int_0^{l_e} \frac{\partial^i}{\partial x^i}[1, x, x^2, \ldots, x^k]^T \frac{\partial^j}{\partial x^j}[1, x, x^2, \ldots, x^l]\,\mathrm{d}x, \tag{2.23}
$$

$$
\mathbf{I}_i^k = \int_0^{l_e} \frac{\partial^i}{\partial x^i}[1, x, x^2, \ldots, x^k]^T\,\mathrm{d}x. \tag{2.24}
$$

Dále v rovnosti (2.22) ještě figurují statické, respektive kvadratické momenty průřezu beamu, aktuátoru a senzoru k ose $\zeta$: $S_b$, $S_{pe}$, $S_{pes}$, resp. $J_b$, $J_{pe}$ a $J_{pes}$.

Udělíme-li virtuální posunutí $\delta\mathbf{q}_{e1}(t) \neq 0$ při současném $\delta\mathbf{q}_{e3}(t) = 0$, následně $\delta\mathbf{q}_{e3}(t) \neq 0$ při současném $\delta\mathbf{q}_{e1}(t) = 0$, získáme z principu vitruálních prací pohybovou rovnici elementu ve tvaru:

$$
\widetilde{\mathbf{M}}_e\ddot{\widetilde{\mathbf{q}}}_e(t) + \widetilde{\mathbf{K}}_e\widetilde{\mathbf{q}}_e(t) = \widetilde{\mathbf{f}}_e(t), \tag{2.25}
$$

přičemž

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e = \begin{bmatrix} (\rho_b A_b+\rho_{pe}A_{pe}+\rho_{pes}A_{pes})\,\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{00}^{33}\mathbf{S}_3^{-1} + \\ +(\rho_b J_b+\rho_{pe}J_{pe}+\rho_{pes}J_{pes})\,\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{11}^{33}\mathbf{S}_3^{-1} & -(\rho_b S_b+\rho_{pe}S_{pe}+\rho_{pes}S_{pes})\,\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{10}^{31}\mathbf{S}_1^{-1} \\ -(\rho_b S_b+\rho_{pe}S_{pe}+\rho_{pes}S_{pes})\,\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{01}^{13}\mathbf{S}_3^{-1}, & (\rho_b A_b+\rho_{pe}A_{pe}+\rho_{pes}A_{pes})\,\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{00}^{11}\mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} (E_b J_b+E_{pe}J_{pe}+E_{pes}J_{pes})\,\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{22}^{33}\mathbf{S}_3^{-1}, & -(E_b S_b+E_{pe}S_{pe}+E_{pes}S_{pes})\,\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_{21}^{31}\mathbf{S}_1^{-1} \\ -(E_b S_b+E_{pe}S_{pe}+E_{pes}S_{pes})\,\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{12}^{13}\mathbf{S}_2^{-1}, & (E_b A_b+E_{pe}A_{pe}+E_{pes}A_{pes})\,\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_{11}^{11}\mathbf{S}_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{0e}(t) = E_{pe}\begin{bmatrix} -S_{pe}\mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_2^3 \\ A_{pe}\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_1^1 \end{bmatrix}\varepsilon_{pe}(t) = \widetilde{\mathbf{f}}_{0e}\varepsilon_{pe}(t), \quad (2.28)$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{e3}(t) \\ \mathbf{q}_{e1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0,t) \\ \psi(0,t) \\ v(l,t) \\ \psi(l,t) \\ u_0(0,t) \\ u_0(l,t) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Jelikož má vektor $\widetilde{\mathbf{q}}_e(t)$ pro algoritmizaci sestavení modelu nevýhodné pořadí souřadnic, přeskupíme je pomocí permutační matice $\mathbf{J}$:

$$\widetilde{\mathbf{q}}_e(t) = \begin{bmatrix} v(0,t) \\ \psi(0,t) \\ v(l,t) \\ \psi(l,t) \\ u_0(0,t) \\ u_0(l,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0(0,t) \\ v(0,t) \\ \psi(0,t) \\ u_0(l,t) \\ v(l,t) \\ \psi(l,t) \end{bmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{q}_e(t) \quad (2.30)$$

Pohybová rovnice elementu ve tvaru použitém k výpočtům:

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}}_e(t) + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_e(t) = \mathbf{f}_e(t), \quad (2.31)$$

kde

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{M}}_e\mathbf{J}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{J}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{J}^T\widetilde{\mathbf{f}}_e(t). \quad (2.34)$$

Vektor buzení ještě pro použití při návrhu řízení upravíme tak, že za relativní prodloužení $\varepsilon_{pe}(t)$ dosadíme z (1.2) jeho závislost na budicím napětí $u(t)$:

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{f}_{0e}\frac{d_{31}}{h_{pe}}u(t). \quad (2.35)$$

Matice tuhosti a hmotnosti elementů nosníku bez piez, případně buď pouze s piezoelektrickým senzorem, nebo aktuátorem získáme obdobným způsobem jako v 2.1, popřípadě

lze při počítačovém modelování v maticích (2.26) a (2.27) položit geometrické charakteristiky průřezu příslušných chybějících částí rovny nule. Jelikož pro odvození neuvažujeme vnější zatížení, bude u těchto elementů pravá strana nulová. Je-li potřeba počítat s vnějším silovým zatížením, stačí pro odvození pravé strany doplnit vztah (2.16) o virtuální práci aproximovaného silového zatížení.

## 2.2 Netlumený model

Mějme prizmatický nosník s nalepenými $p$ piezoelektrickými záplatami jako aktuátory a $s$ piezoelektrickými záplatami jako senzory. V maticovém tvaru vyjádřené pohybové rovnice netlumeného modelu tohoto nosníku mají tvar:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_0\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_{ext}(t), \tag{2.36}$$

kde čtvercové matice hmotnosti $\mathbf{M}$ a tuhosti $\mathbf{K}$ řádu $n$ (počet neznámých zobecněných posunutí v uzlových bodech), jsou sestaveny metodou konečných prvků podle zvolené modelované soustavy z 6DOF nosníkových elementů typu *nosník s aktuátorem a senzorem*, *nosník s aktuátorem*, *nosník se senzorem* a *holý nosník*.

Pravá strana pohybové rovnice je kvůli následnému návrhu zákona řízení uvedena ve tvaru součinu časově invariantní matice $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{R}^{n\times p}$ a vektoru vstupních napětí, navíc ještě uvažujeme vektor silových účinků $\mathbf{f}_{ext}$ od vnějšího buzení, ve kterém $i$-tý prvek odpovídá silovému účinku ve směru $i$-tého zobecněného posunutí uzlového bodu. Vektor $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^p$ je složen z jednotlivých napětí přiváděných na PE aktuátory:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p]^T. \tag{2.37}$$

Matice $\mathbf{f}_0$ má strukturu:

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ {\mathbf{f}_0}^{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {\mathbf{f}_0}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & {\mathbf{f}_0}^{(p)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

přičemž ${\mathbf{f}_0}^{(j)}$ značí příspěvky od $j$-tého aktuátoru a $\mathbf{0}$ jsou jednosloupcové nulové submatice, jejichž počet řádků odpovídá počtu elementů bez nalepeného aktuátoru.

## 2.3 Matice tlumení

Jelikož je nosník s piezy brán jako lineární slabě tlumená soustava, je možné pro něj uvažovat lineární proporcionální tlumení. Matice tlumení $\mathbf{B}$ je vyjádřena jako lineární

kombinace matice hmotnosti $\mathbf{M}$ a tuhosti $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}. \tag{2.39}$$

Modální analýzou netlumeného modelu (2.36) získáme $n$ vlastních frekvencí $\Omega_\nu$ [rads$^{-1}$], $\nu = 1, 2, \ldots n$ a modální matici $\mathbf{V}$, která je maticově normována podle matice $\mathbf{M}$, [10]:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I}, \tag{2.40}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Pro matici $K$ potom po modální transformaci plyne

$$\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = diag(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \ldots, \Omega_n^2) \tag{2.41}$$

a pro matici $\mathbf{B}$ při proporcionálním tlumení:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = diag(2D_1\Omega_1, 2D_2\Omega_2, \ldots, 2D_n\Omega_n), \tag{2.42}$$

přičemž $D_\nu$ je poměrný útlum pro $\nu$-tou vlastní frekvenci. Pro vlastní frekvenci $\Omega_\nu$ potom po dosazení (2.40), (2.41) a (2.42) do (2.39) platí

$$2D_\nu\Omega_\nu = \alpha + \beta\Omega_\nu^2. \tag{2.43}$$

Z této rovnosti lze spočítat koeficienty $\alpha$ a $\beta$, dosadíme-li do ní dvě různé vlastní frekvence a jim odpovídající poměrné útlumy(např. $\Omega_1, D_1$ a $\Omega_2, D_2$) a vyřešíme takto vzniklou soustavu dvou lineárních algebraických rovnic, [10, s. 102-106].

## 2.4 Výsledná pohybová rovnice modelu

Máme-li matici tlumení, můžeme již zapsat pohybovou rovnici modelu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_0\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_{ext}(t). \tag{2.44}$$

Jelikož mají takto sestavené matice $\mathbf{M}, \mathbf{B}$ a $\mathbf{K}$ pro účely řízení příliš velký rozměr, je potřeba počet stupňů volnosti soustavy zredukovat. Redukci provedeme modální cestou podle [3]. Po zavedení transformace

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^*\mathbf{g}(t), \tag{2.45}$$

kde $\mathbf{V}^* \in \mathbf{R}^{n\times m}$ je matice sestavená po sloupcích z prvních $m$ vlastních vektorů a $\mathbf{g}(t) \in \mathbf{R}^m$ je vektor složený z prvních $m$ modálních souřadnic, získáme pohybovou rovnici:

$$\mathbf{V}^{*T}\mathbf{M}\mathbf{V}^*\ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{V}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{V}^*\dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{V}^{*T}\mathbf{K}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{*T}\mathbf{f}_0\mathbf{u}(t) + \mathbf{V}^{*T}\mathbf{f}_{ext}(t) \tag{2.46}$$

neboli

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}_0{}^*\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}^*{}_{ext}(t). \tag{2.47}$$

# Kapitola 3

# Stavová reprezentace modelu nosníku

Pro návrh stavového regulátoru a následnou simulaci využijeme vnitřní popis modelu (stavovou reprezentaci), [2, s. 68], [7, s. 23].

## 3.1 Stavová rovnice

Model nosníku s piezoelektrickými aktuátory a senzory popsaný rovnicí (2.47) můžeme převést zavedením substituce

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{x}_1(t) \tag{3.1}$$

a přeznačením

$$\mathbf{f}^*{}_{ext} = \mathbf{w}(t) \tag{3.2}$$

na soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, maticově:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t), \tag{3.3}$$

kde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{m\times m} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{K}^* & -\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{B}^* \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{m\times p} \\ \mathbf{M}^{*-1}\mathbf{f}_0{}^* \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{m\times m} \\ \mathbf{M}^{*-1} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

## 3.2 Výstupní rovnice

Mezi stavem nosníku popsaným vektorem $\mathbf{x}(t)$ a výstupními veličinami $\mathbf{y}(t)$ platí vztah

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{3.9}$$

přičemž matice $\mathbf{D}$ je v tomto případě nulová a matici $\mathbf{C}$ o rozměrech $s \times 2m$ je nutno odvodit ze vztahu mezi přetvořením piezoelektrických senzorů $\varepsilon_{pes}$ a výstupními veličinami. Jako výstupní veličina je v této práci zvolen zkratový elektrický proud vyvinutý při deformaci senzorů.

### 3.2.1 Odvození matice C

Pro zjednodušení předpokládáme, že piezoelektrický senzor je tenký vzhledem ke své délce a elektrody na piezu pokrývají celou půdorysnou plochu senzoru. Celkový náboj $q(t)$ vzniklý deformací pieza je potom vyjádřen vztahem, [3, (2.31)]:

$$q(t) = \int_{A_{pes}} D_z \,\mathrm{d}A, \tag{3.10}$$

kde $A_{pes}$ je plocha senzoru v rovině $xz$ a $D_z$ je plošná hustota elektrického náboje.

#### Celkový náboj senzoru na konečném prvku

Vraťme se nyní ke konečnému prvku odvozovanému v kapitole 2.1. Dosadíme-li do vztahu (3.10) předpis (1.3), ve kterém $\varepsilon_1$ vyjádříme dosazením ze vztahu (2.15) při $\eta = -(h_1 + h_{pes})$, získáme tvar:

$$q(t) = \int_0^{l_e} e_{31}[\mathbf{\Phi}_1'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_{e1}(t) + (h_1 + h_{pes})\mathbf{\Phi}_3''(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_{e3}(t)]b_{pes}\,\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

Po integraci s využitím (2.30) získáme pro elektrický náboj předpis

$$q(t) = \mathbf{G}\mathbf{J}\mathbf{q}_e, \tag{3.12}$$

přičemž

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} e_{31}b_{pes}(h_1 + h_{pes})(S_{3-21} + 2l_eS_{3-31} + 3l_e^2S_{3-41}) \\ e_{31}b_{pes}(h_1 + h_{pes})(S_{3-22} + 2l_eS_{3-32} + 3l_e^2S_{3-42}) \\ e_{31}b_{pes}(h_1 + h_{pes})(S_{3-23} + 2l_eS_{3-33} + 3l_e^2S_{3-43}) \\ e_{31}b_{pes}(h_1 + h_{pes})(S_{3-24} + 2l_eS_{3-34} + 3l_e^2S_{3-44}) \\ e_{31}b_{pes}l_eS_{1-11} \\ e_{31}b_{pes}l_eS_{1-22} \end{bmatrix}^T. \tag{3.13}$$

Čísla $S_{a-ij}$ ve vztahu (3.13) značí prvky matic $\mathbf{S}_a^{-1}$ z kapitoly 2.1.1 na pozici $ij$.

Časovou derivací (3.12) potom získáme předpis pro elektrický proud $i(t)$:

$$i(t) = \mathbf{G}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}_e(t) \tag{3.14}$$

**K-tý řádek matice $\widetilde{\mathbf{C}}$**

Máme-li vyjádřený vztah mezi zobecněnými výchylkami konečného prvku s piezoelektrickým senzorem, můžeme formálně vyjádřit $k$-tý řádek $\tilde{C}_k$ matice $\widetilde{\mathbf{C}}$ odpovídající $k$-tému senzoru jako součet

$$\widetilde{C}_k = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{G}_i \mathbf{J}_i \mathbf{T}_e^{(i)}, \tag{3.15}$$

kde $\mathbf{T}_e^{(i)}$ je transformační matice z lokálních souřadnic elementu do globálních souřadnic, viz (1.7).

Celková matice $\widetilde{\mathbf{C}}$ vznikne složením jednotlivých řádků (3.15):

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{C}_s \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Tato matice však vyjadřuje vztah mezi výstupní veličinou a časovými derivacemi posunutí v uzlových bodech. Výslednou matici $\mathbf{C}$ pro modální souřadnice získáme provedením

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{0}^{s\times n}, \widetilde{\mathbf{C}}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}^*, & \mathbf{0}^{n\times m} \\ \mathbf{0}^{n\times m}, & \mathbf{V}^* \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

### 3.2.2 Výstupní rovnice měření zobecněné souřadnice

Pro lepší představu o chování systému budeme ještě pozorovat chování vybrané zobecněné souřadnice (například průhyb volného konce vetknutého nosníku), výstupní rovnice pro toto pozorování má tvar:

$$q_i(t) = \mathbf{Z}_s \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{qj} \\ \mathbf{0}^{1\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^* & , & \mathbf{0}^{n\times m} \\ \mathbf{0}^{n\times m} & , & \mathbf{V}^* \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \tag{3.18}$$

kde $\mathbf{L}_{qj}$ je lokalizační matice $j$-tého zobecněného posuvu v globálním vektoru $\mathbf{q}(t)$ (jde o příslušný řádek transformační matice $\mathbf{T}_e^i$).

# Kapitola 4

# Návrh zákona řízení

Řízení systému bude realizováno pomocí dynamického kompenzátoru, jehož princip je popsán v úvodní kapitole. Regulátor se bude skládat z rekonstruktoru stavu a stavové zpětné vazby. Situace je vykreslena na obrázku 1.3

## 4.1 Návrh rekonstruktoru stavu

Stavový vektor $\mathbf{x}(t)$ je v případě uvažovaného matematického modelu složen z modálních souřadnic a jejich časových derivací. Tyto hodnoty jsou v případě počítačové simulace přímo dostupné, avšak na reálném nosníku stav takto nejsme schopni získat. K dispozici je pouze vektor výstupních signálů $\mathbf{y}(t)$. Pro realizaci stavové zpětné vazby je tím pádem nutné použít odhad vniřních veličin, který je v této práci prováděn pomocí lineárního asymptotického rekonstruktoru stavu, [8, kap. 10].
Rekonstruktor stavu je dynamický systém popsaný rovnicí:

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}^*_{ext} + \mathbf{K}_{rek}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \tag{4.1}$$

Je zřejmé, že jde o paralelní model systému, do kterého jsme zavedli tzv. *inovační zpětnou vazbu* realizovanou pomocí ziskové matice rekonstruktoru $\mathbf{K}_{rek}$. Aby byla rekonstrukce stavu úspěšná, je pořeba, aby spektrum matice $\mathbf{A} - \mathbf{K}_{rek}\mathbf{C}$ leželo celé v levé polorovině komplexní roviny, tedy:

$$\forall \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{rek}\mathbf{C}), i = 1, 2 \ldots 2n : \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0, \tag{4.2}$$

kde $\lambda_i$ značí vlastní čísla[1] spektra $\sigma$. Podmínka (4.2) plyne z požadavku na chybu rekonstrukce [8, (10.3)].

Vlastní čísla matice $\mathbf{A} - \mathbf{K}_{rek}\mathbf{C}$ je možno vhodnou volbou ziskové maice $\mathbf{K}_{rek}$ umístit podle požadavků na kvalitu průběhu odeznění chyby rekonstrukce stavu.

Mějme matici $\mathbf{L}_{rek}$, která má požadovaná vlatní čísla, pro něž kvůli jednoznačnosti řešení platí:

$$\sigma(\mathbf{A}) \cap \sigma(\mathbf{L}_{rek}) = \emptyset \tag{4.3}$$

[1] V kybernetice jsou tato vlastní čísla označována jako póly $p_i$

Tato matice je podobná matici $\mathbf{A} - \mathbf{K}_{rek}\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_{rek}\mathbf{C} = \mathbf{X}_{rek}\mathbf{L}_{rek}\mathbf{X}_{rek}^{-1}, \tag{4.4}$$

kde $\mathbf{X}_{rek}$ je regulární matice podobnostní transformace. Úpravou této rovnosti získáme Sylvesterovu maticovou rovnici, [11, kap. 2]:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{-T} - \mathbf{X}^{-T}\mathbf{L}_{rek}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{H}_{rek} = \mathbf{0}, \tag{4.5}$$

ve které jsme označili

$$\mathbf{H}_{rek} = \mathbf{K}_{rek}^T\mathbf{X}_{rek}^{-T}. \tag{4.6}$$

Sylvesterova rovnice má v závislosti na libovolné matici $\mathbf{H}_{rek}$ díky předpokladu (4.3) jednoznačné řešení $\mathbf{X}_{rek}(\mathbf{H}_{rek})$, [11]. Řešení Sylvesterovy rovnice je v simulační části této práce provedeno numericky pomocí metody `lyap()` z knihoven `MATLAB`u, viz [12]. Ziskovou matici rekonstruktoru po nalezení matice $\mathbf{X}_{rek}$ získáme ze vztahu

$$\mathbf{K}_{rek} = \mathbf{X}_{rek}\mathbf{H}_{rek}^T. \tag{4.7}$$

## 4.2 Návrh stavové zpětné vazby

Zavedeme-li na vstup systému bez vnějšího buzení stavovou zpětnou vazbu, $u = \mathbf{K}_{reg}\mathbf{x}(t)$, přejde stavová rovnice (3.3) do tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{reg})\mathbf{x}(t). \tag{4.8}$$

Tímto krokem získáme možnost umístit pomocí matice $\mathbf{K}_{reg}$ vlastní čísla systému. Pro umístění vlastních čísel metodou úplného přiřazení postupujeme shodně jako v případě návrhu stavového rekonstruktoru, viz 4.1. Sylvestrova rovnice bude mít nyní tvar:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{reg} - \mathbf{X}_{reg}\mathbf{L}_{reg} + \mathbf{B}\mathbf{H}_{reg}, \tag{4.9}$$

kde matice $\mathbf{L}$ je matice s požadovanými vlastními čísly a

$$\mathbf{H}_{reg} = \mathbf{K}_{reg}\mathbf{X} \tag{4.10}$$

Je libovolná matice. Řešením rovnice (4.9) získáme transformační matici $\mathbf{X}_{reg}$. Pro ziskovou matici stavové zpětné vazby potom platí

$$\mathbf{K}_{reg} = \mathbf{H}_{reg}\mathbf{X}_{reg}^{-1}. \tag{4.11}$$

Touto ziskovou maticí poté násobíme buďto samotný stavový vektor systému, je-li měřitelný, viz obr. 1.2, nebo jako v případě této práce rekonstruovaný vektor stavu, obr. 1.3.

# Kapitola 5

# Počítačový model soustavy

Tato kapitola má za úkol ověřit nabyté poznatky pomocí počítačové simulace regulace modelu vetknutého nosníku s nalepenými PE záplatami. Veškeré průběhy veličin vykreslené v této kapitole jsou zobrazovány v základních jednotkách.

## 5.1 Ověření implementace algoritmů

Správnost implementace algoritmů pro sestavení matic hmotnosti a tuhosti elementu je ověřena porovnáním vypočtených vlastních frekvencí s literaturou [13, s. 75], viz tabulka 5.1. Výsledky autorem napsaných algoritmů se od výsledků uváděných v [13] liší na třetím řádu, což je pravděpodobně důsledkem oproti literatuře odlišné diskretizace a volby odlišného typu konečných prvků. Díky malému rozdílu vlastních frekvencí porovnávaných modelů je možné usoudit, že vytvořené algoritmy fungují.

| Vlastní frekvence [Hz] | VYTVOŘENÉ SKRIPTY | LITERATURA |
|---|---|---|
| 1. | 2,24 | 2,25 |
| 2. | 13,4 | 13,4 |
| 3. | 36,3 | 36,4 |

Tabulka 5.1: Porovnání vlastních frekvencí s [13]

## 5.2 Použitý model

Ověření získaných poznatků z oblasti řízení vibrací je provedeno na modelu vetknutého nosníku o parametrech z tabulky 5.2.

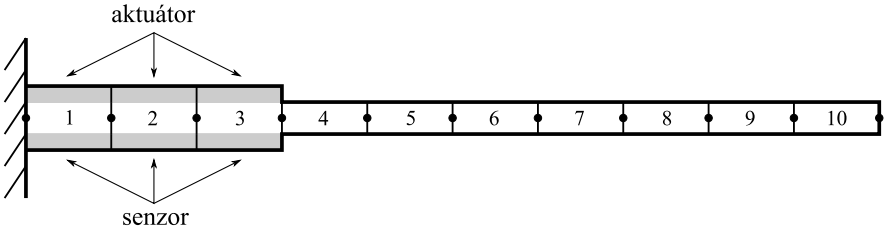
Umístění páru senzor-aktuátor bylo zvoleno těsně u vetknutí, neboť simulační výsledky různých umístění piez po délce nosníku ukazují tuto konfiguraci jako nejefektivnější, což potvrzuje i literatura [3].

Nosník je rozdělen ekvidistantně na 10 konečných prvků, naznačeno na obr. 5.1. Matice hmotnosti, tuhosti a tlumení – $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ jsou při zvolené diskretizaci a použitém uložení řádu 30. Tento model je dále metodou modální redukce redukován na model respektující

první mód kmitání, jenž je použit jako „model reálné soustavy“ v rekonstruktoru stavu, a na model respektující prvních 10 módů, jenž simuluje „reálnou soustavu“.

| PARAMETRY BEAMU | | | |
|---|---|---|---|
| Youngův modul | $E_b$ | [Pa] | $2{,}1 \cdot 10^{11}$ |
| Hustota | $\rho_b$ | [kg/m$^3$] | 7800 |
| Délka | $l$ | [m] | 0,3 |
| Šířka | $b$ | [m] | 0,025 |
| Tloušťka | $h_b$ | [m] | 0,001 |
| Koeficienty matice tlumení | $\alpha$ | | 1,3587 |
| | $\beta$ | | $4{,}0123 \cdot 10^{-5}$ |
| PARAMETRY SENZORU/AKTUÁTORU | | | |
| MATERIÁLOVÉ [1, tab. 4.1] | | | |
| Youngův modul | $E_{pe/pes}$ | [Pa] | $5 \cdot 10^{10}$ |
| Hustota | $\rho_{pe/pes}$ | [kg/m$^3$] | 7600 |
| Piezoelektrická konstanta | $d_{31}$ | [m/V] | $-150 \cdot 10^{-12}$ |
| Piezoelektrická konstanta | $e_{31}$ | [C/m$^2$] | $-7{,}5 \cdot 10^{-12}$ |
| GEOMETRICKÉ | | | |
| Šířka | $b_{pe/pes}$ | [m] | 0,025 |
| Tloušťka | $h_{pe/pes}$ | [m] | 0,005 |
| Umístění senzoru/aktuátoru | $x_{pe/pes}$ | [m] | $\langle 0, 0.09 \rangle$ |

Tabulka 5.2: Materiálové a geometrické parametry simulované soustavy



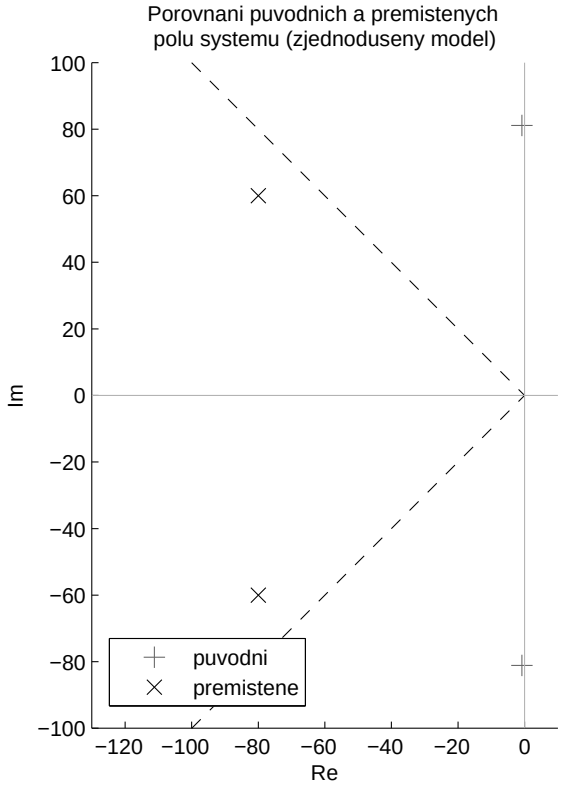

Obrázek 5.1: Naznačení diskretizace nosníku na konečné prvky

| | |
|---|---|
| Uzavřený RO: | $p_{1,2}^{(s)} = -80 \pm 60i$ |
| Rekonstruktor: | $p_{1,2}^{(r)} = -400 \pm 40i$ |

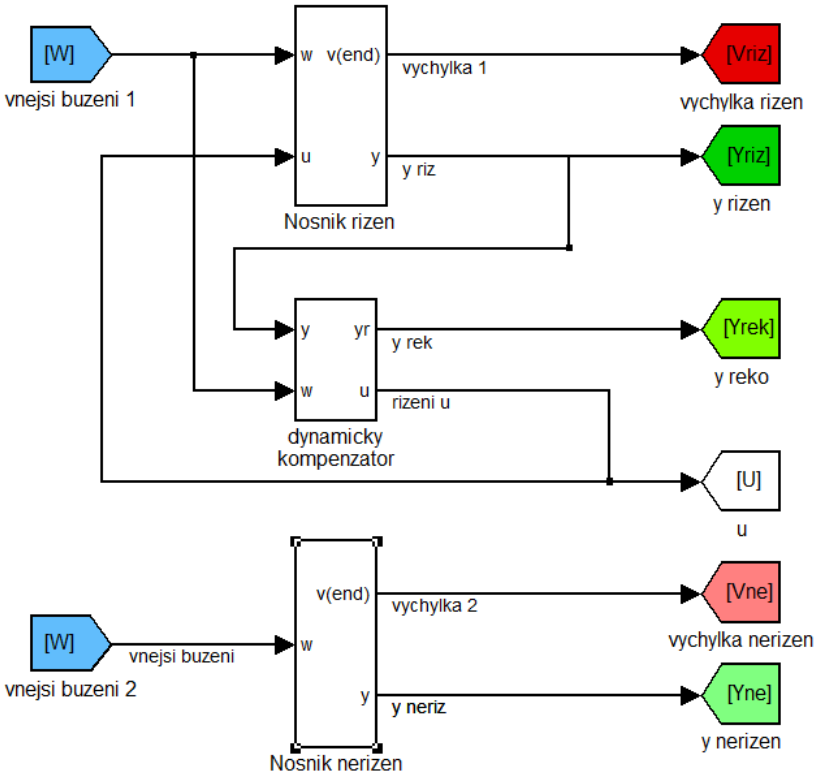
Tabulka 5.3: Umisťované póly uzavřeného regulačního obvodu a rekonstruktoru

Simulace řízení je prováděna v prostředí `Simulink`, ve kterém pro ni bylo vytvořeno blokové schéma vyobrazené na obrázku 5.3. Bloková schémata dynamického kompenzátoru a v něm použitého rekonstruktoru stavu jsou znázorněna na obrázcích 5.4, respektive 5.5.

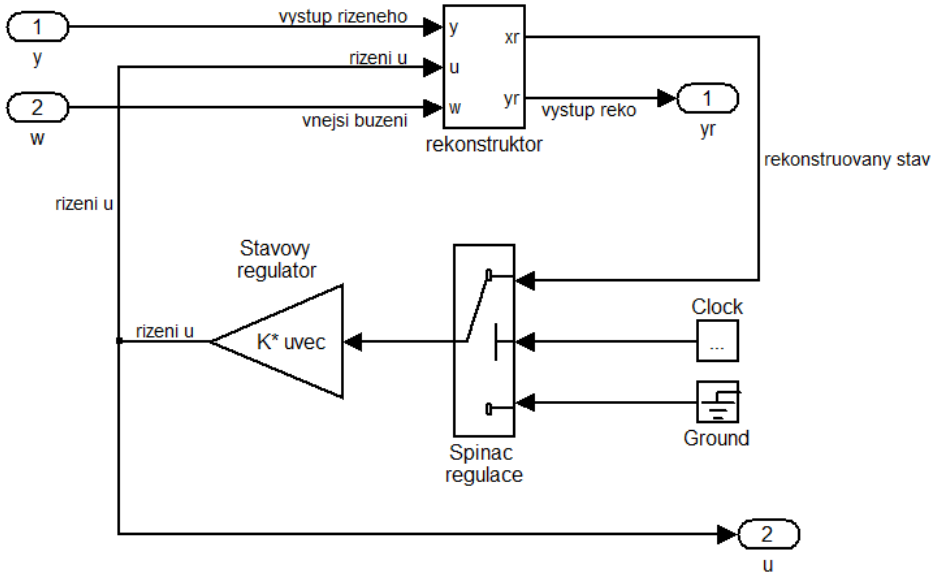
Použité umístění vlastních čísel (pólů) řízené soustavy a rekonstruktoru stavu je znázorněno v tabulce 5.3, graficky na obr. 5.2. U rekonstruktoru stavu jsou póly voleny s ohledem na potřebu rychlého odeznění chyby rekonstrukce. V případě regulátoru byla snaha umístit póly do „vhodné“ oblasti zdola omezené osou 3. kvadrantu a shora omezené osou 4. kvadrantu komplexní roviny a oproti neřízené soustavě s póly na pozicích $p_{1,2} = -0{,}8115 \pm 81{,}1431i$ zvýšit jejich vzdálenost od reálné osy. Umístění stabilních pólů uzavřeného regulačního obvodu použité v této práci bylo nalezeno metodou střelby. Takto získaný regulátor však určitě není optimální ani z hlediska rychlosti regulace, ani z hlediska energie vynaložené k regulaci. Návrh optimálního regulátoru je ponechán k dalšímu výzkumu rozvíjejícímu tuto práci.



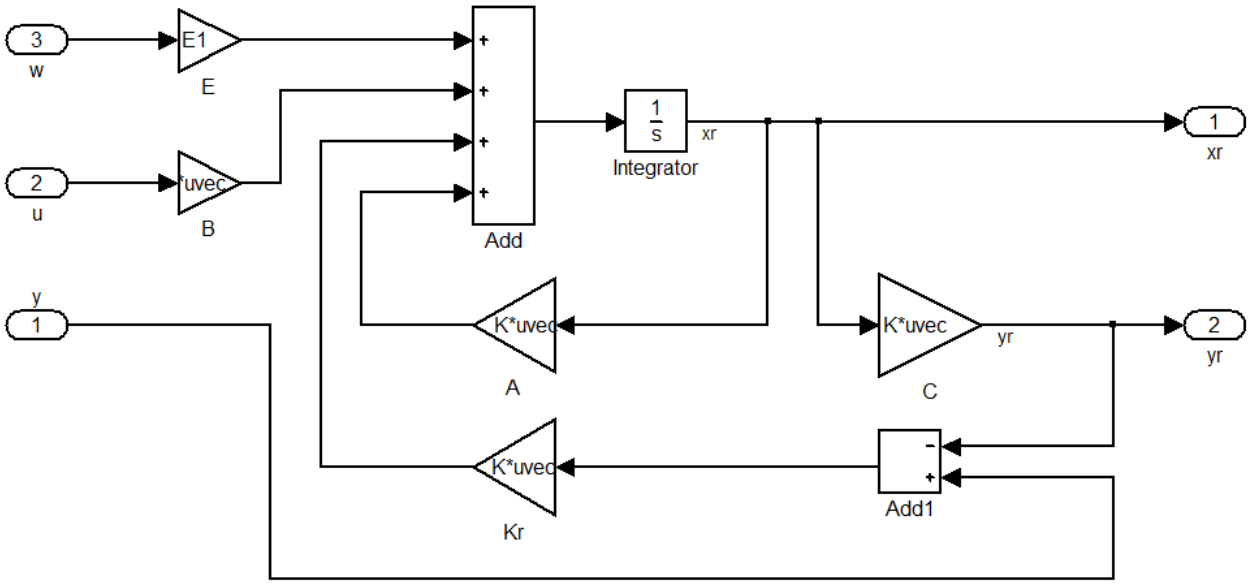

Obrázek 5.2: Umístění pólů regulátorem




Obrázek 5.3: Blokové schéma řízeného a neřízeného modelu



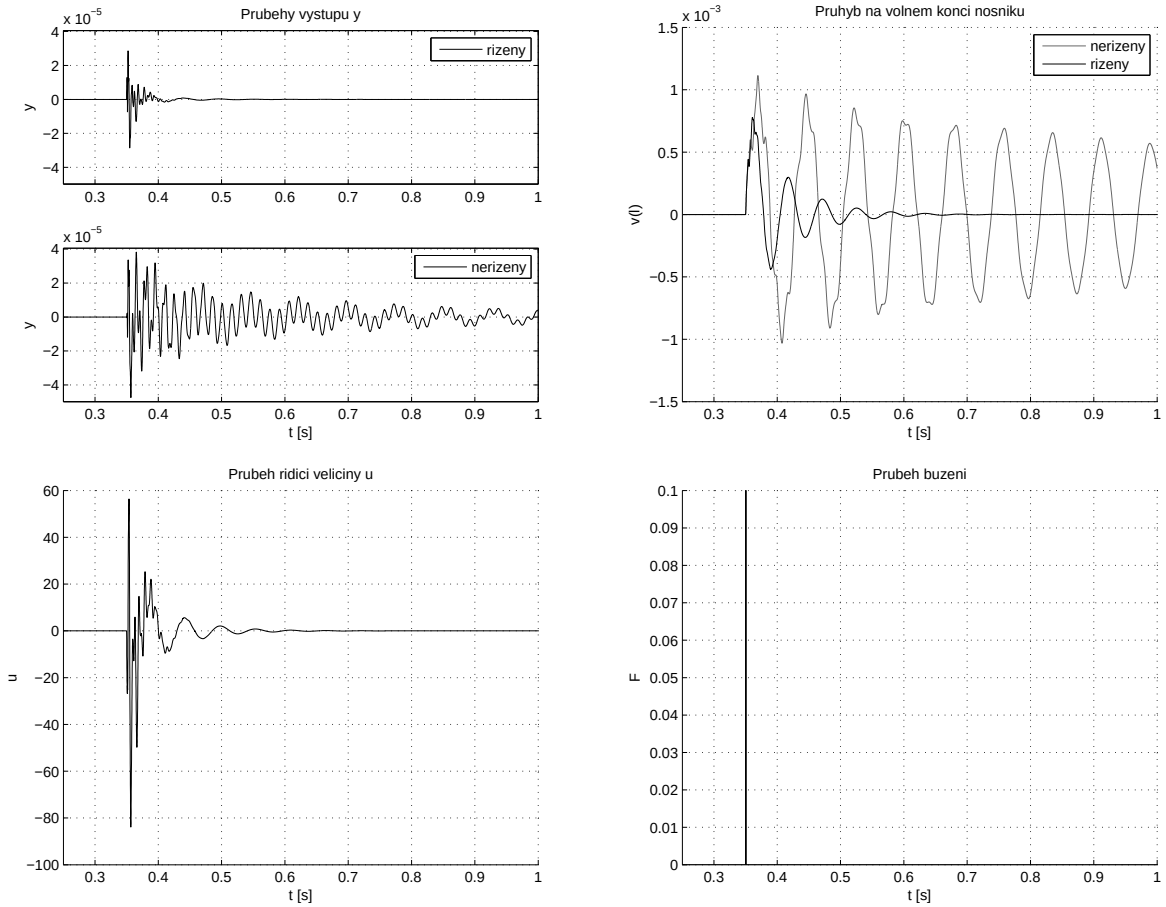

Obrázek 5.4: Blokové schéma dynamického kompenzátoru




Obrázek 5.5: Blokové schéma rekonstruktoru stavu

## 5.3 Odezva na silový puls

Prvním testovacím signálem použitým v simulaci je jednotkový silový puls trvající 0.01 s a působící ve směru průhybu $v$ na volném konci nosníku. S ohledem na odeznění chyby rekonstrukce probíhá testování odezev v čase $t > 0.3$ s. Odezvy na toto buzení z nulových počátečních podmínek jsou vykresleny na obrázku 5.6. Z průběhů odezev je patrné, že regulátor na buzení reaguje zprvu „divoce“, příčinou je skutečnost, že model systému použitý v rekonstruktoru respektuje pouze první mód kmitání a do doby odeznění silovým pulsem vybuzených vyšších módů rekonstruktor díky zanášenému „šumu“ od vyšších módů nerekonstruuje stav dostatečně přesně, jde o tzv. *observation spillover*, [1]. Potlačení spilloveru není s ohledem na rozsah v této práci řešeno a je doporučeno pro navazující výzkum. Přesto regulátor ze simulačních výstupů vychází pro tento typ buzení jako fungující a bylo dosaženo zrychlení útlumu vzniklých vibrací.




Obrázek 5.6: Odezvy systému na impuls

## 5.4 Frekvenční odezva

Druhý testovací signál má sinový průběh a opět působí ve stejném místě a směru jako v 5.3. Soustava je stejně jako v předešlém případě buzena z nulových počátečních podmínek.

Porovnáme-li na obrázku 5.7 znázorněné Bodeho diagramy amplitudového zesílení pro přenos od vnějšího buzení na výchylku volného konce nosníku vykreslené pro neřízenou soustavu a uzavřený regulační obvod, zjistíme, že regulátor v ustáleném stavu nejvíce potlačuje amplitudové zesílení při první rezonanci, $\omega_{rez} \doteq 81\,\mathrm{rad/s}$. Úbytek amplitudového zesílení je přibližně 40 dB, výchylka volného konce nosníku tedy je oproti neregulované soustavě zhruba setinová. Regulátor je tedy podle numerického výpočtu vhodný pro tlumení kmitů vyvolaných buzením na frekvencích blízkých první rezonanční frekvenci. Průběhy odezvy na buzení reznonanční budicí frekvencí, obrázek 5.8, této skutečnosti odpovídají. Podíl amplitud průhybu na volném konci řízeného a neřízeného modelu nosníku v ustáleném stavu vychází při $\omega_{rez} \doteq 81\,\mathrm{rad/s}$:

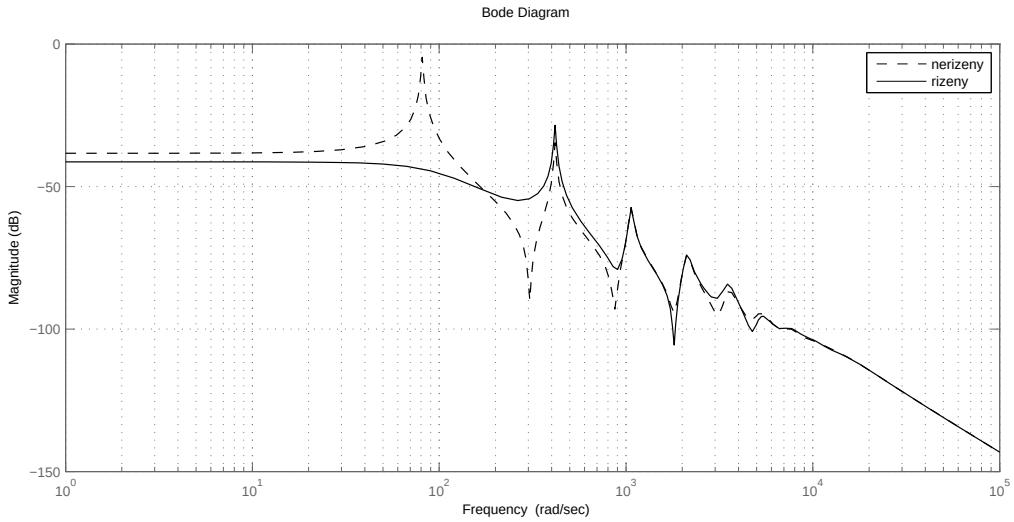
$$\frac{V_1}{V_2} = 0{,}0115, \tag{5.1}$$

přičemž $V_1$ je amplituda průhybu na volnéhm konci řízeného modelu a $V_2$ je amplituda průhybu na volném konci neřízeného modelu.

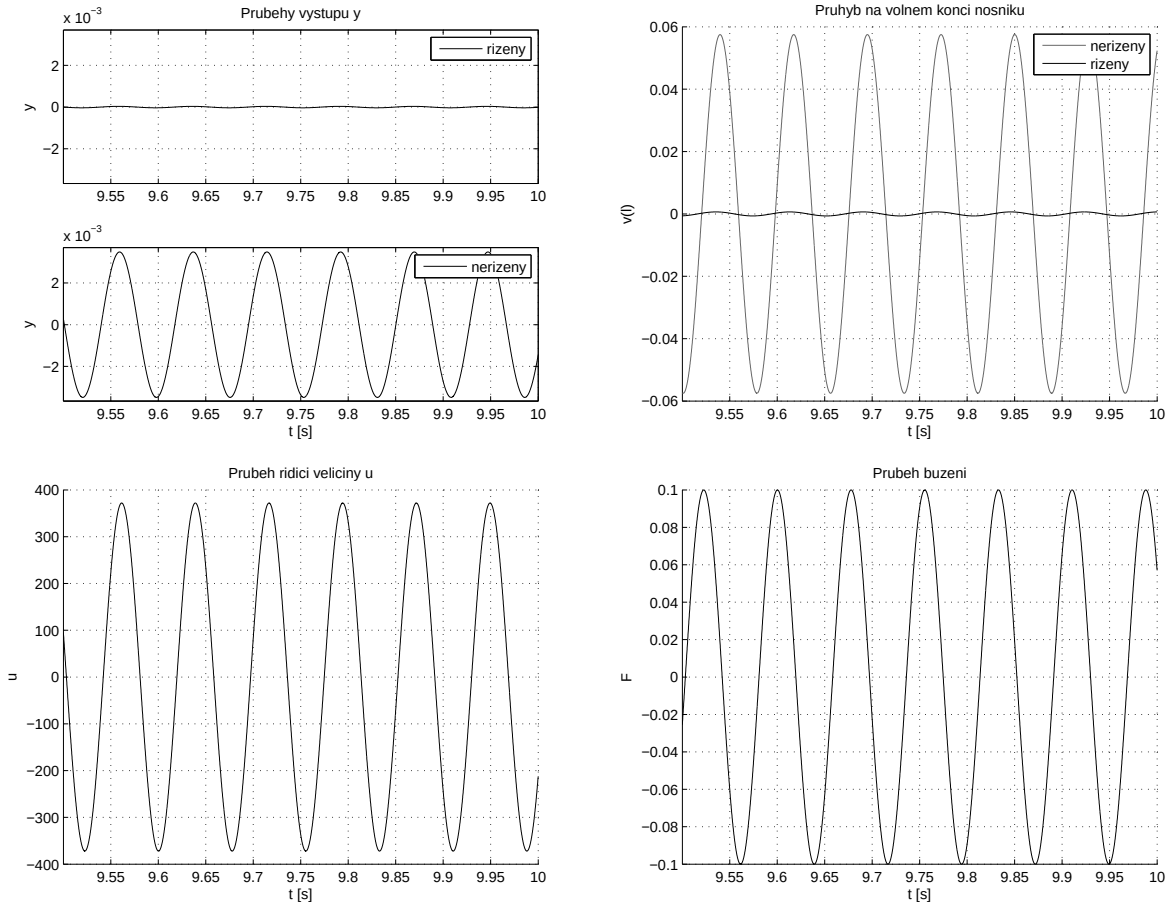
Na frekvencích přibližně do 20 rad/s můžeme z Bodeho charakteristik pozorovat úbytek amplitudového zesílení přibližně 4 dB, což odpovídá poklesu amplitudového zesílení na 63 % hodnoty amplitudového zesílení neřízené soustavy, viz výstup například pro $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$, obr. 5.9. Amplitudy ustálených kmitů řízeného a neřízeného modelu dávají v podílu pro $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$ podle výsledků simulace hodnotu:

$$\frac{V_1}{V_2} = 0{,}640. \tag{5.2}$$

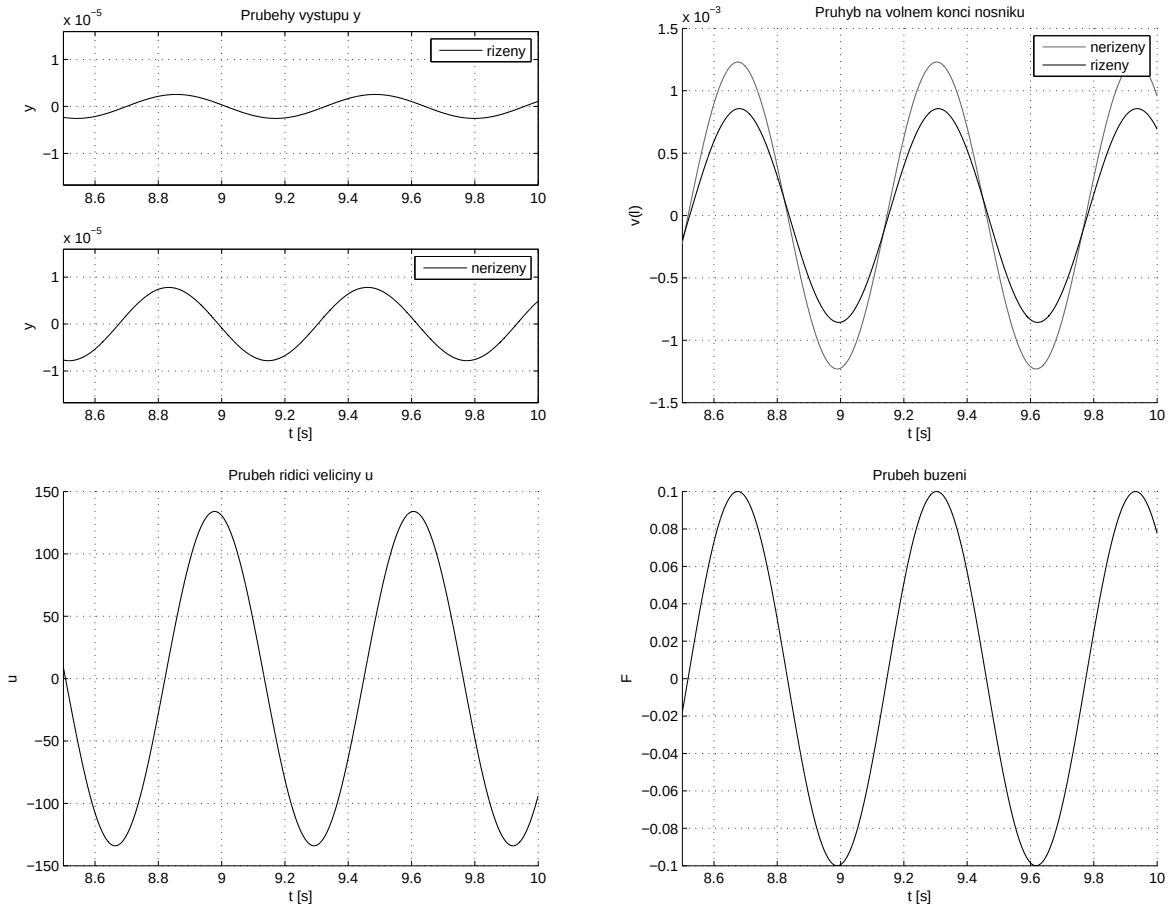
V závislosti na požadavcích na kvalitu regulace nemusí být tento pokles dostačující a bylo by potřebné navrhnout pro tyto budicí frekvence lepší regulátor.




Obrázek 5.7: Bodeho charakteristiky pro přenos vnější buzení - průhyb volného konce




Obrázek 5.8: Odezvy systému na sinový signál, $\omega = 81\,\mathrm{rad/s}$ (ustálený stav)



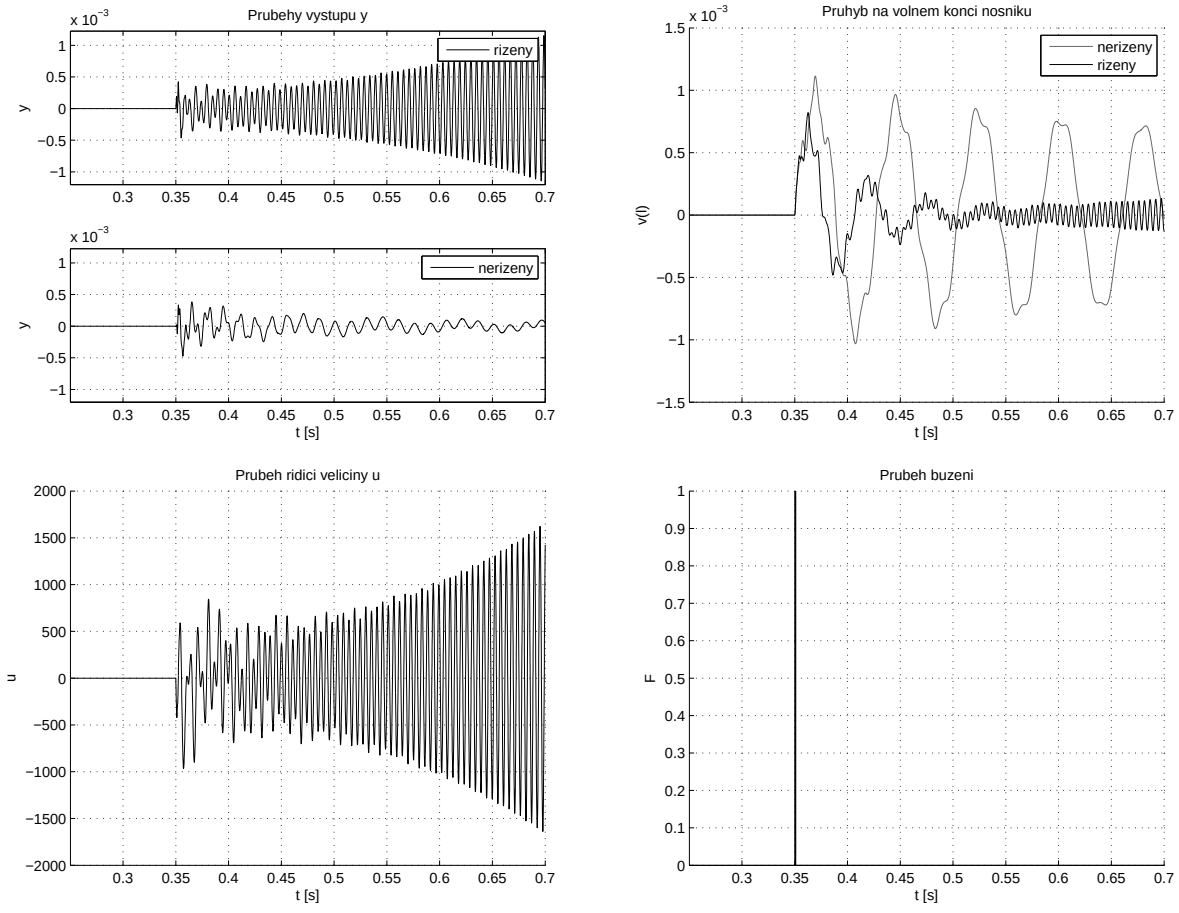

Obrázek 5.9: Odezvy systému na sinový signál, $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$ (ustálený stav)

## 5.5 Control spillover

Jedním z projevů řízení vibrací kontinuí je tzv. *control spillover*, [1]. Efekt vzniká tím, že regulační zásahy vybuzují v reálné soustavě módy, se kterými vnitřní model uvažovaný v regulátoru nepočítá (*residual modes*, [1]). U slabě tlumené soustavy tak existuje riziko, že regulátor využívající stavovou zpětnou vazbu reziduální módy destabilizuje, [1].

Příklad takového regulátoru je pro uvažovaný model regulátor umisťující póly „modelu“ do $p_{1,2} = -86 \pm 66i$. Póly uzavřeného regulačního obvodu sice leží v levé polorovině komplexní roviny, což by napovídalo, že regulátor soustavu stabilizuje, avšak regulačními zásahy dochází k nestabilnímu buzení vyšších módů, a řízení tedy selhává, obr. 5.10.

Možným způsobem potlačení spilloverové nestability je vyfiltrování pouze těch módů, se kterými počítá vnitřní model regulátoru, z výstupního signálu čidel, [1]. Tato modální filtrace zde však s ohledem na rozsah práce není řešena a je doporučena k navazujícímu výzkumu.




Obrázek 5.10: Ukázka spilloveru, umístěné póly $p_{1,2} = -86 \pm 66i$

# Závěr

Cílem práce bylo odvození konečného nosníkového prvku s piezoelektrickým senzorem a aktuátorem, sestavení matematického modelu nosníku s piezoelektrickými senzory a aktuátory a návrh zákona řízení.

Ve druhé kapitole je společně s nosníkovým prvkem odvozena pohybová rovnice slabě tlumeného nosníku.

Ve třetí kapitole je pohybová rovnice kvůli dalšímu použití převedena do stavové reprezentace. Dále je v této kapitole odvozena výstupní rovnice modelující závislost výstupního signálu na deformaci piezoelektrického senzoru. Tímto jsme získali kompletní matematický model.

Čtvrtá kapitola ukazuje metodiku potřebnou pro získání ziskových matic dynamického kompenzátoru úplným přiřazením vlastních čísel (pólů).

Pro ověření získaných poznatků je v software `MATLAB` autorem implementovanými algoritmy metody konečných prvků vytvořen model vetknutého nosníku s jedním senzorem a jedním aktuátorem, který je dalšími algoritmy převeden do stavové reprezentace.

Pro tento model je navržen dynamický kompenzátor, kterým jsou řízeny kmity vyvolané testovacími signály – silovým pulsem a buzením se sinovým průběhem. Regulátor podle výstupu simulací utlumuje kmitání vybuzené testovacími signály, avšak s ohledem na průběhy sledovaných veličin zřejmě nejde o optimální řízení. Návrh optimálního řízení je ponechán k navazujícímu výzkumu.

Vinou toho, že vnitřní model regulátoru zohledňuje nižší počet vlastních tvarů kmitu, než je počet vlastních tvarů řízené soustavy, dochází při regulaci k jevu zvanému spillover. Tento jev může zhoršit kvalitu regulace, případně regulaci naprosto znemožnit. Potlačení spilloveru je další téma, které by mělo být prozkoumáno v navazujícím výzkumu.

# Seznam obrázků


1.1 Element pieza . . . . . 5
1.2 Blokové schéma stavového regulátoru . . . . . 7
1.3 Blokové schéma dynamického kompenzátoru . . . . . 8

2.1 Posunutí libovolného bodu L při deformaci prvku . . . . . 9
2.2 Konečný prvek - geometrické poměry . . . . . 10
2.3 Deformovaný element . . . . . 10

5.1 Naznačení diskretizace nosníku na konečné prvky . . . . . 23
5.2 Umístění pólů regulátorem . . . . . 24
5.3 Blokové schéma řízeného a neřízeného modelu . . . . . 25
5.4 Blokové schéma dynamického kompenzátoru . . . . . 25
5.5 Blokové schéma rekonstruktoru stavu . . . . . 26
5.6 Odezvy systému na impuls . . . . . 27
5.7 Bodeovy charakteristiky . . . . . 29
5.8 Odezvy systému na sinový signál, $\omega = 81\,\mathrm{rad/s}$ (ustálený stav) . . . . . 29
5.9 Odezvy systému na sinový signál, $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$ (ustálený stav) . . . . . 30
5.10 Ukázka spilloveru, umístěné póly $p_{1,2} = -86 \pm 66i$ . . . . . 31

# Seznam tabulek

5.1 Porovnání vlastních frekvencí s [13] . . . . . 22
5.2 Materiálové a geometrické parametry simulované soustavy . . . . . 23
5.3 Umisťované póly uzavřeného regulačního obvodu a rekonstruktoru . . . . . 23

# Použitá označení

| | |
|---|---|
| $A_b$, $A_{pe}$, $A_{pes}$ | plocha průřezu beamu, aktuátoru, senzoru |
| $\mathbf{A}$ | matice dynamiky |
| $\mathbf{B}$ | celková matice tlumení systému; vstupní matice (stavový popis) |
| $\mathbf{B}^*$ | redukovaná matice tlumení |
| $b_b$, $b_{pe}$, $b_{pes}$ | šířka beamu, aktuátoru, senzoru |
| $\mathbf{c}_i$ | vektor neznámých koeficientů tvarové funkce |
| $C_k$ | k-tý řádek matice $\mathbf{C}_s$ |
| $\mathbf{C}$ | výstupní matice |
| $\widetilde{\mathbf{C}}$ | matice vyjadřující vztah mezi zobecněnými souřadnicemi a výstupními veličinami |
| $d_{31}$ | piezoelektric strain constant |
| $D_z$ | plošná hustota elektrického náboje |
| $D_\nu$ | poměrný útlum $\nu$-té vlastní frekvence |
| $\mathbf{D}$ | matice přímého působení vstupu na výstup |
| $e_{31}$ | piezoelectric stress constant |
| $E_b$, $E_{pe}$, $E_{pes}$ | Youngův modul pružnosti beamu, aktuátoru, senzoru |
| $\mathbf{E}$ | matice poruchových (vnějších) účinků |
| $\mathbf{f}(t)$ | globální vektor buzení |
| $\mathbf{f}_e$ | vektor buzeni elementu |
| $\mathbf{f}_{ext}(t)$ | vektor vnějšího zatížení |
| $\mathbf{f}_0$ | konstantní část vektoru buzení od pieza |
| $\mathbf{g}(t)$ | vektor modálních souřadnic |
| $\mathbf{G}$ | matice koeficientů pro přepočet deformace pieza na uvolněný elektrický náboj |
| $h$ | tloušťka části beamu nad referenční osou |
| $h_1$ | tloušťka části beamu pod referenční osou |
| $h_{pe/pes}$ | tloušťka piezoelektrického aktuátoru/senzoru |
| $\mathbf{H}_{reg}, \mathbf{H}_{rek}$ | libovolné matice (náhodně generované) |
| $i(t)$ | elektrický proud |
| $\mathbf{I}$ | jednotková matice |
| $\mathbf{I}_{ij}^{kl}$ | integrální matice |
| $\mathbf{I}_i^k$ | integrální matice |
| $\mathbf{J}$ | permutační matice |
| $J_b$, $J_{pe}$, $J_{pes}$ | kvadratický moment průřezu beamu, aktuátoru, senzoru |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{K}$ | globální matice tuhosti systému |
| $\mathbf{K}_e$ | matice tuhosti elementu |
| $\mathbf{K}^*$ | redukovaná matice tuhosti |
| $\mathbf{K}_{rek}$, $\mathbf{K}_{reg}$ | zisková matice rekonstruktoru, stavového regulátoru |
| $l_e$ | délka elementu |
| $\mathbf{L}_{rek}$, $\mathbf{L}_{reg}$ | matice s požadovanými vlastními čísly |
| $\mathbf{M}$ | globální matice hmotnosti |
| $\mathbf{M}_e$ | matice hmotnosti elementu |
| $\mathbf{M}^*$ | redukovaná matice hmotnosti |
| $n_e$ | počet elementů |
| $p$ | počet aktuátorů |
| $\vec{p}$ | vektor polarizace |
| $Q(t)$ | elektrický náboj |
| $\mathbf{q}(t)$ | globální vektor zobecněných souřadnic |
| $\mathbf{q}_e$ | vektor zobecněných posuvů elementu |
| $\mathbf{q}_{e1}, \mathbf{q}_{e3}$ | subvektory vektoru zobecněných posuvů elementu |
| $s$ | počet senzorů |
| $S_b$, $S_{pe}$, $S_{pes}$ | statický moment průřezu beamu, aktuátoru, senzoru |
| $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$ | matice souřadnic uzlů prvku |
| $S_{i-pq}$ | prvek matice $\mathbf{S}_1^{-1}$ nebo $\mathbf{S}_3^{-1}$ na pozici $p$, $q$ |
| $t$ | čas |
| $\mathbf{T}_e$ | transformační matice z lokálního do globálního souř. systému |
| $u_0(x,t)$ | podélné posunutí na referenční ose |
| $u(x,\eta,t)$ | podélné posunutí bodu |
| $U$, $u(t)$ | elektické napětí |
| $\mathbf{u}(t)$ | vektor vstupních veličin (elektrických napětí) |
| $v(x,t)$ | průhyb |
| $V_1$, $V_2$ | amplitudy průhybu na volném konci nosníku |
| $\mathbf{V}$ | modální matice |
| $\mathbf{V}^*$ | matice složená z prvních $m$ vlastních vektorů |
| $\mathbf{w}(t)$ | poruchový signál (vnější buzení) |
| $\mathbf{x}(t)$ | stavový vektor |
| $\mathbf{x}_i(t)$ | subvektor stavového vektoru $\mathbf{x}$ |
| $\hat{\mathbf{x}}(t)$ | rekonstruovaný stav |
| $\mathbf{X}_{reg}, \mathbf{X}_{rek}$ | transformační matice |
| $\mathbf{y}(t)$ | vektor výstupních veličin |
| $\mathbf{Z}_s$ | matice měření zobecněné souřadnice |
| $\alpha$ | koeficient vlivu prostředí na tlumení |
| $\beta$ | koeficient vlivu materiálu na tlumení |
| $\gamma_i$ | prvky matice $\mathbf{G}$ |
| $\delta$ | operátor variace |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | relativní prodloužení |
| $\varepsilon(x,\eta,t)$ | relativní prodloužení v bodě $[x,\eta]$ a čase $t$ |

| | |
|---|---|
| $\varepsilon_{pe}^1$ | relativní prodloužení pieza v hlavním směru 1 |
| $\lambda$ | vlastní číslo |
| $\mathbf{\Lambda}$ | spektrální matice |
| $\rho_b$, $\rho_{pe}$, $\rho_{pes}$ | hustota beamu, aktuátoru, senzoru |
| $\sigma$ | spektrum matice |
| $\sigma_b$, $\sigma_{pe}$, $\sigma_{pes}$ | normálové napětí v beamu, senzoru, aktuátoru |
| $\mathbf{\Phi}_i$ | reprezentace polynomu $i$-tého stupně vektorem |
| $\psi(x,t)$ | úhel natočení |
| $\Omega_\nu$ | $\nu$-tá vlastní frekvence |
| $\mathbf{0}$ | nulová matice |

# Literatura


[1] Preumont, A. Vibration Control of Active Structures, An Introduction. 3. vyd. Springer.

[2] Fuller, C. R., Elliott, S. P., Nelson, P. A.: Acive Control of Vibration. 2. printing. London: Academic Press, 1996. ISBN 01-226-9440-6.

[3] Bandyopadhyay, B., Manjunath, T. C., Umapathy, M.: Modeling, Control and Implementation of Smart Structures: A FEM-State Space Approach, New York: Springer, 2007. 256 s. Lecture notes in control and information sciences, v. 350. ISBN 978-3-540-48393-9.

[4] Elektro: odborný časopis pro elektrotechniku. Praha: FCC PUBLIC s. r. o., 2002, roč. 2002, č. 2. ISSN 1210-0889.

[5] Jirousek, O.: Metoda konečných prvků: poznámky k přednáškám, 2006. [cit. 10. 5. 2012] Dostupné z: http://mech.fd.cvut.cz/education/master/k618y2m2/download/ymkp_fem.pdf

[6] Teplý, B. Metoda konečných prvků. Brno: VUT, 1981, 98 s.

[7] Tůma, F.: Kybernetika. 7., upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2007, 119 s. ISBN 978-80-7043-567-0

[8] Melichar, J.: Lineární systémy 2: Učební text. Plzeň, 2010. [cit. 20. 4. 2012] Dostupné z: http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls2/LS2-U%C4%8Debn%C3%AD-texty-2010.pdf

[9] Dupal, J.: Výpočet odezvy konstrukcí na buzení piezoelektrickými záplatami

[10] Dupal, J.: Mechanika stochastických systémů. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008, 263 s. ISBN 978-80-7043-715-5

[11] Schlegel, M.: Modální řízení konečněrozměrných lineárních systémů, Plzeň, 2005. [cit. 1. 5. 2012] Dostupné z: http://schlegel.zcu.cz/soubory/modal_contr.pdf

[12] Matlab product help

[13] Piefort, V. Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures. Bruxelles, 2001. Doctoral thesis. Université Libre de Bruxelles.