FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2023

Periodické odezvy nelineárních dynamických systémů

Václav Steinbach[1]

1 Úvod

S každým novým dnem naše Slunce vychází a zapadá. Tento děj se rozhodně udál dnes a doufejme, že se uděje i zítra. Pravidelnost tohoto děje je jeho **periodicita** a doba, po kterou se děj začne znovu opakovat, je jeho **periodou**. Náš svět je protkán periodicitou tudíž její studium je přirozené. V tomto příspěvku se zaměříme na analýzu periodických odezev mechanických systémů s nelinearitami. Jedná se tak o známé lineární soustavy, do kterých bude vždy přidána významná nelinearita a bude sledován projev této nelinerity na kvalitě periodické odezvy.

2 Systém a metody analýzy

Tento příspěvek zkoumá systémy, které jsou popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi druhého řádu uvažované v náledovném tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}_{ext}(t), \tag{1}$$

kde $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou konstantní koefiecientové matice hmotnosti, tlumení a tuhosti v tomto pořadí, n je počet stupňů volnosti, $\mathbf{q}$ je vekor zobecněných výchylek a $\mathbf{f}_{nl}$ spolu s $\mathbf{f}_{ext}$ jsou zobecněné nelineární a budící síly. Rovnice (1) tak vyjadřuje dynamickou rovnováhu lineárních a nelineárních sil na levé straně a budících sil na pravé straně.

2.1 Numerická integrace počáteční úlohy

Před samotným řešením je nutné převést rovnici (1) do stavového prostoru

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_{ext}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right) \end{bmatrix} = \mathbf{W}\left(\mathbf{z}, t\right). \tag{2}$$

Poté je zvolen interval diskrétních časových okamžiků $\langle t_0, t_1, \ldots, t_j \rangle$ ve kterých bude rovnice (2) vyčíslována a je zadána počáteční podmínka $\mathbf{q_0}$. Z této podmínky začíná výpočet následujícíh bodů řešení. Periodické řešení získáme až po vypočtení a odříznutí přechodové odezvy, což je hlavní překážkou této metody. K samotnému výpočtu bývá běžně využíváno volně přístupných řešičů např. *ode45*, *ode23* a další v knihovnách *MATLAB*.

2.2 Metoda střelby

V případě metody střelby jsou periodická řešení okrajové úlohy jsou určena soustavou rovnic

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}(0)) = \mathbf{z}(T) - \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

[1] student navazujícího magisterského studijního programu Aplikovaná mechanika, specializace Dynamika konstrukcí a mechantronika, e-mail: vstein@students.zcu.cz

kde $\mathbf{R}$ značí rezidum rovnice (1). Neznámými jsou počáteční hodnoty $\mathbf{z}(0)$ na začátku periody. Hodnoty na konci periody $\mathbf{z}(T)$ jsou určeny numerickou integrací rovnice (2). Naším cílem je zde najít pozici $\mathbf{q}(0)$ a rychlost $\dot{\mathbf{q}}(0)$ ve stavového prostoru tak, aby $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}(T) = \dot{\mathbf{q}}(0)$ po určité době T.

2.3 Metoda harmonické rovnováhy

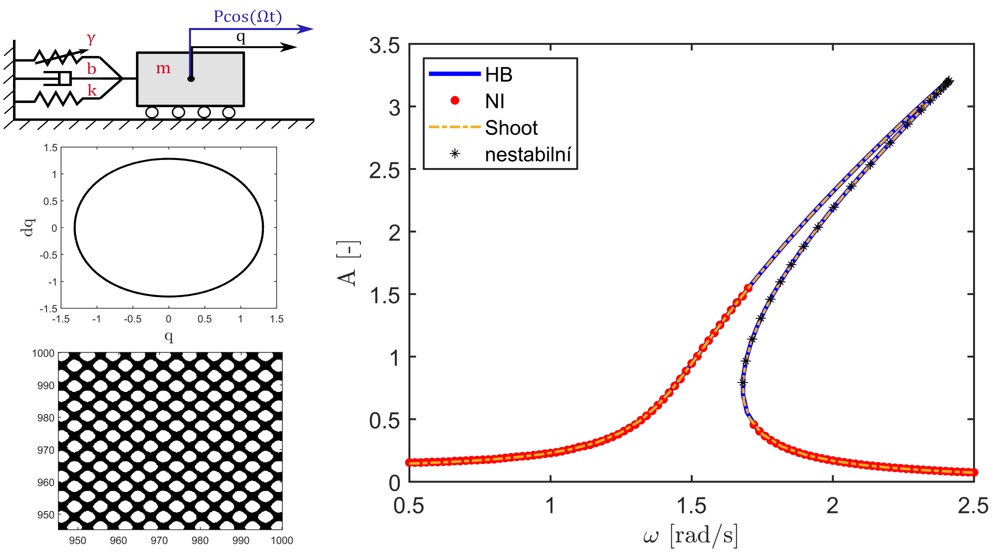
Hledáme aproximaci $\mathbf{q}_h(t, \hat{\mathbf{q}}_H) \approx \mathbf{q}(t)$ T-periodického řešení, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t+T)$ ve tvaru zkrácené Fourierovy řady

$$\mathbf{q}_h(t, \{\hat{q}_k\}) = \hat{q}_0 + \sum_{k=1}^{H} \hat{q}_{2k} \cos(k\Omega t) + \hat{q}_{2k+1} \sin(k\Omega t), \tag{4}$$

kde $\hat{q}_k$ jsou Fourierovy koeficienty. Touto aproximací převedeme rovnici (1) do frekveční oblasti

$$\hat{\mathbf{r}}_H(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) = \mathbf{Z}(\Omega)\hat{\mathbf{q}}_H + \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\hat{\mathbf{q}}_H, \Omega) - \hat{\mathbf{f}}_{ext}(\Omega) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

kde $\mathbf{Z}(\Omega)$ je matice dynamické tuhosti. Neznámými rovnice (5) jsou Fourierovy koeficienty $\hat{\mathbf{q}}_H$. Problém tedy přejde od nalezení funkcí, které vyhovují rovnici (1) k nalezení příslušných Fourierových koeficientů. Pokud k této metodě připojíme metodu kontinuace podél křivky budeme schopni vytrasovat úplný tvar amplitudové křivky nelineárního systému jak je znázorněno na Obr. 1. Díky této kvalitě je metoda harmonické rovnováhy poutavý nástroj k analýze periodických odezev nelinárních systémů.



Obrázek 1: Duffingův oscilátor: Amplitudová charakteristika (vpravo), kinematické schéma (vlevo nahoře), trajektorie ve fázové rovině (vlevo uprostřed) a rekurentní mapa (vlevo dole).

Literatura

Krack, M.; Gross, J. (2019) *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*, Springer, 2019

Nayfeh, A. H.; Mook, D. T. (2004) *Nonlinear Oscillation*. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.

Strogatz, S. H. (2015) *Nonlinear dynamics and chaos* (Second Edition), Taylor and Francis Group, 2015