ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYBRANÉ MOŽNOSTI UŽITÍ MATIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aneta Franková

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2023

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. června 2023

....

vlastnoruční podpis

Ráda bych zde poděkovala panu PhDr. Lukášovi Honzíkovi Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, za odbornou pomoc a cenné rady.

OBSAH

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou matice a jejich aplikace v různých oblastech matematiky. Toto téma jsem si vybrala hlavně proto, že matice a maticové operace jsou klíčovou součástí matematického aparátu v mnoha matematických oblastech a jejich význam a využití se projevuje napříč různými, nejen matematickými, disciplínami. Jelikož je toto téma velmi obsáhlé, tato práce obsahuje pouze výběr některých matematických disciplín, které teorii matic využívají.

Cílem je vytvořit práci, která pojednává o teoretických znalostech z oblasti maticového počtu a jejich efektivní využití ve vybraných oblastech matematiky.

Bakalářská práce se skládá z několika kapitol, které se věnují jednotlivým matematickým disciplínám, jež teorii matic využívají. Jednotlivé kapitoly obsahují jak teoretickou, tak praktickou část. Každá z kapitol začíná právě teoretickým úvodem, který je potřebný pro řešení typových příkladů dané problematiky, které následují.

V první kapitole práce jsou uvedeny základní pojmy a definice týkající se matic. Na tuto kapitolu navazuje kapitola, obsahující definici determinantu a možnosti jeho výpočtu. Dále následuje řešení soustav lineárních rovnic, teorie grafů a permutace na množině. Poslední kapitola je zaměřena na stručný historický vývoj teorie matic a na významné matematiky, kteří přispěli k rozvoji této teorie.

Závěr práce dále stručně zmiňuje další oblasti, které teorii matic využívají.

1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE MATIC

Matice, jakožto matematický pojem, označující uspořádanou množinu. Zapisují se pomocí závorek a obsahují prvky uspořádané v řádcích a sloupcích. Matice jsou pro velkou část matematických disciplín velmi účinným nástrojem. Využívají se například v lineární algebře, teorii grafů či numerické analýze. Mají ale také široké využití ve strojírenství, fyzice, stavebnictví, ekonomii, statistice či počítačové grafice. [1] V první části této kapitoly jsou zavedeny základní pojmy a definice teorie matic, které pro nás budou zásadní. V druhé části se pak nacházejí matematické operace s maticemi.

Definice. Nechť X je neprázdná množina a m, n jsou přirozená čísla. Pak *maticí* typu $m \times n$ nad množinou X budeme rozumět soustavu mn čísel (výrazů) uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Obecnou matici budeme označovat $A = (a_{ij})$, kde A je název matice a a_{ij} nazýváme prvek matice A na místě (i, j), tedy v i-tém řádku a j-tém sloupci. [3] V této práci se budeme zabývat maticemi číselnými, tj. prvky matice jsou právě čísla. Můžeme se ale setkat i s maticemi, jimiž prvky jsou jiné výrazy - např. parametry či symboly, jako například:

$$A = \begin{pmatrix} \clubsuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \spadesuit \\ \blacklozenge & \clubsuit \end{pmatrix}.$$

Pro další definice a vlastnosti matic je nutné si definovat důležité diagonály.

Definice. *Hlavní diagonála* matice $A = (a_{ij})$ jsou prvky a_{ij}, pro které platí $i = j$.

Hlavní diagonála libovolné matice je tedy posloupnost tvořená prvním prvkem z prvního řádku, druhým prvkem z druhého řádku, třetím prvkem z třetího řádku atd. Hlavní diagonála matice jde z levého horního rohu šikmo doprava dolů. Všechny prvky, které tvoří hlavní diagonálu, potom nazýváme *diagonální prvky.*

Definice. *Vedlejší diagonála* matice $A = (a_{ij})$ jsou prvky a_{ij}, pro které platí $j = (n - i) + 1$.

Vedlejší diagonála jde naopak z levého dolního rohu šikmo doprava nahoru.

Dále se můžeme setkat s pojmy *superdiagonála* a *subdiagonála*. Pojmem superdiagonála se označuje diagonála, která je hned nad hlavní diagonálou, naopak diagonála pod hlavní diagonálou se označuje jako subdiagonála. [3]

Pro názornou ukázku využijeme následná schémata matic A a B. Na matici A je vyznačena **červeně** hlavní diagonála, vedlejší diagonála potom **modře**. Na matici B je **zeleně** vyznačena superdiagonála a **žlutě** subdiagonála.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

S pojmem hlavní diagonála je úzce spojena tzv. *stopa matice.* Stopu matice značíme $\mathrm{tr}(A)$ a určujeme jí u čtvercových matic, které si následně definujeme v kapitole *1.1 Typy matic*.

Definice. *Stopou* $\mathrm{tr}(A)$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n rozumíme součet prvků na její hlavní diagonále, tj. $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mn}$.

Příklad:

$$\text{Nechť } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \text{ pak } \mathrm{tr}(A) = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Jednou ze základních vlastností teorie matic je *rovnost matic*, která je definována následovně.

Definice. Matice $A = (a_{ij})$ a matice $B = (b_{ij})$ se rovnají, jsou-li stejného typu $m \times n$ a rovnají-li se jejich vzájemně si odpovídající prvky. Lze tedy zapsat $A = B$, jestliže platí $a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1,2, \dots m$ a $\forall j = 1,2, \dots, n$.

Jednoduše řečeno, dvě matice A a B jsou si rovny, pokud jsou stejného typu (mají stejný počet řádků i stejný počet sloupců) a zároveň každý prvek matice A je roven odpovídajícímu prvku matice B.

V opačném případě řekneme, že matice A a B jsou různé a zapisujeme $A \neq B$.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 95 & -2 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 95 & -2 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$A = B$, protože matice A, B jsou stejného typu 2×2 a také platí $a_{ij} = b_{ij}$.

1.1 TYPY MATIC

Existuje mnoho typů matic, z nichž každá má své specifické vlastnosti a aplikace. Tato podkapitola je zaměřena právě na definice některých typů matic, jako je matice čtvercová, resp. obdélníková, matice nulová, jednotková, matice symetrická, resp. antisymetrická apod. [1] [3] [9]

Matice čtvercová

Prvním typem matice je *matice čtvercová*. Jak už název napovídá, matice je uspořádána do tvaru čtverce, má tedy stejný počet prvků v řádcích i sloupcích.

Definice. Matici typu $m \times n$, nazýváme *čtvercovou maticí n-tého řádu*, pokud $m = n$.

Pokud $m \neq n$ mluvíme o *matici obdélníkové*.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 8 & 11 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice A je čtvercová matice typu 3×3, matice B je obdélníková matice typu 2×3.

Nulová matice

Dalším typem matice je matice nulová. Opět podle názvu by mělo být jasné, jak by taková matice měla vypadat. Nulová matice, je matice, kde všechny prvky jsou rovny právě nule. V literatuře se obvykle můžeme setkat s označením O. [3]

Definice. Matice $A = (a_{ij})$ je *nulová matice*, pokud pro všechny její prvky platí $a_{ij} = 0$.

Příklad:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice O je nulová matice 2. řádu.

Horní a dolní trojúhelníková matice

Jedním ze zvláštních typů čtvercové matice je *matice trojúhelníková*. Nulové prvky v této matici tvoří právě trojúhelník, podle něhož je tento typ matice pojmenován. A právě podle toho, na které straně od hlavní diagonály se trojúhelník nachází, rozlišujeme *horní* a *dolní trojúhelníkovou matici*. [4]

Definice. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ se nazývá *horní trojúhelníková*, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i > j$.

Definice. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ se nazývá *dolní trojúhelníková*, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i < j$.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice A je dolní trojúhelníková matice, matice B je horní trojúhelníková.

Diagonální matice

Matice, která je současně horní i dolní trojúhelníková, se nazývá *diagonální matice*.

Definice. Jestliže jsou všechny prvky matice $A = (a_{ij})$, které leží mimo hlavní diagonálu, rovny nule, potom je matice A *diagonální matice*.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Matice, která má i na hlavní diagonále prvky rovné nule, je také diagonální maticí.

Jednotková matice

Speciálním typem matice diagonální je *matice jednotková (identická)*. V literatuře se můžeme obvykle setkat s označením I popřípadě E. [3]

Definice. Čtvercovou matici I typu (n, n) nazýváme *jednotkovou maticí*, pokud pro její prvky a_{ij} platí: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $a_{ij} = 1$ pro $i = j$. Názorně:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotková matice je tedy matice, kde všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné a všechny ostatní prvky jsou nulové.

Symetrická matice

Matice se nazývá *symetrická*, pokud je osově souměrná podle své hlavní diagonály.

Definice. Prvky čtvercové matice jsou symetrické podle hlavní diagonály a jsou stejné. Můžeme tady napsat že $a_{ij} = a_{ji}$.

Opakem matice symetrické je matice *antisymetrická*. Prvky, které jsou si u matice symetrické rovny, mají u matice antisymetrické opačná znaménka.

Lze také snadno ověřit, že každá diagonální matice je symetrická. [3]

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 9 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 7 & 2 & -6 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice A je symetrická matice, naopak matice B je matice antisymetrická.

Opačná matice

Definice. Matice $-A = (-a_{ij})$ se nazývá matice *opačná* k matici A.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Matice $-A$ je opačná matice k matici A.

Transponovaná matice

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Matici $A^T = (a_{ji})$, která je typu $n \times m$, nazýváme *transponovanou maticí* k matici A.

Matice A^T nám tedy vznikne „převrácením" té původní matice podle její hlavní diagonály, neboli vznikne záměnou řádků za sloupce, tj.:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad:

$$\text{Je-li } A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pak je } A^T = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z definice transponované matice vyplývá, že pro každou matici A platí: $(A^T)^T = A$. Z této definice také můžeme říct, že čtvercová matice A stupně *n* je symetrická, jestliže $A = A^T$ a antisymetrická, pokud $A = -A^T$. [5]

Submatice

Submatice $A_{i,j}$ je matice, která vznikne z matice A vypuštěním i-tého řádků a j-tého sloupce.

Definice. Nechť A je matice typu $m \times n$ a nechť $u = (i_1, \dots, i_p)$ je taková uspořádaná p-tice přirozených čísel, že $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$, $p < m$. Dále nechť $v = (j_1, \dots, j_q)$ je taková uspořádaná q-tice přirozených čísel, že $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$, $q < n$. Potom matici, která vznikne z matice A vypuštěním všech řádků s řádkovými indexy, které patří do u a vypuštěním všech sloupců matice A se sloupcovými indexy, které patří do v, nazýváme *submaticí* matice A a značíme ji $A_{(u,v)}$.

Příklad:

$$\text{Nechť } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Pokud položíme } u = (2) \text{ a } v = (4),$$

potom vypuštěním druhého řádku a čtvrtého sloupce matice A dostaneme submatici

$$A_{(2,4)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice, která je tvořená zbylými řádky a sloupci se následně nazývá *doplňková submatice*.

Bloková matice

Vodorovnými či svislými čarami můžeme matici rozdělit do několika částí nazývaných bloky, které mohou mít různé rozměry. Svislé a vodorovné čáry nám tedy dělí původní matici právě na již zmíněné submatice, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & | & 2 & 3 \\ 4 & | & 5 & 6 \\ 7 & | & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 4 & 5 & | & 6 \\ - & - & | & - \\ 7 & 8 & | & 9 \end{pmatrix}.$$

Definice. Matici A, jejíž prvky jsou uspořádané do bloků, nazýváme *bloková matice*.

Příklad:

matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 1 & 3 \\ 4 & 9 & | & 7 & 5 \\ - & - & | & - & - \\ 6 & 2 & | & 0 & 9 \\ 7 & 4 & | & 8 & 2 \end{pmatrix}$ lze zapsat jako blokovou matici $A = \begin{pmatrix} A_{(11)} & A_{(12)} \\ A_{(21)} & A_{(22)} \end{pmatrix}$,

kde submatice $A_{(11)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $A_{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{(21)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ a $A_{(22)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Poznámka. S některými dalšími vlastnostmi a typy matic se setkáme podrobněji v následujících kapitolách.

1.2. OPERACE S MATICEMI

S maticemi lze provádět různé matematické operace. V této podkapitole probereme ty základní, jako je sčítání matic, resp. odčítání, násobení matic jak číslem tak i násobení matic navzájem či určení matice inverzní. [1] [3] [4] [9]

Operace sčítání matic

Operace sčítání resp. odčítání matic je velmi intuitivní. Dvě matice sečteme (odečteme) tak, že sečteme (odečteme) prvky na stejných pozicích. Důležitá podmínka pro tyto operace je, že je můžeme aplikovat pouze u matic stejného typu.

Definice. *Součtem dvou matic*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

téhož typu $m \times n$ rozumíme matici opět typu $m \times n$, která je vypočtena součtem prvků na stejných pozicích. Říkáme, že matice sčítáme po složkách.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sčítání matic je komutativní operace. Pro jakékoliv matice A a B stejného typu tedy platí $A + B = B + A$. Dále pro jakékoliv matice A a B opět stejného typu platí, že sčítání matic je asociativní, tedy $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Mezi další vlastnosti sčítání matic patří existence neutrálního a opačného prvku. Neutrálním prvkem pro sčítání matic je matice nulová. Pro jakoukoliv matici A tedy platí $O + A = A + O = A$. Pro každou matici A a k ní opačnou matici $-A$ platí $A + (-A) = O$.

Z definice transponované matice nám také vyplývá vlastnost $(A + B)^T = A^T + B^T$. [11]

Obdobně je definována i operace odčítání matic.

Definice. Rozdílem matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$, stejného typu $m \times n$, rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, přičemž platí $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$, $\forall i = 1,2, \dots m$ a $\forall j = 1,2, \dots, n$.

Odčítání matic není komutativní ani asociativní operace, jakož tomu bylo u sčítání matic.

Příklad:

$$\text{Je-li } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 12 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 2 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{pak } A + B = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 9 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ a } A - B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 5 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Operace násobení matic reálným číslem

Násobení matice reálným číslem je operace, při níž vynásobíme každý prvek matice daným reálným číslem. Násobení reálným číslem je opět definováno po složkách, tj. každý prvek matice roznásobíme daným reálným číslem.

Definice. Je-li $r \in R$ libovolný prvek, pak r-násobkem matice A rozumíme matici

$$r \cdot A = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{21} & \dots & r \cdot a_{m1} \\ r \cdot a_{12} & r \cdot a_{22} & \dots & r \cdot a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{1n} & r \cdot a_{2n} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pro násobení matic reálným číslem platí, že pro jakoukoliv matici A a čísla r a s platí rovnost $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$. Násobení matic reálním číslem je oproti sčítání matic operací distributivní. Pro jakoukoliv matici A a čísla r a s tedy platí $r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A$ a $(r + s) \cdot A = r \cdot A \ + s \cdot A$.

U násobení matic reálným číslem existuje i neutrální prvek, kterým je číslo jedna. Vynásobíme-li matici právě jednotkou, výsledkem je původní matice, tedy $1 \cdot A = A$. Naopak vynásobíme-li matici nulou, výsledkem je matice nulová.

Příklad:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 12 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 35 & 60 \\ -30 & 5 \end{pmatrix}$$

Součin matic

Jako další operaci si zde uvedeme součin matic. Součin matic je matematická operace, při které se opět ze dvojice existujících matic vypočte matice nová. Vypočítaná matice má stejný počet řádků jako první matice a stejný počet sloupců jako druhá matice. Tato početní operace tedy může být prováděna pouze tehdy, pokud se počet sloupců první matice rovná počtu řádků druhé matice. Například, pokud je matice A typu 2×3 a matice B typu 3×4, pak součinem těchto matic je matice C typu 2×4.

Definice. Buď $A = \left(a_{ij}\right)$ matice typu $m \times n$ a $B = \left(b_{ij}\right)$ matice typu $n \times p$. Součinem AB těchto matic, v tomto pořadí rozumíme matici $C = \left(c_{ij}\right)$ typu $m \times p$, kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ pro $\forall i = 1,2, \dots n$ a $\forall j = 1,2, \dots, p$.

Jak z definice vyplývá, pořadí násobených matic má význam. Obecně tedy neplatí rovnost $AB = BA$. Násobení matic tedy oproti sčítání a násobení matic reálným číslem není komutativní operace. [3]

<u>Příklad:</u>

$$\text{Nechť } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{pak } AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \\ 8 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & 8 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 22 \\ 58 & 44 \end{pmatrix},$$

$$\text{naopak } BA = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 + 5 \cdot 8 & 7 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 8 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 26 \\ 36 & 10 \end{pmatrix}.$$

Pokud ale přeci jen pro matice A a B platí $AB = BA$, říkáme, že matice A a B *komutují*. Je zřejmé, že komutující matice mohou existovat pouze ke čtvercovým maticím.

Násobení matic je asociativní operace, což znamená, že součin tří matic A, B a C je stejný, bez ohledu na to, v jakém pořadí jsou matice násobeny, platí tedy $(AB)C = A(BC)$. Také zde platí distributivní zákon, čili $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$. Jednotková matice I je při násobení matic neutrálním prvkem, platí tedy $A \cdot I = I \cdot A = A$. Pro libovolnou matici A platí $OA = AO = O$, kde O je nulová matice. Součin dvou nenulových matic může ale také být nulová matice. To tedy znamená, že z rovnosti $AB = O$ nevyplývá, že matice A nebo B musí být nulová matice. [13]

<u>Příklad:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dále pro násobení matic platí $r \cdot (AB) = (r \cdot A)B = A(r \cdot B)$, kde r je libovolné číslo a $(AB)^T = B^T A^T$. [3]

Definice. Symbolem $A \sim B$ označujeme skutečnost, že matice B vznikla z matice A konečným počtem kroků podle elementárních řádkových úprav.

<u>Elementární řádkové úpravy</u>

Elementární řádkové úpravy jsou tři jednoduché operace, které můžeme aplikovat na řádky matice, aby se změnily některé její vlastnosti. Tyto úpravy můžeme provádět v libovolném pořadí a libovolně počet krát. Mezi úpravy patří:

1. prohození dvou řádků, neboli záměna pořadí libovolných řádků,

<u>Příklad:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

2. násobení řádku nenulovým číslem,

<u>Příklad:</u>

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 5 \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 5 & 20 & 35 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku matice.

<u>Příklad:</u>

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} + (-2r_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Každou čtvercovou matici právě pomocí těchto elementárních řádkových operací lze převést na horní, respektive dolní trojúhelníkovou matici, kterou jsme si již definovali v předchozí podkapitole.

Poznámka. Obdobně lze provádět i tzv. *elementární sloupcové úpravy.* Obě metody jsou vzájemně ekvivalentní, což znamená, že pomocí elementárních sloupcových úprav lze dosáhnout stejného výsledku jako pomocí elementárních řádkových úprav a naopak. Volba metody závisí na konkrétní situaci a také na preferenci jednotlivce.

Stupňovitý (schodovitý) tvar matice

Každou matici lze pomocí konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na tzv. *stupňovitý* (schodovitý) *tvar matice*.

Definice. Nechť A je matice typu $m \times n$. Řekneme, že A je *matice ve stupňovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice A je maticí ve stupňovitém tvaru.

Libovolná matice sestavená pouze z jednoho řádku je vždy ve stupňovitém tvaru. Speciálně nulová matice je zvláštním případem matice ve stupňovitém tvaru. [13]

Stupňovitý tvar matice nám umožňuje snadno určit mnoho vlastností této matice. Je například užitečný při řešení soustav lineárních rovnic (viz. kapitola *3. Řešení soustavy lineárních rovnic*), ale i jiných matematických výpočtů. Díky tomuto tvaru můžeme například jednoduše určit lineární závislost, respektive nezávislost řádků tvořících danou matici, neboli určit hodnost matice. [12]

Hodnost matice

Definice. *Hodnost matice* A je číslo $h(A)$, které vyjadřuje počet nenulových řádků matice získané z matice A převodem na stupňovitý tvar pomocí elementárních řádkových úprav.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici A pomocí elementárních řádkových úprav převedeme na stupňovitý tvar v následujících krocích:

1. nejprve záměnou 1. a 2. řádku dosáhneme toho, že v levém horním rohu matice bude nenulový prvek,

2. vynásobením 1. řádku vhodným číslem a jeho přičtením k 3. a 4. řádku dosáhneme toho, že pod nenulovým prvkem v 1. sloupci dostaneme samé nuly,
3. analogickým způsobem pak dále upravujeme 3. a 4. řádek matice.

Tedy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že poslední matice je ve stupňovitém tvaru a má 3 nenulové řádky.

Hodnost matice $h(A) = 3$.

Hodnost matice A je rovna nule, právě když A je nulovou maticí. Naopak, je-li matice A nenulová, pak její hodnost je rovna přirozenému číslu. Můžeme také říci, že hodnost matice, která je ve stupňovitém tvaru, je rovna počtu jejích nenulových řádků, nebo že hodnost matice je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků. Pro každou matici A platí $h(A^T) = h(A)$. [12]

Regulární a singulární matice

V souvislosti s hodností matice se můžeme setkat s pojmy *regulární* a *singulární* matice. [4]

Definice. Čtvercová matice se nazývá *regulární*, jestliže je její hodnost rovna jejímu řádu. V opačném případě, tedy když je hodnost menší než řád matice, se tato matice nazývá *singulární.*

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Matice A je matice řádu 4 a zároveň $h(A) = 4$. Matice A je tedy regulární.

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice B je matice řádu 3. Hodnost této matice je rovna 2. Matice B je singulární.

Matice inverzní

Dalším typem matice je *matice inverzní*. Ta se opět využívá při řešení soustav lineárních rovnic, ale také k mnoha dalším aplikacím v matematice či fyzice. Pro čtvercovou matici existuje inverzní matice právě tehdy, když je regulární.

Definice. Nechť A je čtvercová matice. Matice A^{-1} se nazývá *inverzní matice* k matici A, jestliže platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, kde I je jednotková matice.

Inverzní matice k matici transponované je matice transponovaná k inverzní matici, neboli $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Postup pro výpočet inverzní matice se nazývá *Gaussova-Jordanova eliminační metoda*. Tato metoda spočívá v postupných úpravách matice tak, aby byla zadaná matice upravena na matici jednotkovou. K tomu, abychom našli jednotkovou matici, využíváme výše uvedené elementární řádkové úpravy. Gaussova-Jordanova eliminační metoda najde inverzní matici A^{-1} k matici A následujícími 3 kroky:

1. zapíšeme si matici A rozšířenou o jednotkovou matici $I \rightarrow (A|I)$,
2. pomocí elementárních řádkových úprav vytvoříme z matice A jednotkovou matici,
3. získáme matici$(I|A^{-1})$, kde A^{-1} je inverzní matice k matici A.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Pomocí výše zmíněných kroků vypočteme matici inverzní následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 23 & 0 & -2 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -4 & 21 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 23 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 21 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -23 & 11 \end{array}\right).$$

$$\text{Tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 21 & -10 \\ 5 & -23 & 11 \end{pmatrix}.$$

Jak už bylo zmíněno, ke každé regulární matici existuje matice inverzní. Naopak potom u singulárních matic matice inverzní neexistuje.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Matici A^{-1} jsme si názorně vypočítali v předchozím příkladu. Matice A je tudíž regulární. Naopak inverzní matice B^{-1} k matici B neexistuje. Matice B je singulární matice.

Přirozené mocniny

Přirozenou mocninu matice A definujeme tzv. rekurentní definicí. Definuje se především nultá mocnina matice jako matice jednotková a dále $n+1$. mocnina jakou součin n. mocniny této matice s touto maticí.

Definice. *Přirozenou mocninu* matice A definujeme rekurentním způsobem následovně:

$$\begin{cases} A^0 = I, \\ A^{n+1} = A^n \cdot A. \end{cases}$$

Podle definice tedy spočítáme některé mocniny matic následujícím způsobem:

$A^1 = A^{0+1} = A^0 \cdot A^1 = I \cdot A = A,$

$A^2 = A^{1+1} = A^1 \cdot A = A \cdot A,$

$A^3 = A^{2+1} = A^2 \cdot A^1 = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot A \cdot A.$

Neúplnou matematickou indukcí můžeme vyslovit závěr: pod n. mocninou matice A rozumíme položit tuto matici n-krát za činitele součinu. Obecně tedy $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$. [3]

2 DETERMINANT MATICE

V druhé kapitole se budeme věnovat determinantům matic. „Teorie determinantů je zvlášť užitečná při použití matic k řešení soustav lineárních rovnic a u lineárních transformací.“ (Jones a Clamp, 1999, s. 21). Znalost determinantů se využívá jak v matematice, fyzice, inženýrství, tak v grafice a v mnoha dalších oborech.

„Determinant je číslo, které jistým způsobem charakterizuje čtvercovou matici.“ (Olšák 2013, s. 61). V případě číselných matic je determinant určité číslo, které vypočteme ze čtvercové matice A. Toto číslo získáme výpočtem sumy, která je uvedena v následující definici determinantu. Výpočet si ale můžeme zjednodušit, a to za pomoci několika vzorů, které si blíže popíšeme v následujících podkapitolách. Determinant se obvykle označuje symbolem $\det(A)$ nebo $|A|$. [4]

Definice. *Determinant* čtvercové matice $A = \left(a_{ij}\right)$ řádu n je takové číslo, které je dáno vzorcem:

$$|A| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \cdot (a_{1_{j_1}}) \cdot (a_{2_{j_2}}) \cdot \ldots \cdot (a_{n_{j_n}}),$$

kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů z množiny $\{1,2, \ldots, n\}$ a $N(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je počet inverzí v dané permutaci.

Definice. Nechť $A = \left(a_{ij}\right)$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. *Subdeterminantem* A_{ij} nazýváme determinant matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

2.1 METODY VÝPOČTU DETERMINANTŮ

V této kapitole si popíšeme některé z metod výpočtu determinantů. „Determinanty jsou jednou z mála partií lineární algebry, ve které při výpočtech nevystačíme s jedním nebo několika málo jednoduchými algoritmy.“ (Bečvář, 2019, s. 185). Každá z metod má své vlastní výhody a nevýhody a používá se v závislosti na velikosti matice a také na tom, jaké informace o matici máme k dispozici. [1]

K nejčastějším způsobům výpočtu determinantu patří tzv. metoda rozvoje determinantu podle řádků nebo sloupců, metoda Laplaceova rozvoje determinantu, či metoda Sarrusova pravidla.

2.1.1 DETERMINANT MATICE ŘÁDU 2

Determinant čtvercové matice druhého řádu je roven rozdílu součinů prvků hlavní a vedlejší diagonály. Determinant se tedy vypočítá tak, že vynásobíme první prvek prvního řádku s druhým prvkem druhého řádku a od tohoto výsledku odečteme součin prvního prvku druhého řádku a druhého prvku prvního řádku. Obecně tedy:

$$\text{je-li } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ pak } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

<u>Příklad:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 18$$

Poznámka. Determinant prvního řádu je roven prvku, který stojí v matici, neboli

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}.$$

2.1.2 SARRUSOVO PRAVIDLO

Sarrusovo pravidlo využíváme pro výpočet determinantu matice typu 3×3. Jedná se o snadný algoritmus, který umožňuje rychle vypočítat právě determinant takové matice, a to bez použití rozvoje determinantu podle řádků nebo sloupců. [1]

Definice. *Sarrusovo pravidlo* je způsob výpočtu determinantu matice $A = (a_{ij})$ třetího řádu podle vzorce:

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$
$$-(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}).$$

K usnadnění výpočtu stačí provést lehkou úpravu. K zadané matici připíšeme jako čtvrtý a pátý řádek její první a druhý řádek. Z matice typu 3×3 nám tedy vznikne matice typu 5×3. Následně postupujeme podobně, jako u matice řádu 2. Provedeme násobek prvků, které leží na hlavní diagonále a násobky prvků, které jsou na diagonálách rovnoběžných s hlavní diagonálou. Poté následně provedeme násobek prvků, které naopak leží na vedlejší diagonále a násobky prvků, které leží na diagonálách rovnoběžných s vedlejší diagonálou. Tyto prvky budou mít ale záporné znaménko. V poslední fázi už jen dopočítáme výsledek.

Příklad:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Zadanou matici si rozšíříme a postupujeme podle výše uvedeného algoritmu.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot -1 \cdot 1 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot = 37$$

Poznámka. Sarrusovo pravidlo také bývá v literatuře často formulováno i pomocí sloupců. Postup je obdobný, akorát místo řádků připíšeme zadané matici první dva sloupce.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 7 \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$= 168 + 12 - 113 = 67$$

2.1.3 LAPLACEŮV ROZVOJ

Pro výpočty determinantů matic čtvrtého a vyšších řádů není vhodné postupovat z definice, neboť je počet prvků matice příliš velký a výpočet by byl zbytečně zdlouhavý. Laplaceův rozvoj je tedy účinnější metoda výpočtu determinantu matice. Umožňuje nám vypočítat determinant matice libovolného řádu n a to pomocí rozkladu zadané matice na menší submatice. Laplaceův rozvoj lze provádět podle libovolného řádku nebo sloupce matice. [1]

Definice. *Laplaceův rozvoj* podle k-tého řádku vypočte determinant matice $A = (a_{ij})$ podle vzorce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |A_{kj}|,$$

kde A_{kj} jsou matice vzniklé z matice A vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Pomocí tohoto rozvoje vypočítáme determinant zadané matice tak, že postupně snižujeme řády determinantů až k determinantům řádu $n \leq 3$, které již umíme snadno vypočítat. Ze vzorce je vidět, že matice A_{kj} se roznásobí prvkem a_{kj}, což je příslušný prvek z vypuštěného řádku. Exponent prvku (-1) nám potom označuje součet řádku a sloupce, se kterým právě počítáme.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Z matice A vynecháme první řádek a podle vzorce vypočteme determinant následovně:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 117 - 7 \cdot (-84) + 5 \cdot (-112) + 1 \cdot (-98) = 224 + 588 - 560 - 98 = 154.$$

Definice. *Laplaceův rozvoj* podle l-tého sloupce vypočte determinant matice $A = (a_{ij})$ podle vzorce:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |A_{il}|,$$

kde A_{il} jsou matice vzniklé z matice A vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 9 & -5 \\ -3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Z definic nám vyplývá, že při správné volbě sloupce, respektive řádku, který vynecháváme, můžeme výpočet značně ulehčit. V případě této zadané matice A se jako ideální volba na vynechání jeví druhý sloupec, který obsahuje dvě nuly.

$$|A| = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 & -5 \\ -3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 9 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 9 & -5 \\ -3 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{5+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 9 & -5 \\ -3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\Bigg[(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-3) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} \Bigg] + 0 + 0 +$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot (-3) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 9 & -5 \\ 2 & 9 & -7 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \Bigg[(-1)^{1+1} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 9 & -5 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 9 & -5 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Bigg] = -[2 \cdot (-203) + 3 \cdot 438 + 310 + (-3) \cdot (-197)] + 8 \cdot 310 +$$

$$(-2) \cdot 60 + (-3) \cdot (-160) + (-3) \cdot (-130) - [8 \cdot (-197) + (-2) \cdot 47 + (-3) \cdot (-82)$$

$$- (-130) = -1809 + 3230 + 1294 = 2715$$

2.2 VLASTNOSTI DETERMINANTU

Determinant matice má několik vlastností, které jsou užitečné při řešení nejen matematických problémů. V této podkapitole si uvedeme některé z vlastností, které determinant má a které je dobré znát pro ulehčení počítání. [1]

1. Je-li některý z řádků nebo sloupců matice nulový, poté je determinant této matice roven nule.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 6 - 7 \cdot 0 \cdot 6 + 0 \cdot 1 \cdot 7 - 0 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \cdot 0 = 0$$

2. Pokud jsou si dva řádky nebo sloupce v matici rovny, pak je determinant této matice také roven nule.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 9 \cdot 1 - 4 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot 6 \cdot 1 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$$

3. Prohodíme-li dva po sobě jdoucí řádky nebo sloupce matice, změní se znaménko determinantu.

Příklad:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 0 - 3 \cdot 9 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 = -25$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 2 + 8 \cdot 6 \cdot 0 - 8 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 9 \cdot 0 - 3 \cdot 6 \cdot 1 = 25$$

4. Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu všech prvků na její hlavní diagonále.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 27$$

5. Přičteme-li k libovolnému jednomu řádku (sloupci) matice c-násobek nějakého jiného řádku (sloupce) matice, kde $c \in R$, je determinant vzniklé matice roven determinantu původní matice.

Příklad:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 1 = 21$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 9 + 5 \cdot 8 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 9 = 21$$

Třetí řádek matice A_2 je roven součtu dvojnásobku prvního řádku se třetím řádkem matice A_1.

6. Determinanty navzájem transponovaných matic jsou si rovny, tedy $|A| = |A^T|$.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 8 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = -42$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 8 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 2 = -42$$

7. Existuje-li v matici řádek, který je lineární kombinací jiných řádků, potom se determinant matice rovná nule.

Příklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 126 + 24 + 40 - 27 - 35 - 128 = 0$$

Druhý řádek matice A je roven součtu prvního a třetího řádku.

8. Jestliže je matice A řádu n a $c \in R$ pak je $\det(cA) = c^n \cdot \det A$.

9. Matice A je singulární právě tehdy, je-li její determinant roven nule a regulární právě tehdy, když je její determinant nenulový.

10. Vynásobíme-li libovolný řádek nebo sloupec matice prvkem $c \in R$ je determinant vzniklé matice roven $c \cdot \det(A)$.

<u>Příklad:</u>

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 55$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 55 = 165$$

Matice A_2 vznikla z matice A_1 vynásobením druhého sloupce číslem 3.

11. Determinant jednotkové matice je roven 1.

12. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

13. Determinant matice inverzní k matici A je roven převrácené hodnotě determinantu matice A, neboli $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

3 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

„Soustava lineárních rovnic je jedna nebo (obvykle) více lineárních rovnic, které mají být splněny všechny současně. Lineární rovnice je rovnice, ve které se jedna nebo (obvykle) více neznámých vyskytuje pouze v první mocnině.“ (Olšák 2013, s. 9).

V této části práce se zaměříme na to, jak můžeme znalosti o maticích a o práci s nimi využít právě při řešení soustav lineárních rovnic. „Soustavy rovnic popisují rozmanité fyzikální situace a studium metod jejich řešení tvoří důležité odvětví algebry.“ (Jones a Clamp, 1999, s. 136).

Definice. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $a_{11}, \dots, a_{mn},\ b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná čísla.

3.1 HOMOGENNÍ SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

Homogenní soustava lineárních rovnic je speciálním typem soustavy lineárních rovnic. Tato soustava je vždy řešitelná, jelikož množina všech řešení homogenního systému vždy obsahuje nulové řešení. [5]

Definice. *Homogenní soustava lineárních rovnic* je taková soustava lineárních rovnic, ve které jsou všechny pravé strany rovnic rovny nule, tedy $b = 0$ pro všechna $b_1, \dots, b_m$. Lze tedy soustavu m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

kde $a_{11}, \dots, a_{mn},\ b_1, \dots, b_m$ jsou opět daná reálná čísla.

3.2 MATICOVÝ ZÁPIS SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Než se přesuneme k metodám řešení soustavy lineárních rovnic, je důležité si ukázat a definovat, jak vůbec soustavu lineárních rovnic zapsat do maticového tvaru.

Definice. Máme soustavu lineárních rovnic, která je popsána v předchozí definici. *Matice systému soustavy lineárních rovnic* je matice A ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $m, n \in N$.

Definice. *Rozšířená matice systému soustavy lineárních rovnic* je matice $A|b$ ve tvaru:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

kde $m, n \in N$. [3]

3.3 ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

„Řešit soustavu rovnic znamená najít řešení, tj. najít taková reálná čísla, která po dosazení za neznámé v rovnicích splňují všechny rovnice současně.“ (Olšák 2013, s. 9). Takové řešení může existovat pro zadanou soustavu jediné, může se ale stát, že řešení bude více, nebo také žádné.

Frobeniova věta

Soustava $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když $hod(A) = hod(A|b)$, tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy. [3]

Metod řešení soustav lineárních rovnic existuje mnoho. K těm nejzákladnějším patří například metoda sčítací, dosazovací či kombinovaná metoda, dále srovnávací metoda a v neposlední řadě grafické řešení. [15] My se ale v této podkapitole zaměříme pouze na metody využívající matice, jako je Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo či metoda maticového součinu.

3.3.1 GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

Gaussova eliminační metoda nám umožňuje převést soustavu lineárních rovnic na ekvivalentní soustavu, která je snadno řešitelná. Tato metoda je velmi podobná jako Gaussova-Jordanova eliminační metoda, se kterou jsme se již seznámili při hledání matice inverzní. Hlavní rozdíl, právě mezi těmito dvěma metodami, je v posledním kroku výpočtu. V Gaussově eliminační metodě se používá zpětná substituce k vypočtení hodnot neznámých proměnných, naopak v Gaussově-Jordanově eliminační metodě se pokračuje v úpravách matice soustavy tak, aby se vytvořila matice diagonální, která na hlavní diagonále obsahuje pouze jednotky. Obě metody se používají právě k řešení soustav lineárních rovnic a volba metody závisí nejen na konkrétní aplikaci, ale především na preferencích jednotlivce.

Gauss-Jordanova metoda se užívá méně často než Gaussova. Jedním z důvodů je skutečnost, že Gaussova metoda vyžaduje provádět méně algebraických operací. „V případě čtvercové soustavy o n neznámých vyžaduje Gaussova eliminace přibližně $\frac{2}{3}n^3$ aritmetických operací, zatímco Gauss-Jordanova přibližně n^3 aritmetických operací, tedy o 50 % více.“ (Tlustý, 2003, s. 124).

Gaussova eliminační metoda se skládá z několika lehkých kroků:

1. soustavu lineárních rovnic si zapíšeme do matice rozšířeného tvaru,
2. poté matici postupně upravujeme pomocí elementárních řádkových operací, a to tím způsobem, abychom dostali horní trojúhelníkový tvar,
3. po dosažení horní trojúhelníkové matice se soustava řeší zpětným dosazením, tj. postupným určením neznámých, přičemž začínáme od poslední rovnice.

Výsledkem jsou potom hodnoty neznámých proměnných, které splňují původní soustavu lineárních rovnic.

<u>Příklad:</u>

$$4y + 3z = 4$$

$$2x - 3y - z = 8$$

$$3x + \qquad 2z = 17$$

$$3x + 4y + 5z = 21$$

Podle výše uvedených kroků si soustavu lineárních rovnic nejprve zapíšeme do matice rozšířeného tvaru a následně upravíme na horní trojúhelníkovou matici. A to tak, že nejprve prohodíme první a druhý řádek. Dále vhodným číslem vynásobíme první řádek, který přičteme ke třetímu a čtvrtému řádku. Následně opět vhodným číslem vynásobíme řádek druhý, který také přičteme ke 3. a 4. řádku. Jako poslední krok vynásobíme třetí řádek a přičteme jej k řádku čtvrtému, který se nám vynuluje.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 17 \\ 3 & 4 & 5 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 10 \\ 0 & 17 & 13 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z matice tedy vidíme, že $z = 4$, $4y + 3z = 4$ a $2x - 3y - z = 8$.

Následným dosazením dopočítáme tyto rovnice:

$$4y + 3 \cdot 4 = 4 \qquad \rightarrow y = -2$$

$$2x - 3 \cdot (-2) - 4 = 8 \qquad \rightarrow x = 3$$

Soustava lineárních rovnic má tedy výsledek $(x, y, z) = (3, -2,4)$.

Některé matice nelze převést do požadovaného horního trojúhelníkového tvaru. Jedná se o matice singulární a tato soustava rovnic nemá buďto žádné řešení nebo jich má nekonečně mnoho.

Příklad:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + \qquad 2x_3 \quad = -2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 4$$

$$3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 7$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$0x_4 \neq 3 \qquad \rightarrow \qquad$ Zadaná rovnice tedy nemá řešení.

3.3.2 GAUSSOVA-JORDANOVA ELIMINAČNÍ METODA

Gaussovo-Jordanova, někdy označována jen jako Jordanova metoda, je další metodou. Jak již bylo zmíněno v předchozí metodě výpočtu řešení soustav lineárních rovnic, hlavním rozdílem mezi Gaussovou a Gaussovo-Jordanovou eliminační metodou, je poslední krok výpočtu. Zde budeme dále pokračovat v úpravách matice tak, abychom došli k matici diagonální, která na hlavní diagonále bude obsahovat pouze jednotky. Výhodou této metody je, že výsledek soustavy vidíme přímo z upravené matice.

Příklad:

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$2x - y + 5z = -5$$

$$3x + y - 4z = 9$$

Soustavu lineárních rovnic zapíšeme do rozšířeného tvaru a poté opět upravujeme pomocí řádkových elementárních operací.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -5 & -13 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 13 & -8 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}$$

3.3.3 CRAMEROVO PRAVIDLO

Další metodou pro řešení soustav lineárních rovnic je Cramerovo pravidlo, které využívá znalost determinantů. Toto pravidlo se dá použít pouze pro čtvercové a zároveň regulární matice, to tedy znamená, že se dá použít jedině pro takové soustavy rovnic, ve kterých se počet neznámých rovná počtu rovnic a zároveň determinant matice není roven nule. [13]

Cramerovo pravidlo se nehodí k praktickému řešení soustav lineárních rovnic, protože počítat determinanty je obecně dosti pracné. Má svůj význam především v teorii, protože nám explicitně ukazuje tvar řešení.

Máme-li tedy zadanou soustavu lineárních rovnic:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

pak jestliže matice A je typu $n \times n$ a platí $\det(A) \neq 0$, potom $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$ pro $j = 1, \dots, n$, kde maticeA_j je matice vzniklá z matice A nahrazením j-tého sloupce sloupcem $b_1, \dots, b_m$.

<u>Příklad:</u>

$$4y + 3z = 4$$

$$2x - 3y - z = 8$$

$$3x + \qquad 2z = 17$$

Ze zadané soustavy rovnic si vyjádříme matici A. Dále si z matice A vyjádříme matici A_1 tak, že v původní matici A nahradím první sloupec vektory pravých stran rovnic. Obdobně si vyjádříme matice A_2 a A_3 a vypočteme si determinanty všech těchto matic.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 8 & -3 & -1 \\ 17 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 8 & -3 & -1 \\ 17 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 17 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 17 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -4$$

Nyní už jen dosadíme do vzorce $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$ a vypočteme neznámé, tedy:

$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-3}{-1} = 3$, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{2}{-1} = -2$ a $x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-4}{-1} = 4$.

3.3.4 INVERZNÍ METODA

Inverzní metoda je také známá jako metoda maticového součinu. Tato metoda je založena na využití inverzní matice, pokud tato matice existuje. Matice tedy musí být regulární. Řešení soustavy rovnic $Ax = b$ získáme roznásobením matice inverzní A^{-1} zleva, tedy $A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b$. Z vlastností matic víme, že $A^{-1} \cdot A = I$, kde I je jednotková matice. Z tohoto tedy plyne vztah $x = A^{-1} \cdot b$.

Příklad:

$$x + 4y + 3z = 15$$

$$2x - 3y + 2z = -7$$

$$3x + y - 2z = 1$$

Ze zadané soustavy rovnic získáme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ke které si dopočítáme matici inverzní $A^T = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 11 & 17 \\ 10 & -11 & 4 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 11 & 17 \\ 10 & -11 & 4 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 231 \\ 77 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 TEORIE GRAFŮ

V této kapitole se budeme zabývat souvislostí teorie grafů s teorií matic. Teorie grafů je matematická disciplína, která se zabývá studiem grafů a zkoumá jejich vlastnosti. Grafy se používají k modelování a analýze různých situací a vzájemných vztahů. [11]

Než se zaměříme na pojmy, které souvisí s teorií grafů, definujeme si dva základní pojmy, kterými jsou kartézský součin a binární relace.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. *Kartézským součinem* X, Y nazveme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in X$ a současně $y \in Y$, značíme jej $X \times Y$.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. *Binární relací* ρ množiny X do množiny Y nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$. Píšeme jej $x\rho y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$.

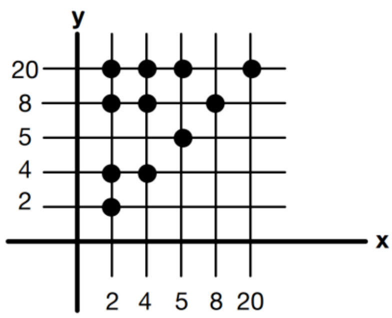
Relace můžeme graficky znázornit pomocí uzlového nebo kartézského grafu.

<u>Příklad:</u>

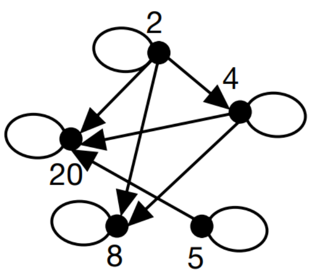
Množina $M = \{2, 4, 5, 8, 20\}$, ρ je relace *„být dělitelem"*, tj. $x\rho y$ právě tehdy, když x je dělitelem y. Relaci zapíšeme výčtem prvků následovně:

$\rho = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 20), (4, 4), (4, 8), (4, 20\ ), (5, 5), (5, 20), (8, 8), (20,20)\}$.

Grafické znázornění:



Obrázek 1 - Kartézský graf



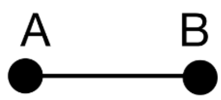
Obrázek 2 - Uzlový graf

4.1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE GRAFŮ

Definice. Nechť V je neprázdná množina. Dvojice $G = \big(V(G), H(G)\big)$ se nazývá *graf*. Prvky množiny $V(G)$ nazýváme *vrcholy* (uzly) a prvky množiny $H(G)$ *hrany* grafu G.

Prvky množiny vrcholů nejčastěji značíme velkými písmeny latinské abecedy $(A, B, C, \dots, Z)$, naopak prvky množiny hran malými písmenky (a, b, c, …, z), popřípadě pomocí dolních indexů $(v_1, v_2, \dots, v_3)$ pro vrcholy a $(h_1, h_2, \dots, h_3)$ pro hrany.

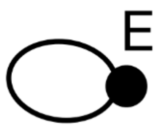
Každá hrana má oba své konce v některém z vrcholů. Pokud záleží, v jakém vrcholu začíná a v jakém končí, nazýváme tuto hranu *orientovanou*. Pokud o hraně víme jen to, mezi kterými vrcholy hrana vede, nazýváme jí *neorientovanou*. Naopak hranu, která začíná i končí v témže vrcholu, nazýváme *smyčka*. [7]



Obrázek 3 - Neorientovaná hrana A B

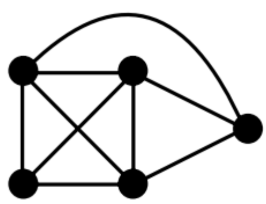
Obrázek 4 - Orientovaná hrana z C do D

Poznámka. Smyčka také může být orientovaná nebo neorientovaná.

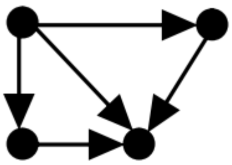


Obrázek 5 - Neorientovaná smyčka

Definice. Pokud graf obsahuje pouze neorientované hrany, nazýváme jej *neorientovaný graf*. Naopak graf, který je tvořen pouze z orientovaných hran, nazýváme *orientovaný graf.*



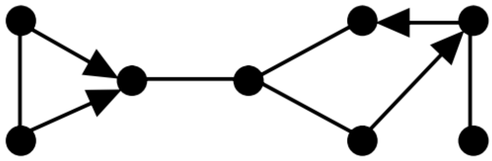
Obrázek 6 - Neorientovaný graf



Obrázek 7 - Orientovaný graf

Abychom v definicích a zápisech rozlišili o jaký graf se jedná, používá se označení G pro graf neorientovaný a $\vec{G}$ naopak pro graf orientovaný.

Poznámka. Graf, který obsahuje orientované i neorientované hrany, nazýváme *smíšený graf*.



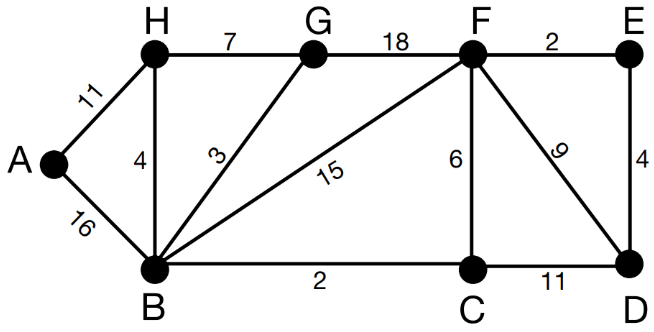
Obrázek 8 - Smíšený graf

Definice. Podle toho, zda má množina vrcholů konečný nebo nekonečný počet prvků, rozlišujeme grafy *konečné* a *nekonečné.*

Definice. Nechť $G = (V, H)$ a $G' = (V', H')$ jsou grafy. Řekneme že grafy G a G' *jsou si rovny* (píšeme $G = G'$), jestliže $V = V'$ a současně $H = H'$.

Dále je třeba uvést, že hrany a vrcholy grafu mohou být ohodnoceny. Graf, který obsahuje ohodnocení, tedy číselné hodnoty, které jsou přiřazeny jeho hranám nebo vrcholům, nazýváme *ohodnocený graf*. Tyto číselné hodnoty mohou poskytovat informace nejen o vztazích mezi jednotlivými vrcholy, ale i například o důležitosti či významnosti jednotlivých hran nebo vrcholů. Hranové ohodnocení může označovat například fyzickou vzdálenost mezi dvěma vrcholy spojenými hranou, náklady, kvalitu nebo jiné charakteristiky. Hranové ohodnocení může být i záporné, když například reprezentuje již zmíněné náklady nebo ztrátu. Vrcholové ohodnocení naopak může umožňovat identifikaci důležitých vrcholů nebo k lepšímu vyhledávání a navigaci v grafech. Obě tyto hodnocení umožňují lepší porozumění a orientaci v samotném grafu. [7]

Ohodnocený graf obvykle značíme (G, w).



Obrázek 9 - Hranově ohodnocený graf (G, w)

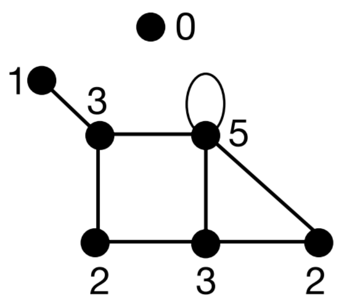
Definice. Nechť G je neorientovaný graf a $v \in V(G)$. Potom číslo

$$d_G(v) = |\{u \in V(G); \{v, u\} \in H(G)\}|$$

se nazývá *stupeň vrcholu v v grafu G.*

Pro neorientovaný graf se tedy stupeň vrcholu vypočítá jako počet hran, které do daného vrcholu zasahují. A jelikož koncové body smyčky tvoří tentýž vrchol, tak se tato hrana počítá dvakrát.

Poznámka. U orientovaných grafů se určuje zvlášť vstupní a výstupní stupeň. Celkový stupeň vrcholu je pak roven součtu vstupujících a vystupujících hran.



Obrázek 10 - Neorientovaný graf s vrcholy označenými jejich stupněm

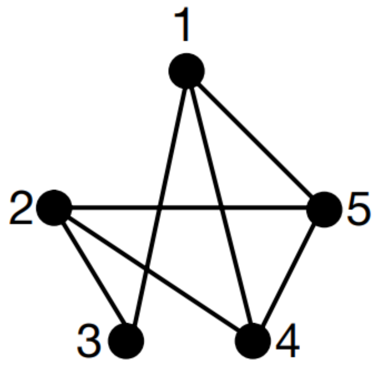
4.2 MATICE STUPŇOVITOSTI

Matice stupňovitosti je čtvercová matice, která slouží k reprezentaci stupňů vrcholů v neorientovaném grafu. Jedná se o diagonální matici, kde na hlavní diagonále jsou zapsány právě stupně jednotlivých vrcholů grafu a ostatní prvky matice jsou rovny nule.

Definice. Nechť G je neorientovaný graf s n vrcholy. *Maticí stupňovitosti $D \in \mathbb{R}^{n,n}$* grafu G definujeme matici

$$D = \begin{cases} d_G(v) \text{ pokud } i = j, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Příklad:



Obrázek 11 - Očíslovaný graf G

Graf z obrázku 11 má matici stupňovitosti $D(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.3 INCIDENČNÍ MATICE

„Maticový popis grafu vyhází ze dvou základních vztahů v grafu. Tím prvním je vztah mezi hranou a jejím koncovým vrcholem, který jsme nazvali vztahem incidence. Druhým vztahem je sousednost vrcholů." (Večerka, 2007).

Graf (orientovaný i neorientovaný) lze tedy popsat právě incidenční maticí. Incidenční matice, nebo též označována jako vrcholově-hranová incidenční matice, je matematická reprezentace grafu, která popisuje vztahy mezi hranami a vrcholy. Řádky matice představují právě vrcholy a naopak sloupce matice představují hrany grafu. Prvek matice nám poté říká, zda je daný vrchol incidentní k dané hraně.

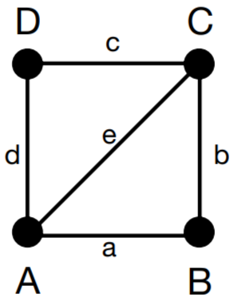
V celé této podkapitole budeme předpokládat, že graf G s vrcholy $V = \{A, B, \dots\}$ a s hranami $H = \{a, b, \dots\}$ neobsahuje smyčky.

4.3.1 INCIDENČNÍ MATICE NEORIENTOVANÉHO GRAFU

Definice. *Incidenční matice* $\mathbb{M}(G)$ neorientovaného grafu G je reálná matice typu $m \times n$, definovaná předpisem $\mathbb{M}(G) = (m_{ij})$, kde

$$(m_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ jestliže } (v_i) \in (h_j), \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Příklad:



Obrázek 12 - Neorientovaný graf G

Graf G, který je zobrazen na obrázku 12, má incidenční matici

$$\mathbb{M}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

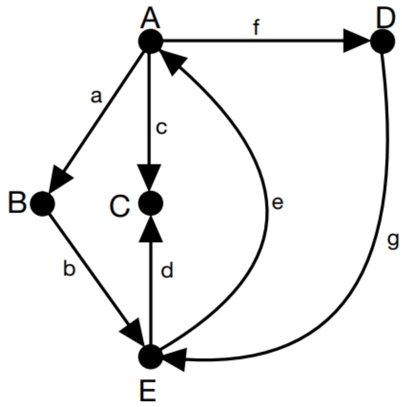
4.3.2 INCIDENČNÍ MATICE ORIENTOVANÉHO GRAFU

Definice. *Incidenční matice* $\mathbb{M}(\vec{G})$ orientovaného grafu $\vec{G}$ je reálná matice typu $m \times n$, definovaná předpisem $\mathbb{M}(\vec{G}) = (m_{ij})$, kde

$$(m_{ij}) = \begin{cases} +1 \text{ pokud hrana } (h_j) \text{vychází z vrcholu } (v_i), \\ -1 \text{ pokud hrana } (h_j) \text{ vchází do vrcholu } (v_i), \\ \ \ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Definice. Matice $\mathbb{M}_R(\vec{G})$ vzniklá z matice $\mathbb{M}(\vec{G})$ vypuštěním posledního řádku se nazývá *redukovaná incidenční matice* orientovaného grafu $\vec{G}$. [14]

Příklad:



Obrázek 13 - Orientovaný graf $\vec{G}$

Graf $\vec{G}$, který je zobrazen na obrázku 13 má incidenční matici

$$\mathbb{M}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a redukovanou incidenční matici $\mathbb{M}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4 MATICE SOUSEDNOSTI

Matice sousednosti je dalším způsobem, jak reprezentovat grafy. Jedná se o intuitivní, čtvercovou matici, kde v i-tém řádku a j-tém sloupci najdeme informaci o vzájemném vztahu mezi vrcholy a to konkrétně o tom, zda jsou vrcholy spojeny hranou (tj. jsou sousední) nebo nikoliv. Z matice sousednosti také snadno určíme stupně vrcholů v grafu. [14]

4.4.1 MATICE SOUSEDNOSTI NEORIENTOVANÉHO GRAFU

Definice. *Maticí sousednosti* neorientovaného grafu G o n vrcholech s daným očíslováním rozumíme matici $\mathbb{S}(G) = (s_{ij})$ řádu n, takovou že:

$$(s_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ je} - \text{li } (v_i, v_j) \in H(G), \\ 0 \text{ v opačném případě,} \end{cases}$$

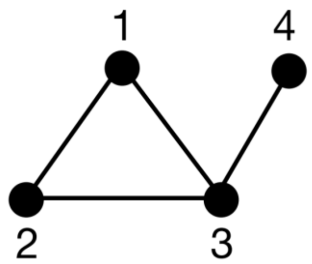
pro $i, j = 1, \dots, n$.

Z definice tedy vyplývá, že pokud existuje hrana z vrcholu i do vrcholu j, zapíšeme do matice na příslušnou pozici (i,j) číslo 1. V opačném případě, tedy pokud taková hrana neexistuje, zapíšeme číslo 0.

Protože u neorientovaných grafů platí, že hrana mezi vrcholy i a j je v ekvivalentní s hranou mezi vrcholy j a i, je matice sousednosti vždy symetrická. Součet čísel v i-tém řádku (v i -tém sloupci) matice je rovna stupni vrcholu i.

V literatuře se setkáváme i s definicí, že pro neorientovaný graf formulujeme matici sousednosti $\mathbb{S}(G)$ jako matici sousednosti jeho symetrické orientace, neboli orientovaný graf, který vznikne, pokud každou neorientovanou hranu nahradíme dvojicí protichůdných orientovaných hran. [11]

Příklad:



Obrázek 14 - Očíslovaný neorientovaný graf G

Matice sousednosti ke grafu G, který je zobrazen na obrázku 14 je

$$\mathbb{S}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

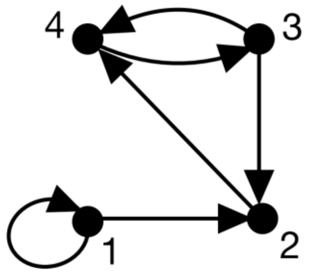
4.4.2 MATICE SOUSEDNOSTI ORIENTOVANÉHO GRAFU

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf o n vrcholech s daným očíslováním. *Maticí sousednosti* grafu $\vec{G}$ rozumíme matici $\mathbb{S}(\vec{G}) = (s_{ij})$ řádu n, takovou, že:

$$(s_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ je} - \text{li } (v_i, v_j) \in H(\vec{G}), \\ 0 \text{ v opačném případě.} \end{cases}$$

pro $i, j = 1, \dots, n$.

Příklad:



Obrázek 15 - Očíslovaný orientovaný graf $\vec{G}$

Matice sousednosti grafu $\vec{G}$, který je zobrazen na obrázku 15 má matici sousednosti

$$\mathbb{S}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

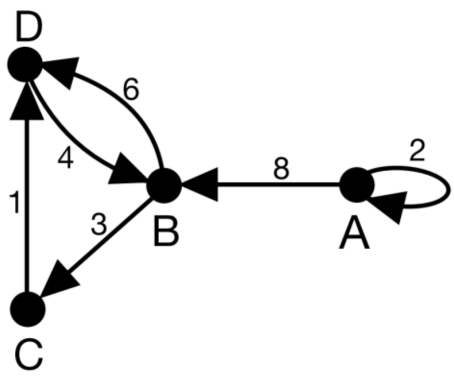
Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf, w jeho hranové ohodnocení. Potom matici

$\mathbb{W}(\vec{G}) = (w_{ij})$ definovanou předpisem:

$$(w_{ij}) = \begin{cases} w(ij) \text{ pokud } (ij) \in H(\vec{G}), \\ 0 \text{ jinak,} \end{cases}$$

nazveme *váženou maticí sousednosti* ohodnoceného orientovaného grafu $(\vec{G}, w)$.

Příklad:



Obrázek 16 - Očíslovaný orientovaný graf $\vec{G}$

Vážená matice sousednosti ohodnoceného orientovaného grafu $(\vec{G}, w)$ z obrázku 16 je

$$\mathbb{W}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

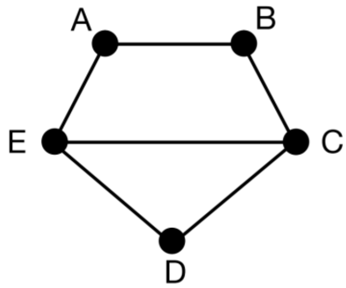
4.4.3 LAPLACEOVA MATICE SOUSEDNOSTI

Definice. Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. *Laplaceova matice* řádu n grafu G je definována jako matice $\mathbb{L}_G = (l_{ij})$, ve kterém

$$(l_{ij}) = \begin{cases} d_G(v) \text{ pokud } i = j, \\ -1 \text{ pokud } (i,j) \in H(G) \text{ a } i \neq j, \\ \ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Z definice je jasné, že $\mathbb{L} = \mathbb{L}^T$, tj. že Laplaceova matice sousednosti je symetrická a součet prvků v každém řádku (i sloupci) je roven 0. Další vlastností této matice je, že její determinant je roven 0. [14]

Příklad:



Obrázek 17 - Graf G

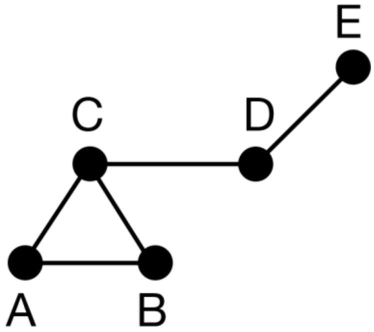
Laplaceova matice grafu G z obrázku 17 je $\mathbb{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Laplaceova matice neorientovaného grafu je také dána vztahem $\mathbb{L}(G) = A^T A$, kde A je nějaká její orientovaná incidenční matice grafu G.

Laplaceovu matici $\mathbb{L}$ také můžeme definovat pomocí matice stupňovitosti D a matice sousednosti $\mathbb{S}$.

Definice. Nechť G je neorientovaný graf, D je jeho matice stupňovitosti a $\mathbb{S}$ matice sousednosti. Matici $\mathbb{L}(G) = D(G) - \mathbb{S}(G)$ nazveme Laplaceovu maticí grafu G.

Příklad:



Obrázek 18 - Graf G

Matice stupňovitosti grafu z obrázku 18 je matice $D(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matice sousednosti $\mathbb{S}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Laplaceovu matici tedy vypočteme podle definice následovně:

$$\mathbb{L}(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5 DISTANČNÍ MATICE

Distanční matice je opět čtvercová matice, která slouží k určení vzdálenosti mezi vrcholy grafu. Obsahuje informace o nejkratších cestách mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu. Pokud existují izolované nebo nespojené vrcholy, vzdálenosti mezi nimi se obvykle reprezentují jako nekonečno (nebo jiný symbol). [14]

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf. Čtvercová matice $\mathbb{D}(\vec{G})$ řádu n, definovaná předpisem $\delta_{ij} = d_{\vec{G}}(v_i, v_j)$ se nazývá *distanční matice grafu* $\vec{G}$.

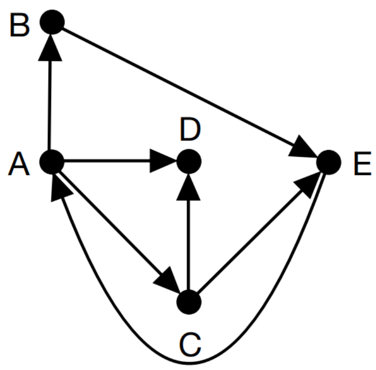
$\delta_{ij} = d_{\vec{G}}(v_i, v_j)$ je vlastně vzdálenost vrcholů v_i a v_j. Prvek $d_{\vec{G}}(u_i, u_j)$ distanční matice $\mathbb{D}(\vec{G})$ je nejmenší mocnina k, pro kterou je prvek na pozici (i,j) v matici sousednosti $(\mathbb{S}(\vec{G}))^k$ nenulový.

Poznámka. Distanční matice neorientovaného grafu je definována jako distanční matice jeho symetrické orientace daného grafu. [11]

Při určování distanční matice grafu $\vec{G}$ budeme pracovat s maticí sousednosti orientovaného grafu $\mathbb{S}(\vec{G})$, kterou jsme si již definovali v předchozí podkapitole, a jejími mocninami. Pro stanovení vzdálenosti dvou vrcholů budeme hledat nejnižší mocninu matice sousednosti, kde na příslušné pozici je nenulové číslo.

<u>Příklad:</u>

Máme zadaný graf $\vec{G}$:



Obrázek 19 - Graf $\vec{G}$

Matice sousednosti grafu $\vec{G}$, který je vyobrazen na obrázku 19 je

$$\mathbb{S}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice sousednosti $\mathbb{S}(\vec{G})$ můžeme určit některé prvky v matici distanční $\mathbb{D}(\vec{G})$, a to tak, že na hlavní diagonálu zapíšeme 0 a za nenulové prvky v matici sousednosti dosadíme 1:

$$\mathbb{D}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & . & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & . & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & \cdot & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále spočítáme druhou mocninu matice sousednosti:

$$\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a opět určíme další prvky distanční matice, a to tak, že číslo 2 doplníme na pozici, kde se v matici $\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^2$ objevilo nenulové číslo, konkrétně tedy: $\mathbb{D}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \cdot & 2 & 1 \\ 2 & \cdot & 0 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Postupujeme obdobně i s třetí mocninou:

$$\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a určíme zbylé prvky distanční matice, tentokrát ale na pozici, kde se v matici $\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^3$ objevilo nenulové číslo, dosadíme číslo 3.

Vznikne nám tedy matice $\mathbb{D}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jelikož nám stále některé prvky distanční matice chybí, spočítáme další mocninu matice sousednosti:

$$\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož má graf $\vec{G}$ pět vrcholů, je zbytečné počítat vyšší mocninu matice $\mathbb{S}(\vec{G})$.

Obecně tedy při určování distanční matice $\mathbb{D}(\vec{G})$ počítáme nejvýše $n-1$ mocninu matice $\mathbb{S}(\vec{G})$, protože každá konečná vzdálenost dvou vrcholů v grafu o n vrcholech může být nejvýše právě $n-1$.

Čtvrtý řádek matice $\left(\mathbb{S}(\vec{G})\right)^4$ v našem příkladu je opět celý nulový (tj. neexistuje žádná hrana, pro kterou by byl vrchol D vrcholem počátečním), dosadíme tedy za tyto prvky do distanční matice ∞.

Distanční matice zadaného grafu na obrázku 19 je tedy $\mathbb{D}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.6 ω-DISTANČNÍ MATICE

ω-distanční matice, nebo také matice vážených vzdáleností, slouží k zachycení vážených vzdáleností všech dvojic vrcholů v ohodnoceném orientovaném grafu. Jedná se o obdobu distanční matice.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je ohodnocený orientovaný graf, potom matici $\mathbb{D}^{\omega}(\vec{G})$ definovanou předpisem $\delta_{ij}^{\omega} = d_{\vec{G}}^{\omega}(v_i, v_j)$ nazveme *ω-distanční maticí grafu $\vec{G}$*.

K nalezení ω-distanční matice $\mathbb{D}^{\omega}(\vec{G})$ si musíme ještě navíc definovat matici $\mathbb{D}_0(\vec{G})$ předpisem:

$$\delta_{ij}^{0} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i = j, \\ \infty \text{ pro } i \neq j, (i,j) \neq H(\vec{G}), \\ w_{ij} \text{ pro } i \neq j, (i,j) = H(\vec{G}). \end{cases}$$

Také je potřeba si definovat následující operace:

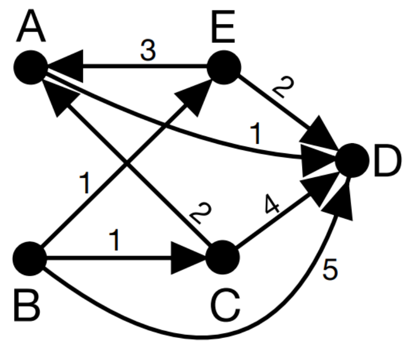
$$a \oplus b = min\{a, b\},$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Samozřejmě zde platí, že $min\{a, \infty\} = a, a + \infty = \infty + a = \infty$ a $\infty + \infty = \infty$.

k-tou mocninu matice $\mathbb{D}_0(\vec{G})$, kterou vypočítáme pomocí těchto operací značíme $\mathbb{D}_0^{(k)}$. S výpočtem mocnin matice $\mathbb{D}_0(\vec{G})$ skončíme, když $\mathbb{D}_0^{(r)}(\vec{G}) = \mathbb{D}_0^{(r+1)}(\vec{G})$, neboli když se dvě následující mocniny rovnají. Potom matice $\mathbb{D}^{\omega}(\vec{G}) = \mathbb{D}_0^{(r+1)}(\vec{G})$, přitom rovnost nastává nejpozději pro $r = n - 1$.

Příklad:



Obrázek 20 - Ohodnocený orientovaný graf $\vec{G}$

Nejprve určíme váženou matici sousednosti grafu z obrázku 20:

$$\mathbb{W}(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

ze které si následně vytvoříme matici $\mathbb{D}_0(\vec{G})$, tedy$\mathbb{D}_0(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dále vypočítáme mocniny matice $\mathbb{D}_0(\vec{G})$:

$$\mathbb{D}_0^2(\vec{G}) = \mathbb{D}_0(\vec{G}) \otimes \mathbb{D}_0(\vec{G}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{D}_0^3(\vec{G}) = \mathbb{D}_0^2(\vec{G}) \otimes \mathbb{D}_0(\vec{G}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $\mathbb{D}_0^3(\vec{G}) = \mathbb{D}_0^2(\vec{G})$, známe ω-distanční matici.

Tedy $$\mathbb{D}^\omega(\vec{G}) = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 PERMUTACE NA MNOŽINĚ

Posledním způsobem využití matic, které si v této práci uvedeme, je možnost využití k zápisu permutací na konečné množině M. [4]

Definice. *Permutací Π na množině $M = \{1, 2, \dots, n\}$* rozumíme každé prosté zobrazení množiny M na ni samu. Permutaci Π budeme zpravidla zapisovat v tzv. základním tvaru, tj. ve tvaru matice

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix},$$

kde $\Pi(i) = (r_i)$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Je-li $s_1, s_2, \dots, s_n$ libovolné pořadí prvků $1, 2, \dots, n$ a $\Pi(s_i) = (t_i)$, pro $i = 1, 2, \dots, n$, můžeme tutéž permutaci zapsat v tzv. obecném tvaru

$$\Pi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Prvek $r \in M$ nazýváme *samodružným prvkem* permutace Π, jestliže $\Pi(r) = r$. V opačném případě nazýváme prvek r *nesamodružným*. [3]

Množina $M = \{1, 2, \dots, n\}$ má právě $n!$ navzájem různých permutací.

Dále můžeme rozlišovat různé druhy permutací, jako je permutace identická, jednotková nebo inverzní.

Definice. Permutaci I množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme *identickou* nebo *jednotkovou*, je-li každý prvek množiny M samodružným prvkem permutace I. Permutaci

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

nazýváme *inverzní permutací* k permutaci $\Pi = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$.

Definice. Jsou-li

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \text{ a } \Pi_2 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

dvě permutace množiny M, pak permutaci

$$\Pi = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

nazýváme součinem permutací Π_1 a Π_2. Značíme $\Pi = \Pi_2\Pi_1$.

Příklad:

Máme zapsat všechny permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ v obecném tvaru a určit samodružné prvky jednotlivých permutací. Permutace zadané množiny M zapíšeme maticemi následovně:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z takto zapsaných permutací vyplývá, že všechny prvky dosažené v permutaci Π_1 jsou samodružné. U permutace Π_2 je samodružný prvek 1, Π_3 je samodružný prvek 2 a u permutace Π_4 je 3. U permutací Π_5 a Π_6 se samodružné prvky nenacházejí.

6 MATEMATICI SPOJENI S TEORIÍ MATIC

Počátky teorie matic sahají až do 2. století př. n. l., kdy matice byly používány hlavně pro řešení soustav lineárních rovnic. Ke skutečnému vývoji teorie matic dochází až koncem 17. století. Řada standardních výsledků teorie matic ale vznikla dlouho před tím, než se matice vůbec staly předmětem matematického výzkumu. [8] [10]

V 19. století se rozvíjí maticová algebra a teorie determinantů. V průběhu 20. století se teorie matic stala klíčovým nástrojem v mnoha oborech, jako například ve fyzice, informatice, ekonomii či inženýrství. S nástupem počítačů a výpočetní techniky se potom teorie matic stává ještě významnější. [6]

Existuje mnoho významných matematiků, kteří jsou spojení právě s teoriemi matic a přispěli k jejímu rozvoji. V následujících podkapitolách jsou uvedeni jedni z nejznámějších a hlavně nejvýznamnějších matematiků spojených s teoriemi matic. Jedná se pouze o výběr matematiků, kteří v této oblasti zanechali významné stopy. [2]

6.1 TAKAKAZU SEKI KOWA

Takakazu Seki Kowa (1642–1708) byl japonský matematik, který položil základy japonské matematiky a přispěl k rozvoji matematických technik a metrik. Co se teorie matic týče, jako jeden z prvních zapisoval matice jako tabulku a řešil i jednodušší determinanty, aniž by je jakkoliv pojmenoval.

6.2 GABRIEL CRAMER

Švýcarský matematik, Gabriel Cramer (1704–1752) je známý především díky Cramerovu pravidlu, které popsal ve své práci „*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrique*s“ roku 1750, podle kterého se řešení soustav lineárních rovnic hledá pomocí determinantů matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovnic.

6.3 JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nazývaný „kníže matematiky“, byl německý matematik, fyzik, vědec a astronom. Zabýval se především imaginárními a komplexními čísly a řešením soustav rovnic o několika neznámých pomocí algoritmu nazývaného Gaussova eliminační metoda. Ta se poprvé objevuje v práci *„Devět kapitol o matematickém umění“.* Gauss v této práci popsal systematickou metodu pro řešení soustavy šesti lineárních rovnic, která přesně odpovídá Gaussově eliminační metodě, jak jí známe dnes. V 19. století rozvinul teorii determinantů a zavedl determinant jako číselnou hodnotu spojenou s maticí.

6.4 PIERRE FRÉDERIC SARRUS

Pierre Fréderic Sarrus (1798–1861) byl francouzský matematik, který se specializoval na lineární algebru. Je známý především díky svému objevu pravidla pro výpočet determinantu matice typu 3×3, které známe jako *Sarrusovo pravidlo*. Toto pravidlo publikoval v roce 1833 ve své práci *„Éléments d´algébre“.*

6.5 JAMES JOSEPH SYLVESTER

James Joseph Sylvester (1814–1897) byl významný anglický matematik. Byl jedním z předních matematiků své doby a přispěl k rozvoji mnoha oblastí matematiky, včetně právě teorie matic. Sylvester zavádí samotný termín matice a to roku 1850 v díle *On a New Class of Therems*. Dost často spolupracoval s Arhurem Cayleyem, konkrétně na rozvoji algebry. Společně předložili mnoho nových definic a pojmů, které přispěly k rozvoji teorie matic.

6.6 ARTHUR CAYLEY

Arthur Cayley (1821–1895) byl také anglický matematik, jehož nejdůležitější práce spadají do oblasti maticové algebry, neeukleidovské geometrie a n-dimenzionální geometrie. Zavedl maticové zápisy a operace, které jsou dnes běžně používané. Definoval operace s maticemi, jako sčítání, násobení a maticové násobení, inverzní matici a determinanty. Jeho práce v oblasti teorie matic měla velký vliv nejen na rozvoj lineární algebry, ale i na její aplikace ve fyzice a dalších oborech. Cayley nejen že rozvinul algebraickou teorii matic, ale také ji použil k analýze vztahů mezi vrcholy a hranami grafu. Jeho práce tedy přispěla k vzájemné provázanosti těchto oblastí matematiky, které dále nacházejí uplatnění v různých disciplínách.

6.7 FERDINAND GEORG FROBENIUS

Ferdinand Georg Frobenius (1849–1918) byl německý matematik, který se proslavil především díky práci v oblastech diferenciálních rovnic, teorie grup a teorie čísel. Je autor věty o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, a to v závislosti na hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Napsal práci *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen,* která obsahuje některé zajímavé poznatky o maticích. Například zde nalezneme definici hodnosti matice.

6.8 CUTHBERT EDMUND CULLIS

Cuthbert Edmund Cullis (1868–1954) je známý svými příspěvky v oblasti lineární algebry a teorie matic. Byl první matematik, který v roce 1913 zavedl pro matice závorkovou notaci a také notaci $A = (a_{ij})$ k reprezentaci matice.

ZÁVĚR

Předložená bakalářská práce shrnuje informace o maticích a jejich využití v různých oblastech matematiky. Vzhledem k obsáhlosti tohoto tématu, tato práce ani zdaleka nevystihuje všechny možné aplikace matic. Bakalářská práce obsahuje přehled definic různých typů matic, jejich vlastnosti a možnosti jejich využití, konkrétně v oblasti řešení soustav lineárních rovnic o n neznámých, teorii grafů a permutací na množině. Dále tato práce obsahuje řešené příklady, které by měly čtenářům pomoci jednotlivá témata lépe pochopit.

Hlavním cílem bakalářské práce bylo shromáždit definice a pojmy z teorie matic a poukázat na vybrané matematické obory, v nichž se dají matice prakticky a efektivně využít. Tato práce, jakožto ucelený soubor poznatků, by díky své první kapitole mohla sloužit jako obecný úvod do studia matic.

Jak již bylo zmíněno, tato práce se zaměřovala jen na vybrané možnosti užití matic, které se ale dají uplatnit i v jiných matematických oblastech, jako například v oblasti vektorových prostorů, teorii her nebo v analytické geometrii při studiu afinních prostorů a podprostorů, eukleidovských prostorů, či kuželoseček a kvadrik. Všestrannost a schopnost matic modelovat a analyzovat různé systémy jsou důvodem, proč jsou tak důležitým nástrojem v mnoha vědeckých a technických disciplínách. Teorie matic se tedy dále využívá například v oblasti fyziky, kde se matice objevují při modelování fyzikálních systémů, v oblasti informatiky při analýze a zpracování dat či při grafickém zobrazení. Dále se teorie matic využívá v oblasti ekonomie, inženýrství, biologie a chemie.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce je zaměřena na matice a jejich využití. Práce je členěna do jednotlivých kapitol podle obsahu. V první části práce jsou představeny základní pojmy a definice spojené s teorií matic. Následující kapitoly jsou potom věnovány vybraným oblastem matematiky, které využívají teorii matic. Jedná se např. o determinanty matic, soustavy lineárních rovnic o n neznámých, teorie grafů a permutace na množině. Obsahem všech těchto kapitol je kromě samotné teoretické části i část praktická, a to v podobě vypočítaných příkladů, které se vážou na danou problematiku. Poslední část práce se zaměřuje na historii a významné matematiky, kteří přispěli k rozvoji teorii matic.

This bachelor's thesis is focused on matrices and their use. The work is divided into individual chapters according to the content. In the first part of the work, the basic terms and definitions associated with matrix theory are presented. The following chapters are then devoted to selected areas of mathematics that use matrix theory. These are, for example, determinants of matrices, systems of linear equations about unknowns, graph theory and permutations on sets. In addition to the theoretical part, the content of all these chapters also includes a practical part in the form of calculated examples that are related to the given issue. The last part of the thesis focuses on the history and important mathematicians who contributed to the development of matrix theory.

SEZNAM LITERATURY

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra.* 5. vyd. Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-378-5

[2] BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry*. 1. vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 978-80-7378-036-4

[3] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie.* 2. vyd. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9

[4] FIEDLER, Miroslav. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. Vyd. 1. Praha: SNTL, 1981. ISBN 90-247-2957-2

[5] JONES, Christopher a CLAMP Peter. *Matematika na dlani.* 1. vyd. Bratislava: Príroda a. s., 1999. ISBN 80-07-01011-4

[6] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny vě*d. 2. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

[7] NEČAS, Jiří. *Grafy a jejich použití.* 1. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1978.

[8] O'CONNOR, John J. a ROBERTSON, Edmund F. *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland [cit. 2023-06-12]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

[9] OLŠÁK, Petr. *Úvod do algebry, zejména lineární.* 2. vyd. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2013. ISBN 978-80-01-0529-4

[10] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. III. část. Historie matematiky pro učitele*. 1. vyd. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-327-8.

[11] SEDLÁČEK, Jiří. *Úvod do teorie grafů.* 3. vyd. Praha: Academia, 1981.

[12] TLUSTÝ, Pavel. *Lineární algebra.* 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2001. ISBN 80-7040-467-1

[13] TLUSTÝ, Pavel. *Lineární algebra a její aplikace.* 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7040-650-X

[14] VEČERKA, Arnošt. *Grafy a grafové algoritmy.* [online], [cit. 2023-06-12]. Dostupné z: https://phoenix.inf.upol.cz/esf/ucebni/Grafy_a_grafove_algoritmy.pdf

[15] ZAHRADNÍK, Miloš a MOTL, Luboš. *Pěstujeme lineární algebru.* 3. vyd. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2002. ISBN 80-246-421-3

SEZNAM OBRÁZKŮ