



## Bakalářská práce

Adaptivní přímovazební kompenzace statických sil působících  
na mechatronický systém

Západočeská Univerzita V Plzni  
Katedra Kybernetiky  
BPAŘR

Pavel Březina  
letní semestr  
18. května 2023

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2022/2023

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Pavel BŘEZINA**  
Osobní číslo: **A20B0314P**  
Studijní program: **B0714A150005 Kybernetika a řídicí technika**  
Specializace: **Automatické řízení a robotika**  
Téma práce: **Adaptivní přímovazební kompenzace statických sil působících na mechatronický systém**  
Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

## Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s modelováním mechanických systémů pro návrh algoritmů automatického řízení.
2. Seznamte se s metodami přímovazební kompenzace statických sil působících na mechanický systém.
3. Navrhněte algoritmus přímovazební kompenzace statických sil pro vybranou třídu mechatronických systémů.
4. Navrhněte metodu adaptace řídicího algoritmu při perturbaci parametrů mechanického systému.
5. Simulačně otestujte navržené algoritmy.
6. V případě možnosti otestujte navržené algoritmy na vhodném laboratorním modelu mechatronického systému.



Rozsah bakalářské práce: **30-40 stránek A4**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

Igor Evgenevich Irodov. Fundamental laws of mechanics. Mir, 1980.  
David Morin. Introduction to classical mechanics: with problems and solutions. Cambridge University Press, 2008.  
Ramon Vilanova and Antonio Visioli. PID control in the third millennium. Springer, 2012.  
Dierk Schröder. Intelligent observer and control design for nonlinear systems. Springer Science & Business Media, 2000.

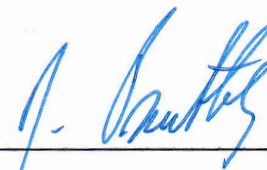
Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Václav Helma**  
Výzkumný program 1

Datum zadání bakalářské práce: **17. října 2022**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2023**



---

**Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.**  
děkan



---

**Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.**  
vedoucí katedry

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 18. května 2023

.....

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval Ing. Václavu Helmovi, vedoucímu této bakalářské práce, za řádné vedení, přátelskou komunikaci a věnovaný čas pravidelným konzultacím, které značně pomohly směru vývoje této práce.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá automatickou kompenzací statických sil působících na mechatronický systém pomocí proudové kalibrační tabulky. Konkrétně se v práci prozkoumávají možnosti automatické aktualizace této tabulky pomocí NURBS interpolace a aproximace. Toto zahrnuje interpolaci a aproximaci 2D křivek, 3D křivek, 3D povrchů a 4D nadpovrchů včetně jejich ukázek na obecných a konkrétních datech týkajících se problému této práce. Výsledkem práce je autonomní aktualizace proudové kalibrační tabulky za využití aproximace 4D nadpovrchu.

## Klíčová slova

kompenzace kvazistatických sil, datově orientované přímovazební řízení, NURBS křivky, NURBS (nad)povrchy, NURBS interpolace, NURBS aproximace, zpracování zašuměných dat, výpočetní tomograf, Phillips Azurion 7 C20

## Abstract

This paper deals with the automatic compensation of static forces acting on a mechatronic system using a current calibration table. Specifically, the work explores the possibilities of automatically updating this table using NURBS interpolation and approximation. This includes the interpolation and approximation of 2D curves, 3D curves, 3D surfaces and 4D hypersurfaces, including their demonstration on general and specific data relevant to the problem of this thesis. The result of this work is an autonomous update of the current calibration table using the 4D hypersurface approximation.

## Keywords

compensation of quasi-static forces, data-driven feedforward control, NURBS curves, NURBS (hyper)surfaces, NURBS interpolation, NURBS approximation, processing of noisy data, CT machine, Phillips Azurion 7 C20

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Řízený a řídicí systém</b>	<b>3</b>
2.1	Popis řízeného systému . . . . .	3
2.2	Zjednodušený model systému . . . . .	3
2.3	Struktura řídicího systému . . . . .	6
2.3.1	Schéma regulační smyčky . . . . .	6
2.4	Návrh řešení autonomní recalibrace proudové tabulky . . . . .	9
<b>3</b>	<b>NURBS teorie</b>	<b>10</b>
3.1	NURBS křivky . . . . .	10
3.2	NURBS povrchy . . . . .	11
3.3	NURBS interpolace křivky . . . . .	12
3.3.1	Ukázka 2D interpolace . . . . .	14
3.3.2	Ukázka 3D interpolace . . . . .	14
3.4	NURBS interpolace povrchu . . . . .	16
3.4.1	Interpolace 4D nadpovrchu . . . . .	18
3.5	NURBS aproximace křivky . . . . .	20
3.5.1	Cílená NURBS aproximace křivky . . . . .	26
3.6	NURBS aproximace povrchu . . . . .	26
3.6.1	NURBS aproximace povrchu s užitím Gaussovy funkce . . . . .	32
3.6.2	NURBS aproximace 4D povrchu s užitím Gaussovy funkce . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Návrh systému automatické kalibrace proudové tabulky</b>	<b>39</b>
4.1	Aplikace NURBS teorie pro modelování kalibrační tabulky . . . . .	39
4.1.1	1 DoF model . . . . .	39
4.1.2	2D řez kalibrační tabulkou . . . . .	39
4.1.3	Interpolace kalibračních tabulek . . . . .	39
4.1.4	Interpolace napříč kalibračními tabulkami . . . . .	40
4.2	Analýza měřených dat . . . . .	46
4.2.1	Analýza zaznamenaného pohybu jednoho kloubu . . . . .	46
4.2.2	Analýza testu odchylky proudu . . . . .	51
4.3	Aktualizace kalibrační tabulky . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>59</b>

## Seznam obrázků

1	Výpočetní tomograf s 8 stupni volnosti Phillips Azurion 7 C20 . . . . .	2
2	Schéma zjednodušeného ramene robota . . . . .	4
3	Potřebný točivý moment motoru pro dosažení úhlu $\varphi$ pro různé parametry 1 DoF modelu . . . . .	5
4	Schéma regulační smyčky CT pro jednu osu — $C_{Arc}$ . . . . .	7
5	Vizualizace kompenzačních tabulek pro osu $C_{Arc}$ . . . . .	8
6	Porovnání algoritmů interpolace ve 2D . . . . .	15
7	Porovnání algoritmů interpolace ve 3D . . . . .	15
8	Porovnání algoritmů interpolace ve 2D . . . . .	17
9	Porovnání algoritmů interpolace ve 3D . . . . .	17
10	Interpolační povrchy pro 4D interpolaci č. 1 . . . . .	19
11	Ukázka průběhu interpolace mezi povrchy přes souřadnici $w$ č. 1 . . . . .	19
12	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry	22
13	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry	22
14	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry	23
15	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry	23
16	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry	24
17	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů	24
18	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů	25
19	Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů	25
20	Aproximace povrchu metodou nejmenších čtverců č. 1 . . . . .	29
21	Aproximace povrchu metodou nejmenších čtverců č. 2 . . . . .	29
22	Aproximace povrchu pro různé váhy č. 1 . . . . .	30
23	Aproximace povrchu pro různé váhy č. 2 . . . . .	30
24	Aproximace povrchu pro různé váhy č. 3 . . . . .	31
25	Aproximace povrchu pro různé váhy č. 4 . . . . .	31
26	Ukázka Gaussovy funkce $f(x, y)$ . . . . .	33
27	Ukázka aproximace povrchu č. 1 s užitím Gaussovy funkce s různými parametry . . . . .	34
28	Ukázka aproximace povrchu č. 2 s užitím Gaussovy funkce s různými parametry . . . . .	35
29	Ukázka průběhu Gaussovy funkce $f(x, y, w)$ . . . . .	37
30	Ukázka aproximace 4D povrchů s užitím Gaussovy funkce . . . . .	38
31	Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na 1 DoF modelu pro různé váhy nových bodů . . . . .	40

32	Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na reálných datech . . . . .	41
33	Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na reálných datech (přiblíženo) . . . . .	41
34	Ukázka interpolace na reálných datech č. 1 . . . . .	42
35	Ukázka interpolace na reálných datech č. 2 . . . . .	42
36	Ukázka interpolace na reálných datech č. 3 . . . . .	43
37	Ukázka interpolace na reálných datech č. 4 . . . . .	43
38	Interpolační povrchy pro 4D interpolaci kompenzačních tabulek - dopředný pohyb . . . . .	44
39	Ukázka průběhu interpolace mezi kompenzačními tabulkami přes souřadnici $I_{ds}$ — dopředný pohyb . . . . .	44
40	Interpolační povrchy pro 4D interpolaci kompenzačních tabulek - zpětný pohyb . . . . .	45
41	Ukázka průběhu interpolace mezi kompenzačními tabulkami přes souřadnici $I_{ds}$ — zpětný pohyb . . . . .	45
42	Ukázka aplikace filtru konstantní rychlosti . . . . .	48
43	Ukázka aplikace všech filtrů . . . . .	49
44	Vložení vhodných bodů ze záznamu měření jednoho kloubu . . . . .	50
45	Ukázka Gaussovy aproximace povrchu pro hodnoty z měření jednoho kloubu . . . . .	50
46	Ukázka trajektorií kloubu $C_{Arc}$ pro 4 proudové kalibrační tabulky . . . . .	52
47	Vypočtený kompenzační proud pro testovací trajektorie . . . . .	53
48	Zpracování zašuměných záznamů kompenzačního proudu pro testovací trajektorie . . . . .	54
49	Proložení zpracovaných dat pomocí <code>smooth</code> NURBS interpolací . . . . .	55
50	Proložení zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace NURBS interpolací . . . . .	56
51	Ukázka aktualizace CCT pro zpětný pohyb, $I_{ds} = 1$ na základě měření získaného z analýzy testu odchylky proudu . . . . .	58

# 1 Úvod

V práci je nejprve popsána struktura řídicích smyček pohybu lékařského CT manipulátoru Phillips Azurion 7 C20 včetně proudové kalibrační tabulky (CCT). Kalibrační tabulka hraje zásadní roli pro dosažení přesných pohybů jednotlivých kloubů a zajištění přesného a konzistentního chování při lékařských zákrocích. Z důvodu přirozeného opotřebením stroje je však nutná pravidelná recalibrace, která vede k nežádoucím odstávkám. Cílem této práce je proto navrhnout řešení, jak minimalizovat potřebu rekurentních manuálních recalibrací stroje pomocí vhodného algoritmu aktualizace CCT, čímž by se zvýšila přesnost a spolehlivost manipulátoru a také snížil počet odstávek stroje.

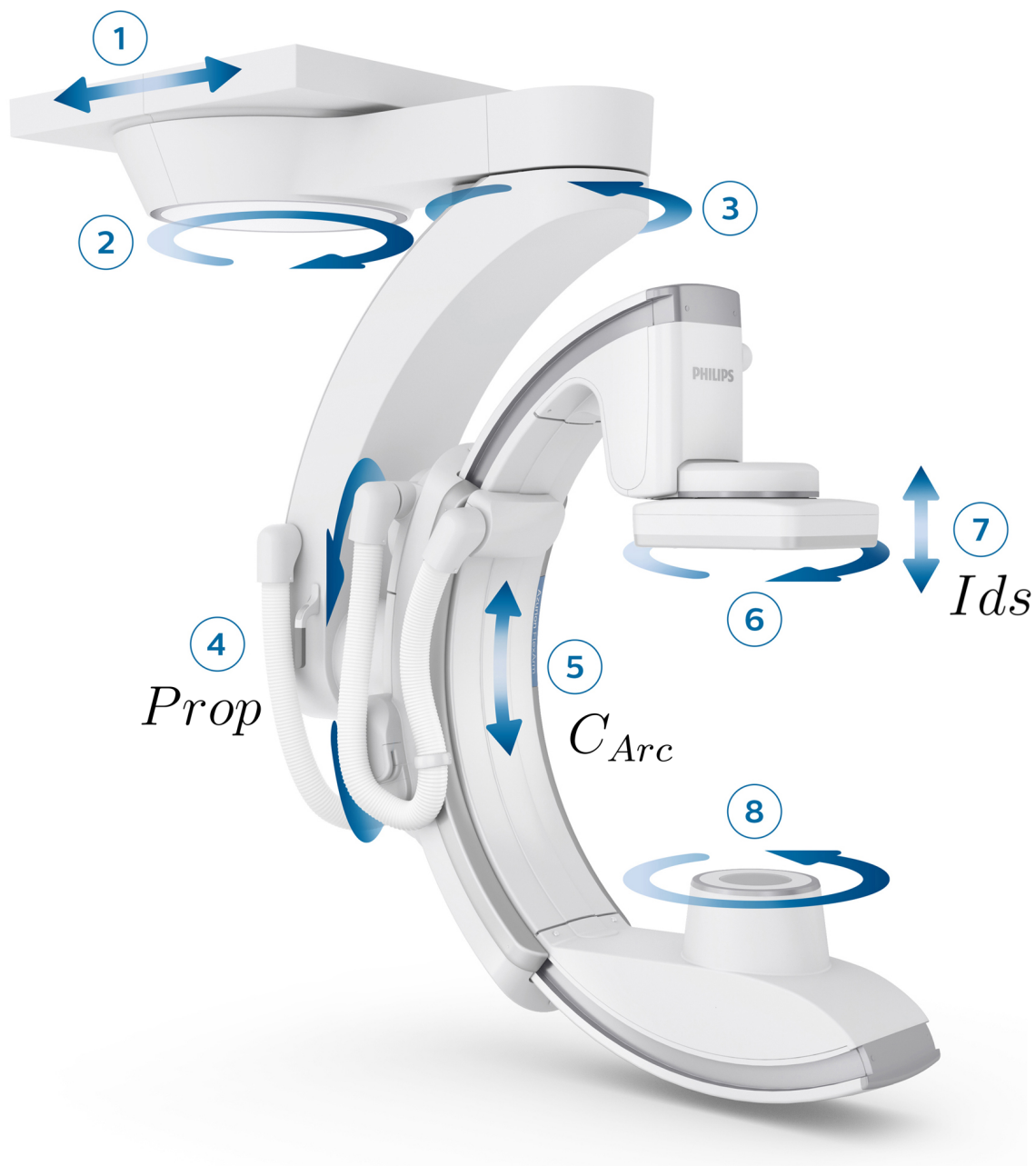
Tato práce se zabývá řešením pomocí B-spline interpolace/aproximace. Interpolace a aproximace jsou rozhodujícími technikami pro problém aktualizace CCT, které umožňují vyvodit správné hodnoty v bodech ležících mimo síť naměřených bodů v této tabulce.

Text je rozdělen na několik hlavních částí:

1. **Řízený a řídicí systém** — část zaměřená na řízený a řídicí systém, která obsahuje technické specifikace robota, popis problému a také zvolený přístup řešení
2. **NURBS teorie** — obsáhlá kapitola, ve které je rozebrána veškerá teorie k NURBS křivkám/povrchům včetně kompletně vlastní implementace v Matlabu dle knihy Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*. Kapitola obsahuje ukázky výsledků jednotlivých algoritmů na obecných datech.
3. **Návrh systému automatické kalibrace proudové tabulky** — část, ve které jsou vizualizovány výsledky aplikace principů NURBS teorie na reálných datech. Dále v této kapitole byly také využity techniky z oblasti zpracování signálů, za účelem nalezení vhodných částí měření, které by se daly využít pro aktualizaci CCT.

Všechny hodnoty poloh a proudů pro jednotlivé klouby byly v práci znormovány tak, aby bylo omezeno riziko úniku citlivých dat společnosti Phillips. Jedná se tak o bezrozměrné veličiny, u kterých nejsou uvedeny jednotky.

V případě ukázky animací je zobrazeno pouze 6 snímků pro tištěnou verzi, plná verze animace je obsažena v příloze či v digitální verzi dokumentace. Celá tato práce včetně zdrojového kódu je veřejně dostupná online — Pavel Březina, *Bakalářská práce*.



Obrázek 1: Výpočetní tomograf s 8 stupni volnosti Phillips Azurion 7 C20 — Phillips, *Azurion 7 C20*



## 2 Řízený a řídicí systém

Tato kapitola je zaměřena na popis řízeného systému a jeho zjednodušeného modelu. Dále je popsána struktura řídicího systému včetně regulační smyčky a následně je uveden návrh řešení autonomní recalibrace proudové tabulky.

### 2.1 Popis řízeného systému

Jedná se o sériový robotický manipulátor s 8 stupni volnosti — model Phillips Azurion 7 C20. Manipulátor je špičkový lékařský zobrazovací systém určený pro použití v zákrokové kardiologii a radiologii<sup>[1]</sup>. Stroj lze vidět na obrázku č. 1.

Pro účely této práce jsou klíčové klouby č. 4, 5 a 7, které mají i své vlastní pojmenování os s příslušným rozsahem pohybu<sup>[2]</sup>:

- Kloub č. 5 —  $C_{Arc} \in [0, 1]$
- Kloub č. 4 —  $Prop \in [0, 1]$
- Kloub č. 7 —  $Ids \in [0, 1]$

Pro jednotlivé klouby byla navržena regulační smyčka pohybu na základě fyzikálních parametrů stroje. Tyto parametry se mohou časem měnit, až se nakonec začnou projevat na průběhu regulace. Toto může být například způsobeno nerovnoměrným opotřebením klíčových dílů zodpovědných za přesný pohyb robota a nebo například pouhým třením kabelů. Nejen tímto způsobené nepřesnosti lze kompenzovat přímovazební složkou doplněnou o proudovou kalibrační tabulku.

### 2.2 Zjednodušený model systému

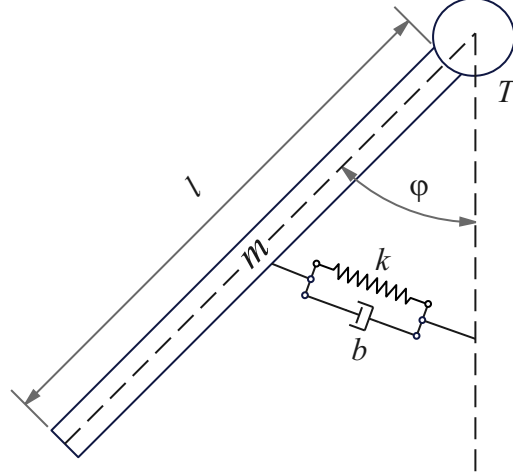
Nyní vytvoříme zjednodušený 1 DoF model reálného systému (viz obrázek č. 2), který poslouží pro názornější vizualizaci výsledků dosažených navrženými algoritmy a jejich snazší otestování a také porovnání různých přístupů. Uvažujeme rameno o délce  $l$  a hmotnosti  $m$ , které je na jednom konci ukotvené na hřídeli prostřednictvím rotačního kloubu s pohonem generující moment síly (točivý moment)  $T$ . Abychom mohli nějakým způsobem lépe simulovat změnu fyzikálních parametrů, zavedeme do

---

<sup>[1]</sup>Phillips, *Azurion 7 C20 with FlexArm Image-guided therapy system*.

<sup>[2]</sup>Jak již bylo zmíněno v úvodu, přesné hodnoty byly znormovány z důvodu důvěryhodnosti dat

modelu také pružnost  $k$  a koeficient tlumení  $b$  pohybu ramene. Výsledné schéma je na obrázku č. 2.



Obrázek 2: Schéma zjednodušeného ramene robota

Budeme vycházet z Newtonovo druhého pohybového zákona pro rotační pohyb — konkrétně z rovnice pro moment síly  $\mathbf{M}$ , rovnice pro moment hybnosti  $\mathbf{L}$  a jejich vzájemného vztahu:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3)$$

Dosazením parametrů našeho modelu dostáváme:

$$M = -mgl \cdot \sin(\varphi(t)) - k \cdot \varphi(t) - b \cdot \dot{\varphi}(t) + T(t) \quad (4)$$

$$L = ml^2 \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (5)$$

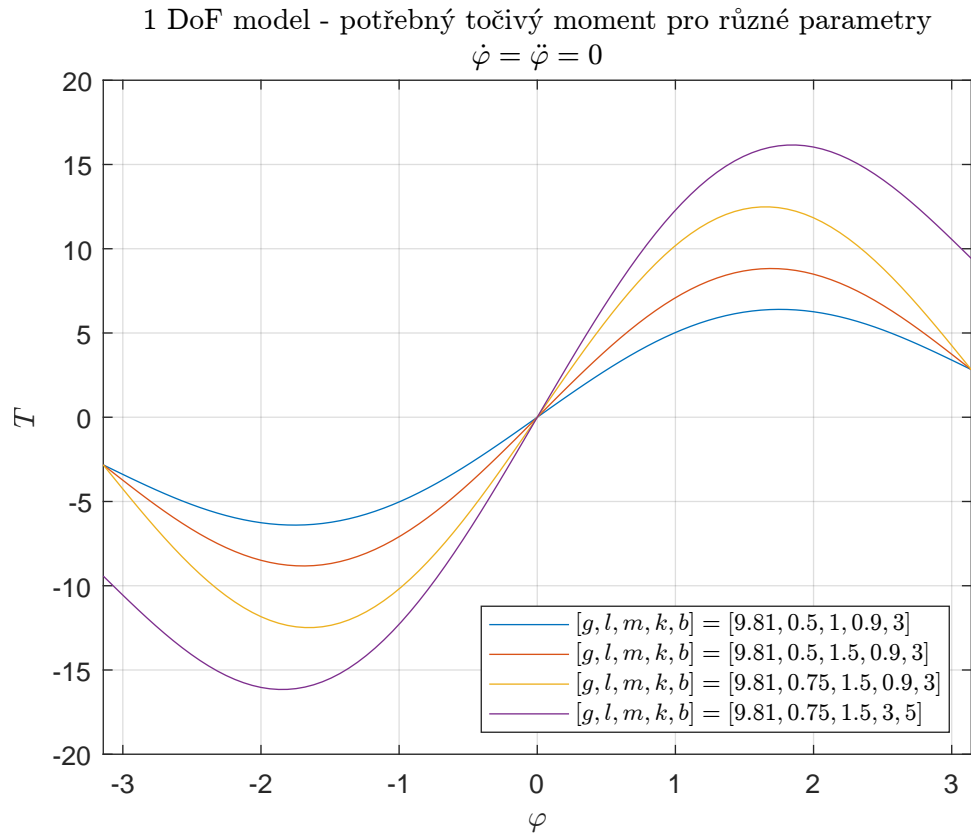
Výsledný model je popsán diferenciální rovnicí:

$$\dot{L} = M \quad (6)$$

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) = -mgl \cdot \sin(\varphi(t)) - k \cdot \varphi(t) - b \cdot \dot{\varphi}(t) + T(t) \quad (7)$$

$$\implies \ddot{\varphi}(t) = \frac{-mgl \cdot \sin(\varphi(t)) - k \cdot \varphi(t) - b \cdot \dot{\varphi}(t) + T(t)}{l^2 m} \quad (8)$$

Na tomto modelu můžeme například vykreslit potřebný točivý moment  $T$  v ustáleném stavu ( $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$ ) pro daný konstantní úhel  $\varphi$  na základě různých fyzikálních parametrů — viz obrázek č. 3. Tímto můžeme simulovat změny fyzických parametrů, které časem probíhají i na reálném stroji a také na výsledcích můžeme později odzkoušet interpolační/aproximační algoritmy. V zásadě se jedná o proudovou kalibrační tabulku pro náš 1 DoF model, protože točivý moment  $T$  je přímo úměrný proudu.



Obrázek 3: Potřebný točivý moment motoru pro dosažení úhlu  $\varphi$  pro různé parametry 1 DoF modelu

## 2.3 Struktura řídicího systému

Kompenzace proudu pohonu pro osu  $C_{Arc}$  je závislá na polohách všech tří kloubů ( $C_{Arc}$ ,  $Prop$ ,  $Ids$ ) a také na směru pohybu<sup>[3]</sup>.

V současném řídicím algoritmu jsou uvažovány pouze dvě možné polohy kloubu  $Ids$  a dva možné směry pohybu (dopředný a zpětný), což nám umožní vizualizovat proudovou kalibrační tabulku prostřednictvím čtyř 3D grafů povrchu. Vizualizovaná data z těchto 4 tabulek pro kloub  $C_{Arc}$  lze vidět na obrázcích č. 5a, 5b, 5c, 5d.

### 2.3.1 Schéma regulační smyčky

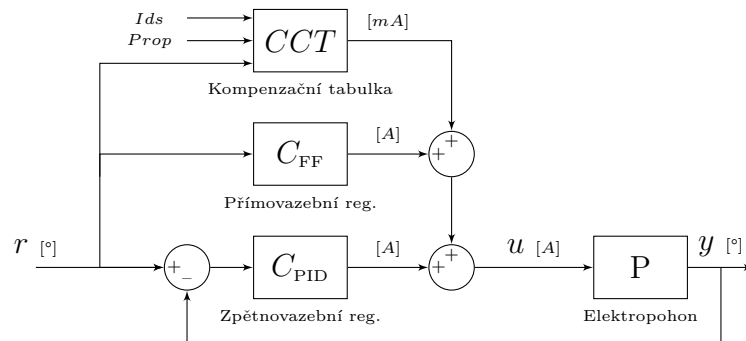
K zajištění přesného a plynulého pohybu regulační smyčka obsahuje 3 hlavní kompenzátory:

- $C_{PID}$  — zpětnovazební PID regulátor, který je zodpovědný za přesné sledování referenční trajektorie polohy. Regulátor porovnává skutečnou polohu kloubu s požadovanou a na základě jejich rozdílu provádí akční zásahy, aby zajistil co nejpřesnější sledování referenční hodnoty.
- $C_{FF}$  — přímovazební modelově orientovaný regulátor sloužící především ke kompenzaci setrvačnosti a částečně i tření manipulátoru. Tato dopředná vazba se podílí na akční veličině  $u$  na základě modelovaných účinků těchto vlivů pro konkrétní stav (např.: poloha, rychlost, zrychlení) a parametry stroje.
- $CCT$  — přímovazební datově orientovaný regulátor v podobě kompenzační tabulky sloužící ke kompenzaci statické části tření a vnějších momentů způsobených gravitací, vedením kabelů, odporem převodovky a tak podobně. Tato tabulka obsahuje kalibrační hodnoty, které se též podílí na akční veličině  $u$  za cílem dosažení co nejplynulejšího pohybu manipulátoru.

---

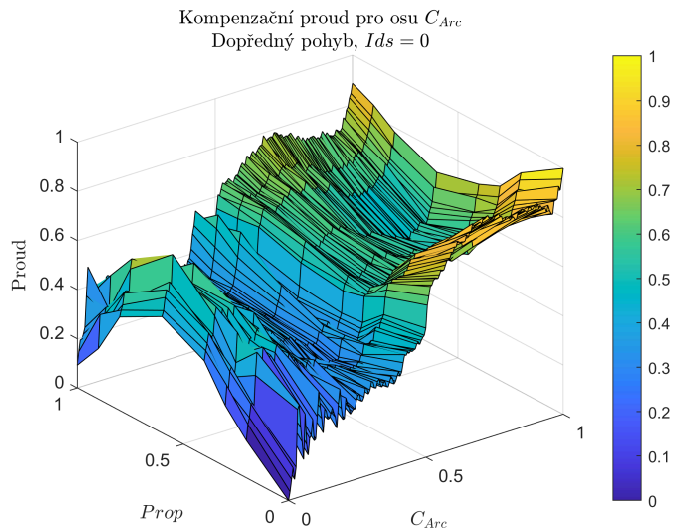
<sup>[3]</sup>Kompenzace proudu pohonu pro zbylé osy také pravděpodobně závisí na ostatních osách, nicméně jsou dostupná data pouze pro kompenzační tabulku osy  $C_{Arc}$

Schéma regulační smyčky pro polohu kloubu  $C_{Arc}$  vypadá přibližně takto:

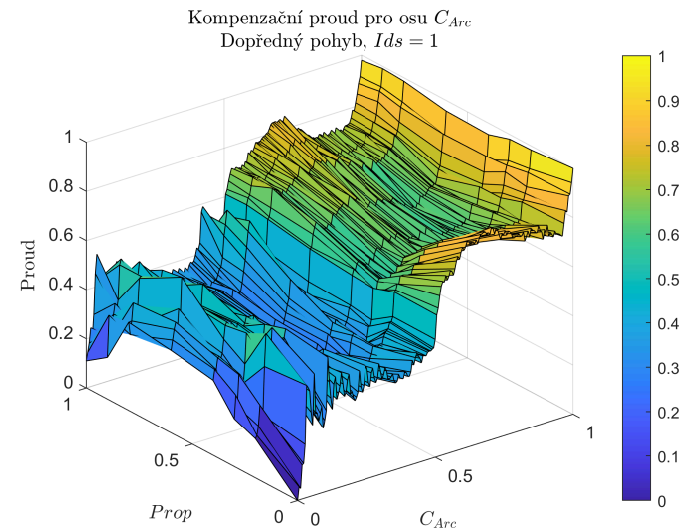


Obrázek 4: Schéma regulační smyčky CT pro jednu osu —  $C_{Arc}$

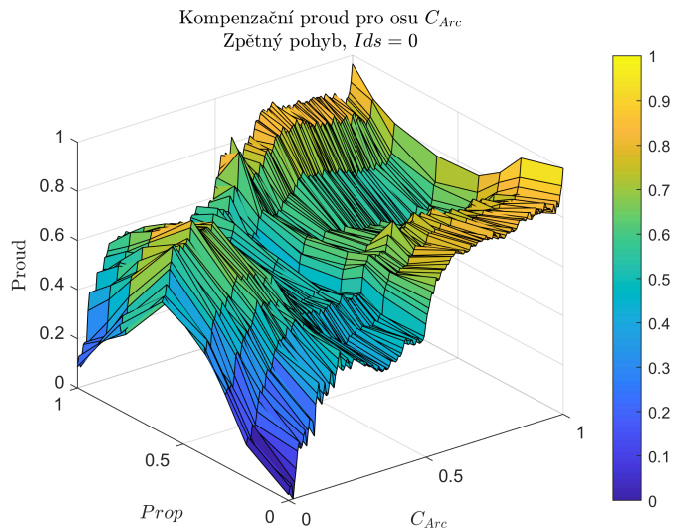
Oba regulátory běžně operují v řádu ampér, zatímco kompenzační tabulka v řádu stovek miliampér. To naznačuje, že tabulka má největší vliv při malých rychlostech (např. při precizních pohybech), kdy výstupy regulátorů jsou v podobném rozsahu jako výstup proudové kompenzační tabulky.



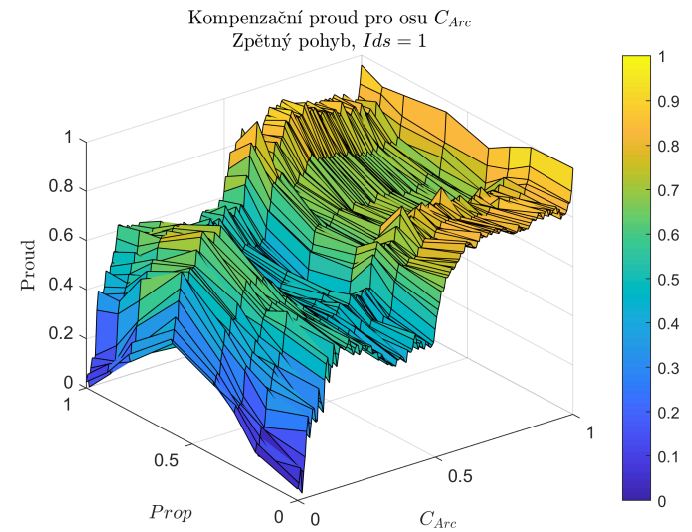
(a) Vizualizace kompenzační tabulky pro osu  $C_{Arc}$  — dopředný pohyb,  $I_{ds} = 0$



(b) Vizualizace kompenzační tabulky pro osu  $C_{Arc}$  — dopředný pohyb,  $I_{ds} = 1$



(c) Vizualizace kompenzační tabulky pro osu  $C_{Arc}$  — zpětný pohyb,  $I_{ds} = 0$



(d) Vizualizace kompenzační tabulky pro osu  $C_{Arc}$  — zpětný pohyb,  $I_{ds} = 1$

Obrázek 5: Vizualizace kompenzačních tabulek pro osu  $C_{Arc}$

## 2.4 Návrh řešení autonomní recalibrace proudové tabulky

Kompenzační proud pohonu pro jeden směr pohybu je momentálně popsán dvěma kalibračními tabulkami (2 polohy kloubu  $Ids$ ), přičemž se jedná o soubor diskretních dat na předem definované mřížce, kde každou tabulku lze reprezentovat 3D povrchem. Novým způsobem reprezentace těchto závislostí je pomocí 4D NURBS nadpovrchu, což je čtyřrozměrný prostor, který již obsahuje kompletní informaci o kompenzačním proudu pro libovolné polohy všech tří kloubů  $C_{Arc}, Prop, Ids$  v rámci jejich stanoveného rozsahu ve formě spojitě, hladké funkce.

Uvažujme tedy kompenzační tabulku popsanou 4D nadpovrchem. Vhodně konstruovaný algoritmus aktivně sleduje pohyby manipulátoru a vyhovující hodnoty kompenzačního proudu uloží pro účely aktualizace CCT. Na základě uložených hodnot můžeme poupravit 4D nadpovrch tak, aby na těchto místech byl kompenzační proud popsán přesněji.

Kroky výsledného algoritmu robota (kterými se tato práce zabývá) pro jednu relaci by mohly tedy vypadat nějak takto:

1. Načtení a vytvoření (= provedení NURBS interpolace) kalibrační tabulky ve tvaru NURBS 4D nadpovrchu. Kalibrační tabulka je uložena v podobě diskretních bodů a pro dosažení optimálního výkonu je nutné, aby řídicí systém dokázal spočítat kompenzační proud i mezi těmito body. K tomu právě slouží interpolace, která „převéde“ diskretní body na hladkou a spojitou funkci.
2. V průběhu práce s robotem se za běhu
  - (a) z nadpovrchu vypočítá kompenzační proud na základě aktuálních poloh kloubů  $C_{Arc}, Prop, Ids$ .
  - (b) nasbírají vhodné body pro budoucí aktualizaci kompenzační tabulky.
3. Na konci relace na základě nasbíraných bodů proběhne přepočtení (= provedení NURBS aproximace) a následně uložení kompenzační tabulky. Aproximace slouží právě ke sloučení starých a nových dat kompenzační tabulky vhodnou, hladkou, spojitou funkcí. Tvar výsledné funkce lze přizpůsobit pomocí mnoha parametrů, jako jsou například: stupeň bázových funkcí, počet řídicích bodů a váhy jednotlivých aproximačních bodů. Nakonec se výsledná funkce ve vhodných bodech vyhodnotí, abychom opět získali množinu diskretních bodů.

### 3 NURBS teorie

Tato kapitola je zaměřena na algoritmy pro práci s NURBS křivkami/povrchy, které jsou ručně implementovány v Matlabu podle knihy Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*. V každé podkapitole je uveden odpovídající zdroj z této knihy. Implementace těchto algoritmů je nezbytná pro realizaci autonomní rekaliibrace CCT dle návrhu uvedeného v předchozích kapitolách.

V kapitole se hojně užívá pojmů „interpolace“ a „aproximace“, popřípadě ještě „extrapolace“. Zde je vysvětlení těchto pojmů:

- Interpolace — Hledání spojitě funkce, jejichž funkční hodnoty odpovídají námi zadaným hodnotám na příslušných souřadnicích. Existuje mnoho interpolačních metod například: lineární interpolace, kosinová interpolace, kubická interpolace a polynomiální interpolace. Zejména polynomiální interpolace není pro naše účely vhodná, protože pro velké množství bodů výsledný polynom nabývá vysokého řádu a má tendenci kmitat, toto obzvláště platí pro ekvidistantně zadané interpolační body.
- Aproximace — Hledání spojitě funkce, která nějakým vhodným způsobem pro danou úlohu nejlépe popisuje aproximační body. Pro naše účely budeme používat NURBS aproximaci založenou na vážené metodě nejmenších čtverců. Tento přístup nám umožní volit stupeň polynomu bázových funkcí, míru redukce bodů (pomocí počtu řídicích bodů) a také váhy (důležitost) jednotlivých bodů.
- Extrapolace — Využití interpolované/aproximované funkce mimo původní rozsah interpolačních/aproximačních bodů. Přesnost extrapolace závisí na charakteru zvolené interpolační/aproximační metody a zdrojových dat. V této práci se extrapolace nevyužívá, protože jí není potřeba — je zmíněna pouze z toho důvodu, že jde o úzce související pojem.

#### 3.1 NURBS křivky<sup>[4]</sup>

Neuniformní racionální B-spline (NURBS) křivku  $\mathbf{C}(u)$ <sup>[5]</sup> definujeme následovně:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad a \leq u \leq b \quad (9)$$

---

<sup>[4]</sup>Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*, kapitola 3.2.

<sup>[5]</sup>Jedná se tedy o vektorovou funkci skalární proměnné.



kde

- $p$  značí stupeň křivky
- $n$  značí počet řídicích bodů
- $\mathbf{P}_i$  jsou řídicí body,  $\dim \mathbf{P}_i \geq 2$
- parametry  $a$  a  $b$  lze znormovat bez ztráty obecnosti — nejčastěji se udávají hodnoty  $a = 0$ ,  $b = 1$ , které budeme též používat
- $N_{i,p}$  jsou B-spline báze funkce stupně  $p$  definované na neperiodickém neekvidistantním uzlovém vektoru  $\mathbf{U}$
- $u \in \mathbf{U}$

Pro uzlový vektor  $\mathbf{U}$  platí:

$$\mathbf{U} = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, \underbrace{u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}}_{m+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \quad (10)$$

kde  $m = n + p + 1$ .

Báze funkce lze definovat rekurzivně (výhoda jednoduché implementace):

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (11)$$

### 3.2 NURBS povrchy<sup>[6]</sup>

Pro sestavení NURBS povrchu potřebujeme obousměrnou síť řídicích bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$  a dva uzlové vektory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ , poté je možné sestavit povrch  $\mathbf{S}(u, v)$ <sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (12)$$

kde

---

<sup>[6]</sup>Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*, kapitola 3.4.

<sup>[7]</sup>Jedná se tedy o vektorovou funkci dvou skalárních proměnných.

- $p$  značí stupeň křivek ve směru  $u$
- $q$  značí stupeň křivek ve směru  $v$
- $n$  značí počet řídicích bodů ve směru  $u$
- $m$  značí počet řídicích bodů ve směru  $v$
- $\mathbf{P}_{i,j}$  je síť řídicích bodů,  $\dim \mathbf{P}_{i,j} \geq 3$
- $u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}$
- $a \leq u \leq b, a \leq v \leq b$  — stejně jako u [NURBS křivky](#) budeme uvažovat  $a = 0, b = 1$  bez ztráty obecnosti

Pro uzlové vektory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  platí:

$$\mathbf{U} = \underbrace{\{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, b, \dots, b\}}_{r+1} \quad (13)$$

$$\mathbf{V} = \underbrace{\{a, \dots, a, u_{q+1}, \dots, u_{s-q-1}, b, \dots, b\}}_{s+1} \quad (14)$$

kde  $r = n + p + 1, s = m + q + 1$ .

Definice báзовých funkcí zůstává stejná — viz (11).

### 3.3 NURBS interpolace křivky<sup>[8]</sup>

Mějme množinu  $n + 1$  bodů  $\{\mathbf{Q}_k\}$   $k = 0, \dots, n$ , které chceme interpolovat NURBS křivkou stupně  $p$ . Pokud každému bodu  $\mathbf{Q}_k$  přiřadíme parametr  $\bar{u}_k$  a vhodně sestrojíme uzlový vektor  $\mathbf{U} = \{u_0, \dots, u_m\}$ <sup>[9]</sup>, můžeme sestavit soustavu lineárních rovnic o rozměru  $(n + 1) \times (n + 1)$ :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \quad (15)$$

kde řídicí body  $\mathbf{P}_i$  tvoří našich  $n + 1$  neznámých.

<sup>[8]</sup>Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*, kapitola 9.2.1.

<sup>[9]</sup>Parametr  $m$  je z kapitoly [NURBS křivky](#).

Parametr  $\bar{u}_k$  lze zvolit více způsoby, z nichž jsou běžné například:

- ekvidistantní (equally spaced):

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (16)$$

$$\bar{u}_k = \frac{k}{n} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

Tato metoda je vhodná pro rovnoměrně rozprostřená data.

- délka tětivy (chord length) — necht  $d$  je celková délka tětivy:

$$d = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}\| \quad (18)$$

potom

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (19)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}\|}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (20)$$

Tato metoda je vhodná pro obecná data.

- dostředivá metoda (centripetal method) — necht  $d$ :

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{\|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}\|} \quad (21)$$

potom

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (22)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}\|}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (23)$$

Tato metoda je vhodná pro obecná data s náhlými změnami směru.

Pro tyto metody je doporučený způsob výpočtu  $\mathbf{U}$  metodou průměrování:

$$\begin{aligned} u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p \end{aligned} \quad (24)$$

Nyní můžeme sestavit matici  $\mathbf{N}$   $(n+1) \times (n+1)$ :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_n) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_n) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Hledané řídicí body  $\mathbf{P}$  již spočteme vyřešením soustavy lineárních rovnic:

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Q} \quad (26)$$

Takto zavedená interpolace funguje pro libovolnou dimenzi bodů  $\mathbf{Q}_k$ .

### 3.3.1 Ukázka 2D interpolace

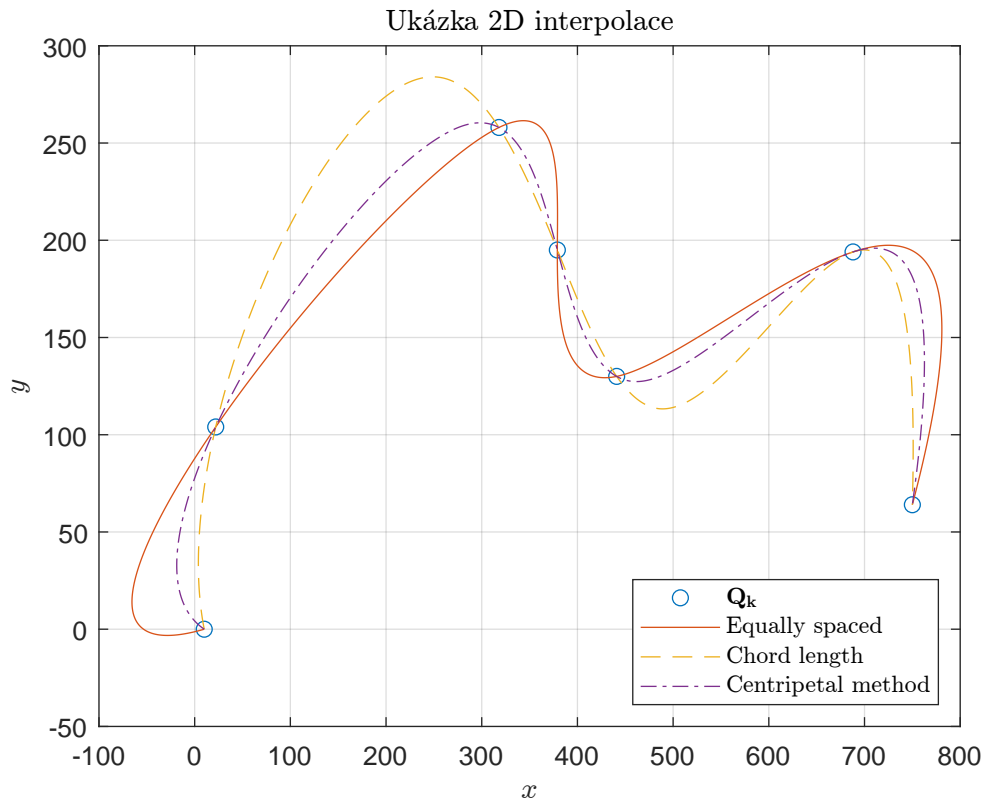
Na obrázku č. 6 jsou porovnány zmíněné algoritmy výpočtu parametru  $\bar{u}_k$  pro tyto body:

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{x} \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 22 & 104 \\ 318 & 258 \\ 379 & 195 \\ 441 & 130 \\ 688 & 194 \\ 750 & 64 \end{bmatrix} \quad (27)$$

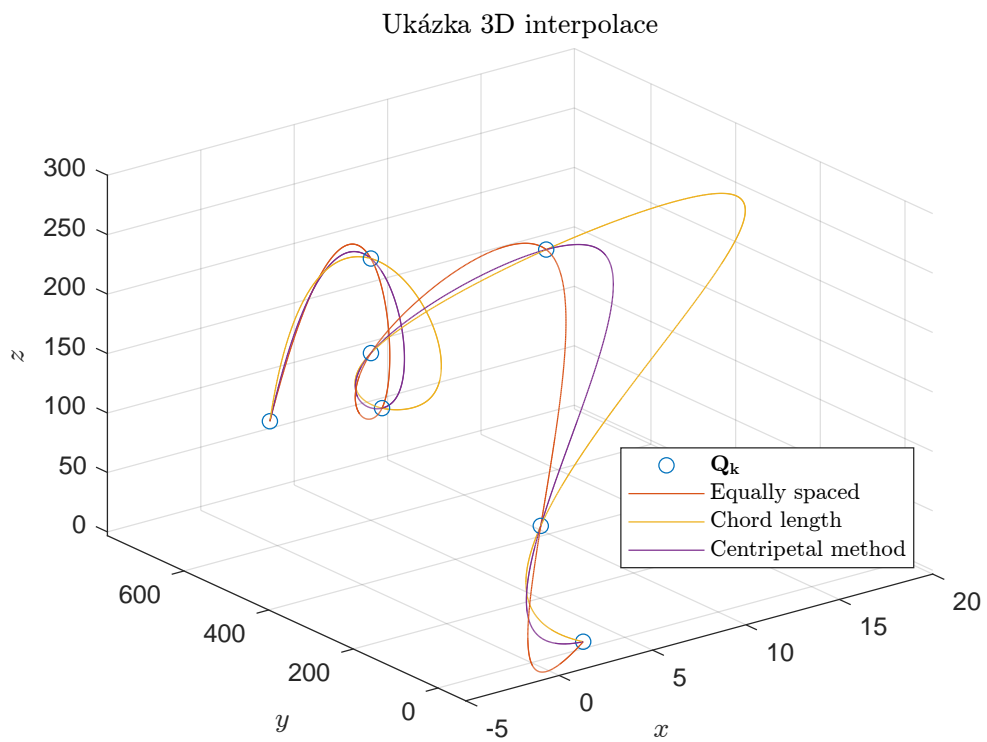
### 3.3.2 Ukázka 3D interpolace

Na obrázku č. 7 jsou porovnány zmíněné algoritmy výpočtu parametru  $\bar{u}_k$  pro tyto body:

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 1 & 22 & 104 \\ 8 & 318 & 258 \\ 0 & 379 & 195 \\ 2 & 441 & 130 \\ 7 & 688 & 194 \\ 3 & 750 & 64 \end{bmatrix} \quad (28)$$



Obrázek 6: Porovnání algoritmů interpolace ve 2D



Obrázek 7: Porovnání algoritmů interpolace ve 3D

### 3.4 NURBS interpolace povrchu<sup>[10]</sup>

Interpolace povrchu je podobná interpolaci 3D křivky — máme množinu  $(n + 1) \times (m + 1)$  bodů  $\{\mathbf{Q}_{k,l}\}$ ,  $k = 0, \dots, n$  a  $l = 0, \dots, m$  ležících na mřížce, které chceme interpolovat NURBS povrchem stupně  $p$  a  $q$ , tzn.:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = \mathbf{S}(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \quad (29)$$

Stejně jako u interpolace křivky musíme vhodně zvolit parametry  $\bar{u}_k$  a  $\bar{v}_l$  a uzlové vektory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ . Užitím běžných metod (20) a (23) získáme vektory  $\hat{u}_k$  a  $\hat{v}_l$ , které musíme poté zprůměrovat přes všechny hodnoty, tzn.:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \hat{u}_j \quad k = 0, \dots, n \quad (30)$$

$$\bar{v}_l = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \hat{v}_j \quad l = 0, \dots, m \quad (31)$$

Uzlové vektory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  spočteme již stejně jako u interpolace křivky, viz 24.

Oproti křivce, v tomto případě  $\mathbf{P}_{i,j}$  již není matice, ale tenzor. Tento problém můžeme zjednodušit na interpolaci křivek postupně v obou směrech zafixováním jedné z proměnných  $k$  nebo  $l$ , tj.:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left( \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{R}_{i,l} \quad (32)$$

kde

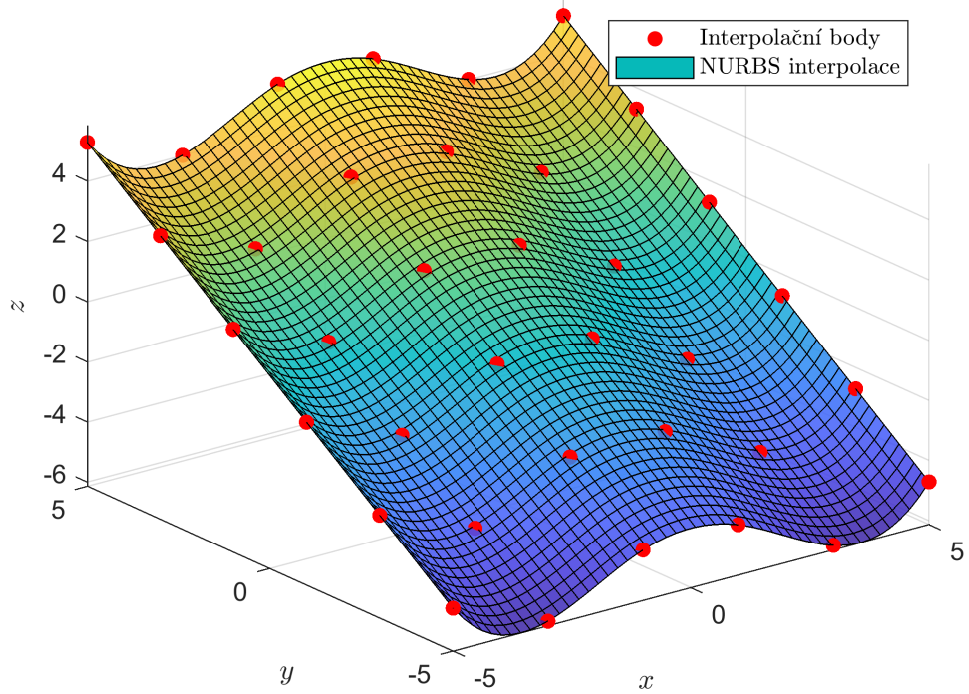
$$\mathbf{R}_{i,l} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \quad (33)$$

Tato metoda funguje pro libovolné pořadí směru interpolace křivek. Ukázka interpolace je na obrázcích č. 8, 9, 34b, 35b, 36b, 37b.

---

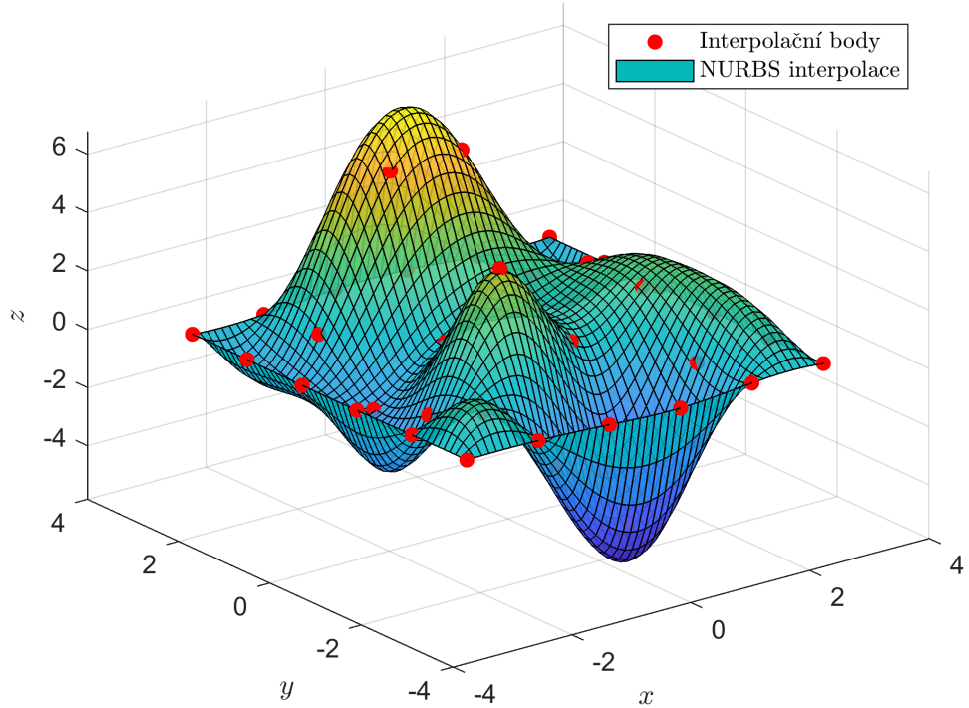
<sup>[10]</sup>Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*, kapitola 9.2.5.

Interpolace funkce  $f(x, y) = \cos(x) + y$   
 $x, y \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$



Obrázek 8: Porovnání algoritmů interpolace ve 2D

Interpolace funkce Matlab peaks(6)



Obrázek 9: Porovnání algoritmů interpolace ve 3D

### 3.4.1 Interpolace 4D nadpovrchu<sup>[11]</sup>

Interpolací 4D nadpovrchu je zde myšleno vytvoření vektorové funkce tří skalárních proměnných např.:  $\mathbf{S}(u, v, \psi)$ . Uvažujme sadu 3D povrchů definovaných mřížkou bodů o stejné velikosti  $i \times j$ . Každý povrch uvažujeme na jiné souřadnici  $w$ <sup>[12]</sup>. Přiřazením souřadnice  $w$  každému povrchu získají tuto souřadnici také všechny body těchto povrchů, tj. každý bod je tvořen souřadnicemi  $[x, y, z, w]$ .

Výpočet má následující kroky:

1. Pro konkrétní hodnoty  $i, j$  vybereme body  $\mathbf{Q}_{i,j}$  ze všech rovin. Pro tuto sadu bodů provedeme interpolaci 4D křivky (viz [NURBS interpolace křivky](#)). Tímto získáme  $i \times j$  4D křivek  $\mathbf{C}_{i,j}(u)$ .
2. Pro libovolnou hodnotu  $w$ ,  $w_{min} \leq w \leq w_{max}$  najdeme body  $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}$  na všech křivkách  $\mathbf{C}_{i,j}(u)$  takové, že 4. souřadnice bodů  $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}$  odpovídá zvolené hodnotě  $w$ <sup>[13]</sup>.
3. Předchozím krokem jsme získali mřížku bodů  $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}$  pro konkrétní hodnotu  $w$ . Mřížku stačí proložit povrchem pomocí [NURBS interpolace povrchu](#) a již dostáváme nadpovrch pro danou hodnotu souřadnice  $w$ <sup>[14]</sup>.

Nadpovrch lze vizualizovat například pomocí animace jako průchod mezi klasickými povrchy prostřednictvím zbývajících proměnné  $w$ . Tento algoritmus je například vhodný v případě, že bychom chtěli vyplnit “prázdný” prostor souřadnice  $Ids$  mezi tabulkami [5a](#) a [5b](#).

Vizualizaci 4D povrchu, který je tvořen třemi 3D povrchy:

$$\mathbf{Q}_{i,j}(1) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \cos(\mathbf{X}) + \mathbf{Y}, 10] \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_{i,j}(2) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \cos(\mathbf{Y}) + \mathbf{X}, 20] \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_{i,j}(3) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \cos(2 \cdot \mathbf{Y}) + \cos(2 \cdot \mathbf{X}), 30] \quad (36)$$

lze vidět na animaci na obrázku č. [11](#).

---

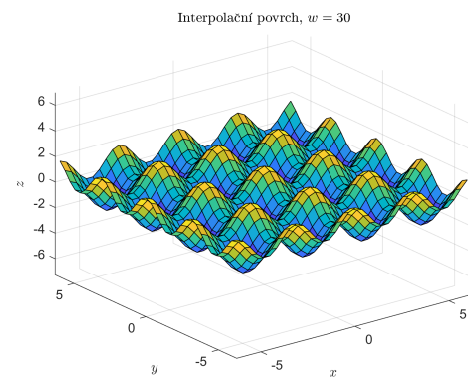
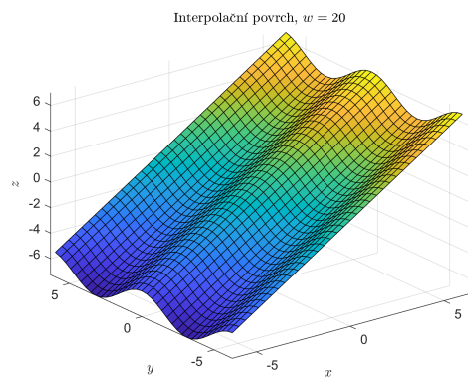
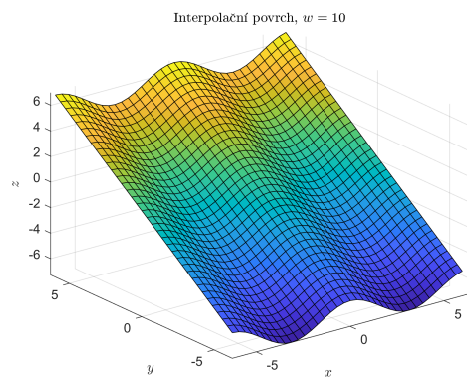
<sup>[11]</sup>Téma této sekce již není diskuzí Prof. Dr. Les Piegl, *The NURBS Book*, tudíž řešení tohoto problému je již značně postaveno na mých vlastních nápadech realizace.

<sup>[12]</sup>Souřadnici  $w$  si lze představit jako čas, tím pádem máme sadu 3D povrchů, kde se každý nachází v jakoby jiném časovém okamžiku.

<sup>[13]</sup>Tento výpočet, pokud vím, nelze provést analyticky, existují pouze heuristické metody. Proto pro nalezení vhodné hodnoty s nějakou stanovenou přesností jsem použil metodu půlení intervalu, jelikož horní mez  $w_{max}$  a dolní mez  $w_{min}$  jsou známy.

<sup>[14]</sup>Opakováním kroků [2](#) a [3](#) lze vypočítat zbylé potřebné povrchy s libovolným rozlišením souřadnice  $w$ .





Obrázek 10: Interpolační povrchy pro 4D interpolaci č. 1

Obrázek 11: Ukázka průběhu interpolace mezi povrchy přes souřadnici  $w$  č. 1

### 3.5 NURBS aproximace křivky

Mějme množinu  $m + 1$  bodů  $\mathbf{Q}_k$ ,  $k = 0, \dots, m$  a hledáme křivku stupně  $p$  ve tvaru:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad u \in [0, 1], \quad n \geq p \geq 1 \quad (37)$$

pro kterou platí:

- krajní body interpoluje, tj.:  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{C}(0)$ ,  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{C}(1)$
- zbytek bodů aproximuje váženou metodou nejmenších čtverců:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{N}^T \mathbf{W} \mathbf{N})^{-1} \mathbf{R} \quad (38)$$

kde

- $\mathbf{N}$  je matice  $(m - 1) \times (n - 1)$ :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

- $\mathbf{R}$  je matice  $(n - 1) \times (\dim \mathbf{Q})$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) \omega_1 \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) \omega_{m-1} \mathbf{R}_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \omega_1 \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \omega_{m-1} \mathbf{R}_{m-1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

kde

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{Q}_k - N_{0,p}(\bar{u}_k) \mathbf{Q}_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k) \mathbf{Q}_m \quad k = 1, \dots, m - 1 \quad (41)$$

- $\mathbf{W}$  je diagonální matice  $(m - 1) \times (m - 1)$ <sup>[15]</sup> s váhami jednotlivých bodů:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{m-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

---

<sup>[15]</sup>Krajní body jsou interpolovány a proto jejich váhy jsou vynechány

–  $\mathbf{P}$  je matice hledaných řídicích bodů  $(n + 1) \times (\dim \mathbf{Q})$

Opět musíme vhodně zvolit parametry  $\bar{u}_k$  a uzlový vektor  $\mathbf{U}$ . Parametr  $\bar{u}$  můžeme vypočítat pomocí předpisu (20).

Prvky uzlového vektoru poté vypočteme následovně:

$$d = \frac{m + 1}{n - p + 1} \quad (43)$$

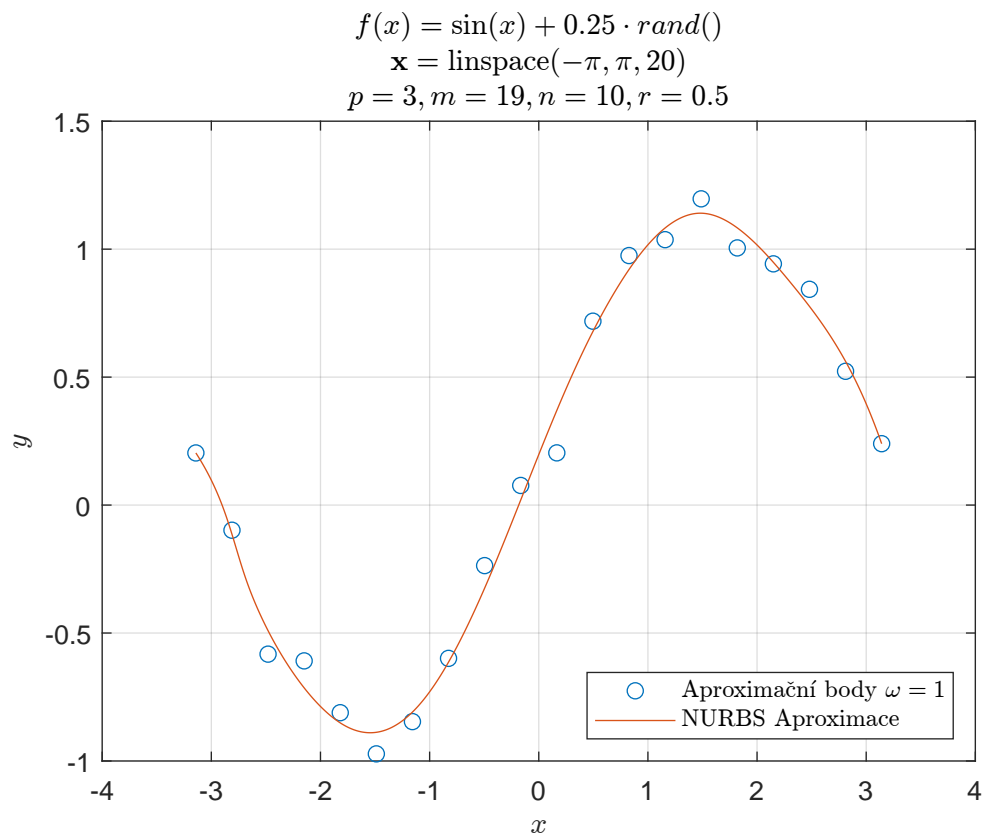
$$i = \lfloor j \cdot d \rfloor \quad \alpha = j \cdot d - i \quad (44)$$

$$u_{p+j} = (1 - \alpha) \cdot \bar{u}_{i-1} + \alpha \cdot \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n - p \quad (45)$$

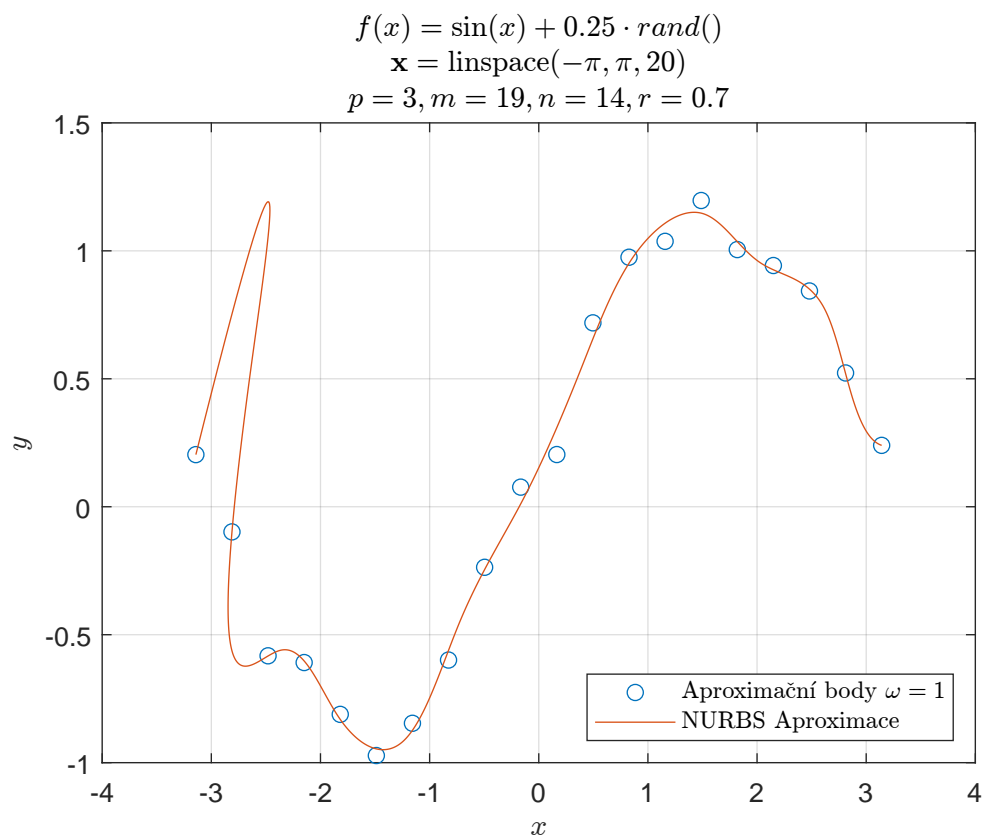
$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{n+1} = \dots = u_{n+p+1} = 1 \quad (46)$$

Takto navržená aproximace je citlivá na poměr počtu řídicích bodů a počtu aproximačních bodů tj.:  $r = \frac{n}{m+1}$ . Jak se  $r$  blíží k 1, tím větší je šance vzniku velkých kmitů, obzvláště v případě zašuměných dat — viz obrázky č. 12, 13, 14, 15.

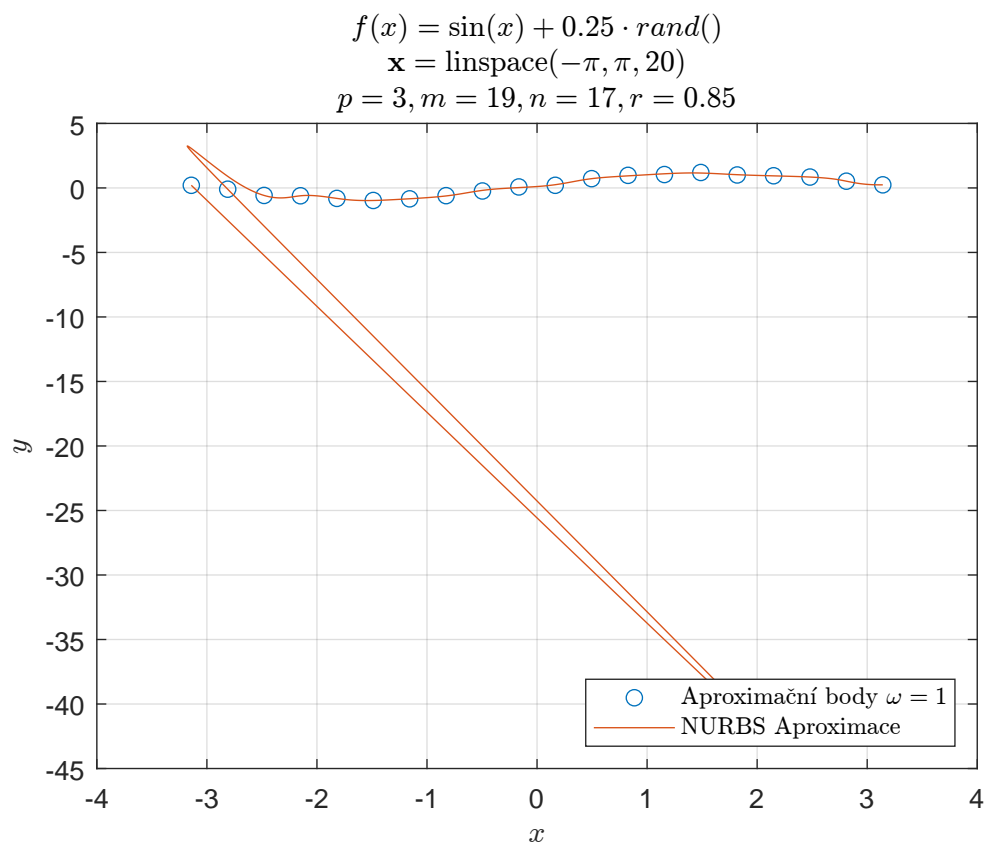
Ideálním případem pro tento algoritmus je když platí  $m \gg n$  — viz obrázek č. 16. Obrázky č. 17, 18, 19 dále ukazují chování algoritmu pro různé váhy bodů.



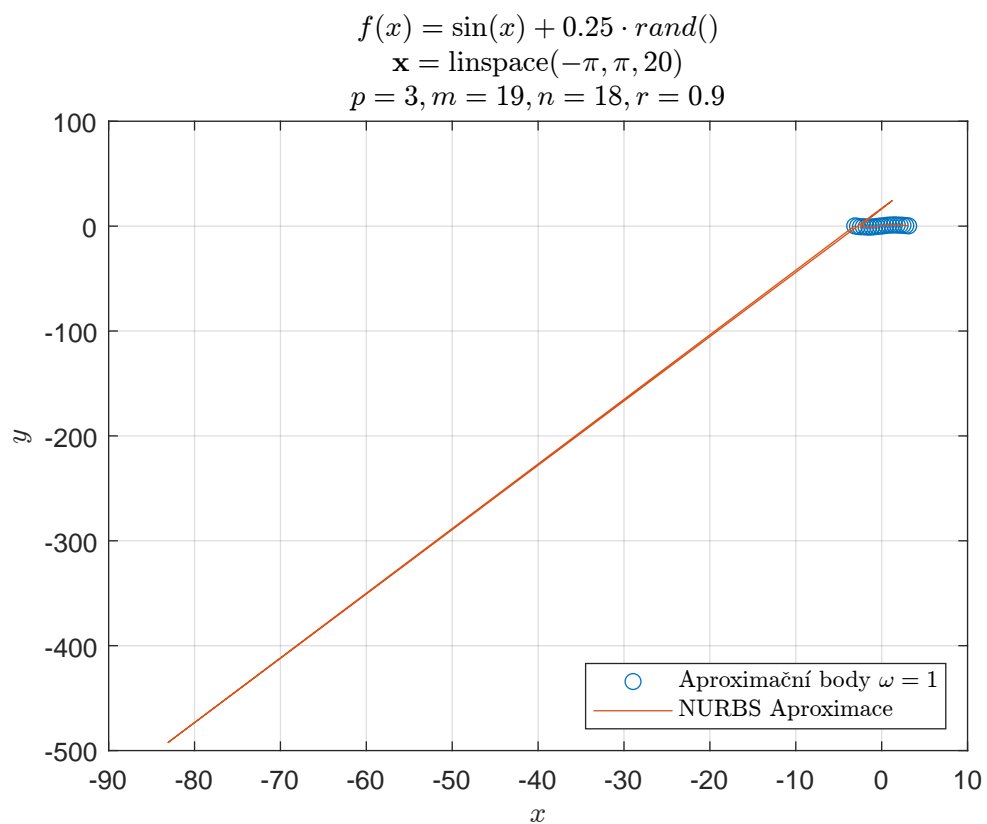
Obrázek 12: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry



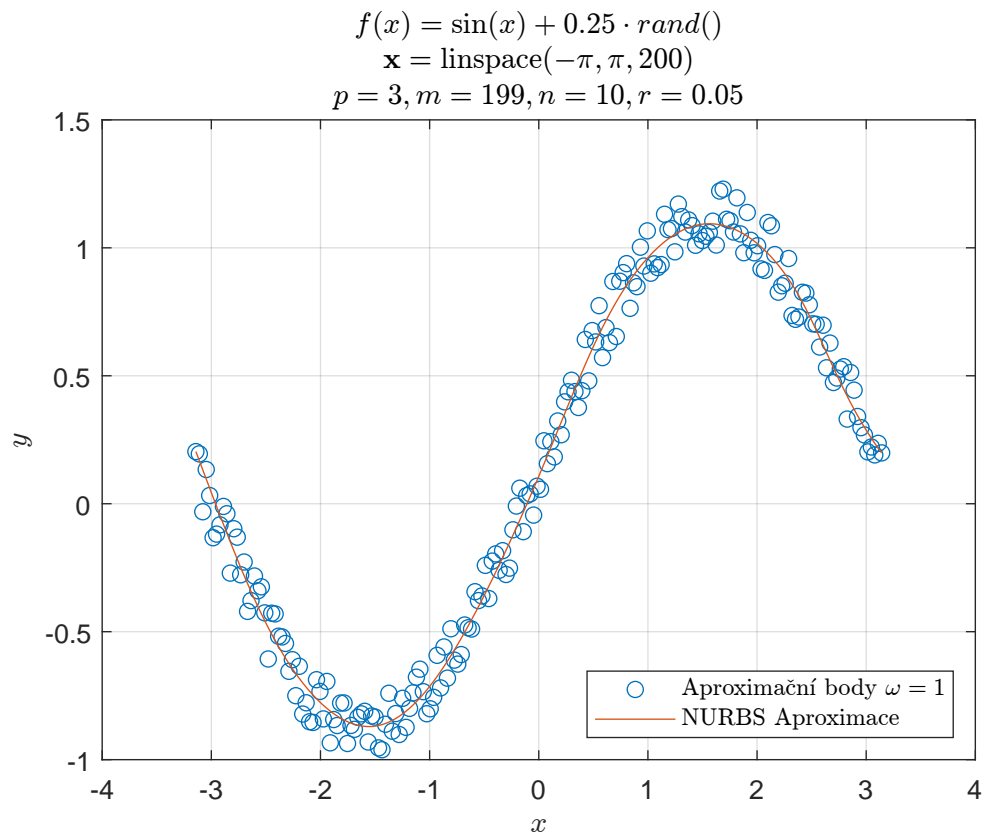
Obrázek 13: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry



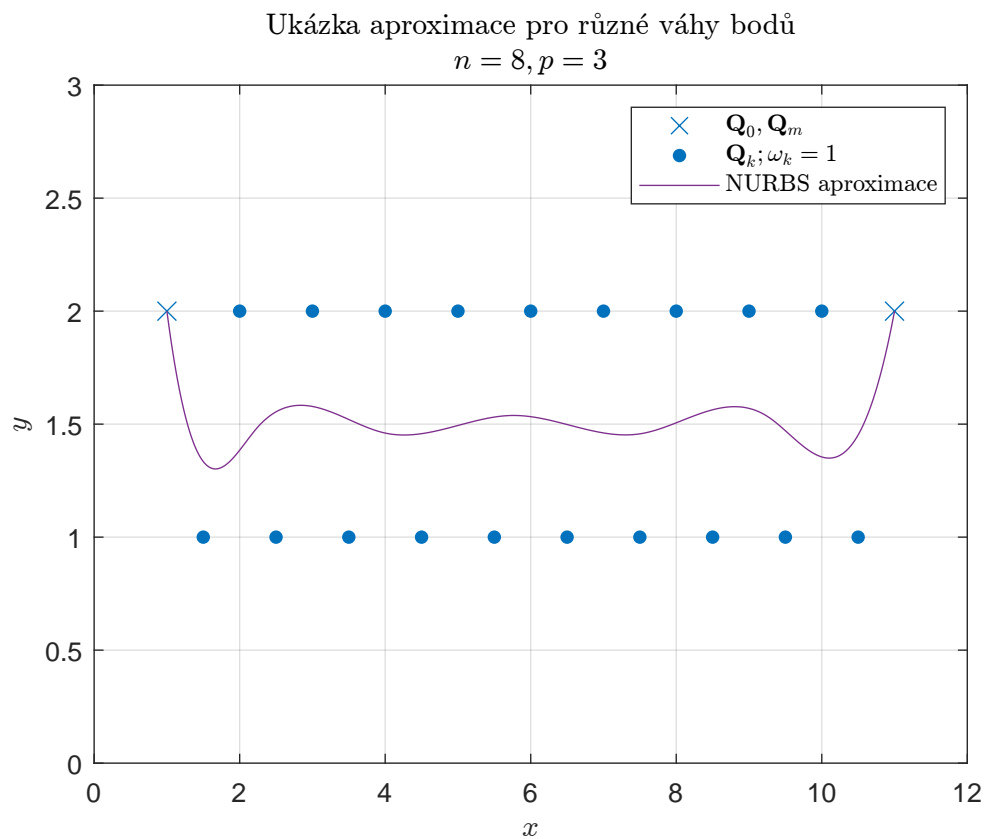
Obrázek 14: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry



Obrázek 15: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry



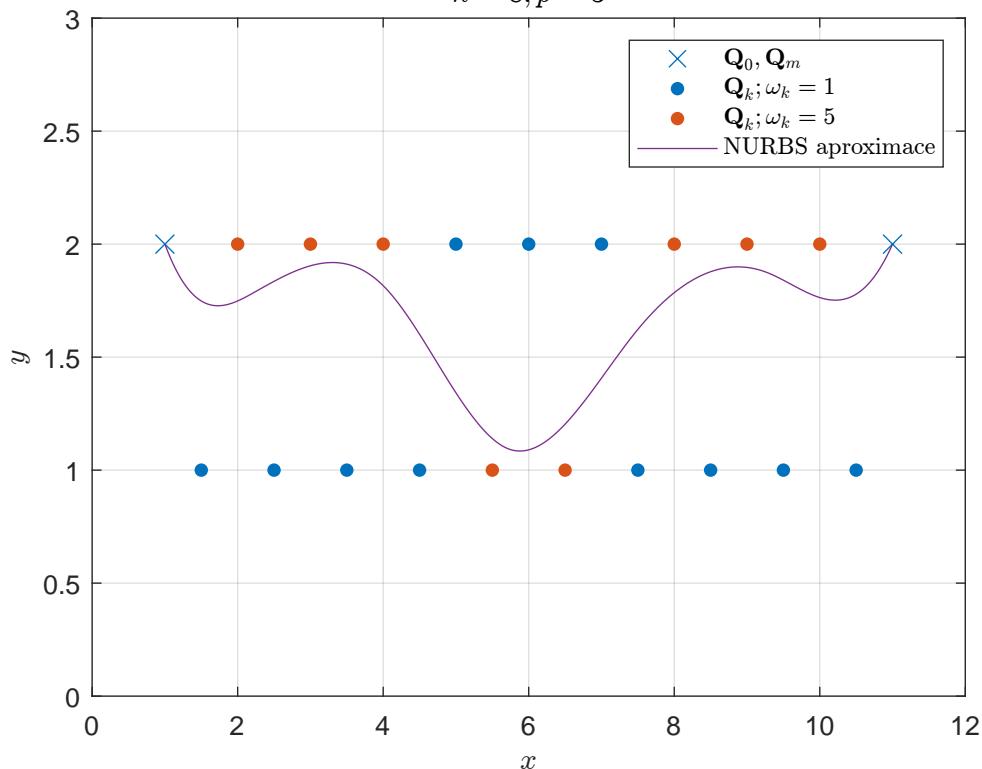
Obrázek 16: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé parametry



Obrázek 17: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů

Ukázka aproximace pro různé váhy bodů

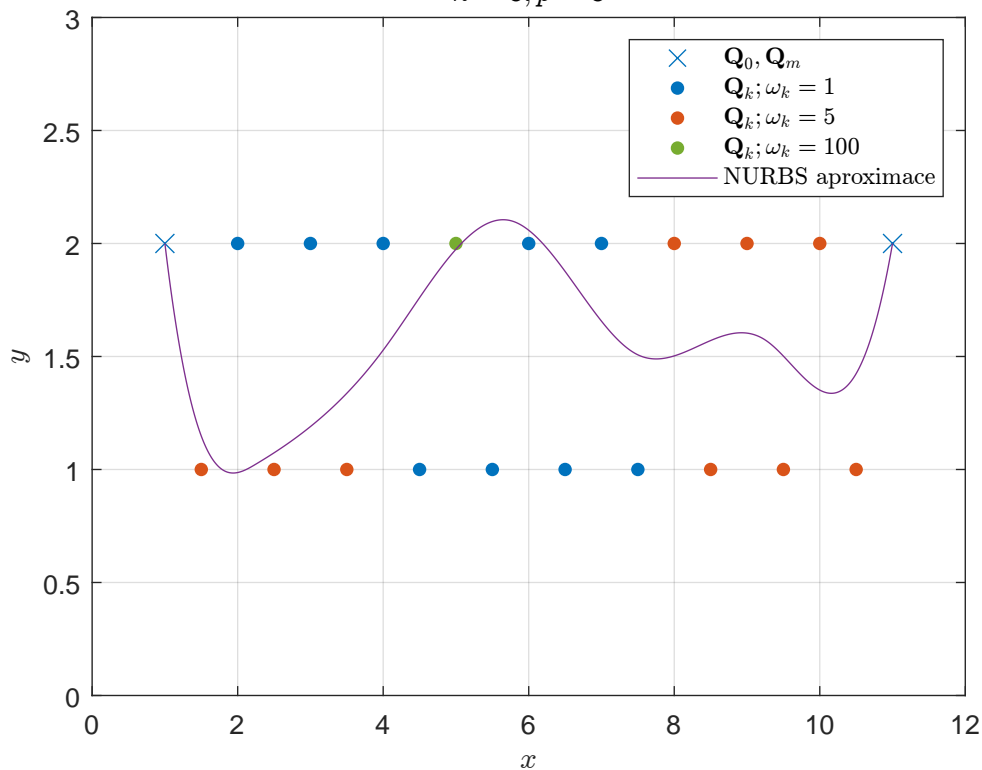
$$n = 8, p = 3$$



Obrázek 18: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů

Ukázka aproximace pro různé váhy bodů

$$n = 8, p = 3$$



Obrázek 19: Aproximace křivky metodou nejmenších čtverců pro různé váhy bodů

### 3.5.1 Cílená NURBS aproximace křivky

Pro naše využití bychom v mnoha případech chtěli aproximovat pouze část křivky a zbytek interpolovat, proto zavedeme tzv. cílenou aproximaci. Mějme množinu  $m + 1$  bodů  $\mathbf{Q}_k$   $k = 0, \dots, m$  a aproximační interval  $\mathbf{I}_{ap} \subset \mathbf{Q}_k$  o délce  $l$ .

Na tomto intervalu  $\mathbf{I}_{ap}$  provedeme aproximaci ze sekce 3.5 s  $n$  řídicími body,  $n \leq l - 2$ . Tímto získáme křivku, ze které vybereme několik vhodných (např.  $2n$  ekvidistantních) bodů  $\mathbf{Q}_{ap}$ . Interval  $\mathbf{I}_{ap}$  v  $\mathbf{Q}_k$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_{ap}$  a provedeme interpolaci.

Tímto se i vhodně vyhneme problému, který u aproximace nastává v případě  $n \sim l$ , protože si lze snadno ohlídat počet řídicích bodů  $n$  k počtu aproximačních bodů  $l$ . Ukázka této aproximace je na obrázcích č. 31 a 32.

### 3.6 NURBS aproximace povrchu

Stejně jako u interpolace počítáme s množinou  $(r + 1) \times (s + 1)$  bodů  $\mathbf{Q}_{k,l}$ ,  $k = 0, \dots, r$  a  $l = 0, \dots, s$  ležících v mřížce, které chceme aproximovat pomocí vážené metody nejmenších čtverců NURBS povrchem stupně  $p$  a  $q$  ve tvaru:

$$S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \quad (47)$$

Tento algoritmus interpoluje všechny rohové body a zbytek aproximuje, tj. aproximovaná plocha je tvořena body:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Q}_{0,0} & \hat{\mathbf{Q}}_{0,1} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{0,s-1} & & \mathbf{Q}_{0,s} & \\ \hat{\mathbf{Q}}_{1,0} & \ddots & & & & \hat{\mathbf{Q}}_{1,s} & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ \hat{\mathbf{Q}}_{r-1,0} & & & \ddots & & \hat{\mathbf{Q}}_{r-1,s} & \\ \mathbf{Q}_{r,0} & \hat{\mathbf{Q}}_{r,1} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{r-1,s-1} & & \mathbf{Q}_{r,s} & \end{array} \quad (48)$$

kde  $\hat{\mathbf{Q}}_{i,j}$  je aproximované body  $\mathbf{Q}_{i,j}$ .

Stejně jako u interpolace povrchu budeme nejprve aproximovat křivky v jednom směru a poté ve druhém. Parametry  $\bar{u}_k$  a  $\bar{v}_l$  a uzlové vektory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  získáme stejně jako u interpolace povrchu - viz 3.4. Nejprve aproximujeme body ve směru  $u$ , tím získáme



tenzor řídících bodů aproximačních křivek  $\mathbf{T}$  o rozměrech  $(n+1) \times (s+1) \times (\dim \mathbf{Q})$ :

$$\mathbf{T}_{0,i} = \mathbf{Q}_{0,i} \quad i = 0, \dots, s \quad (49)$$

$$\mathbf{T}_{n,i} = \mathbf{Q}_{r,i} \quad i = 0, \dots, s \quad (50)$$

$$\mathbf{T}_{1\dots n-1,i} = (\mathbf{N}_u^T \mathbf{W}_u(i) \mathbf{N}_u)^{-1} \mathbf{R}_u(i) \quad i = 0, \dots, s \quad (51)$$

kde:

- $\mathbf{N}_u$  je matice  $(r-1) \times (n-1)$ :

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{r-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{r-1}) \end{bmatrix} \quad (52)$$

- $\mathbf{W}_u(i)$  je matice  $(r+1) \times (s+1)$  obsahující váhy bodů  $\mathbf{Q}_{0\dots r,0\dots,s}$ :

$$\mathbf{W}_u(i) = \begin{bmatrix} \omega_0^u(i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^u(i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_r^u(i) \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{W}_{0\dots r,i}) \quad (53)$$

kde matice  $\mathbf{W}$  obsahuje váhy jednotlivých bodů, tj.  $\mathbf{W}_{i,j}$  odpovídá váze bodu  $\mathbf{Q}_{i,j}$  (váhy rohových bodů nehrají roli).

- $\mathbf{R}_u(i)$  je matice  $(r-1) \times (\dim \mathbf{Q})$ :

$$\mathbf{R}_u(i) = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)\omega_1^u(i)\mathbf{R}_1^u(i) + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{r-1})\omega_{r-1}^u(i)\mathbf{R}_{r-1}^u(i) \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1)\omega_1^u(i)\mathbf{R}_1^u(i) + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{r-1})\omega_{r-1}^u(i)\mathbf{R}_{r-1}^u(i) \end{bmatrix} \quad (54)$$

kde

$$\mathbf{R}_k^u(i) = \mathbf{Q}_{k,i} - N_{0,p}(\bar{u}_k)\mathbf{Q}_{0,i} - N_{n,p}(\bar{u}_k)\mathbf{Q}_{r,i} \quad k = 1, \dots, r-1 \quad (55)$$

Nyní stačí vypočítat řídící body aproximovaného povrchu  $\mathbf{P}$  o stejných rozměrech jako je  $\mathbf{T}$ . Postup je analogický ke směru  $u$ , kde jako nové aproximační body použijeme  $\mathbf{T}$ , tj.:

$$\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{T}_{i,0} \quad i = 0, \dots, n \quad (56)$$

$$\mathbf{P}_{i,m} = \mathbf{T}_{i,s} \quad i = 0, \dots, n \quad (57)$$

$$\mathbf{P}_{i,1\dots m-1,i} = (\mathbf{N}_v^T \mathbf{W}_v(i) \mathbf{N}_v)^{-1} \mathbf{R}_v(i) \quad i = 0, \dots, n \quad (58)$$

kde:

- $\mathbf{N}_v$  je matice  $(s - 1) \times (m - 1)$ :

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_{1,q}(\bar{v}_1) & \cdots & N_{m-1,q}(\bar{v}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,q}(\bar{v}_{s-1}) & \cdots & N_{m-1,q}(\bar{v}_{s-1}) \end{bmatrix} \quad (59)$$

- $\mathbf{W}_v(i)$  je diagonální matice  $(n + 1) \times (s + 1)$  obsahující váhy bodů  $\mathbf{T}_{0\dots n,0\dots s}$ :

$$\mathbf{W}_v(i) = \begin{bmatrix} \omega_0^v(i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^v(i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_s^v(i) \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{W}_{i,0\dots s}^V) \quad (60)$$

kde matice  $\mathbf{W}^V$  je přeškálovaná matice  $\mathbf{W}$  na velikost  $(n + 1) \times (s - 1)$ , stejným způsobem jako se škáluje obrázek, tj.:

$$\mathbf{W}^V = \text{imresize}(\mathbf{W}, [n + 1, s + 1]) \quad (61)$$

Po provedení aproximace ve směru  $u$  máme pro aproximaci ve směru  $v$ , pouze  $(n + 1) \times (s + 1)$  bodů (namísto původních  $(r + 1) \times (s + 1)$ ), proto je tato redukce nutná. Důležité je, že výsledné prvky matice v sobě nějakým způsobem nesou váhy pro matici původní velikosti. Funkce `imresize` může produkovat záporné hodnoty, ty ale stačí nahradit například výchozí hodnotou 1.

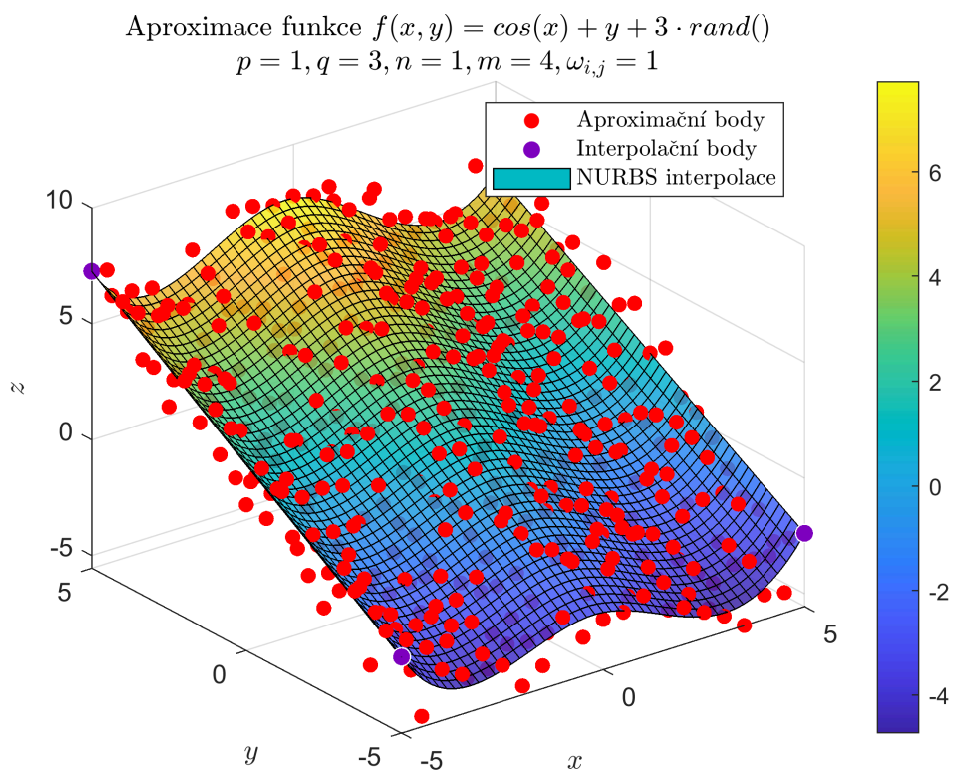
- $\mathbf{R}_v(i)$  je matice  $(s - 1) \times (\dim \mathbf{Q})$ :

$$\mathbf{R}_v(i) = \begin{bmatrix} N_{1,q}(\bar{v}_1)\omega_1^v(i)\mathbf{R}_1^v(i) + \cdots + N_{1,q}(\bar{v}_{s-1})\omega_{s-1}^v\mathbf{R}_{s-1}^v(i) \\ \vdots \\ N_{m-1,q}(\bar{v}_1)\omega_1^v\mathbf{R}_1^v(i) + \cdots + N_{m-1,q}(\bar{v}_{s-1})\omega_{s-1}^v\mathbf{R}_{s-1}^v(i) \end{bmatrix} \quad (62)$$

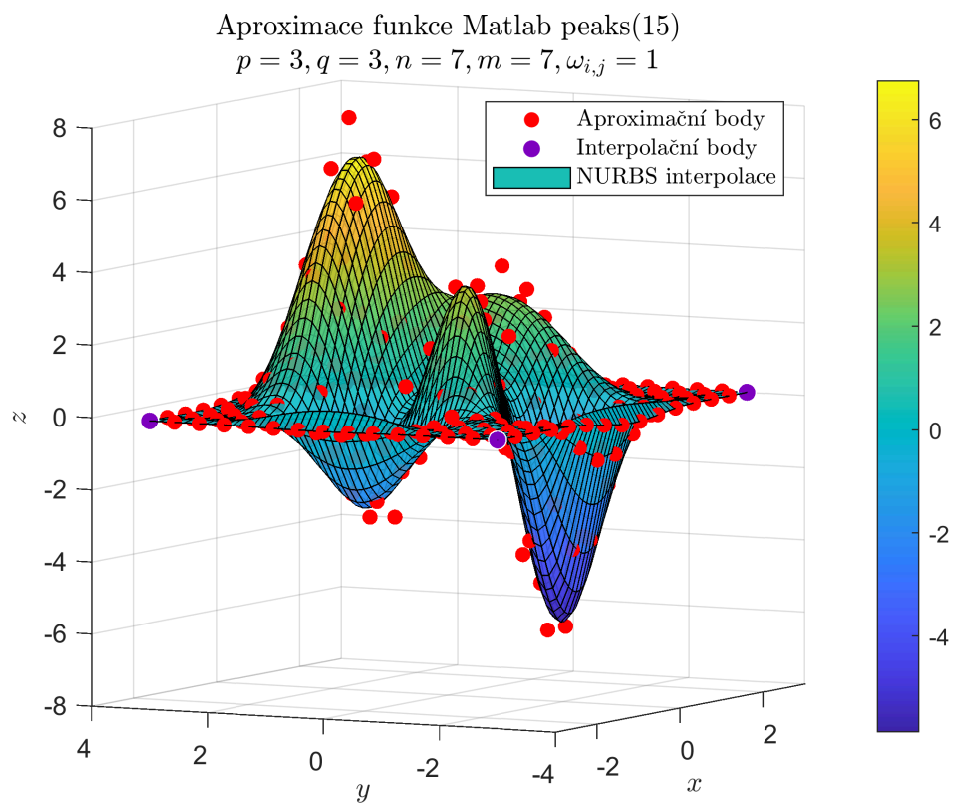
kde

$$\mathbf{R}_l^v(i) = \mathbf{T}_{i,l} - N_{0,q}(\bar{v}_l)\mathbf{T}_{i,0} - N_{m,q}(\bar{v}_l)\mathbf{T}_{i,s} \quad l = 1, \dots, s - 1 \quad (63)$$

Ukázky různých aproximací jsou na obrázcích č. 20, 21, 22, 23, 24 a 25.

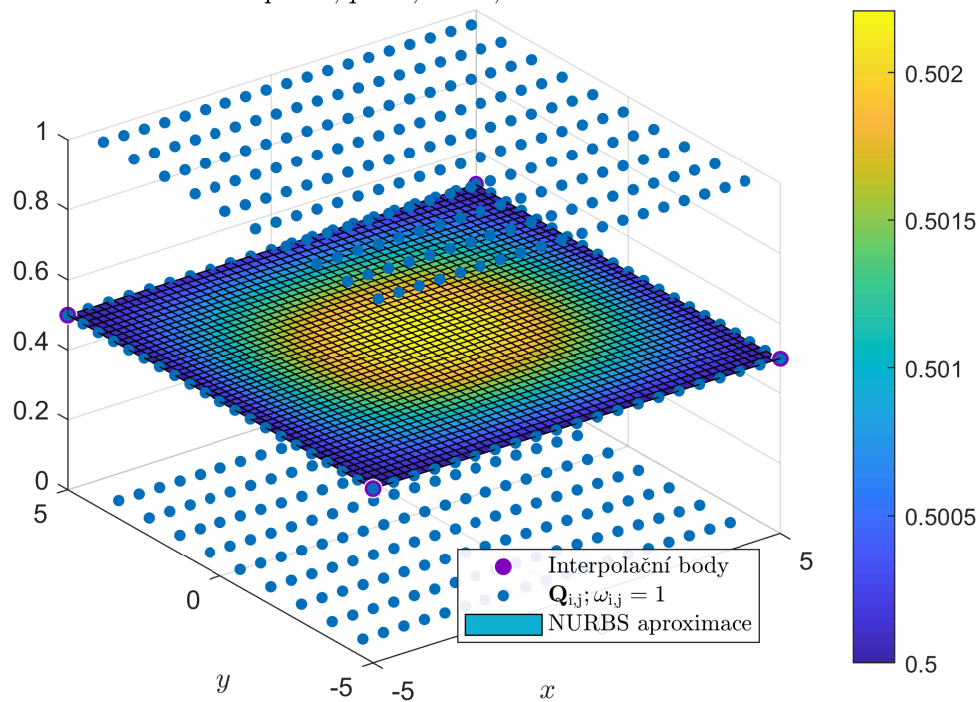


Obrázek 20: Aproximace povrchu metodou nejmenších čtverců č. 1



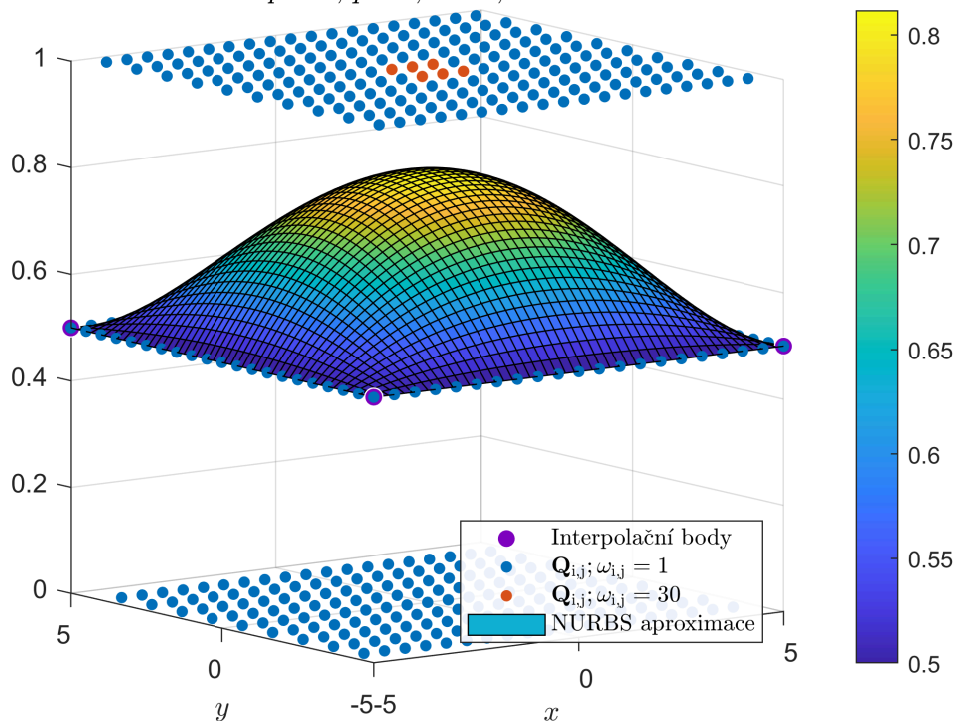
Obrázek 21: Aproximace povrchu metodou nejmenších čtverců č. 2

Ukázka aproximace povrchu pro různé váhy bodů  
 $p = 3, q = 3, n = 3, m = 3$



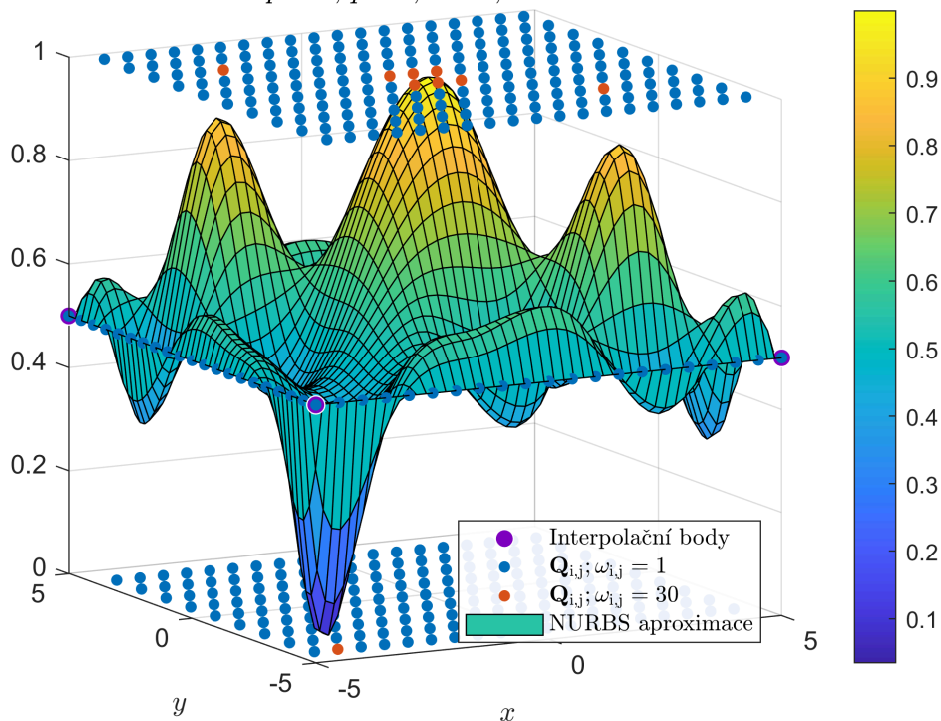
Obrázek 22: Aproximace povrchu pro různé váhy č. 1

Ukázka aproximace povrchu pro různé váhy bodů  
 $p = 3, q = 3, n = 3, m = 3$



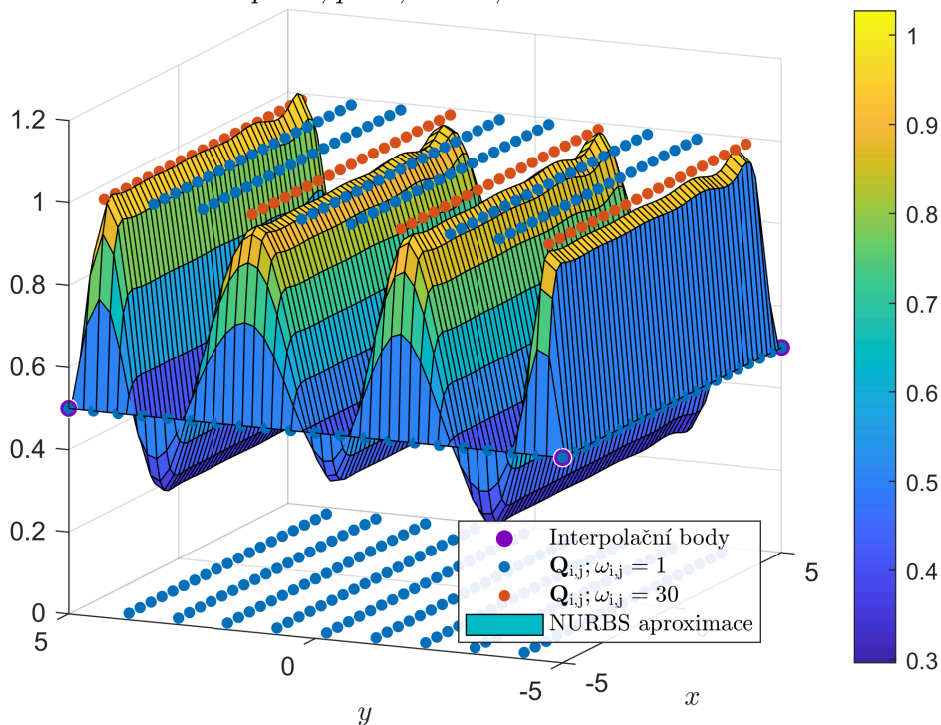
Obrázek 23: Aproximace povrchu pro různé váhy č. 2

Ukázka aproximace povrchu pro různé váhy bodů  
 $p = 3, q = 3, n = 7, m = 7$



Obrázek 24: Aproximace povrchu pro různé váhy č. 3

Ukázka aproximace povrchu pro různé váhy bodů  
 $p = 3, q = 3, n = 10, m = 10$



Obrázek 25: Aproximace povrchu pro různé váhy č. 4

### 3.6.1 NURBS aproximace povrchu s užitím Gaussovy funkce

Metoda v sekci [NURBS aproximace povrchu](#) vyžaduje, aby aproximační body ležely v mřížce (3D i 4D případ), a proto není vhodná pro účely této práce. Proto jsem přišel s následující metodou, která sice není postavena na žádném matematickém kritériu (jako například nejmenší čtverce v předchozích aproximacích), ale nevyžaduje, aby aproximační body ležely v mřížce, a poskytuje postačující výsledky.

Metoda využívá váženého průměrování a Gaussovy funkce  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \exp\left(-\left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right)\right) \quad (64)$$

kde

- $x_0$  – střední hodnota osy  $x$
- $y_0$  – střední hodnota osy  $y$
- $\sigma_x$  – variance osy  $x$
- $\sigma_y$  – variance osy  $y$

Užitím Gaussovy funkce je zajištěno, že váha aproximovaného bodu se vzdáleností klesá k nule (viz obrázky č. 26 a 29), díky tomu je možné provádět vážený průměr přes všechny body<sup>[16]</sup>.

Algoritmus vyžaduje libovolnou množinu původních bodů  $\mathbf{Q}_i$ , množinu aproximačních bodů  $\bar{\mathbf{Q}}_j$  s množinou příslušných vah  $\omega_j$  a již zmíněné parametry  $\sigma_x, \sigma_y$ <sup>[17]</sup>. Kroky algoritmu jsou následující:

1. Zvol další aproximační bod  $\bar{\mathbf{Q}} = [x_{ap}, y_{ap}, z_{ap}]$  a jeho váhu  $w$
2. Projdi všechny body  $\mathbf{Q}_i = [x, y, z]$  a pro každý proved:

$$(a) \quad \bar{\omega} = \omega \cdot f(x, y) \quad x_0 = x_{ap}, \quad y_0 = y_{ap}$$

(Výpočet upravené váhy na základě vzdálenosti od aproximovaného bodu)

$$(b) \quad \bar{z} = \frac{z + z_{ap} \cdot \bar{\omega}}{\bar{\omega} + 1}$$

(Výpočet nové hodnoty  $z$  na základě váženého průměru)

---

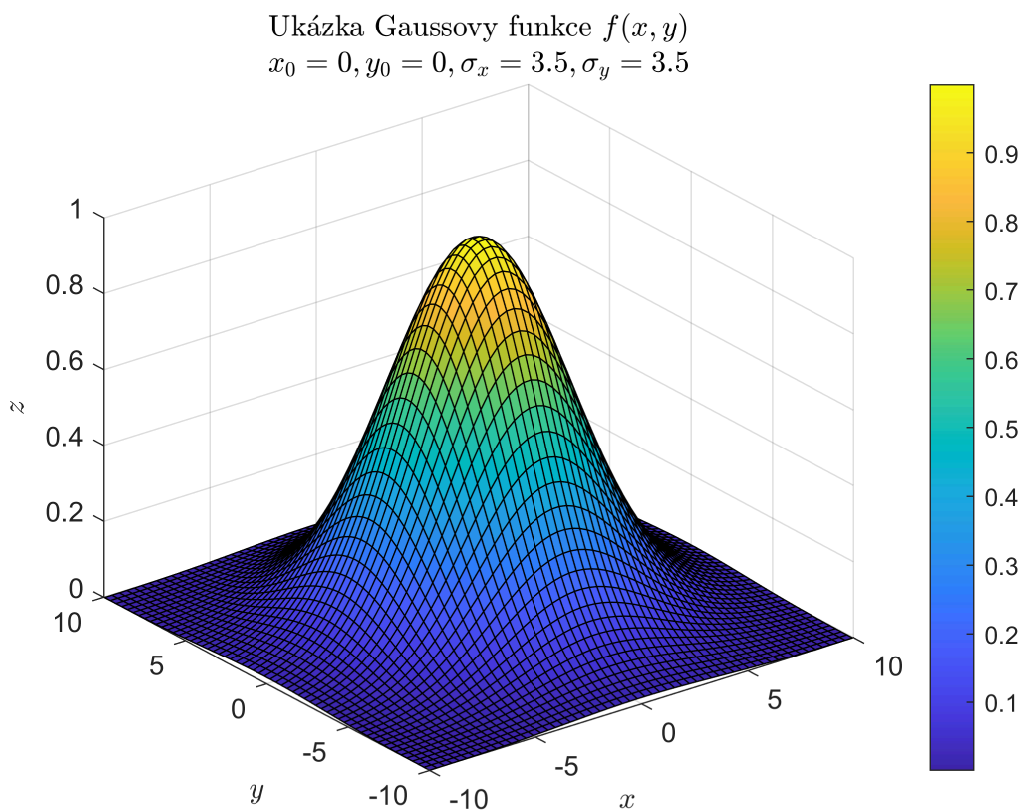
<sup>[16]</sup>V případě nadměrného množství bodů lze průměrování omezit na okolí aproximovaného bodu pro snížení výpočetní náročnosti.

<sup>[17]</sup>V případě potřeby algoritmus lze snadno upravit tak, že parametry  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  mohou být zadány individuálně pro každý aproximační bod  $\bar{\mathbf{Q}}_j$

(c) Nahraď  $z$  za  $\bar{z}$

3. Vrať se na krok 1, pokud si neprošel všechny aproximační body, jinak konec

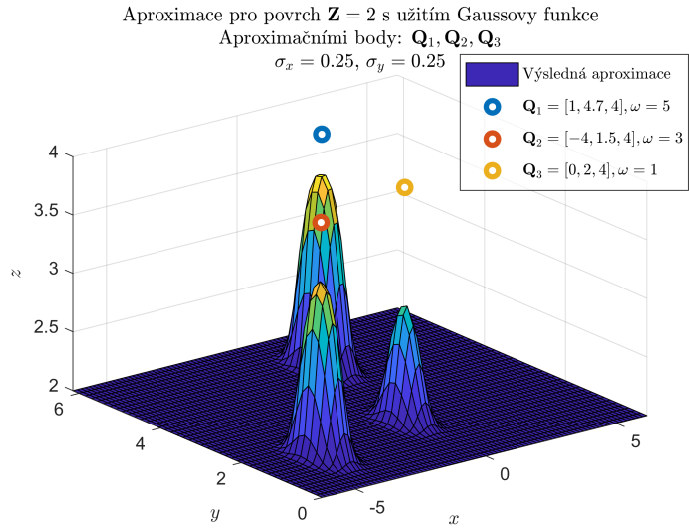
Pomocí parametrů  $\sigma_x, \sigma_y$  lze upřednostnit aproximaci v ose  $x$  nebo  $y$ . Tento efekt lze vidět na obrázcích č. 27a, 27b, 27c, 27d, 28a, 28b, 28c, 28d, kde je obsažena i samotná ukázka takto navržené aproximace<sup>[18]</sup>.



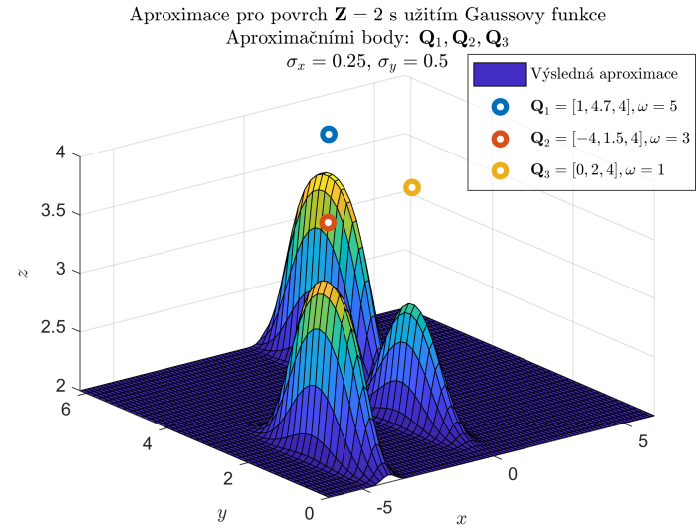
Obrázek 26: Ukázka Gaussovy funkce  $f(x, y)$

<sup>[18]</sup>Přestože ukázky obsahují povrchy tvořeny body v mřížce, není to vyžadováno výpočetním algoritmem.

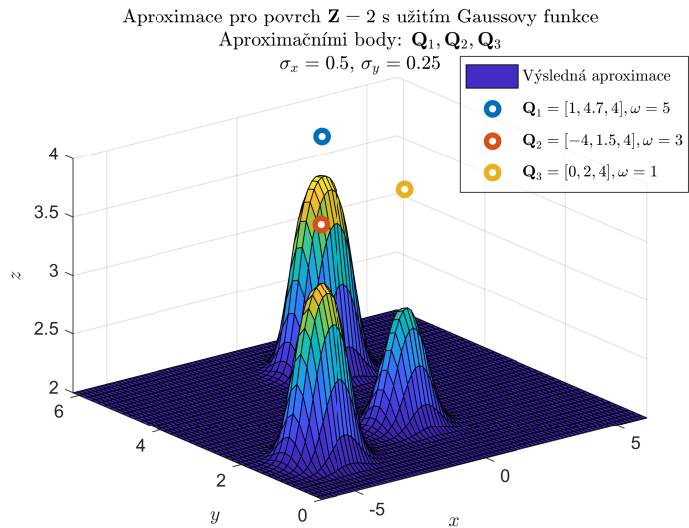




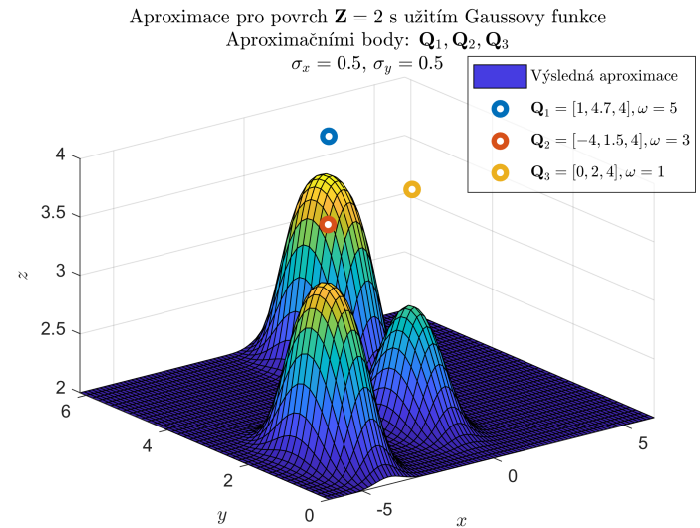
(a) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 1



(b) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 2



(c) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 3

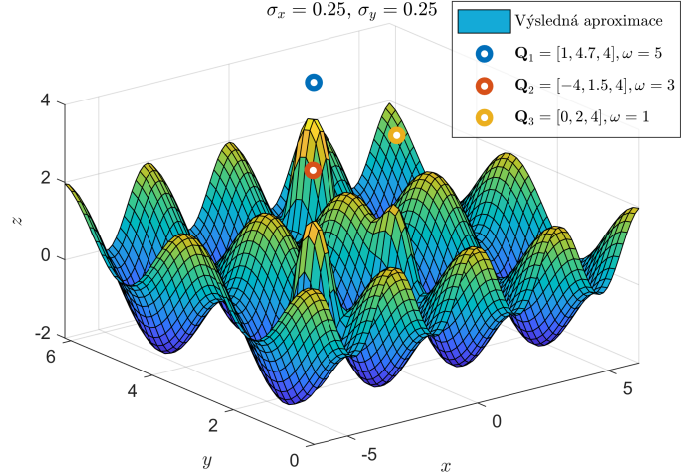


(d) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 4

Obrázek 27: Ukázka aproximace povrchu č. 1 s užitím Gaussovy funkce s různými parametry

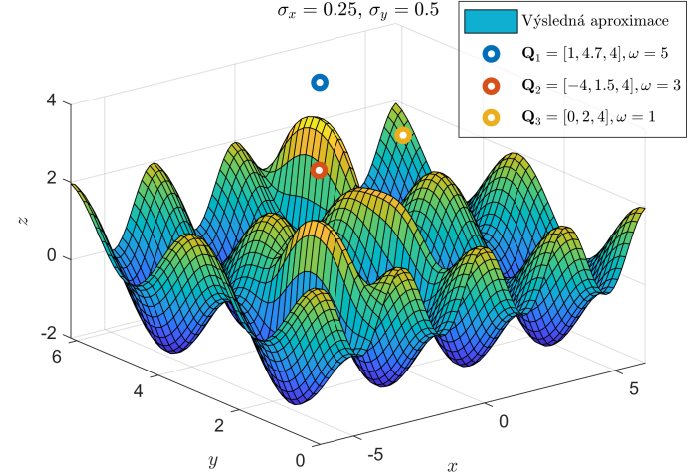


Aproximace pro povrch  $Z = \cos(2Y) + \cos(2X)$  s užitím Gaussovy funkce  
 Aproximačními body:  $Q_1, Q_2, Q_3$   
 $\sigma_x = 0.25, \sigma_y = 0.25$



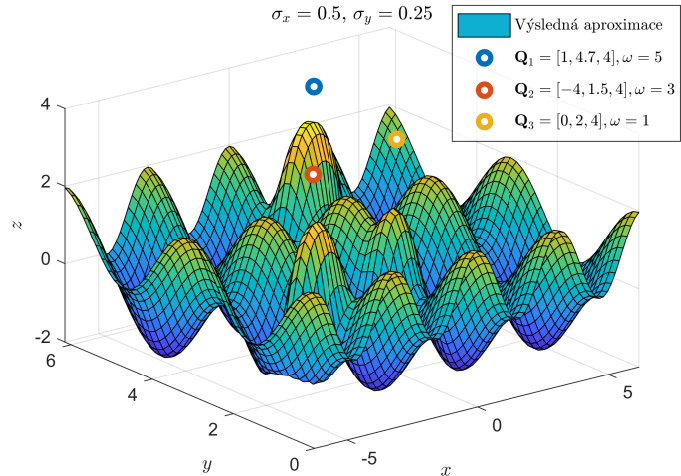
(a) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 5

Aproximace pro povrch  $Z = \cos(2Y) + \cos(2X)$  s užitím Gaussovy funkce  
 Aproximačními body:  $Q_1, Q_2, Q_3$   
 $\sigma_x = 0.25, \sigma_y = 0.5$



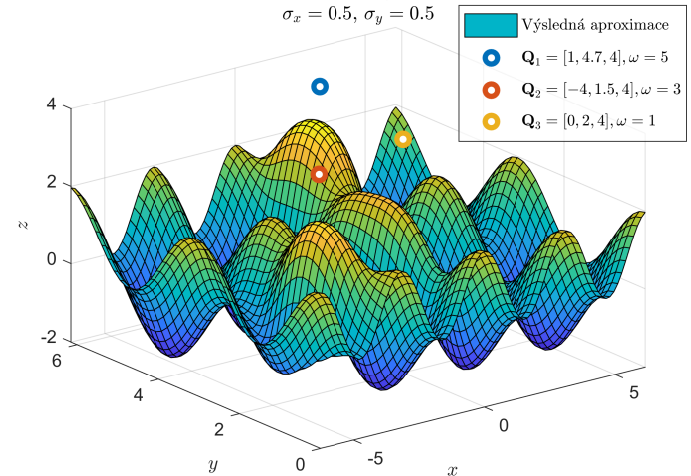
(b) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 6

Aproximace pro povrch  $Z = \cos(2Y) + \cos(2X)$  s užitím Gaussovy funkce  
 Aproximačními body:  $Q_1, Q_2, Q_3$   
 $\sigma_x = 0.5, \sigma_y = 0.25$



(c) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 7

Aproximace pro povrch  $Z = \cos(2Y) + \cos(2X)$  s užitím Gaussovy funkce  
 Aproximačními body:  $Q_1, Q_2, Q_3$   
 $\sigma_x = 0.5, \sigma_y = 0.5$



(d) Aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce č. 8

Obrázek 28: Ukázka aproximace povrchu č. 2 s užitím Gaussovy funkce s různými parametry

### 3.6.2 NURBS aproximace 4D povrchu s užitím Gaussovy funkce

Opět se jedná o mnou navržený algoritmus dostačující pro účely této práce. Jelikož toto je vesměs nejdůležitější aproximační funkce této práce, matematicky lépe podmíněný algoritmus může být otázkou dalšího výzkumu.

Pro aproximaci ve 4D prostoru lze lehkými úpravami použít algoritmus zmíněný v sekci [NURBS aproximace povrchu s užitím Gaussovy funkce](#). Stačí rozšířit Gaussovu funkci  $f(x, y)$  na funkci  $f(x, y, w)$ <sup>[19]</sup> (viz animace č. 29), tj.:

$$f(x, y, w) = \exp \left( - \left( \frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} + \frac{(w - w_0)^2}{2\sigma_w^2} \right) \right) \quad (65)$$

kde

- $x_0$  — střední hodnota osy  $x$
- $y_0$  — střední hodnota osy  $y$
- $w_0$  — střední hodnota osy  $w$
- $\sigma_x$  — variance osy  $x$
- $\sigma_y$  — variance osy  $y$
- $\sigma_w$  — variance osy  $w$

Prvním krokem aproximace je interpolace přes souřadnici  $w$ , stejně jako v sekci [Interpolace 4D nadpovrchu](#). Na takto získané povrchy pro příslušné hodnoty souřadnice  $w$  stačí aplikovat aproximaci s touto novou Gaussovy funkcí tří proměnných ze sekce [NURBS aproximace povrchu s užitím Gaussovy funkce](#).

Ukázka aproximace s různými parametry pro aproximační body  $\bar{\mathbf{Q}}_i$  jsou na animacích č. 30a, 30b, kde aproximační body následující:

$$\bar{\mathbf{Q}}_1 = [x, y, z, w] = [-0.13319 \quad -0.13319 \quad 5 \quad 15] \quad (66)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_2 = [x, y, z, w] = [-4 \quad 1.5 \quad 4 \quad 16] \quad (67)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_3 = [x, y, z, w] = [-4 \quad -4 \quad 6 \quad 20] \quad (68)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_4 = [x, y, z, w] = [4 \quad -3 \quad 7 \quad 25] \quad (69)$$

---

<sup>[19]</sup>Jelikož chceme aproximovat souřadnici  $z$  (stejně jako ve 3D případě), Gaussova funkce má jako třetí vstupní parametr souřadnici  $w$

Obrázek 29: Ukázka průběhu Gaussovy funkce  $f(x, y, w)$

(a) 4D aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce  
č. 1  
(Průhlednost aproximačních bodů odpovídá jejich vzdálenosti v ose  $w$ )

(b) 4D aproximace pro různé parametry Gaussovy funkce  
č. 2  
(Průhlednost aproximačních bodů odpovídá jejich vzdálenosti v ose  $w$ )

Obrázek 30: Ukázka aproximace 4D povrchů s užitím Gaussovy funkce

## 4 Návrh systému automatické kalibrace proudové tabulky

Tato kapitola se již zabývá aplikací NURBS teorie na náš problém — tj. užití NURBS teorie pro práci s kalibrační tabulkou. Dále se kapitola zaměřuje na sběr vhodných hodnot pro aktualizaci kalibrační tabulky.

### 4.1 Aplikace NURBS teorie pro modelování kalibrační tabulky

V této kapitole je již použita NURBS interpolace a aproximace na konkrétních datech. Nejprve je uvedena ukázka na 1 DoF modelu, poté na řezu kalibrační tabulkou, kde lze vidět cílenou aproximaci, dále je uvedena 3D a 4D interpolace kompenzačních tabulek.

#### 4.1.1 1 DoF model

Na obrázku č. 31 je ukázka cílené aproximace křivky pro náš 1 DoF model systému. Aproximační body jsme získali úpravou fyzikálních parametrů modelu, zvolené body jsou záměrně mimo „mřížku“ od původních bodů. Ukázka obsahuje výsledky pro dvě různé váhy aproximačních bodů.

#### 4.1.2 2D řez kalibrační tabulkou

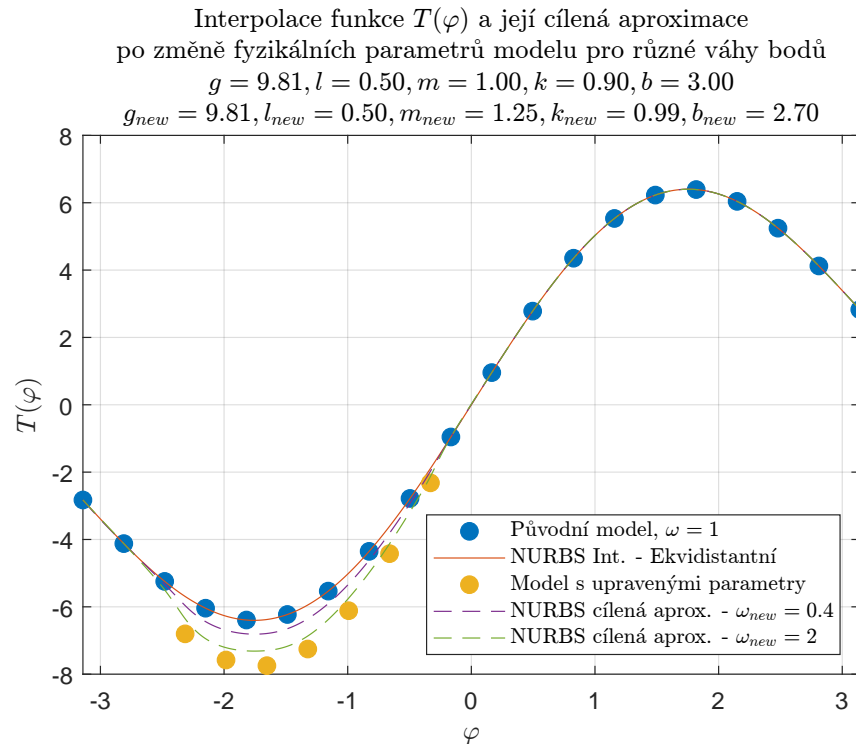
Na obrázcích č. 32, 33 je ukázka cílené aproximace křivky na jedné z kalibračních tabulek pro fixní hodnotu osy *Prop*, kde je lépe ukázáno jak cílená aproximace funguje v detailu. Řez tabulkou jsme získali právě zvolením fixní hodnoty kloubu *Prop*.

#### 4.1.3 Interpolace kalibračních tabulek

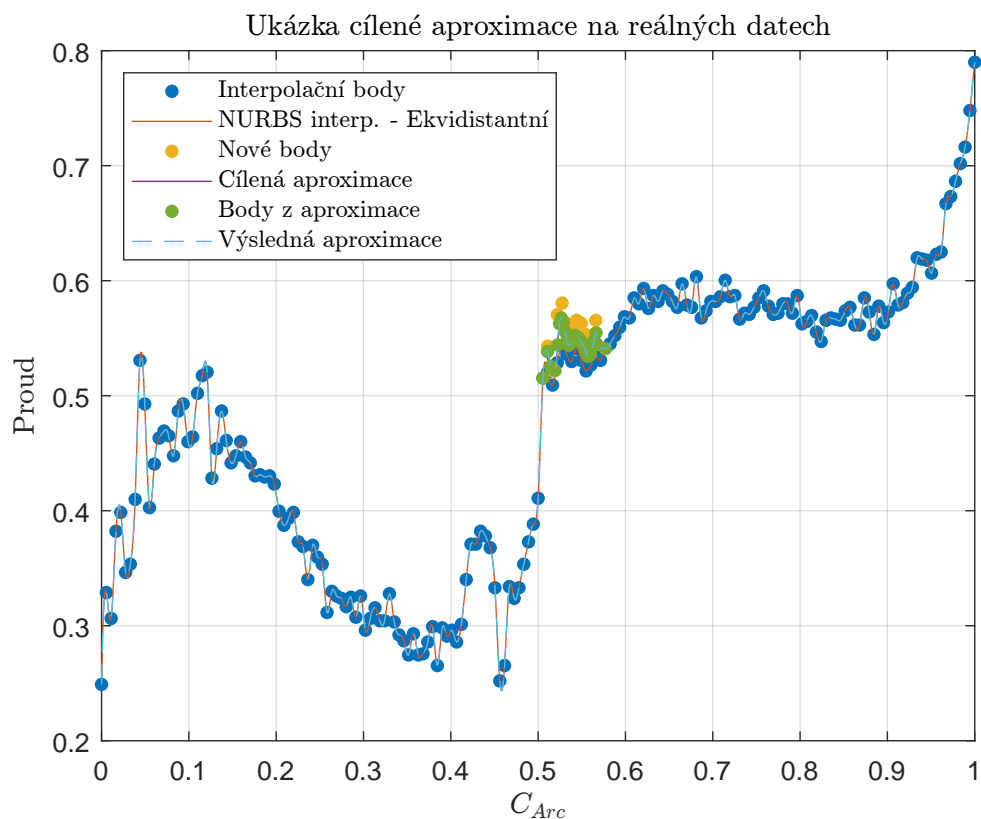
Na obrázcích č. 34, 35, 36, 37 lze napravo vidět aplikaci NURBS interpolace povrchu a nalevo lze vidět původní data. Stejně jako v předchozích ukázkách se i zde používají báze funkce s polynomy 3. stupně, tj.  $p = q = 3$ .

#### 4.1.4 Interpolace napříč kalibračními tabulkami

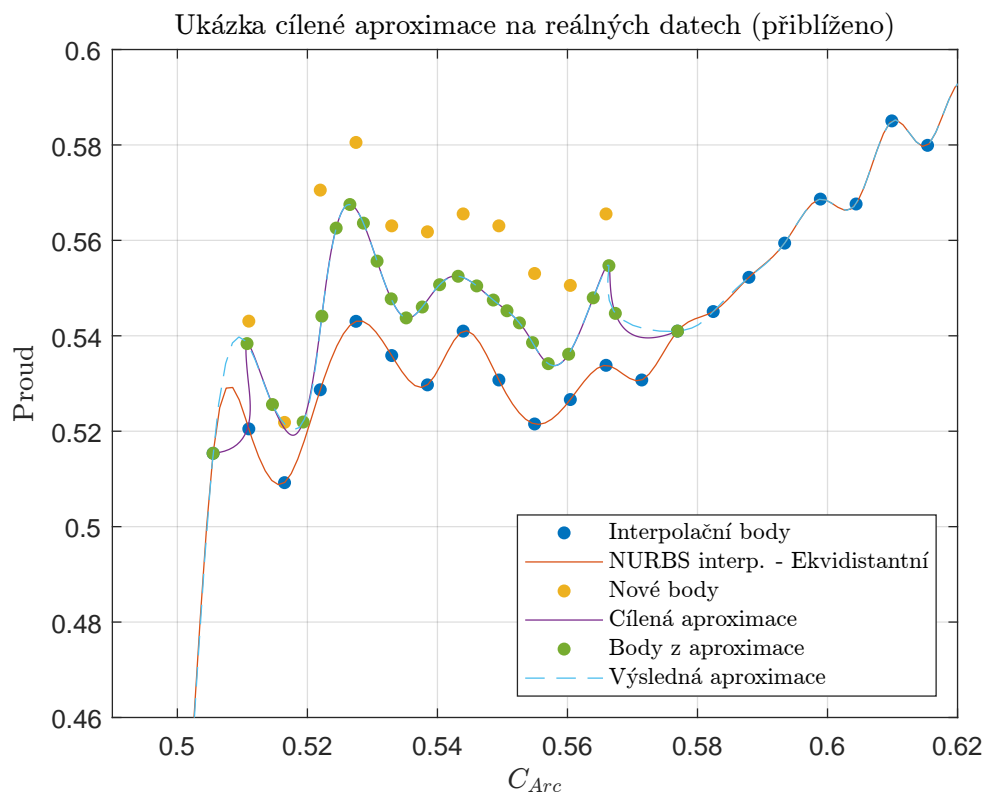
Jak již bylo zmíněno, máme 2 kalibrační tabulky pro dvě polohy kloubu  $Ids$ , a proto bychom rádi chtěli přes tuto souřadnici interpolovat, abychom získali kalibrační tabulky mezi těmito dvěma polohami. K tomuto využijeme NURBS interpolaci nadpovrchu ze sekce [Interpolace 4D nadpovrchu](#), výsledné animace jsou na obrázcích č. 39, 41.



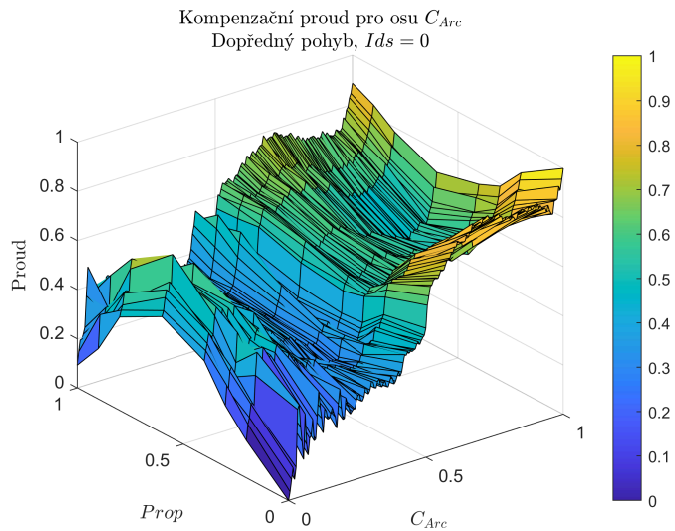
Obrázek 31: Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na 1 DoF modelu pro různé váhy nových bodů



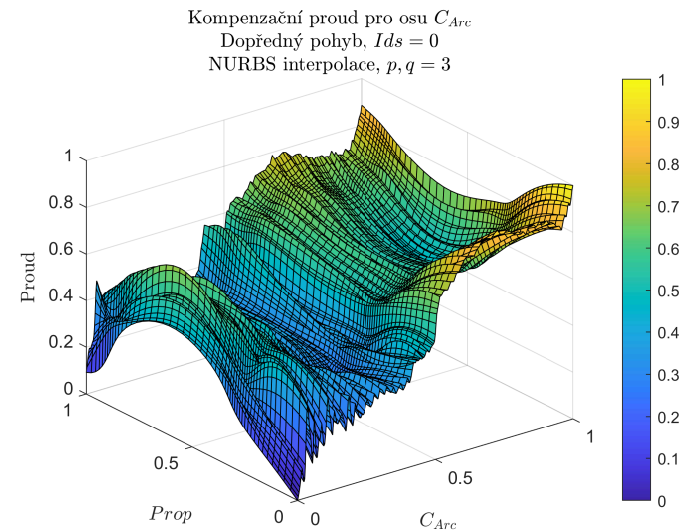
Obrázek 32: Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na reálných datech



Obrázek 33: Cílená aproximace křivky metodou nejmenších čtverců na reálných datech (přiblíženo)

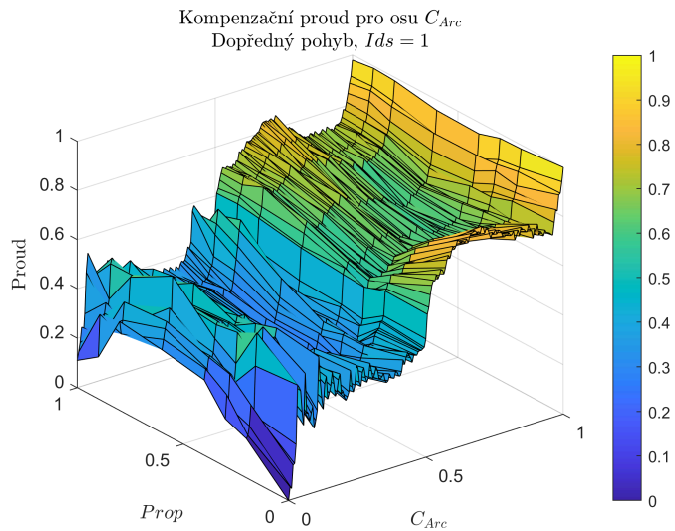


(a) Lineární interpolace kompenzační tabulky proudu č. 1

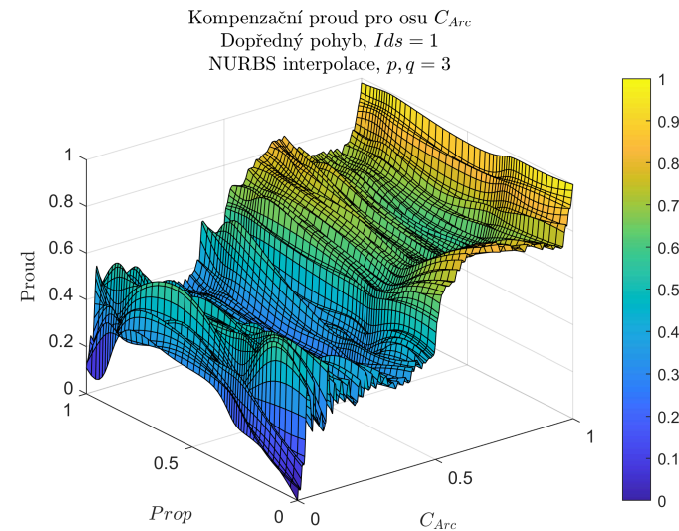


(b) NURBS interpolace kompenzační tabulky proudu č. 1

Obrázek 34: Ukázka interpolace na reálných datech č. 1



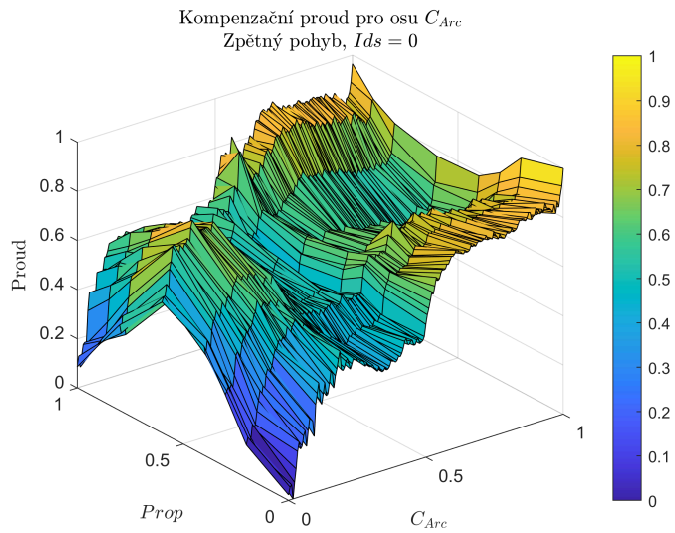
(a) Lineární interpolace kompenzační tabulky proudu č. 2



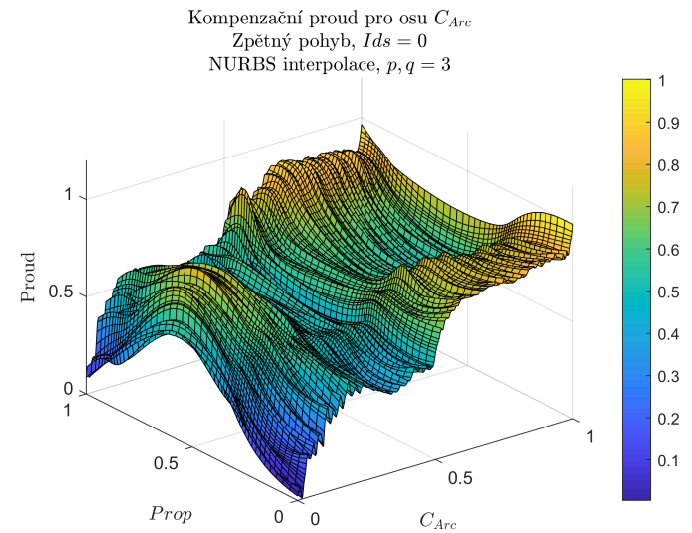
(b) NURBS interpolace kompenzační tabulky proudu č. 2

Obrázek 35: Ukázka interpolace na reálných datech č. 2



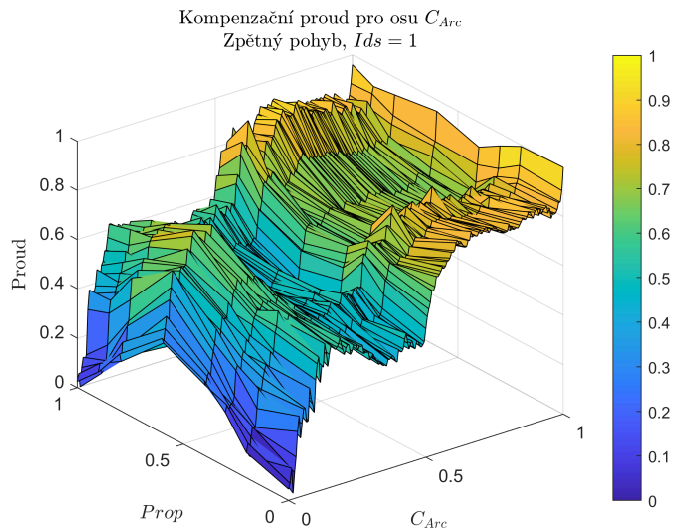


(a) Lineární interpolace kompenzační tabulky proudu č. 3

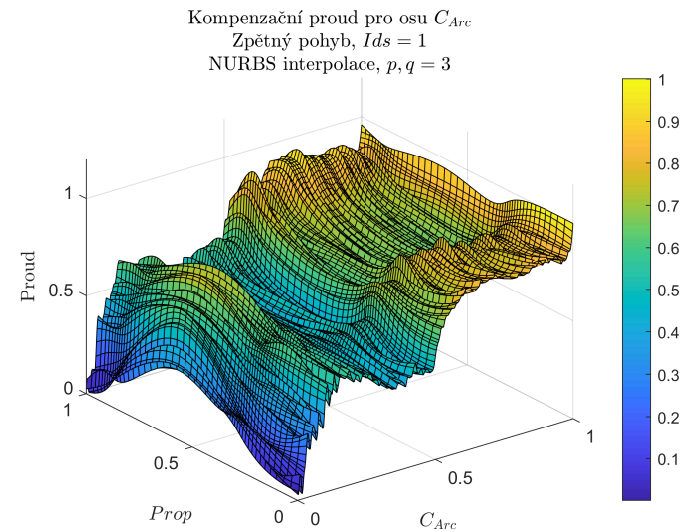


(b) NURBS interpolace kompenzační tabulky proudu č. 3

Obrázek 36: Ukázka interpolace na reálných datech č. 3

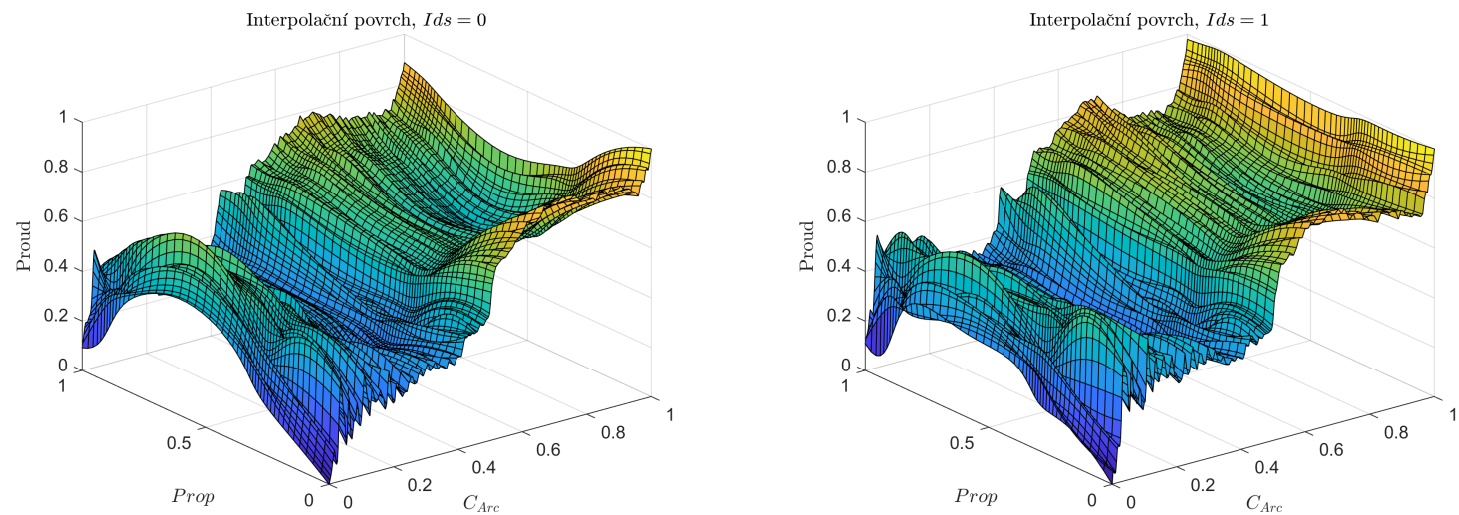


(a) Lineární interpolace kompenzační tabulky proudu č. 4



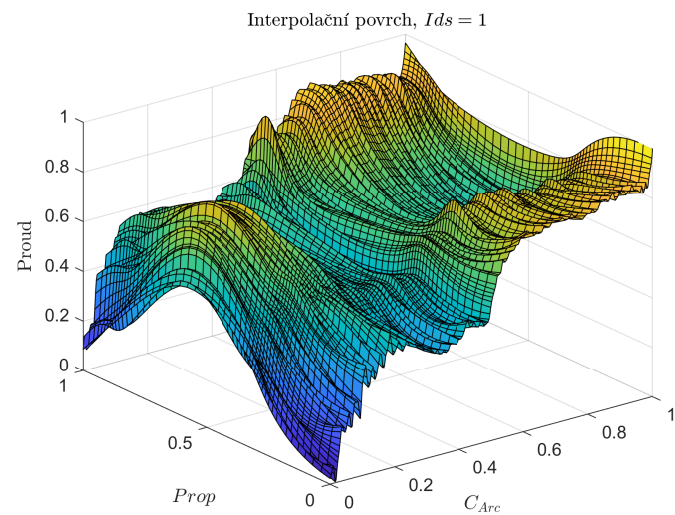
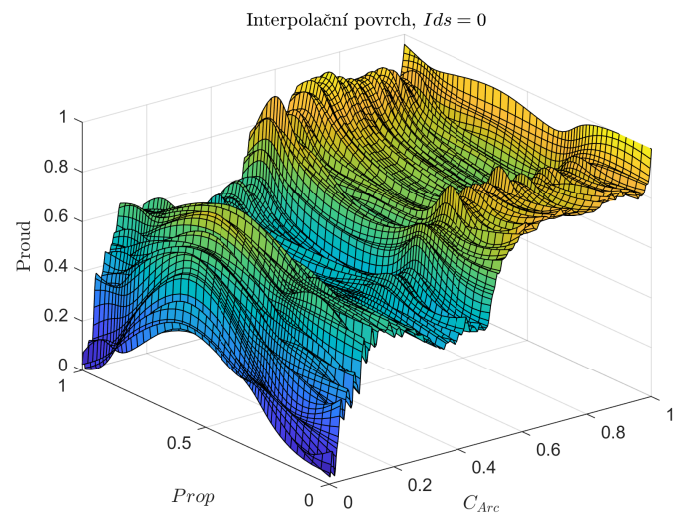
(b) NURBS interpolace kompenzační tabulky proudu č. 4

Obrázek 37: Ukázka interpolace na reálných datech č. 4



Obrázek 38: Interpolační povrchy pro 4D interpolaci kompenzačních tabulek - dopředný pohyb

Obrázek 39: Ukázka průběhu interpolace mezi kompenzačními tabulkami přes souřadnici  $Ids$  — dopředný pohyb



Obrázek 40: Interpolační povrchy pro 4D interpolaci kompenzačních tabulek - zpětný pohyb

Obrázek 41: Ukázka průběhu interpolace mezi kompenzačními tabulkami přes souřadnici  $Ids$  — zpětný pohyb

## 4.2 Analýza měřených dat

Tato kapitola je zaměřena na sběr vhodných dat pro aktualizaci kalibračních tabulek. Společnost Phillips poskytla za účelem výzkumu a vývoje autonomního kalibračního systému tyto záznamy:

1. Záznam jedné osy manuálního ovládání stroje uživatelem
2. Záznam testů proudové odchylky na předdefinovaných trajektoriích

### 4.2.1 Analýza zaznamenaného pohybu jednoho kloubu

Cílem této procedury je hledat vhodné body pro aktualizaci kalibračních tabulek. Především hledáme trajektorie s pomalým pohybem a konstantní rychlostí, protože v této oblasti se nejvíce projevují statické a kvazistatické síly, které by kalibrační tabulka měla kompenzovat, a proto jsou pro nás relevantní.

V této části budeme uvažovat záznam číslo 1. Prozkoumáním záznamu lze zjistit, zda-li se daný kloub někdy pohybuje vhodnou rychlostí pro naše účely, tj.: neminimální<sup>[20]</sup>, shora omezenou<sup>[21]</sup> a konstantní.

Body, které splňují tyto požadavky můžeme algoritmicky odhalit následovně:

1. Konstantní rychlost — výpočtem diferencí naměřených hodnot jsme schopni sledovat změny v rychlosti v každém časovém okamžiku. Zvolením vhodného prahu<sup>[22]</sup>, lze takto určit kdy je rychlost téměř konstantní.
2. Neminimální, shora omezená rychlost — nalezneme hodnoty rychlosti, které jsou shora i zespoda omezeny vhodně zvolenými prahy<sup>[22]</sup>.

Užitím pouze filtru konstantní rychlosti dostáváme body, kdy rychlost daného kloubu je skutečně téměř konstantní — viz obrázek č. 42. Nicméně zdaleka ne všechny tyto hodnoty jsou vhodné pro aktualizaci CCT, protože vybrané hodnoty obsahují značné výkyvy v proudovém měření.

Aplikací všech filtrů získáme body, které by se již daly využít pro úpravu CCT — viz obrázek č. 43. Je nutné dodat, že v tomto měření máme dostupné pouze 2 (poloha  $C_{Arc}$ ,

---

<sup>[20]</sup>Při hodně malých rychlostech nejvíce působí tření, které by se značně podepsalo na měřeném proudu.

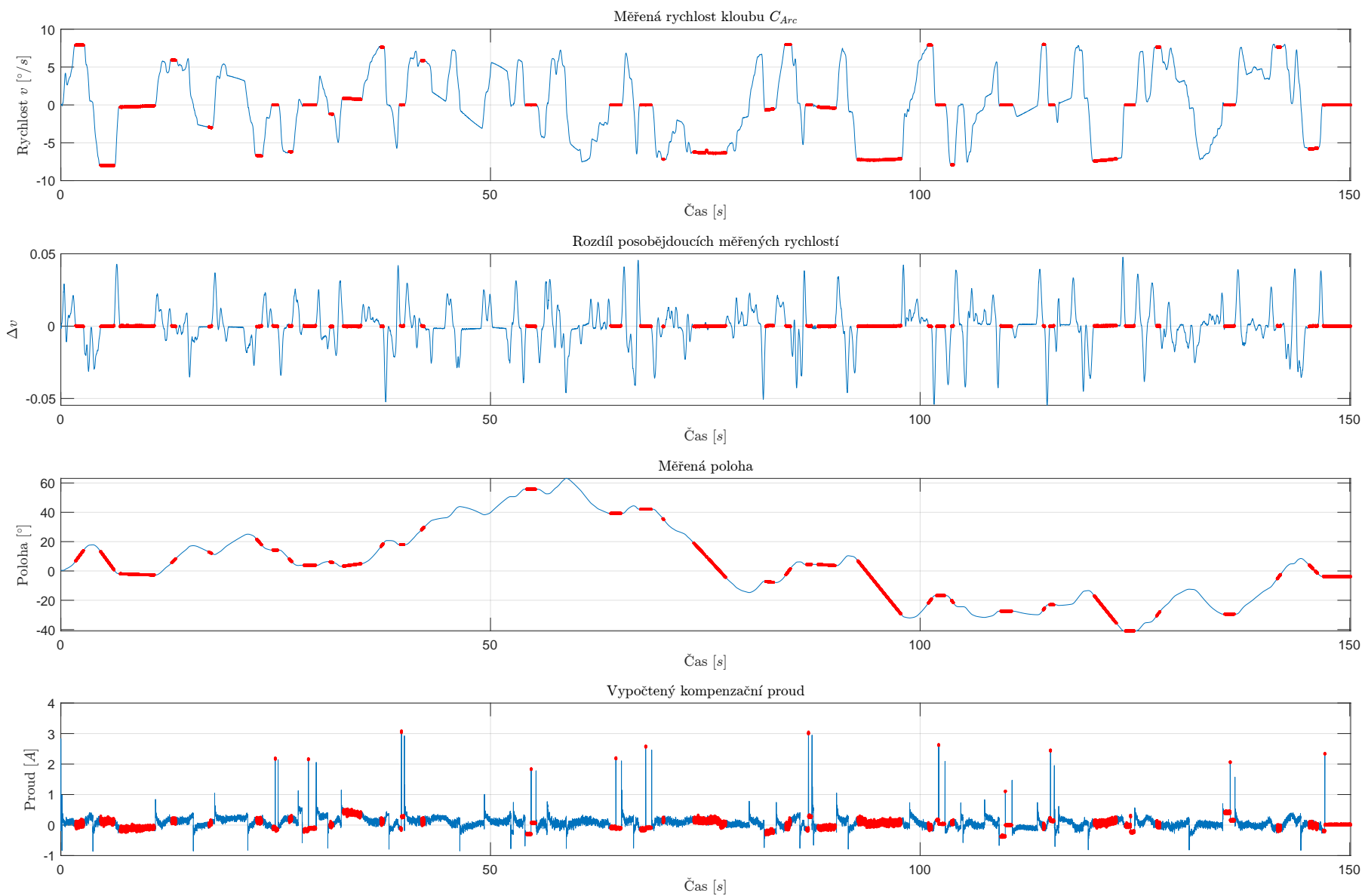
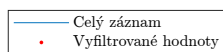
<sup>[21]</sup>Kalibrační tabulka má největší vliv při pomalých pohybech, proto by i bylo vhodné tabulku upravovat na základě měření při takovýchto podobných rychlostech.

<sup>[22]</sup>Pro účely této práce byly zvoleny hodnoty ručně na základě naměřených hodnot

kompenzační proud) ze 4 (poloha  $C_{Arc}$ ,  $Prop$ ,  $Ids$  a kompenzační proud) hodnot, které jsou potřeba pro získání přesné polohy v kompenzační tabulce, a tudíž na základě tohoto měření nejsme schopni přesně vyzkoušet aktualizaci CCT — potřebná data, na základě kterých by se aktualizace dala otestovat přímo, Phillips neposkytl.

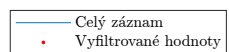
Přestože nevíme 2 souřadnice, můžeme zkusit získané hodnoty dosadit do CCT. Konkrétně zkusíme dosadit nejdelší úsek vhodného pohybu nacházející se přibližně v polovině času záznamu. Z polohy lze vidět, že se jedná o zpětný pohyb, tím pádem vložíme hodnoty do našich dvou kalibračních tabulek pro zpětný pohyb. Z obrázků č. 44a a 44b lze odhadnout, že poloha kloubu  $Prop$  by mohla být okolo hodnoty 0.85 a poloha kloubu  $Ids$  přibližně 0. Pro tyto polohy je na obrázku č. 45 je již ukázka aktualizace CCT pomocí aproximace povrchu užitím Gaussovy funkce.

### Aplikace filtru konstantní rychlosti

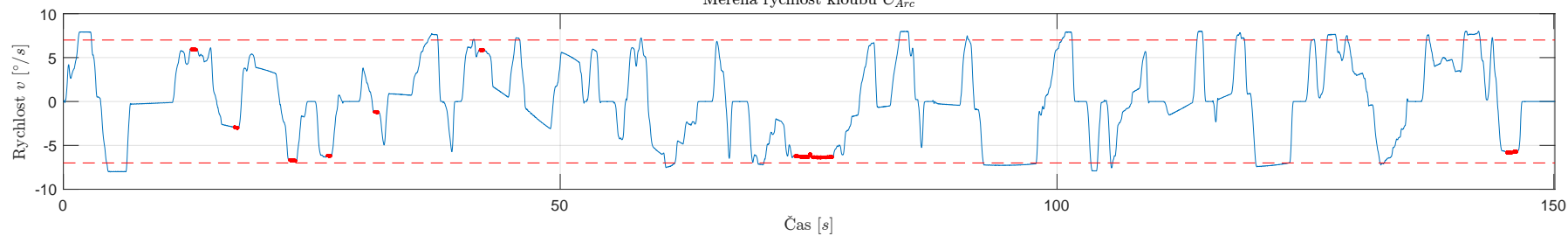


Obrázek 42: Ukázka aplikace filtru konstantní rychlosti

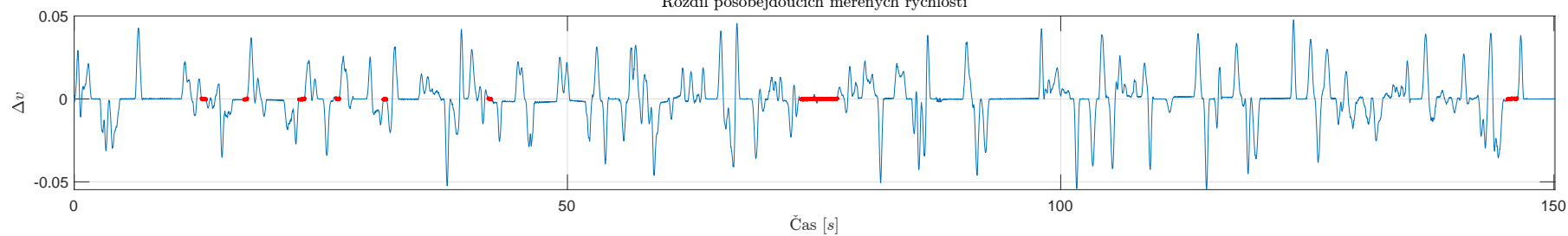
### Aplikace všech filtrů



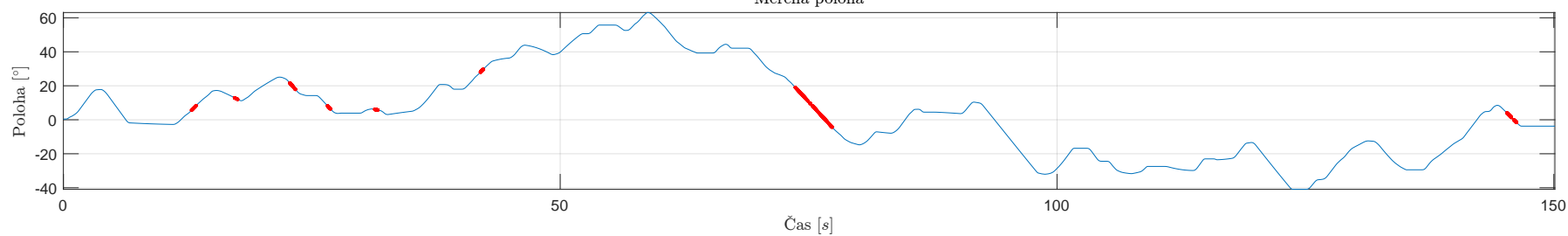
Měřená rychlost kloubu  $C_{Arc}$



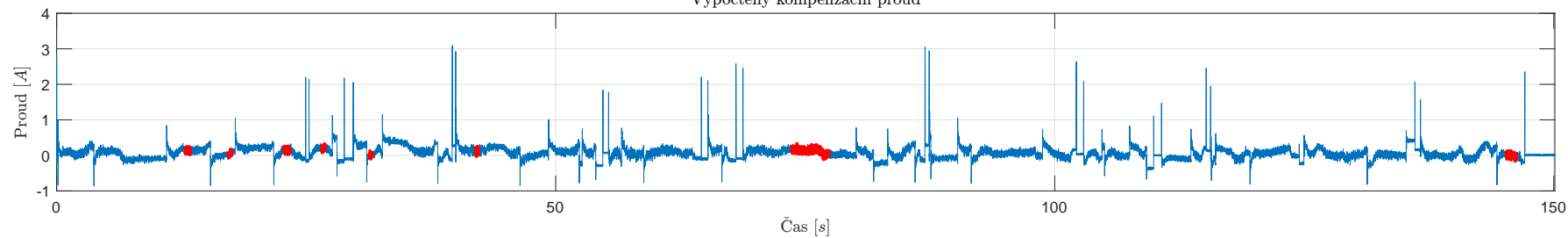
Rozdíl posobějících měřených rychlostí



Měřená poloha

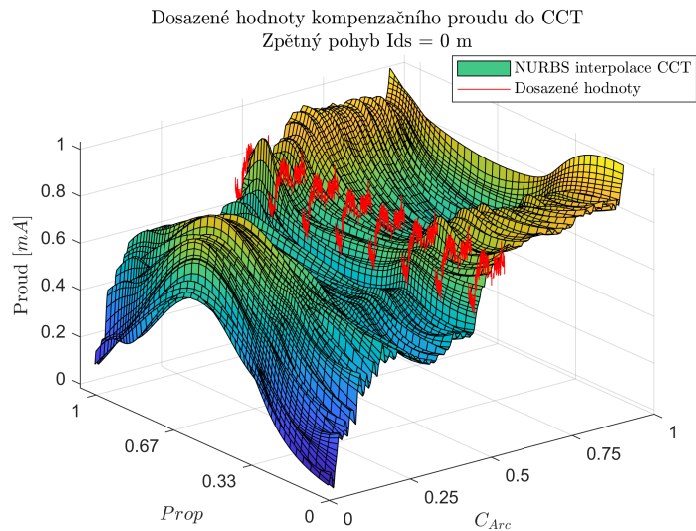


Vypočtený kompenzační proud

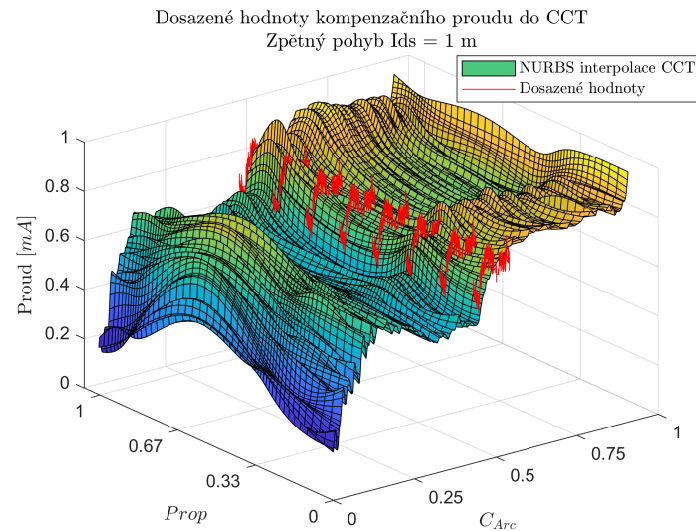


Obrázek 43: Ukázka aplikace všech filtrů



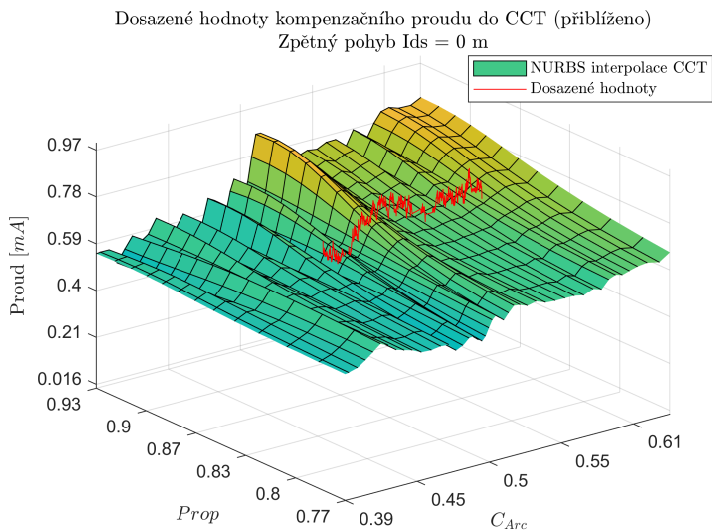


(a) Vložení hodnot do tabulky pro zpětný pohyb pro polohu kloubu  $I_{ds} = 0$  m

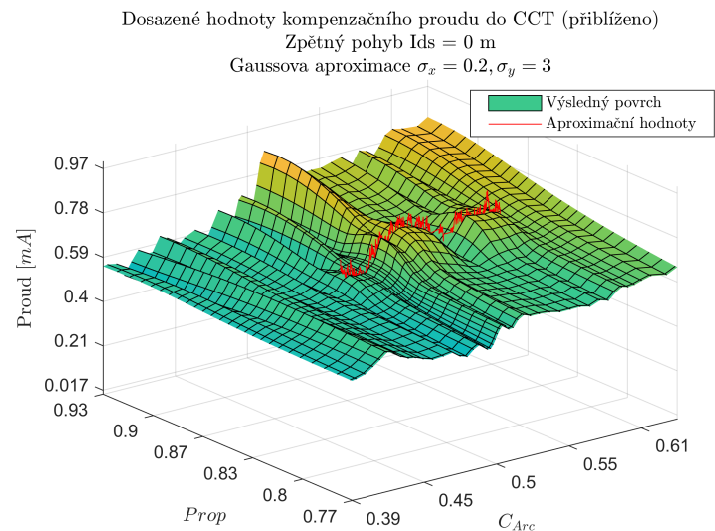


(b) Vložení hodnot do tabulky pro zpětný pohyb pro polohu kloubu  $I_{ds} = 1$  m

Obrázek 44: Vložení vhodných bodů ze záznamu měření jednoho kloubu



(a) Přiblížení dosazených hodnot



(b) Gaussova aproximace povrchu

Obrázek 45: Ukázka Gaussovy aproximace povrchu pro hodnoty z měření jednoho kloubu



## 4.2.2 Analýza testu odchylky proudu

Tato sekce se zabývá záznamem číslo 2. Záznam je tvořen vícero soubory, každý odpovídající jednomu pohybu kloubu  $C_{Arc}$  pro fixní polohu  $Prop$  a  $Ids$ . Stejně jako v sekci [Analýza zaznamenaného pohybu jednoho kloubu](#) se budeme zajímat o pomalý pohyb s konstantní rychlostí. Vyhovující hodnoty pro jednotlivé typy trajektorií jsou zobrazeny na obrázcích č. [46a](#), [46b](#), [46c](#), [46d](#).

Ze záznamu jsme vypočetli nový kompenzační proud kalibrační tabulky  $I_{CCT}^{new}$  pomocí vzorečku:

$$I_{CCT}^{new} = I_{CCT} + I_{set} - I_{measured} \quad (70)$$

kde  $I_{CCT}$  značí původní kompenzační proud z CCT,  $I_{set}$  výstup regulátoru a  $I_{measured}$  je měřený proud tekoucí pohonem.

Takto vypočtené hodnoty jsou zobrazeny na obrázcích č. [47a](#), [47b](#), [47c](#), [47d](#). Jak lze vidět, výsledky jsou velmi zašuměné, přesto můžeme vyzorovat, že zašuměná data přibližně opisují kalibrační tabulku.

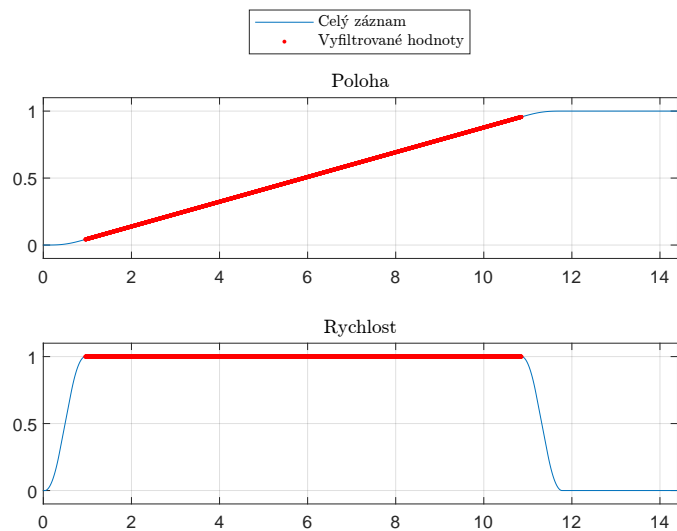
### 4.2.2.1 Zpracování zašuměných dat

Na zašuměná data zkusíme aplikovat 2 různé způsoby zbavení se šumu:

1. Použití funkce Matlab `smooth`
2. Použití NURBS aproximace křivky ze sekce [3.5](#)

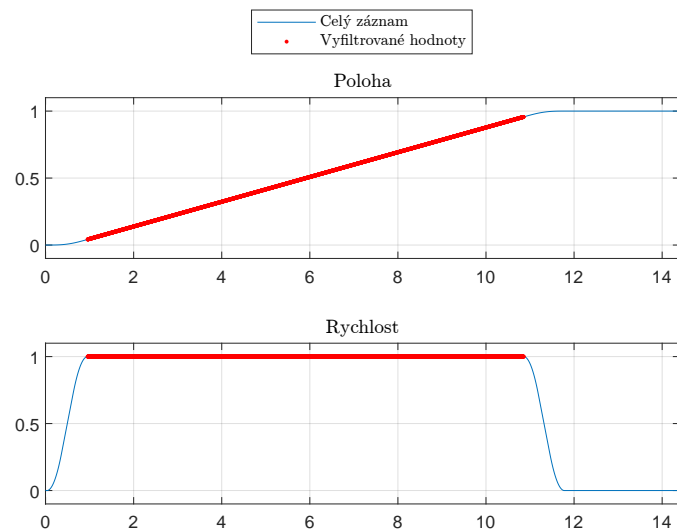
Výsledky těchto funkcí jsou na obrázcích č. [48a](#), [48b](#), [48c](#), [48d](#). Z takto upravených dat je již lépe vidět, že hodnoty nového kompenzačního proudu lemují příslušnou CCT s výjimkou okolí souřadnice  $Prop = 0.5$  a  $C_{Arc} = 0.85$ . Na tomto místě se hodnoty značně odchylní od původních hodnot kalibrační tabulky, toto je dále lépe vidět na obrázcích č. [49a](#), [49b](#), [49c](#), [49d](#) a [50a](#), [50b](#), [50c](#), [50d](#), kde je uvedena NURBS interpolace zpracovaných dat. Odchylka může být způsobena změnou fyzikálních parametrů manipulátoru a nebo Phillips používá nějaký svůj vlastní algoritmus, který data vyhodnocuje jiným způsobem. Nicméně pro naše účely se tyto odlišnosti hodí, protože nám umožní odzkoušení aktualizace CCT — viz kapitola [Aktualizace kalibrační tabulky](#).

Dopředný pohyb  $I_{ds} = 0$



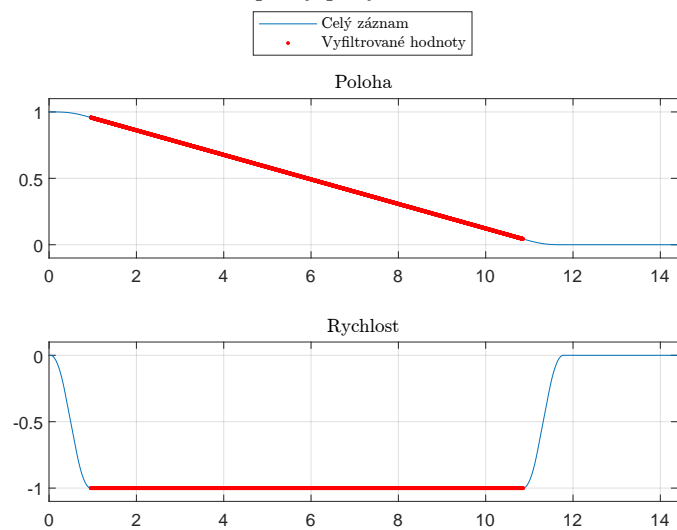
(a) Trajektorie kloubu  $C_{Arc}$  dopředného pohybu pro polohu  $I_{ds} = 0$

Dopředný pohyb  $I_{ds} = 1$



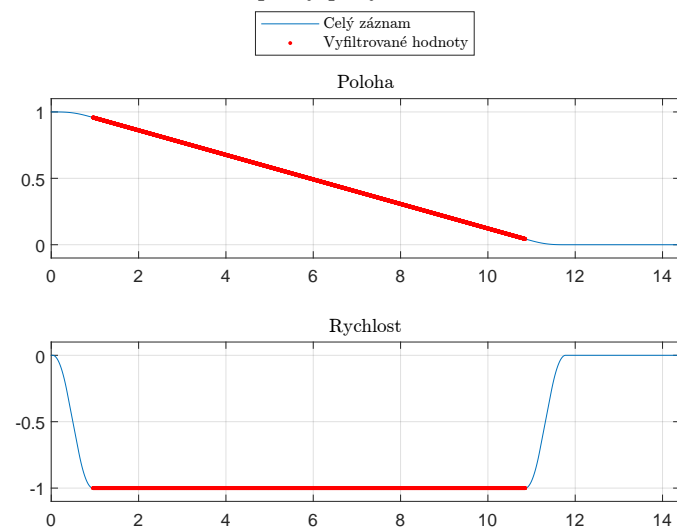
(b) Trajektorie kloubu  $C_{Arc}$  dopředného pohybu pro polohu  $I_{ds} = 1$

Zpětný pohyb  $I_{ds} = 0$



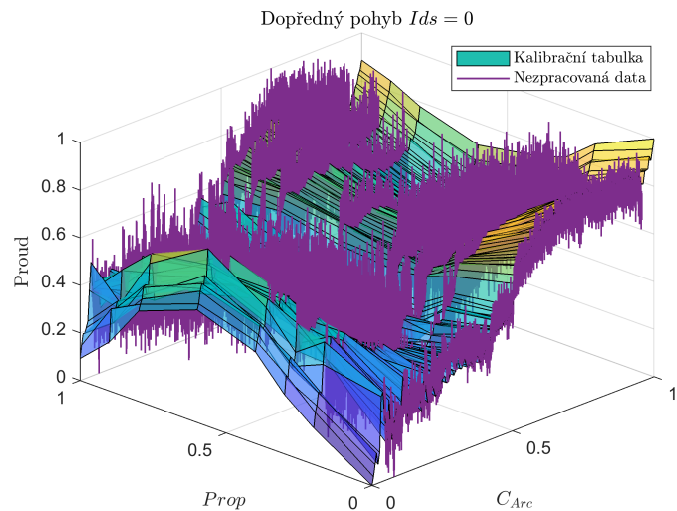
(c) Trajektorie kloubu  $C_{Arc}$  zpětného pohybu pro polohu  $I_{ds} = 0$

Zpětný pohyb  $I_{ds} = 1$

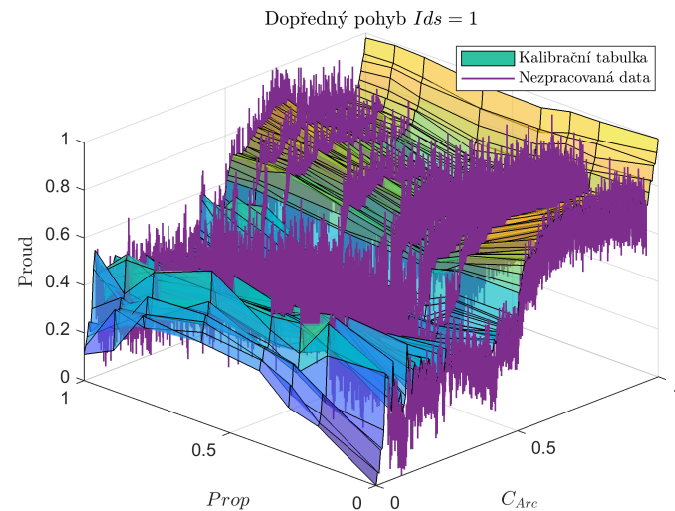


(d) Trajektorie kloubu  $C_{Arc}$  zpětného pohybu pro polohu  $I_{ds} = 1$

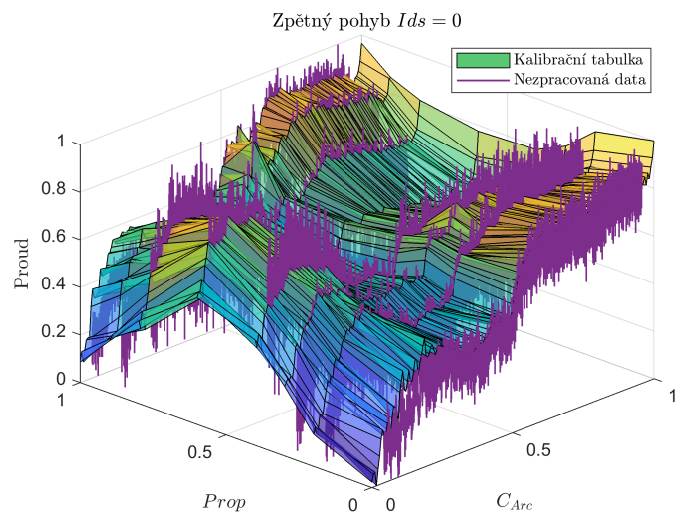
Obrázek 46: Ukázka trajektorií kloubu  $C_{Arc}$  pro 4 proudové kalibrační tabulky



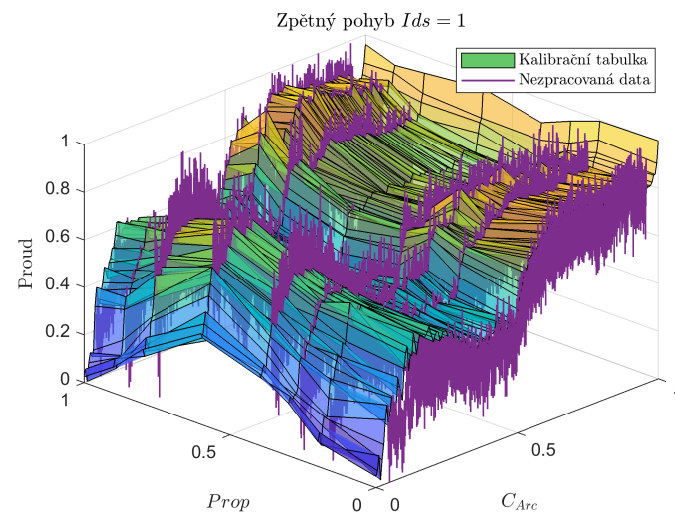
(a) Vypočtený kompenzační proud ze záznamu testovací trajektorie pro dopředný pohyb,  $I_{ds} = 0$



(b) Vypočtený kompenzační proud ze záznamu testovací trajektorie pro dopředný pohyb,  $I_{ds} = 1$

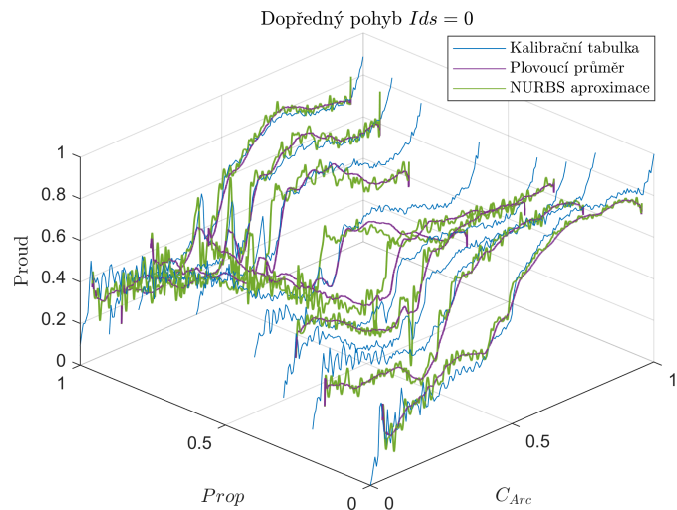


(c) Vypočtený kompenzační proud ze záznamu testovací trajektorie pro zpětný pohyb,  $I_{ds} = 0$

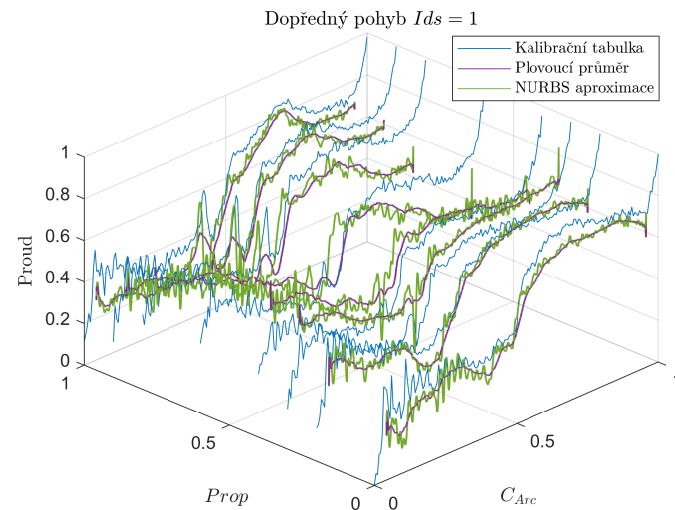


(d) Vypočtený kompenzační proud ze záznamu testovací trajektorie pro zpětný pohyb,  $I_{ds} = 1$

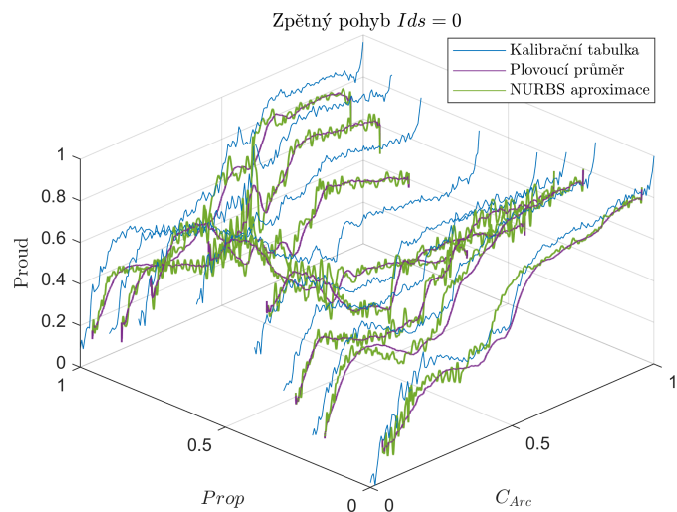
Obrázek 47: Vypočtený kompenzační proud pro testovací trajektorie



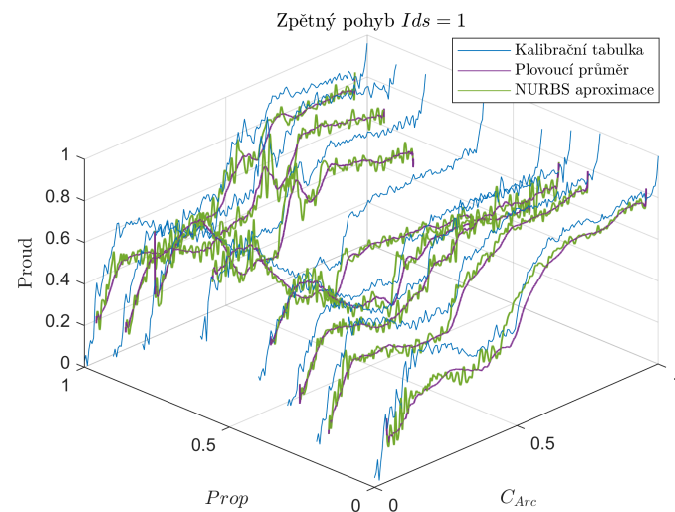
(a) Zpracovaný zašuměný záznam kompenzačního proudu pro dopředný pohyb,  $I_{ds} = 0$



(b) Zpracovaný zašuměný záznam kompenzačního proudu pro dopředný pohyb,  $I_{ds} = 1$

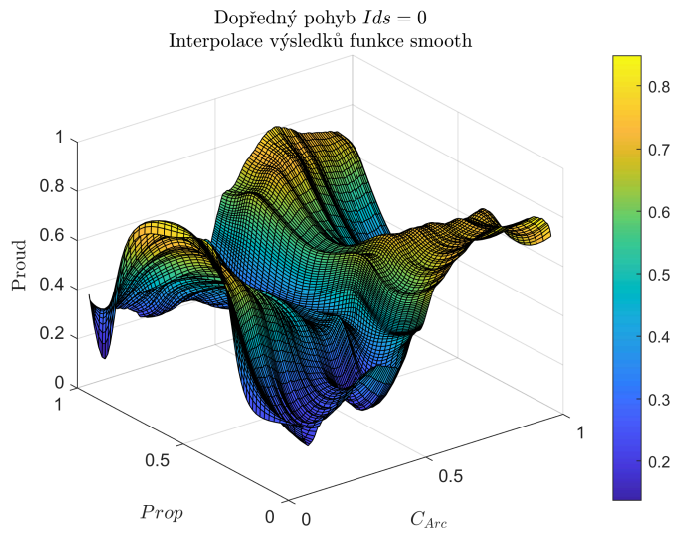


(c) Zpracovaný zašuměný záznam kompenzačního proudu pro zpětný pohyb,  $I_{ds} = 0$

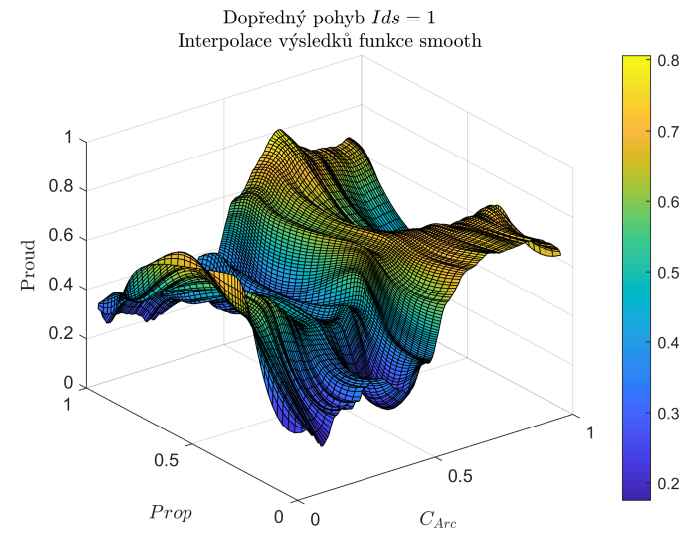


(d) Zpracovaný zašuměný záznam kompenzačního proudu pro zpětný pohyb,  $I_{ds} = 1$

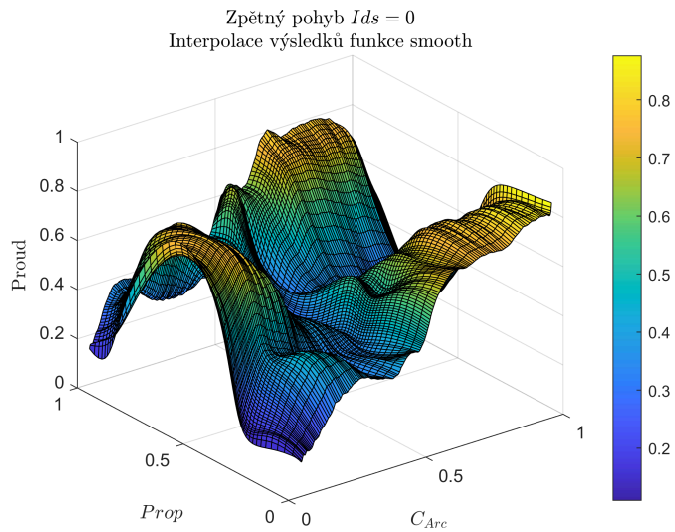
Obrázek 48: Zpracování zašuměných záznamů kompenzačního proudu pro testovací trajektorie



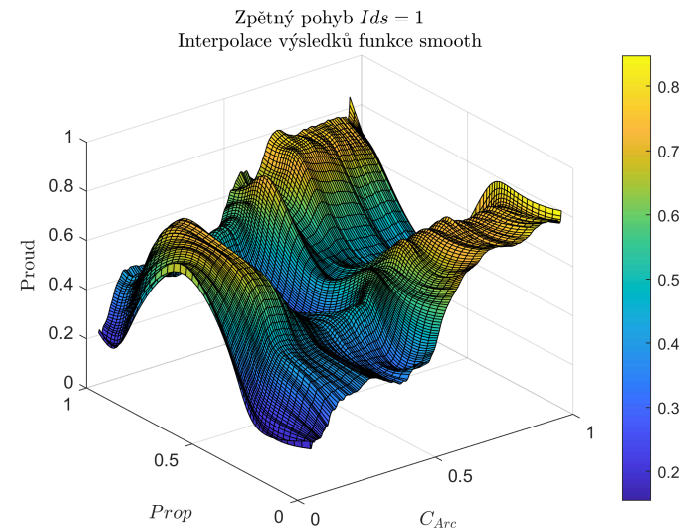
(a) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí funkce smooth pro dopředný pohyb,  $Ids = 0$



(b) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí funkce smooth pro dopředný pohyb,  $Ids = 1$



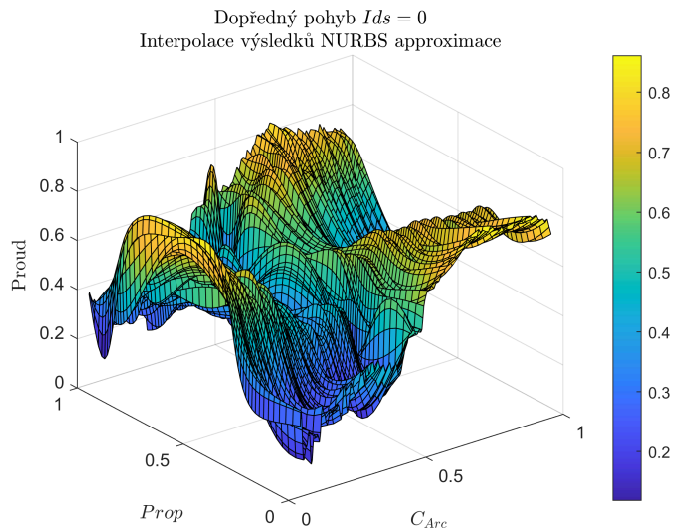
(c) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí funkce smooth pro zpětný pohyb,  $Ids = 0$



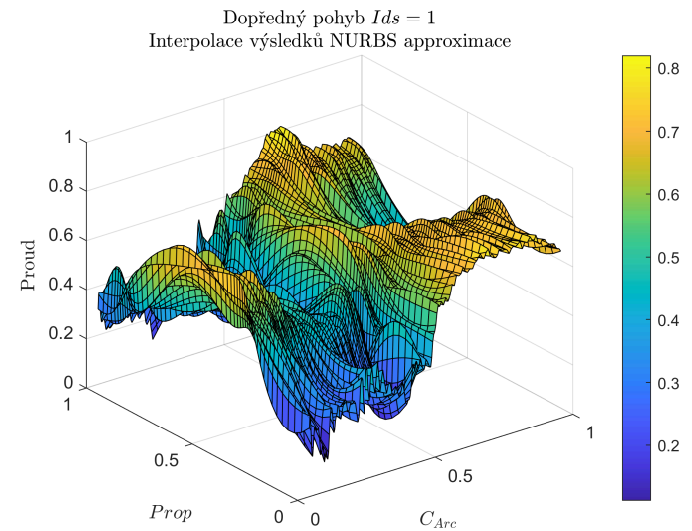
(d) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí funkce smooth pro zpětný pohyb,  $Ids = 1$

Obrázek 49: Proložení zpracovaných dat pomocí smooth NURBS interpolací

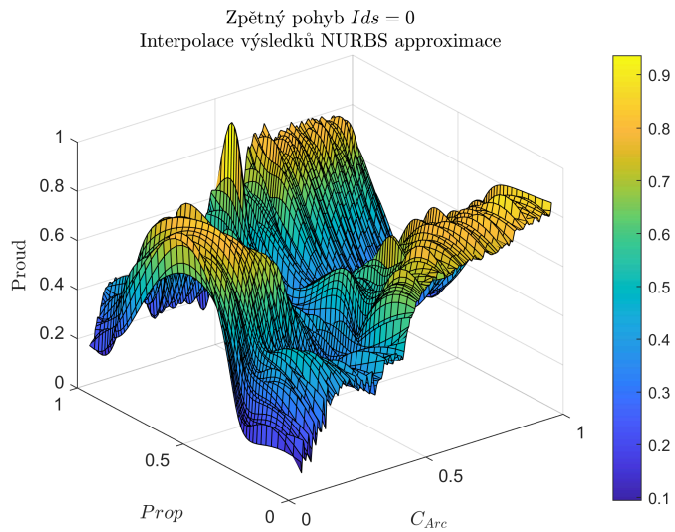




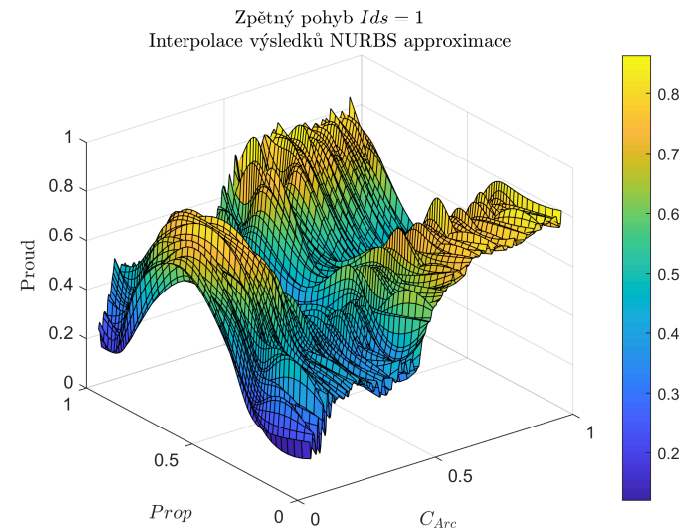
(a) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro dopředný pohyb,  $Ids = 0$



(b) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro dopředný pohyb,  $Ids = 1$



(c) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro zpětný pohyb,  $Ids = 0$



(d) NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro zpětný pohyb,  $Ids = 1$

Obrázek 50: Proložení zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace NURBS interpolací

### 4.3 Aktualizace kalibrační tabulky

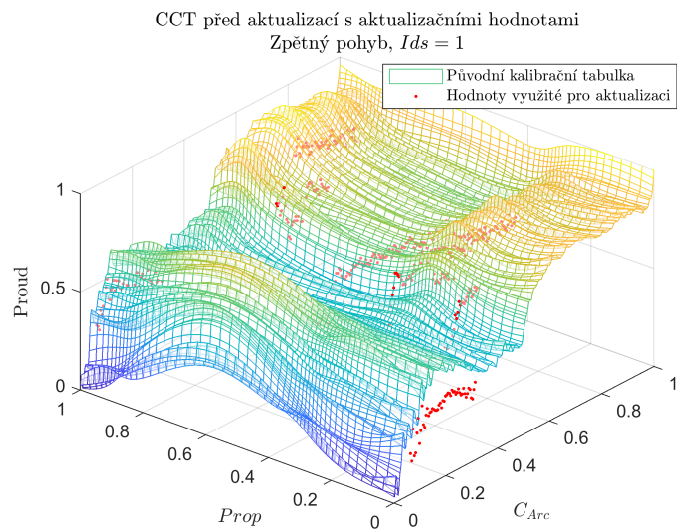
Na obrázcích č. 51a, 51b, 51c a 51d je ukázka výsledné aktualizace kalibrační tabulky užitím Gaussovy funkce z kapitoly [NURBS aproximace povrchu s užitím Gaussovy funkce](#). Jako zdrojová data pro aktualizací body, tj. nejnovější hodnoty potřebného kompenzačního proudu, jsou použity hodnoty z tabulky [NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro zpětný pohyb,  \$Ids = 1\$](#) , kterou jsme získali analýzou záznamů pohybu manipulátoru. Byly vybrány takové body, na kterých je výsledný efekt vidět nejlépe z důvodu prezentace výsledků.

Jak lze z obrázku vidět, aktualizace tabulky poskytla uspokojivé výsledky. Nicméně Gaussova aproximace v kombinaci s naší implementací sběru dat není bezvadná. Nasbírané body neobsahují hodnoty pro extrémní poloh kloubu  $C_{Arc}$ <sup>[23]</sup> (0 a 1) a to znamená, že zatím není možnost aktualizace těchto krajních hodnot.

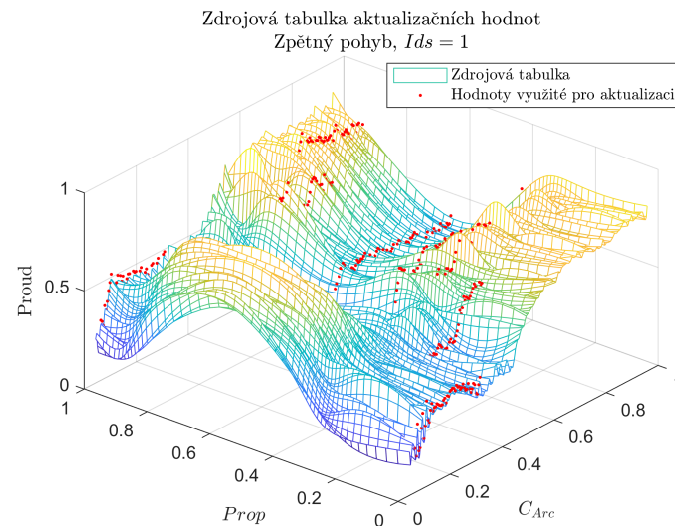
Otestování aktualizace 4D proudové kalibrační tabulky užitím algoritmu z kapitoly [NURBS aproximace 4D povrchu s užitím Gaussovy funkce](#) bohužel není možné z důvodu chybějícího záznamu manuálního ovládní stroje uživatelem pro více os.

---

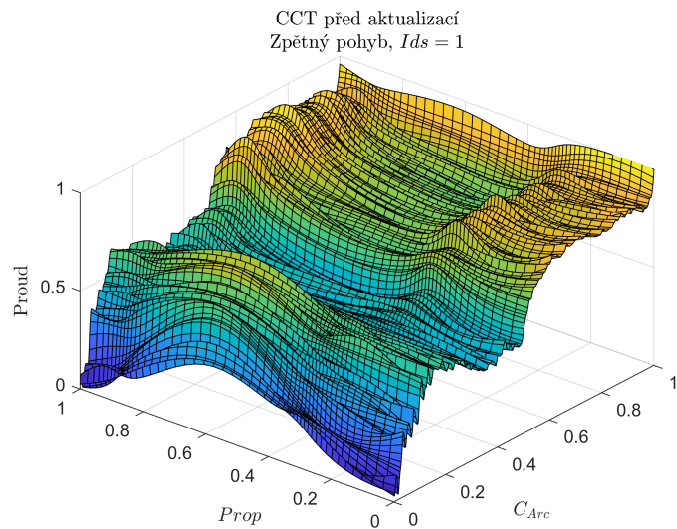
<sup>[23]</sup>Toto je způsobeno naší filtrací konstantní rychlosti, jedná se o krajní případ, který je potřeba ještě dořešit.



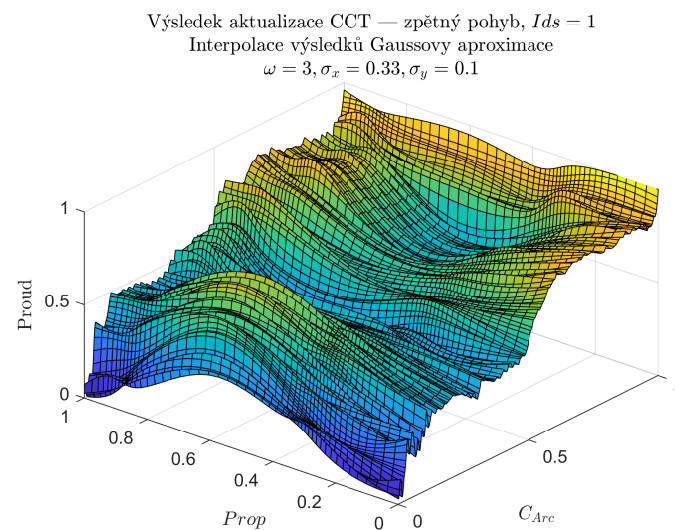
(a) Interpolace původní kalibrační tabulky s aktualizacími hodnotami



(b) Zdrojová tabulka aktualizacími hodnot — NURBS interpolace zpracovaných dat pomocí NURBS aproximace pro zpětný pohyb,  $Ids = 1$



(c) Interpolace původní kalibrační tabulky



(d) Výsledek aktualizace CCT s užitím Gaussovy aproximace

Obrázek 51: Ukázka aktualizace CCT pro zpětný pohyb,  $Ids = 1$  na základě měření získaného z analýzy testu odchylky proudu



## 5 Závěr

Cílem této práce bylo navrhnout automatickou aktualizaci proudové kalibrační tabulky na základě naměřených dat získaných za běžného užívání manipulátoru.

Nejprve jsme popsali řízený a řídicí systém, včetně schématu regulační smyčky na kterém je ukázáno jak kalibrační tabulka spolupracuje s ostatními kompenzátory. V další obsáhlé kapitole jsme rozebrali veškerou teorii k NURBS splinům, konkrétně NURBS 2D a 3D křivkám, 3D a 4D (nad)povrchům a k nim příslušné přístupy interpolace a aproximace včetně jejich ukázek.

Poslední kapitola obsahuje již samostatné zpracování záznamů pohybu manipulátoru, které poskytla společnost Phillips za účelem tohoto výzkumu a vývoje. Podařilo se nám ověřit možnost extrakce vhodných bodů pro aktualizaci CCT při manuální operaci manipulátoru uživatelem. Pomocí těchto extrahovaných bodů jsme potom úspěšně sestavili vlastní verze kalibračních tabulek. Tyto nové verze tabulek jsme využily pro odzkoušení aktualizace původních verzí CCT.

Otázkou dalšího výzkumu je vylepšení metody sběru dat pro aktualizaci CCT, kterou jsme v této práci pouze naznačili. Následujícím krokem bude otestování sběru dat ideálně již na reálném stroji, aby se ověřilo, že zvolený přístup funguje v praxi tak, jak je od něj očekáváno. Dalším možným krokem výzkumu je na problém aktualizace CCT aplikovat řešení založeném na využití neuronových sítí, toto s sebou ale přináší své vlastní problémy a omezení, kterým je třeba věnovat pozornost, jako jsou například: volba struktury sítě, počet vrstev, aktivační funkce a také ověření výsledků — tj. hladkost a přesnost odhadovaných kompenzačních proudů.

## Reference

- Pavel Březina. *Bakalářská práce*. 2023. URL: <https://github.com/brezina1/ZCU-FAV-Public/tree/master/2022-2023/Bakal%C3%A1%C5%99sk%C3%A1%20pr%C3%A1ce> (cit. 17. 05. 2023).
- Phillips. *Azurion 7 C20*. 2023. URL: <https://www.philips.de/c-dam/corporate/newscenter/de/press-releases/2019/20190122-azurion-7-c20-mit-flexarm/philips-azurion-7-c20-mit-flexarm-produkt2-un-hs-20190122.download.jpg> (cit. 14. 05. 2023).
- *Azurion 7 C20 with FlexArm Image-guided therapy system*. 2023. URL: <https://www.usa.philips.com/healthcare/product/HNCNVD207/azurion-7-c20-with-flexarm-image-guided-therapy-system> (cit. 14. 05. 2023).
- Prof. Dr. Les Piegl, Dr. Wayne Tiller (auth.) *The NURBS Book*. 2. vyd. Monographs in Visual Communication. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. ISBN: 978-3-540-61545-3, 978-3-642-59223-2. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-59223-2>.