MATEMATICKÁ „OMEZENÍ“ VE VÝUCE FYZIKY
aneb „Jak daleko“ lze zajít s matematikou při výuce fyziky

Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Abstrakt
Text je příspěvkem k diskusi o možných mezích při využívání matematického aparátu ve výuce fyziky na středních školách. Soustředí se zejména na problematiku vektorového počtu, kde zřejmě převládají názory učitelů, že použití skalárního, a tím spíš vektorového součinu, ve výkladu fyziky na střední škole není vhodné – jednalo by se tak o neefektivní formalismus, který u studentů nevede k pochopení. Náš příspěvek s tímto názorem polemizuje s poukazem na fakt, že záleží na způsobu výkladu aparátu.

MATHEMATICAL OBSTRUCTIONS IN PHYSICS EDUCATION

Abstract
The paper contributes to discussions on possible limitations of using mathematical tools in teaching Physics on secondary schools. It is focused especially to vector calculus, where dominate teacher´s opinions that the use of scalar and vector products in teaching secondary school Physics is inconvenient, because it is an ineffective formalism that cannot by understood by students. We argue with this opinion highlighting the fact that the mode of explanation of mathematics is important.

Vektory a jejich součiny ve výuce fyziky

Výuka fyziky se bez vektorů a počítání s nimi neobejde ani na základní škole. Jak jinak než užitím vektorové algebry (vektorového počtu) pracovat ve výuce s veličinami, jež jsou vektorové ve své podstatě? Žákům ani studentům obvykle nečiní potíže charakteristika vektorové veličiny jako veličiny určené velikostí, směrem (popřípadě ještě orientací, pokud informace o orientaci není obsažena přímo v definici směru jako orientované přímky) a působištěm – předzvěst pojmů *vázaný vektor* a *vektorové pole*.

Na základní i střední škole student běžně pracují se základními operacemi vektorového prostoru – sčítáním a násobením (reálným) skalárem, avšak převážně graficky, aniž si tedy uvědomují, že se jedná o operace lineární algebry. Velmi dobře je výklad týkající se těchto operací, konkrétně pod názvem „Skládání a rozklad sil“, zpracován v úvodní kapitole učebnice [1]. Jedná se dokonce o vyjádření vektorů v rovině jako lineárních kombinací obecných bází, odkud by byl již jen malý krok (který ovšem autoři již neučinili) k práci s vektory, jejich průměty a složkami v ortonormálních bázích. Odtud je pak už jen malý krok k počítání se skalárním a vektorovým součinem právě při vyjádření vektorů v ortonormálních bázích.

Skalární součin je nezbytný například při výkladu pojmu práce a výkonu síly po křivce, vektorový součin pak při výkladu tzv. „momentové věty“ (moment síly), druhé impulsové věty (moment hybnosti, moment síly vzhledem k bodu), problém existence či nalezení působiště výslednice soustavy sil jakožto jediné „náhradní“ síly, jejíž vliv na pohyb tělesa z hlediska obou impulsových vět je stejný jako účinek zmíněné soustavy sil, a nakonec některých silových zákonů (Lorentzova síla). Regulérní matematické definice a výklad uvedených pojmů se ve středoškolských učebnicích obcházejí, resp. názorně zavádějí slovním výkladem, který ovšem ne vždy umožňuje vystihnout všechny relevantní situace (viz např. [1] a hlavní text [2]), nebo jsou uvedeny v poznámce a dále nevyužity, zůstávajíce tak opravdu na úrovni pouhého formalismu (viz např. [3]), jak argumentují zkušení učitelé fyziky a autoři učebnic a lze s nimi v tomto bodě jen souhlasit. Za pozitivní výjimku lze považovat velmi pěkný výklad pohybu nabité částice v homogenním magnetickém poli bez použití matematické definice vektorového součinu na CD, které je, bohužel vinou neustálých ministerských reforem a tlaku na redukci časového rozsahu výuky fyziky a obsahová omezení v rámci RVP jen jakýmsi „nepovinným“, či nadstavbovým doplňkem učebnice [2].

V následujících částech se pokusím ukázat, že v situaci, kdy studenti pochopí základní algebraické operace s vektory a rozklad vektorů do báze (vzor viz např. v [1]), je schůdné zvládnout problematiku skalárního a vektorového součinu na střední škole i v matematické podobě.

Práce a moment síly ve středoškolských učebnicích

Na střední škole se studenti s pojmy práce a moment síly setkají poprvé v mechanice, vyučované v prvním ročníku tzv. „vyššího“ gymnázia (viz např. učebnici [1] jako významného reprezentanta gymnaziálních a obecně středoškolských učebnic fyziky). Pro bližší představu citát z [1] – nejprve k pojmu *práce* (stranou ponechme nedostatky):

Nejjednodušší je vztah pro práci W, jestliže se těleso přemísťuje po přímce působením konstantní síly ***F*** *rovnoběžné s trajektorií tělesa. Urazí-li těleso působením síly o velikosti F dráhu s, je práce definována vztahem W = Fs.*

Uvažujme nyní kuličku na hladké vodorovné desce, po níž se kulička může pohybovat bez tření. Na kuličku působí Země tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$ *ve svislém směru. Uvedeme-li kuličku na desce do pohybu, bude se pohybovat ve vodorovném směru stálou rychlostí. Tíhová síla v tomto případě nekoná práci, protože je kolmá k vodorovné trajektorii kuličky. Kulička se nepohybuje ve směru tíhové síly.*

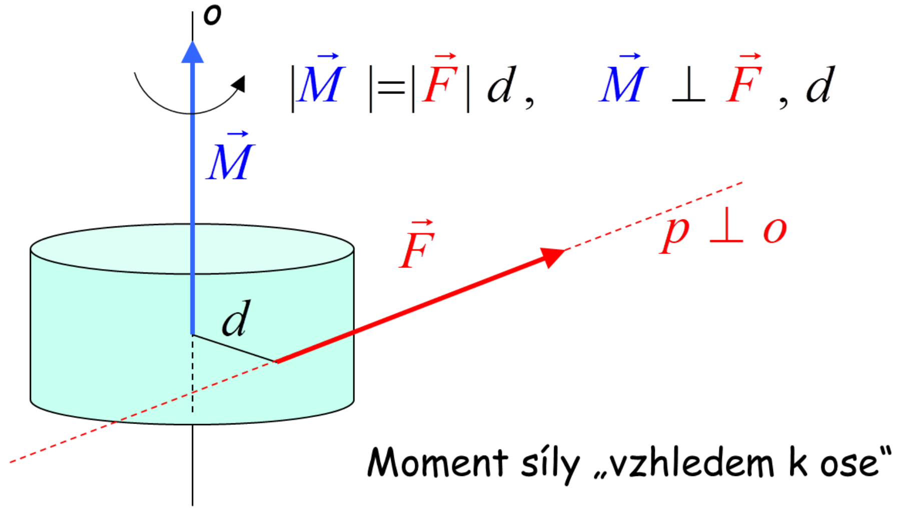
Jestliže těleso urazí působením konstantní síly o velikosti F dráhu s, přičemž síla svírá s trajektorií stálý úhel α, vykoná síla mechanickou práci danou vztahem $W = Fs\cos\alpha$.

Z této definice je zřejmé pouze to, kdy se „práce nekoná“, následuje pak návod na výpočet vykonané práce, u níž si student sotva uvědomí, že je správná pouze v případě, že trajektorií bodu se (implicitně) rozumí přímka, jinak by došlo ke sporu s požadavkem *konstantní síly, která svírá s trajektorií stálý úhel*.

O momentu síly se v [1] a [3] hovoří pouze ve vztahu k pevné ose otáčení, o momentu hybnosti se nehovoří vůbec, je zmiňován pouze „otáčivý účinek“ síly/sil. Opět citát:

Uvažujme těleso, které je v inerciální soustavě otáčivé kolem nehybné osy. Ze zkušenosti víte, že chceme-li takové těleso roztočit, musíme na ně působit silou. Budeme uvažovat jen případy, kdy je působící síla kolmá k ose otáčení.“

Moment síly ***M*** *je vektorová fyzikální veličina. Velikost momentu síly je rovna součinu velikosti působící síly* ***F*** *a kolmé vzdálenosti d vektorové přímky od osy otáčení (obr. 6-4): M = Fd. Vzdálenost d se nazývá rameno síly. … Vektor momentu síly* ***M*** *leží v ose otáčení a je současně kolmý k síle i k ramenu síly. Směr momentu síly určíme podle* *pravidla pravé ruky: položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukáže směr momentu síly (obr. 6-6).*



Obr. 1: K slovní definici momentu síly vzhledem k ose.

Tato slovní definice sice dává představu o tom, co to je moment síly, a umožňuje také vypočítat jeho velikost a určit orientovaný směr, zahrnuje však poměrně silná omezení, která, ačkoli jsou v textu zmíněna, neumožní studentovi představit si situaci, která by je nezahrnovala:

1) týká se pouze rotace tělesa kolem pevné osy (šla by přitom vztáhnout i na osu okamžitou),
2) předpokládá, že síla je kolmá k ose otáčení,
3) neumožňuje nahlédnout, že se ve skutečnosti jedná o průmět momentu síly vztaženého k jistému bodu do směru osy otáčení.

Definice se navíc opírá o pojem „ramene síly" jako vzdálenosti nositelky síly (přímky, v níž vázaný vektor síly leží) od osy otáčení. Při praktickém výpočtu by tedy šlo o analytický geometrický problém – určení vzdálenosti mimoběžek. A ten nemusí být, resp. nebude pro studenty prvního ročníku střední školy, dobře schůdný.

Nyní k definici momentu z [3]:

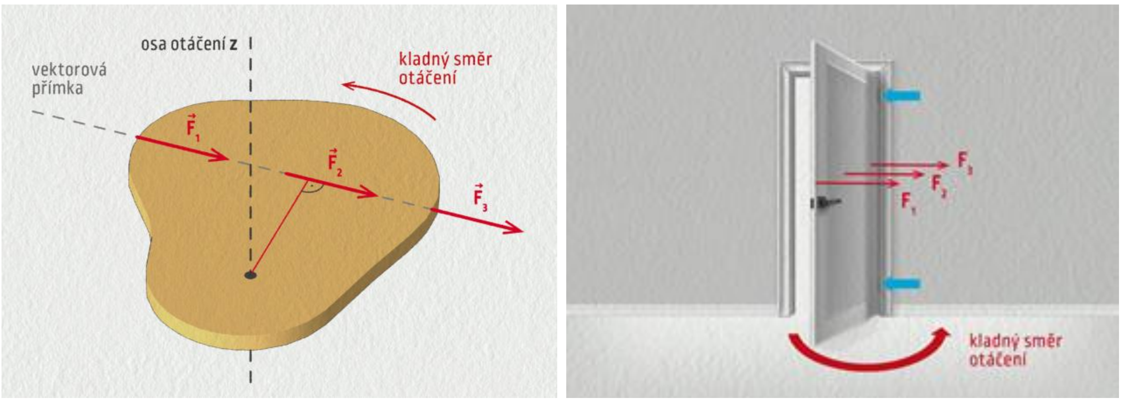
Moment síly je fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly kolem dané osy. ... Pokud chceme porovnávat účinky více sil na otáčení tělesa, musíme jejich momenty vždy vztahovat k téže ose – proto je praktické indexem vyznačit, o kterou osu se jedná, v našem případě osa z, tedy M_z.

$$M_z = \pm rF$$

M_z ... moment síly vzhledem k ose otáčení z

r ... rameno síly = kolmá vzdálenost osy otáčení od přímky v níž leží síla

F ... velikost síly



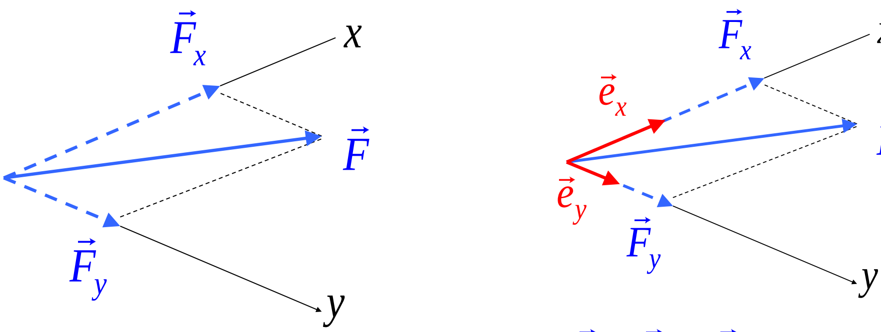
Obr. 2: Ilustrace definice momentu síly – převzato z [3].

Tato definice vychází z předpokladu stejných omezení a komplikací (vzdálenost dvou mimoběžek) jako [1], s tím rozdílem, že se o nich, ke škodě věci, nezmiňuje a „tak nějak" je předpokládá, možná na základě názorných a graficky přívětivých obrázků. Samotné obrázky ovšem, obecně vzato, k pochopení podstaty věci nevedou.

Z předchozích ukázek je vidět, jak obtížný, nedokonalý a místy až zavádějící je výklad důležitých fyzikálních pojmů jen slovně a názorně bez matematicky solidního zázemí. V dalším se pokusím ukázat vhodnost přinejmenším doplnění slovních a obrázkových definic příslušným matematickým zázemím.

Rozklad vektoru do složek v bázi

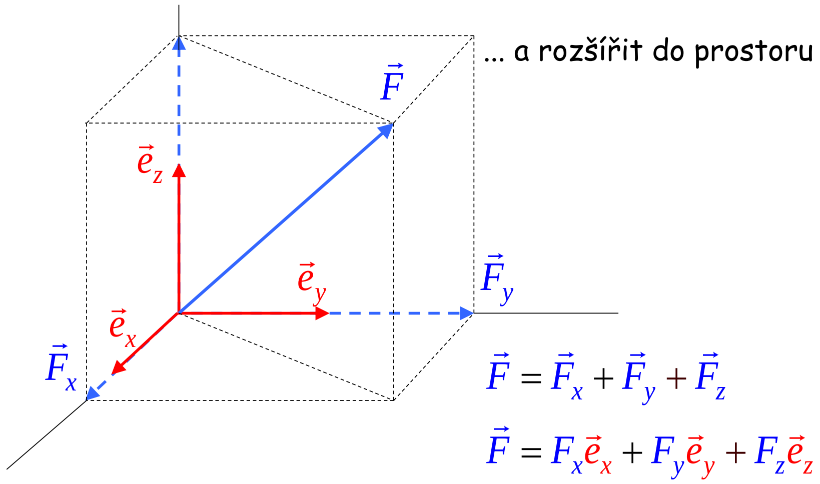
Jak je výše uvedeno, velmi dobrý základ pro práci s vektory v bázích dává učebnice [1] hned v jedné z úvodních kapitol. Předkládá grafické postupy skládání sil a rozkladu síly do dvou obecných směrů v rovině, čímž v podstatě názorně supluje lineární algebru. Stačilo by jen doplnit pojem lineární kombinace, rozklad speciálně do ortonormální báze (což studenti znají z geometrie nebo z úloh o konstrukci grafů) a zobecnit situaci na trojrozměrný případ (vlevo standard [1], vpravo námět k doplnění):



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

Obr. 3: Rozklad vektoru do dvou směrů a vyjádření jako lineární kombinace báze.



Obr. 4: Rozklad vektoru do ortonormální báze – prostorová situace.

„Algebraické“ počítání s vektory je pak rovněž názorné, zákony pro počítání s vektory (komutativní a asociativní pro součet a distributivní pro součet a násobení číslem) nebudou/nemohou studentům dělat problém, jednak jsou na ně zvyklí při běžném počítání (s čísly, polynomy, apod.), jednak jde koneckonců o axiomy vektorového prostoru, takže nezbývá, než je jako takové přijmout. Tedy

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$
$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$
$$a(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = a\vec{F}_1 + a\vec{F}_2$$
$$(a+b)\vec{F} = a\vec{F} + b\vec{F}$$

Je to názorné graficky a navíc jde o úplnou analogii s axiomy pro počítání s čísly (*a*, *b*, *c*, *d*, atd.) a proměnnými, za něž lze čísla dosazovat (*x*, *y*, atd.), či jinými objekty (např. polynomy), nezdůvodňují se, jen se studenti přesvědčují, že fungují:

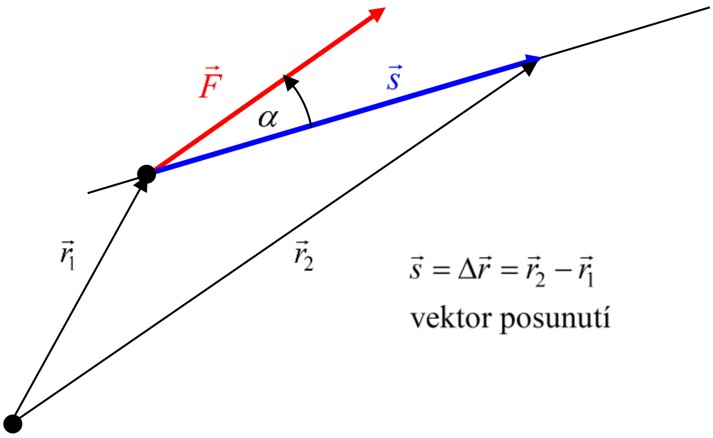
$$(ax_1 + bx_2)(cy_1 + dy_2) =$$
$$= (ac)(x_1y_1) + (ad)(x_1y_2) + (bc)(x_2y_1) + (bd)(x_2y_2) =$$
$$= acx_1y_1 + adx_1y_2 + bcx_2y_1 + bdx_2y_2$$

Základ pro definování skalárního a vektorového součinu je tím položen, středoškolská definice těchto operací samozřejmě musí být názorná a geometrická.

Práce a výkon: skalární součin vektorů

Dobrým začátkem je zavedení pojmu práce konstantní síly, jejíž působiště (hmotný bod) se pohybuje po přímce, zhruba tak, jak je uváděno v učebnicích,

$$W = Fs,\ s = |\vec{s}|\ \text{pro}\ \vec{F} \parallel^{+} \vec{s},\ \vec{s}\ \text{je vektor posunutí}$$
$$W = Fs\cos\alpha\ \text{pro obecný úhel mezi silou a posunutím}$$



Obr. 5: K definici práce síly při posunutí jejího působiště.

Konstatování, že síla kolmá k posunutí nemůže konat práci a vysvětlení na příkladech pak snadno přispěje k závěru, že „na konání práce se podílí pouze kolmý průmět vektoru síly do *orientované* přímky, po níž se působiště síly pohybuje, přičemž orientace této přímky je dána vektorem posunutí $\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Poznámka: Při výkladu definice je nutné zdůraznit *fyzikální hledisko*: jedná se o práci některé (jedné) ze sil, které na hmotný bod působí, nemůže jít o sílu jedinou – při působení jediné konstantní síly není možný přímočarý pohyb s výjimkou situace, kdy je úhel α nulový, nebo roven π. (Toto se jistě hodí se studenty podrobně rozebrat.)

Definici práce lze snadno zobecnit na elementární případ – *elementární práce* ΔW resp. δW, vykonaná silou $\vec{F}$ při elementárním posunutí $\Delta\vec{r}$, resp. $\mathrm{d}\vec{r}$ (tj. fakticky po úsečce), je $\Delta W = F\,|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$, resp. $\delta W = F\,|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha$. Tato poměrně názorná definice již pak snadno může být doplněna definicí skalárního součinu dvou vektorů jako zobrazení přiřazujícího dvěma vektorům číslo následujícím způsobem (fakt, že se jedná o jeden z nekonečně mnoha možných skalárních součinů ve vektorovém prostoru, zůstane na této úrovni studentům samozřejmě utajen):

$$[\vec{u}, \vec{v}] \to \vec{u}\vec{v} = uv\cos\alpha, \quad \alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{R}$$

Pravidla pro počítání se skalárním součinem, konkrétně

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}$$

$$(a\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(a\vec{v}) = a(\vec{u}\vec{v})$$

$$\vec{u}\vec{u} \geq 0, \text{ rovnost } \Leftrightarrow \ \vec{u} = \vec{0}$$

Přičemž první, druhé a čtvrté pravidlo vyplývají přímo z definice, druhé lze dokázat pomocí goniometrie (to asi nikdo provádět nebude), nebo alespoň „ověřit“ graficky. Jednodušší je vyjádřit vektory vstupující do skalárního součinu jako lineární kombinace vektorů ortonormální báze a sdělit pravidla pro počítání, která jsou formálně stejná, jako ta, co studenti běžně provádějí s čísly, funkcemi, polynomy, apod.:

$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$, $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$

$\vec{u}\vec{v} = (u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z)(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) =$ roznásobit = ... =

$= u_x v_x(\vec{e}_x\vec{e}_x) + u_x v_y(\vec{e}_x\vec{e}_y) + u_x v_z(\vec{e}_x\vec{e}_z) + u_y v_x(\vec{e}_y\vec{e}_x) + u_y v_y(\vec{e}_y\vec{e}_y) + u_y v_z(\vec{e}_y\vec{e}_z) +$

$+ u_z v_x(\vec{e}_z\vec{e}_x) + u_z v_y(\vec{e}_z\vec{e}_y) + u_z v_z(\vec{e}_z\vec{e}_z)$

a použít z definice skalární součiny vektorů báze

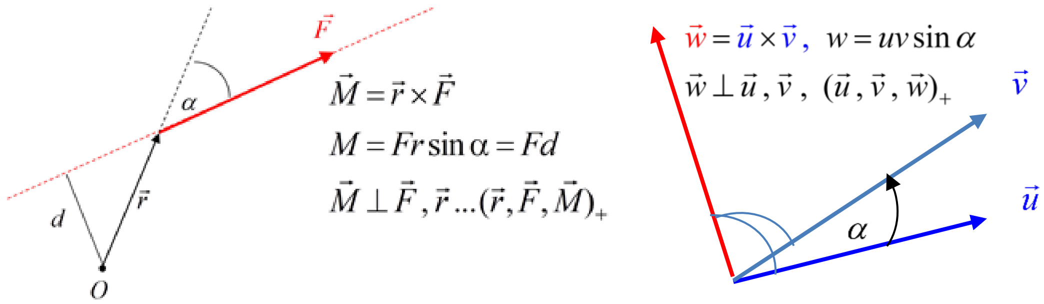
$\vec{e}_x\vec{e}_x = |\vec{e}_x||\vec{e}_x|\cos 0^{\circ} = 1, \vec{e}_y\vec{e}_y = 1, \vec{e}_z\vec{e}_z = 1, \vec{e}_x\vec{e}_y = |\vec{e}_x||\vec{e}_y|\cos 90^{\circ} = 0, \vec{e}_x\vec{e}_z = 0, \vec{e}_y\vec{e}_z = 0$

$\vec{u}\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Domnívám se, že toto „procvičení“ jednoduché definice není složité ani časově náročné a čas tomu věnovaný se vyplatí (například při odvození vztahu pro okamžitý výkon síly $\vec{F}$, $P = \delta W/\mathrm{d}t = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t = \vec{F}\vec{v}$).

Moment síly vzhledem k bodu: vektorový součin vektorů

Obdobně jako poskytl pojem *práce síly po přímce* motivaci pro zavedení skalárního součinu vektorů, poslouží pojem *moment síly vzhledem k ose*, definovaný slovně a obrázkem. Způsob, jakým je uváděn v učebnicích (viz např. [1]) je sice názorný, ale má výše již zmíněná omezení z hlediska obecnosti, možnosti výkladu druhé impulsové věty (jejíž výklad v alespoň zjednodušení podobě pro tuhé těleso, je nezbytný pro pochopení rotačních pohybů), a zejména z hlediska početních řešení alespoň jednoduchých úloh. (Kritičtěji se lze postavit k zavedení momentu síly v [3].) Hlubší pochopení zákonitostí rotačních pohybů, včetně diskuse o častém speciálním případu, rotace tuhého tělesa kolem pevné osy, umožní přiměřený matematický aparát – vektorový součin vektorů.



Obr. 6: K definici momentu síly vzhledem k bodu; vektorový součin.

Nejprve je však vhodné definovat moment síly zcela obecně, tj. *vzhledem k bodu*, pevně zvolenému předem. (Moment síly vzhledem k ose je pak již jen průmětem takto definovaného momentu do směru osy.) Pomůže obr. 6. Moment síly vzhledem k bodu O je vektor $\vec{M}$, který přiřazujeme uspořádané dvojici vektorů $[\vec{r}, \vec{F}]$, kde $\vec{F}$ síla (obecně jedna ze sil) působící na těleso v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$. Vektor $\vec{M}$ je, jako každý vektor, zadán svou velikostí a orientovaným směrem. Veličiny jsou znázorněny v obr. 6, z nějž také názorně vyplývá význam oblíbeného pojmu *rameno síly*. Jeho velikost je jednoduše vzdálenost vztažného bodu od přímky, v níž působí síla (vázaný vektor).

Nyní už stačí určit přímo z definice vektorové součiny jednotlivých dvojic vektorů ortonormální báze a uvést pravidlo pro počítání s vektory vyjádřenými právě v této bázi:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

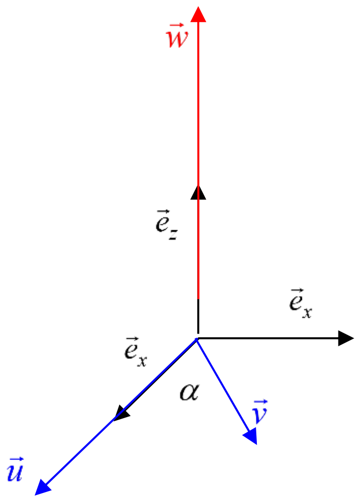
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z\,,\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y\,,\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z) \times (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) =$$

$$= \text{ roznásobit a použít vektorové součiny vektorů báze} =$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)\vec{e}_x + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{e}_z$$

Z výsledku „přečteme“ složky vektorového součinu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, zadaných složkami v ortonormální bázi $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Jako příklad lze uvést výpočet vektorového součinu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ ve speciální poloze (viz obr. 7) jednak pomocí složek, jednak pomocí definice.



$$\vec{u} = u\vec{e}_x\,,\ \vec{v} = (v\cos\alpha)\vec{e}_x + (v\sin\alpha)\vec{e}_y$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u\vec{e}_x) \times ((v\cos\alpha)\vec{e}_x + (v\sin\alpha)\vec{e}_y) =$$

$$= uv\cos\alpha(\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + uv\sin\alpha(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) = (uv\sin\alpha)\vec{e}_z$$

Výpočet pomocí složek odpovídá definici na první pohled.

Obr. 7: Příklad: výpočet vektorového součinu z definice a ze složek v ONB.

Závěrem lze vyjádřit přesvědčení, že obavy z obtížnosti použití vektorových operací k zavádění fyzikálních veličin tam, kde je to funkční, jsou neoprávněné. Jde však samozřejmě o osobní pojetí a při výuce samotné je rozhodující názor a zkušenost každého učitele a jeho odhad momentálních schopností žáků či studentů.

Literatura

1. SVOBODA, E. a M. BEDNAŘÍK, M. ŠIROKÁ: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Dotisk 5., přepracovaného vydání. Prometheus, Praha 2013. (První vydání 1993.)
2. LEPIL, O. a P. ŠEDIVÝ: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7., přepracované vydání. Prometheus, Praha 2017. (První vydání 1992.)
3. KUBERA, M. a T. NEČAS, V. BENEŠ: E-MANUEL. Online učebnice fyziky pro gymnázia. Gymnázium Matyáše Lercha 2022. e-manuel.cz [cit 5. 5. 2023]

Kontaktní adresa

prof. RNDr. Jana Musilová, CSc.
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně
Kotlářská 267/2, 611 37 Brno
E-mail: janam@sci.muni.cz