Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

INTERAKTIVNÍ ÚLOHY MONGEOVA PROMÍTÁNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Petra Konjatová

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Te

(2010 - 2012)

Vedoucí práce: *Mgr. Lukáš Honzík*

Plzeň, 23. března 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 23. března 2012

……………………………………………

vlastnoruční podpis

Děkuji za odbornou pomoc a řadu cenných podnětů vedoucímu této diplomové práce panu Mgr. Lukáši Honzíkovi.

OBSAH

1 ÚVOD

Ve své diplomové práci jsem se věnovala problematice Mongeova promítání. Toto promítání je součástí deskriptivní geometrie, jejíž prvopočátky úzce souvisí s počátky stavebnictví. Již v dobách před naším letopočtem při plánování stavby bylo zapotřebí tyto stavby předem narýsovat. To znamená, že bylo třeba určit postup, jak převést trojrozměrný objekt (stavba) na dvojrozměrný prostor.

První promítací metody byly používány již ve starověkém Egyptě, kdy se jednalo o jednoduché pravoúhlé promítání na jednu průmětnu. Bylo používáno při stavbách pyramid, chrámů, apod.

Další rozvoj nastal s vývojem malířství, kdy se v 15. století rozvinulo používání lineární perspektivy. Následoval rozvoj rovnoběžného promítání, a to nejdříve kosoúhlého. Využívalo se hlavně ve vojenství k zobrazování částí, nebo dokonce i celých měst.

Za zakladatele deskriptivní geometrie tak, jak ji chápeme v dnešním smyslu, je považován právě Gaspard Monge. Pojem deskriptivní geometrie pochází z latinského slova „describo“, což znamená „popisuji, zobrazuji“. Deskriptivní geometrie se zabývá zobrazováním útvarů na danou plochu. Sám Gaspard Monge definoval deskriptivní geometrii jako „... umění znázornit na listu papíru, jenž má jen dvojí rozměr, trojrozměrné předměty tak, aby je bylo možno přesně určit ...“ (Pomykalová, str. 7).

Mongeovo promítání je jednou ze zobrazovacích metod. Ze zobrazení je nutné přesně vyčíst základní vlastnosti zobrazovaných útvarů. Jedná se o jejich tvar, velikost a vzájemnou polohu. Každému vzoru v prostoru musí být přiřazen jediný obraz a toto musí samozřejmě platit i obráceně: Každému obrazu v prostoru musí být přiřazen jediný vzor.

V první části své diplomové práce seznamuji čtenáře se životem Gasparda Mongeho. Významným mezníkem jeho života byl v roce 1766 úkol na vytvoření plánu opevnění města. Pro splnění tohoto úkolu navrhl Monge vlastní zobrazovací metodu. Ve svém díle „Géométrie descriptive“, vydaném v roce 1798, Gaspard Monge systematicky uspořádal vlastní i dřívější poznatky a z dosavadních zobrazovacích způsobů vytvořil nové odvětví geometrie.

V další části diplomové práce se čtenáři seznámí se základními pojmy v Mongeově promítání a se základními metodami zobrazování bodů, přímek a rovin. Teorii jsem doplnila ilustračními nákresy vytvořenými v grafickém programu GeoGebra tak, aby si čtenář mohl propojit „přečtené“ informace s informacemi „viděnými“. Na konci každé ze tří podkapitol (týkajících se Obrazu bodu, Obrazu přímky a Obrazu roviny) následuje krátký test.

Na následujících stránkách se čtenář již může pustit do studia základních polohových a metrických úloh. Tyto úlohy jsou rozděleny do 12 skupin a seznamují nás s jednotlivými konstrukcemi potřebnými při zobrazování rovinných i prostorových útvarů v Mongeově promítání. Mezi tyto úlohy patří např. zjišťování průsečíku přímky s rovinou, či průsečnice dvou rovin, nebo jak zjistit skutečnou velikost úsečky. Každou skupinu základních úloh jsem doplnila řešenými příklady graficky doplněnými nákresy v programu GeoGebra.

Poslední částí mé diplomové práce je zobrazení některých těles v Mongeově promítání za použití znalostí získaných v předešlých kapitolách.

Všechna řešení příkladů jsou „nakrokována“ v postupných konstrukcích tak, aby si čtenář důkladně osvojil postup konstrukce a následně byl schopen sám řešit podobné příklady.

Součástí mé diplomové práce je i přiložené CD, na němž se nachází celá diplomová práce v elektronické podobě spolu s jednotlivými nákresy zpracovanými v programu GeoGebra. Navíc jsem celou svou práci převedla na webové stránky, aby byla zajištěna možnost seznámit se s Mongeovým promítáním pro širší okruh zájemců (www.kmt.zcu.cz/monge/).

2 ŽIVOT GASPARDA MONGEHO

Obrázek 1 - Gaspard Monge (zdroj: Wikipedie)

Gaspard Monge se narodil 10.5.1746 v Beaune (Burgundsko, Francie). Jeho rodiči byli obchodník Jacques Monge a Jeanne Rousseaux. Gaspard Monge navštěvoval oratoriánskou vysokou školu, která byla určena pro mladé šlechtice. Tuto školu provozovali kněží. Nabízeli v ní více liberální vzdělání než jiné církevní školy. Kromě vzdělání v humanitních oborech, bylo možné na této škole studovat matematiku a přírodní vědy.

V 16 letech odešel Monge studovat školu College de la Trinité do Lyonu a již o rok později mu díky jeho talentu a znalostem bylo umožněno vedení kurzu fyziky. Po ukončení vzdělání (v roce 1764) se Monge vrátil zpět do Beaunne, kde načrtl plán města. Tohoto plánu města Beaunne si všiml jeden člen osazenstva školy École Royale du Génie v Mézieres. Plán jej natolik zaujal, že Gaspard Monge byl v roce 1765 jmenován projektantem. Na této škole se Monge seznámil s Charlesem Bossutem, profesorem matematiky.

V roce 1766 dostal Monge úkol nakreslit plán opevnění, které by mělo zabránit nepřátelům v palbě na objekt bez ohledu na to, jaká byla jejich pozice. Pro tento úkol si Monge navrhl svou vlastní zobrazovací metodu. Tato metoda využívala geometrické techniky, kterými se Monge zaobíral ve svém volném čase. Splněním úkolu, tj. nakreslením plánu opevnění zabraňujícím nepřátelům v palbě v jakékoliv pozici, prokázal Gaspard Monge své neobyčejné schopnosti.

Dne 22. ledna 1769 napsal Monge Bossutovi dopis, ve kterém ho informoval o své práci „Vývoj křivek dvojitého zakřivení“. Zároveň Bossuta požádal o napsání svého názoru k tomuto dílu. A tak mohla vyjít Mongeova první publikace v Journal Encyclopédique představující přehled dosavadních výsledků Mongeovy práce.

V roce 1770 byl Monge jmenován instruktorem experimentální fyziky. Stále jej to ale více a více táhlo k matematice, a proto se snažil být v kontaktu s dalšími významnými matematiky. O rok později se Gaspard Monge sblížil s d´Alembertem[1] a Condorcetem[2]. Matematik Condorcet byl natolik nadšen Mongeovými znalostmi matematiky, že se rozhodl doporučit jeho čtyři díla[3] Akademii věd. Během dalších let předkládal Gaspard Monge Akademii věd svá další díla zabývající se parciálními diferenciálními rovnicemi, které studoval z geometrického hlediska.

V roce 1777 se Gaspard Monge oženil s Cathérine Huartovou. Od roku 1780, kdy byl zvolen pomocným geometrem na Akademii věd v Paříži, trávil Monge v Paříži hodně času. Účastnil se matematických, fyzikálních a chemických projektů, které akademie pořádala. V následujících letech předkládal Gaspard Monge Akademii věd výsledky své matematické práce (ale i práce z oblasti fyziky a chemie). Jednalo se o tyto práce:

- Složení kyseliny dusité, Vytváření zakřivených ploch, Konečné diferenční rovnice, Parciální diferenciální rovnice (1785)
- Struktura dvojlomného vápence, Složení železa, oceli a litiny, Jev elektrických jisker v oxidu uhličitém (1786)
- Kapilární jevy (1787)
- Příčiny meteorologických jevů (1788)
- Studium fyziologické optiky (1789)

Rok 1789 byl v historii Francie zlomovým. Dne 14. července 1789 útokem na Bastilu vypukla Velká francouzská revoluce. Politicky byl Gaspard Monge silným stoupencem revoluce. Nadále působil jako významná osobnost Akademie věd, ve které i pracoval jako vedoucí Komise pro váhy a míry. 21. září 1792 byla zrušena monarchie a Francie se stala republikou. Národní shromáždění nabídlo Gaspardu Mongeovi post ministra námořnictva. Tuto funkci však Monge zastával jen 8 měsíců a 10. dubna 1793 podal rezignaci. Vrátil se k práci na Akademii věd. Národní shromáždění dne 8. srpna 1793 Akademii věd zrušilo.

Dne 11. března 1794 byla založena škola École Centrale des Travaux Publics, která se brzy stala École Polytechnique. Gaspard Monge měl velký vliv při zařizování školy

[1] Jean Baptiste Le Rond d´Alembert (francouzský matematik, 1717 – 1783)
[2] Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, markýz de Condorcet (francouzský matematik, 1743 – 1794)
[3] díla: Zevšeobecnění variačního počtu, Infinitezimální geometrie, Teorie parciálních diferenciálních rovnic, Kombinatorika

a dne 9. listopadu 1794 se zde stal instruktorem deskriptivní geometrie. Jako hlavní úkol dostal vyškolit budoucí učitele této školy, aby byli připravení na otevření školy v červnu 1795. Mongeovy přednášky o infinitezimální geometrii vytvořily základy pro jeho další knihu „Application de l´analyse a la géométrie“. Na další zřízené instituci (École Normale) měl Monge za úkol školit učitele středních škol v kurzech deskriptivní geometrie. Gaspard Monge současně stále bojoval o znovuzřízení Akademie věd.

Od května 1796 do října 1797 působil Monge v Itálii. Zde se spřátelil s Napoleonem Bonapartem a zpět do Paříže odcestovali společně. V Paříži byl Monge jmenován jedním z ředitelů École Polytechnique. Napoleon žádal Mongeovu účast na své egyptské expedici. Této expedice se zúčastnili také matematici Fourier[4] a Malus[5]. Monge byl 21. srpna 1798 jmenován prezidentem Institut d´Egypt v Káhiře. Tento institut měl 12 členů sekce matematiky, včetně Fouriera, Mongeho, Maluse a Napoleona Bonaparte. Během doby, kterou strávil Monge v Egyptě, se nadále věnoval zdokonalování svého spisu „Application de l´analyse a la géométire“.

Do Paříže se Monge vrátil v říjnu 1799 na pozici ředitele na École Polytechnique. Zanedlouho poté jmenoval Napoleon Gasparda Mongea do Sénat conservateur. Během následujících let se Monge věnoval nejen povolání senátora, ale současně i vypracovával další díla, která ovšem většinou obsahovala učební texty pro studenty École Polytechnique. Následně se začalo Mongemu zhoršovat zdraví a v roce 1809 musel zanechat vyučování. Následovala nelehká léta způsobená i politickou situací a konečnou Napoleonovou porážkou u Waterloo. Gaspard Monge zemřel v Paříži dne 28. července 1818. Jeho jméno je jedním ze 72 jmen zapsaných na Eiffelově věži.

[4] Jean Baptiste Joseph Fourier (francouzský matematik, 1768 – 1830)
[5] Étienne Louis Malus (francouzský matematik, 1775 – 1812)

3 MONGEOVO PROMÍTÁNÍ – ZÁKLADNÍ POJMY

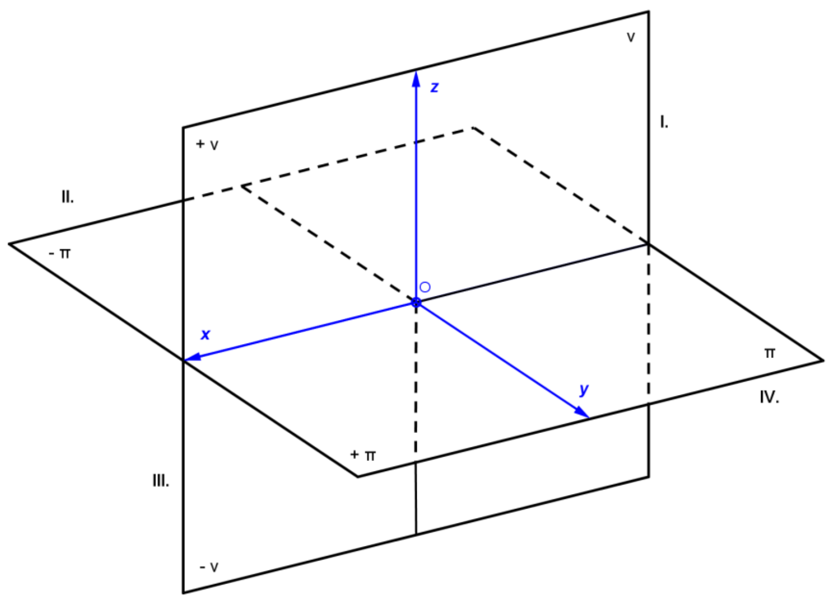
Mongeovo promítání (příp. Mongeova projekce) je pravoúhlé promítání na dvě průmětny k sobě kolmé. První vodorovnou průmětnu, kterou označujeme π, nazýváme půdorysna a druhou svislou průmětnu, kterou označujeme υ, nazýváme nárysna.

Osu *x* kartézské soustavy souřadnic *Oxyz* umisťujeme do průsečnice půdorysny a nárysny. Osa *y* kartézské soustavy souřadnic *Oxyz* leží v půdorysně π, zatímco osa z leží v nárysně υ. Pokud používáme pravotočivou soustavu souřadnic, bude kladná poloosa *x* směřovat doleva, kladná poloosa *y* dopředu a kladná poloosa *z* nahoru.

Osu *x* nazýváme základnicí. Rozděluje nám průmětny na poloroviny, které ve shodě s orientací os y a z označujeme znaménky plus a mínus: +π před osou x, -π za osou x, + υ nad osou x, -υ pod osou x.

Průmětny rozdělí prostor na čtyři části, které nazýváme kvadranty. Kvadranty označujeme řeckými číslicemi I, II, III, IV.

- kvadrant I: část prostoru nad půdorysnou a před nárysnou
- kvadrant II: část prostoru nad půdorysnou a za nárysnou
- kvadrant III: část prostoru pod půdorysnou a za nárysnou
- kvadrant IV: část prostoru pod půdorysnou a před nárysnou.



Obrázek 2 - Průmětny, osy a kvadranty v Mongeově promítání

3.1 OBRAZ BODU

Daný bod A promítneme do půdorysny a jeho průmět označíme indexem 1. Získáme bod A_1, který nazveme půdorysem bodu A. Jako druhý krok promítneme bod A do nárysny a jeho průmět označíme indexem 2. Získáme bod A_2, který nazveme nárysem bodu A. Můžeme si představit, že půdorys je vlastně pohled shora dolů a nárys je pohled zpředu na daný bod. Nárysu a půdorysu bodu A říkáme sdružené průměty bodu A.

Spojnice nárysu a půdorysu daného bodu je kolmá k základnici a nazývá se ordinála.

Umístění sdružených průmětů záleží na souřadnicích bodu.

- Má-li bod souřadnici *x* kladnou/zápornou, je jeho ordinála vlevo/vpravo od bodu O.
- Má-li bod souřadnici *y* kladnou/zápornou, leží jeho půdorys pod/nad základnicí.
- Má-li bod souřadnici *z* kladnou/zápornou, leží jeho nárys nad/pod základnicí.
- Půdorysy bodů, jejichž souřadnice *y* je nulová, jsou na základnici.
- Nárysy bodů, jejichž souřadnice *z* je nulová, jsou na základnici.

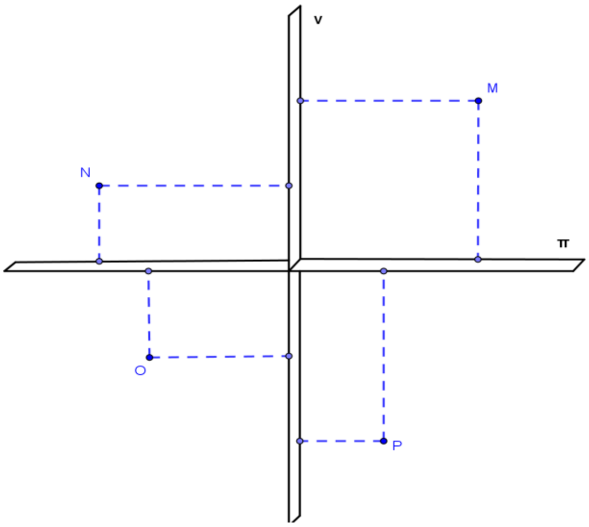
A naopak můžeme říci, že souřadnice *x* je souřadnice toho bodu základnice, ve kterém ji protíná ordinála. Souřadnice *y* je absolutní hodnota vzdálenosti půdorysu od základnice. Souřadnice *y* je kladná, jestliže půdorys bodu leží pod základnicí nebo je záporná, jestliže půdorys bodu leží nad základnicí nebo je nulová, jestliže půdorys bodu leží na základnici. A konečně souřadnice *z* je absolutní hodnota vzdálenosti nárysu od základnice. Souřadnice *z* je kladná, jestliže nárys bodu leží nad základnicí nebo je záporná, jestliže nárys bodu leží pod základnicí nebo je nulová, je-li nárys bodu na základnici.

Příklad č. 1:

Zobrazte sdružené průměty bodů M, N, O, P, z nichž každý leží v jiném kvadrantu.

Souřadnice bodů jsou tyto: M = [4; 4; 4], N = [2; -4; 2], O = [-1; -3; -2], P = [-2; 2; -4].

(obrázek 3)



Obrázek 3 – Zadání příkladu č. 1 – Obraz bodu

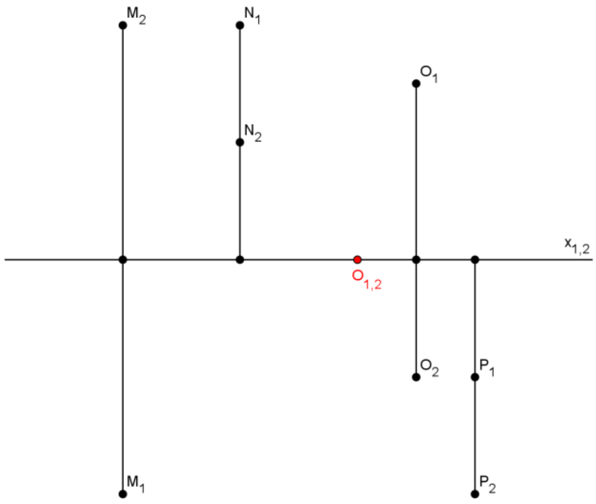
Řešení: Nejdříve si ujasníme umístění jednotlivých bodů vůči půdorysně a nárysně.

bod M – leží nad půdorysnou a před nárysnou (půdorys leží pod osou $x_{1,2}$ a nárys nad osou $x_{1,2}$)

bod N – leží nad půdorysnou a za nárysnou (půdorys i nárys se nachází nad osou $x_{1,2}$)

bod O – leží pod půdorysnou a za nárysnou (nárys se nachází pod a půdorys nad osou $x_{1,2}$)

bod P – leží pod půdorysnou a před nárysnou (nárys i půdorys najdeme pod osou $x_{1,2}$)



Obrázek 4 – Řešení příkladu č. 1 – Obraz bodu

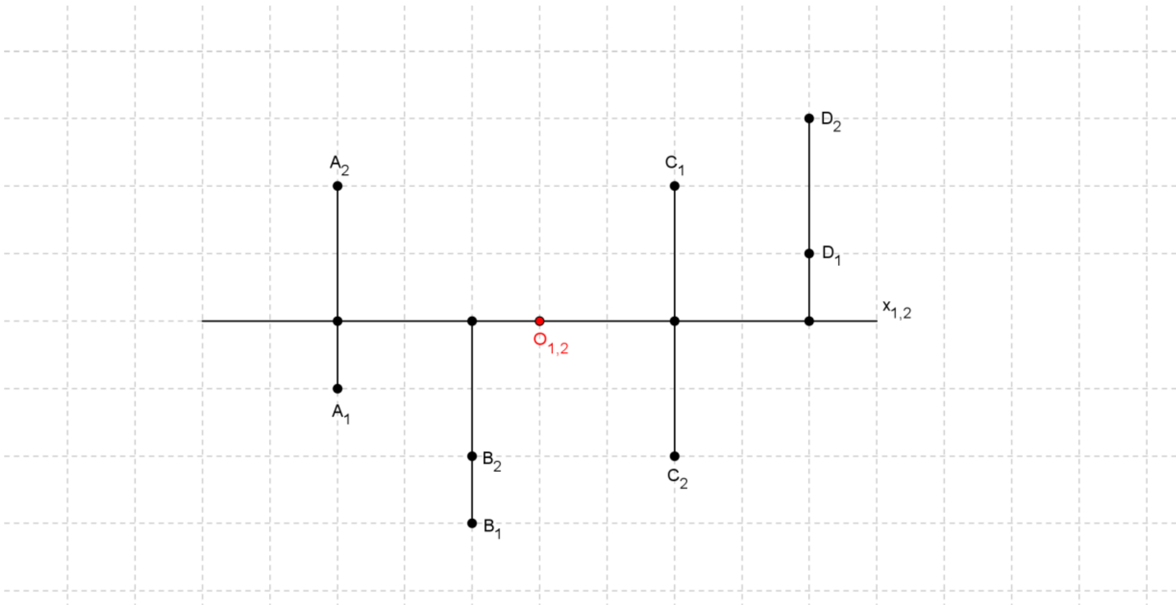
3.1.1 TESTOVÉ OTÁZKY

1. Jak se nazývá spojnice nárysu a půdorysu daného bodu?
   a) ordinála
   b) osa $x_{1,2}$
   c) nárysna.

2. Na základnici neleží ani jeden ze sdružených průmětů bodu, jehož:
   a) souřadnice *x* je nulová
   b) souřadnice *y* je nulová
   c) souřadnice *z* je nulová.

3. Kdy nastane situace, že půdorys a nárys bodu splývají?
   a) pokud souřadnice *x* a *y* se rovnají 0
   b) pokud souřadnice *x* a *z* se rovnají 0
   c) pokud souřadnice *y* a *z* se rovnají 0.

4. Urči souřadnice následujících bodů A, B, C, D:



Správná řešení: 1a, 2a, 3c,

4 $A = [3; 1; 2], B = [1; 3; -2], C = [-2; -2; -2], D = [-4; -1; 3]$

3.2 OBRAZ PŘÍMKY

Obrazem přímky je buď přímka, nebo bod. Podle umístění přímky můžeme říci:

- pokud přímka p není kolmá k ose x, pak jejím půdorysem a nárysem jsou přímky p_1 a p_2, které nejsou kolmé k ose $x_{1,2}$
- pokud přímka p je kolmá k půdorysně, jejím půdorysem je bod a nárysem je přímka kolmá k ose $x_{1,2}$
- pokud přímka p je kolmá k nárysně, jejím nárysem je bod a půdorysem je přímka kolmá k ose $x_{1,2}$
- pokud přímka p je kolmá k ose x a přitom není kolmá k žádné průmětně, pak její sdružené průměty splývají a jsou kolmé k ose $x_{1,2}$[6]

Každé přímce, jež není kolmá na průmětnu, můžeme proložit rovinu kolmou k průmětně. Tuto rovinu nazveme promítací rovinou přímky. Taktéž můžeme proložit přímkou rovinu kolmou k půdorysně, pak získáme půdorysně promítací rovinu nebo rovinu kolmou k nárysně, přičemž získáme nárysně promítací rovinu.

Body, ve kterých přímka protíná průmětny, jsou stopníky přímky.

- Průsečík P přímky p s půdorysnou je půdorysný stopník přímky p.
- Průsečík N přímky p s nárysnou je nárysný stopník přímky p.
- Stopník P leží v půdorysně ($z_p = 0$), a proto jeho nárys P_2 leží na ose $x_{1,2}$. Jeho půdorys P_1 leží na ordinále a na přímce p_1.
- Stopník N leží v nárysně ($y_N = 0$), a proto jeho půdorys N_1 leží na ose $x_{1,2}$. Jeho nárys N_2 leží na ordinále a na přímce p_2.

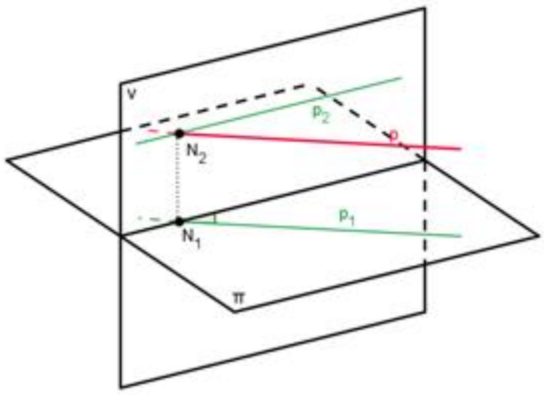
Přímka, která je rovnoběžná s právě jednou průmětnou, má jen jeden stopník.

Přímka, která je rovnoběžná s oběma průmětnami, pak nemá žádný stopník.

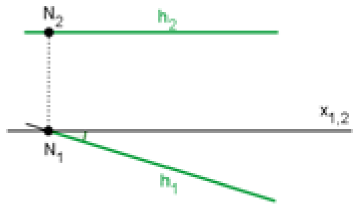
[6] v tomto případě není přímka určena svými sdruženými průměty a k jejímu určení je třeba ještě dalších údajů

3.2.1 PŘÍMKA *h* ROVNOBĚŽNÁ S PŮDORYSNOU

Přímka *h* rovnoběžná s půdorysnou ($h \nparallel x$) se nazývá horizontální přímka. Při jejím zobrazení v Mongeově promítání se nárys přímky zobrazí jako přímka rovnoběžná s osou $x_{1,2}$ a půdorys přímky se zobrazí jako přímka s osou $x_{1,2}$ různoběžná.



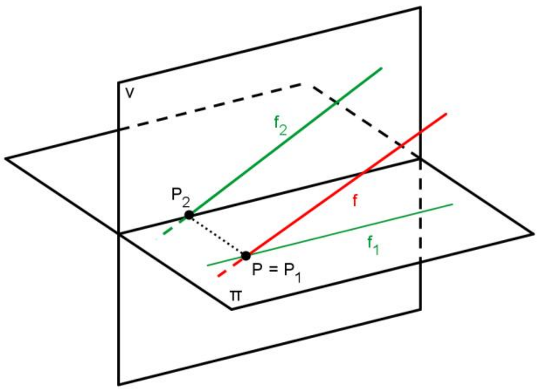
Obrázek 5 - Přímka h rovnoběžná s půdorysnou



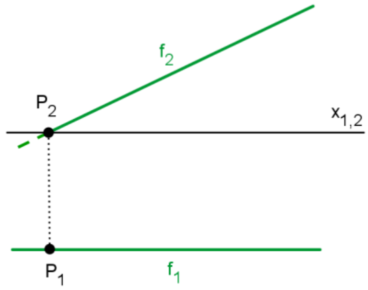
Obrázek 6 - Zobrazení přímky h

3.2.2 PŘÍMKA *f* ROVNOBĚŽNÁ S NÁRYSNOU

Přímka f rovnoběžná s nárysnou ($f \nparallel x$) se nazývá frontální přímka. Při jejím zobrazení v Mongeově promítání se nárys přímky zobrazí jako přímka různoběžná s osou $x_{1,2}$ a půdorys přímky se zobrazí jako přímka s osou $x_{1,2}$ rovnoběžná.



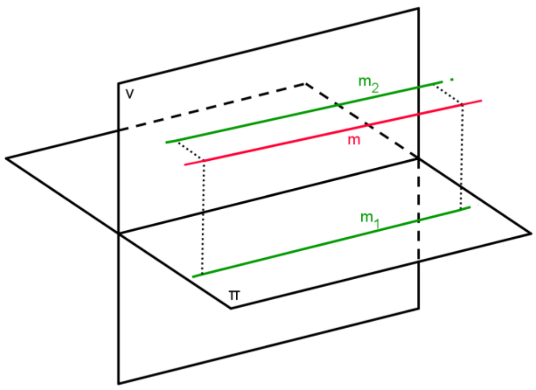
Obrázek 7 - Přímka f rovnoběžná s nárysnou



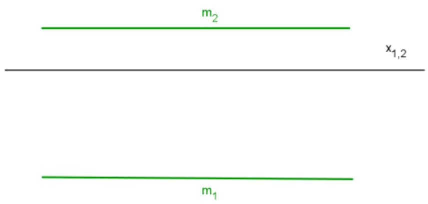
Obrázek 8 - Zobrazení přímky f

3.2.3 PŘÍMKA *m* ROVNOBĚŽNÁ S OSOU $x_{1,2}$

Půdorys i nárys přímky *m*, která je rovnoběžná s osou $x_{1,2}$ jsou přímky rovnoběžné s osou $x_{1,2}$.



Obrázek 9 - Přímka m rovnoběžná s osou x

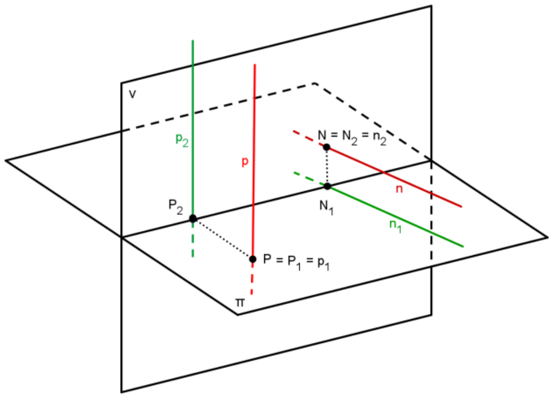


Obrázek 10 - Zobrazení přímky m

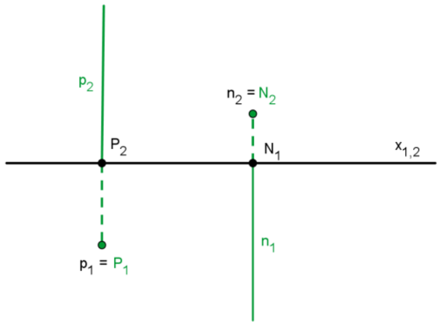
3.2.4 PŘÍMKA *P* KOLMÁ K PŮDORYSNĚ A PŘÍMKA *N* KOLMÁ K NÁRYSNĚ

Pokud je přímka kolmá k půdorysně, pak jejím půdorysem je bod a nárysem přímka kolmá k ose $x_{1,2}$ ležící na ordinále.

V případě, že přímka je kolmá k nárysně, pak jejím nárysem je bod a půdorysem přímka kolmá k ose $x_{1,2}$ ležící na ordinále.



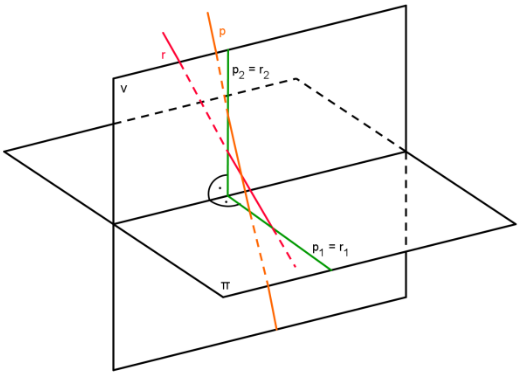
Obrázek 11 - Přímka p kolmá k půdorysně a přímka n kolmá k nárysně



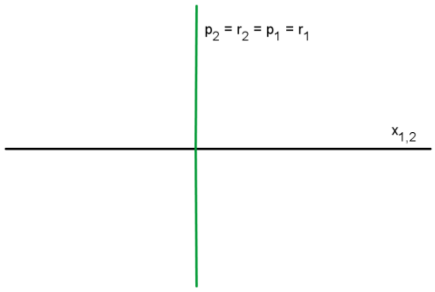
Obrázek 12 - Zobrazení přímek p a n

3.2.5 PŘÍMKA KOLMÁ K OSE $x_{1,2}$

Přímka, která je kolmá k ose $x_{1,2}$ a zároveň není kolmá k žádné z průměten (nárysna, půdorysna), není svými průměty jednoznačně určena. Na obrázku č. 14 je vidět, že nárys i půdorys přímky splynul v jednu přímku, která je kolmá k ose $x_{1,2}$.



Obrázek 13 - Přímky p a r kolmé k ose



Obrázek 14 - Zobrazení přímek p a r

Pozn.: Jednoznačnost určení přímky v Mongeově promítání zajistíme určením dvou jejích různých bodů.

3.2.6 TESTOVÉ OTÁZKY

1. Půdorys přímky kolmé k půdorysně π se zobrazí jako:
   a) přímka rovnoběžná s osou $x_{1,2}$
   b) přímka kolmá k ose $x_{1,2}$
   c) bod

2. Jak se nazývá průsečík přímky s půdorysnou?
   a) obraz bodu
   b) nárysný stopník
   c) půdorysný stopník

3. Kolik stopníků má přímka, která je rovnoběžná právě s jednou průmětnou?
   a) 0
   b) 1
   c) 2

4. Jak se nazývá přímka, která je rovnoběžná s půdorysnou a nejedná se o základnici?
   a) horizontální přímka
   b) frontální přímka
   c) ordinála.

5. Kterou přímku nelze jednoznačně určit jejími průměty?
   a) přímku, která je v rovině kolmá k ose $x_{1,2}$
   b) přímku, která je v rovině kolmá k nárysně
   c) přímku, která je v rovině kolmá k půdorysně.

Správné odpovědi: 1c, 2c, 3b, 4a, 5a

3.3 OBRAZ ROVINY

Rovinu můžeme v Mongeově promítání jednoznačně určit několika způsoby:

a) třemi nekolineárními[7] body

b) dvěma různoběžkami[8]

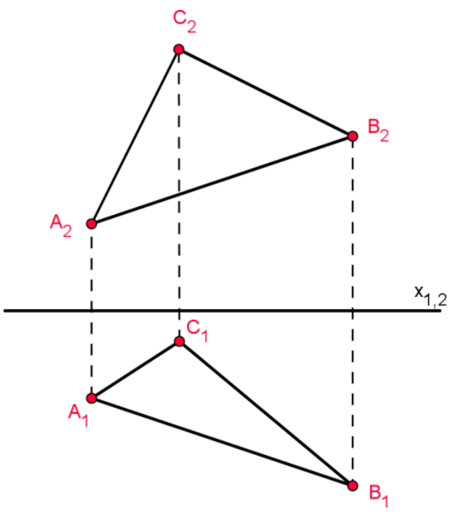
c) dvěma rovnoběžkami[9]

d) bodem a přímkou[10]

e) speciální případ – stopami.

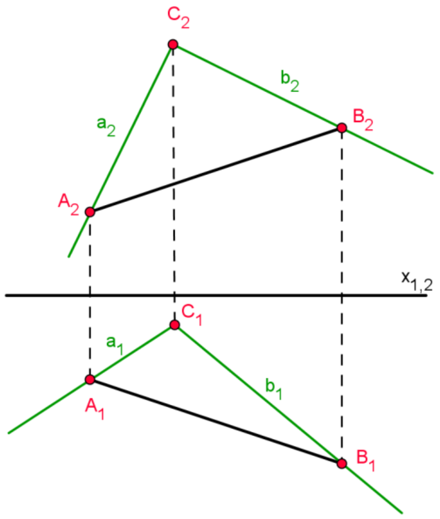
3.3.1 URČENÍ ROVINY TŘEMI NEKOLINEÁRNÍMI BODY

Na obrázku 15 je rovina určena třemi nekolineárními body A, B, C. Toto zadání můžeme převést i na zadání, kdy je rovina určena dvěma různoběžkami (obrázek 16) nebo rovnoběžkami (obrázek 17).

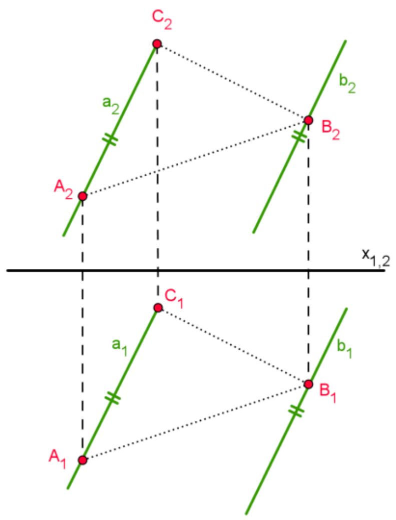


Obrázek 15 - Určení roviny třemi nekolineárními body

[7] body, které neleží na jedné přímce
[8] sdružené průměty průsečíků různoběžek musí ležet na ordinále
[9] nárysem i půdorysem rovnoběžek jsou opět rovnoběžky (mohou ovšem i splývat)
[10] je podmínka, že bod nesmí ležet na přímce



Obrázek 16 - Převedení zadání 3 bodů na 2 různoběžky

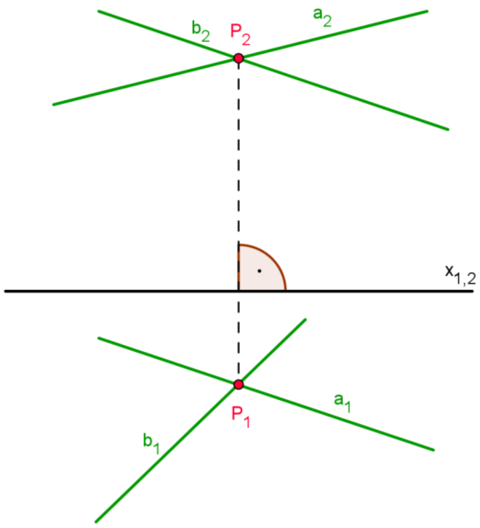


Obrázek 17 - Převedení zadání 3 bodů na 2 rovnoběžky

3.3.2 URČENÍ ROVINY DVĚMA RŮZNOBĚŽKAMI

Dvě různoběžky mají společný bod P (P_1, P_2), přičemž platí:

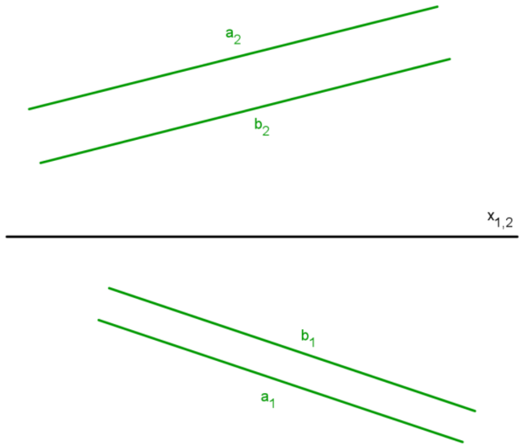
$P_1 = a_1 \cap b_{1,}$ $P_2 = a_2 \cap b_{2.}$ Musí tedy platit i: $P_1P_2 \perp x_{1,2}$.



Obrázek 18 - Určení roviny dvěma různoběžkami

3.3.3 URČENÍ ROVINY DVĚMA ROVNOBĚŽKAMI

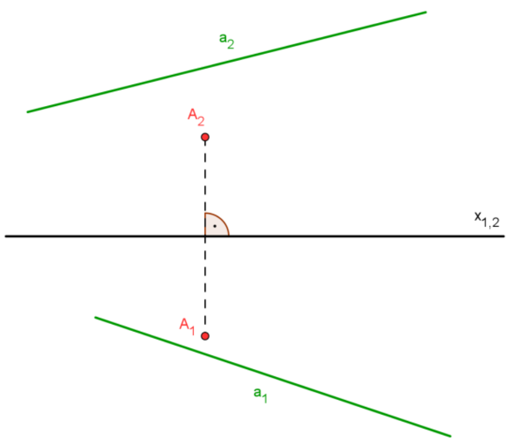
Pro to, aby nám dvě rovnoběžky a, b určovaly rovinu, musí být splněna podmínka: $a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$.



Obrázek 19 - Určení roviny dvěma rovnoběžkami

3.3.4 URČENÍ ROVINY BODEM A PŘÍMKOU

Aby mohla být rovina určena bodem A a přímkou *a*, musí být splněna podmínka: $A \notin a$.



Obrázek 20 - Určení roviny bodem a přímkou

3.3.5 URČENÍ ROVINY STOPAMI

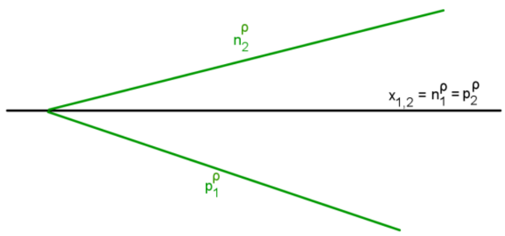
Stopa roviny ρ je přímka, ve které rovina ρ protne průmětnu (nárysnu a půdorysnu).

Průsečnici roviny ρ s nárysnou nazýváme nárysnou stopou a značíme ji n^{ρ}.

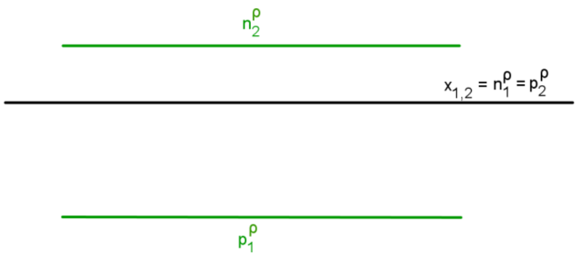
Průsečnici roviny ρ s půdorysnou nazýváme půdorysnou stopou a značíme ji p^{ρ}.

Nárysná i půdorysná stopa jsou vlastně dvě přímky – mohou být rovnoběžné nebo různoběžné – a tudíž můžeme říci, že pokud je rovina určena stopami, je určena opět buď dvěma rovnoběžkami nebo dvěma různoběžkami.

V Mongeově promítání platí, že půdorys nárysné stopy n_1^{ρ} a nárys půdorysné stopy p_2^{ρ} splývají a zároveň jsou shodné i s osou $x_{1,2}$. Platí tedy: $n_1^{\rho} = p_2^{\rho} = x_{1,2}$. Přímky n_2^{ρ} a p_1^{ρ} se mohou buď protínat na ose $x_{1,2}$ (obrázek 21) nebo jsou obě rovnoběžné s osou $x_{1,2}$ (obrázek 22).



Obrázek 21 - Protnutí stop na ose



Obrázek 22 - Stopy jsou rovnoběžné s osou

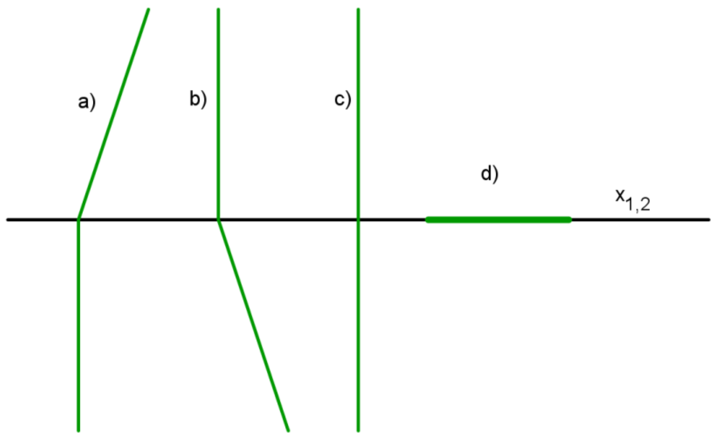
Pozn.: (obrázek 23)

a) Pokud by rovina α byla kolmá k nárysně, pak se nám p_1^α zobrazí jako přímka kolmá k ose $x_{1,2}$.

b) Pokud by rovina β byla kolmá k půdorysně, pak se nám n_2^β zobrazí jako přímka kolmá k ose $x_{1,2}$.

c) Pokud by rovina γ byla kolmá k půdorysně i k nárysně, pak se nám obě stopy zobrazí jako přímky kolmé k ose $x_{1,2}$.

d) Pokud by rovina δ obsahovala osu x, pak by rovina nemohla být stopami jednoznačně určena.



Obrázek 23 - Další zobrazení rovin pomocí stop

3.3.6 TESTOVÉ OTÁZKY

1. Čím nemůžeme jednoznačně určit rovinu?
   a) dvěma rovnoběžkami
   b) dvěma body
   c) dvěma různoběžkami.

2. Jaká je vzájemná poloha dvou přímek, jejichž průsečík v nárysu i v půdorysu leží na ordinále?
   a) rovnoběžné přímky
   b) různoběžné přímky
   c) mimoběžné přímky.

3. Je v Mongeově promítání zachována rovnoběžnost přímek?
   a) ano
   b) ne
   c) jen v případě, že jedna z nich prochází osou $x_{1,2}$.

4. Jak se nazývá přímka, ve které rovina α protne průmětnu (nárysnu nebo půdorysnu)?
   a) průmětna
   b) ordinála
   c) stopa.

Správné odpovědi: 1b, 2b, 3a, 4c

4 POLOHOVÉ ÚLOHY

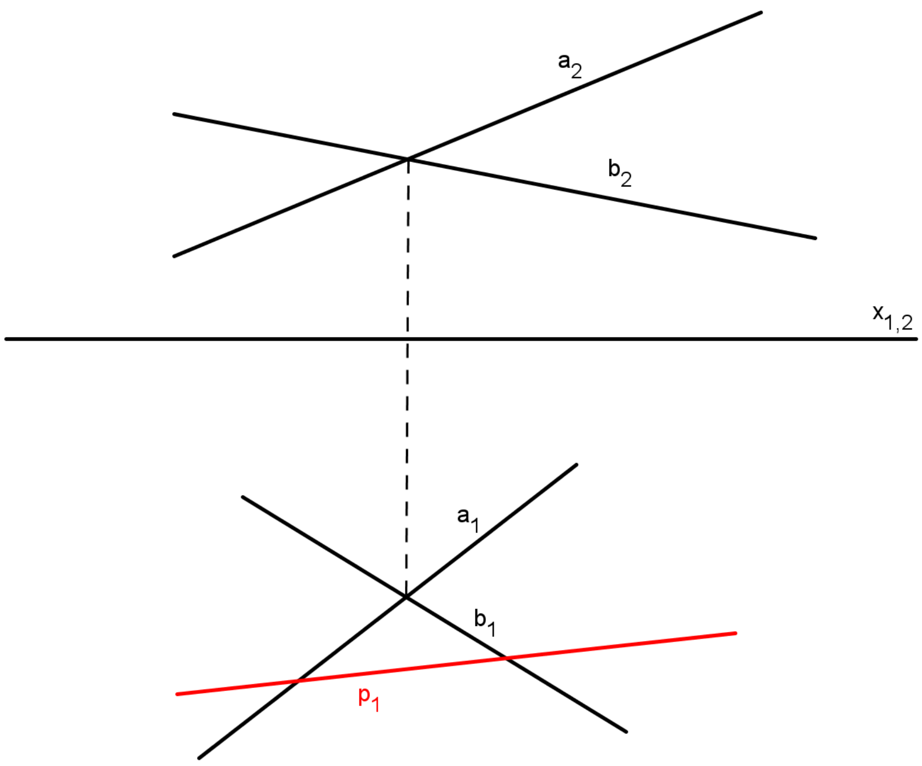
4.1 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 1 – PŘÍMKA V ROVINĚ

Přímka, která leží v rovině, je se všemi ostatními přímkami roviny buď rovnoběžná, nebo různoběžná. Půdorysný stopník přímky ležící v rovině leží na její půdorysné stopě, naopak nárysný stopník přímky ležící v rovině leží na její nárysné stopě.

Chceme-li sestrojit stopu roviny, určíme stopníky dvou přímek ležících v rovině. Půdorysná stopa je spojnicí půdorysných stopníků, nárysná stopa je spojnicí nárysných stopníků. (*Tomiczková, str. 48)*

Příklad č. 1

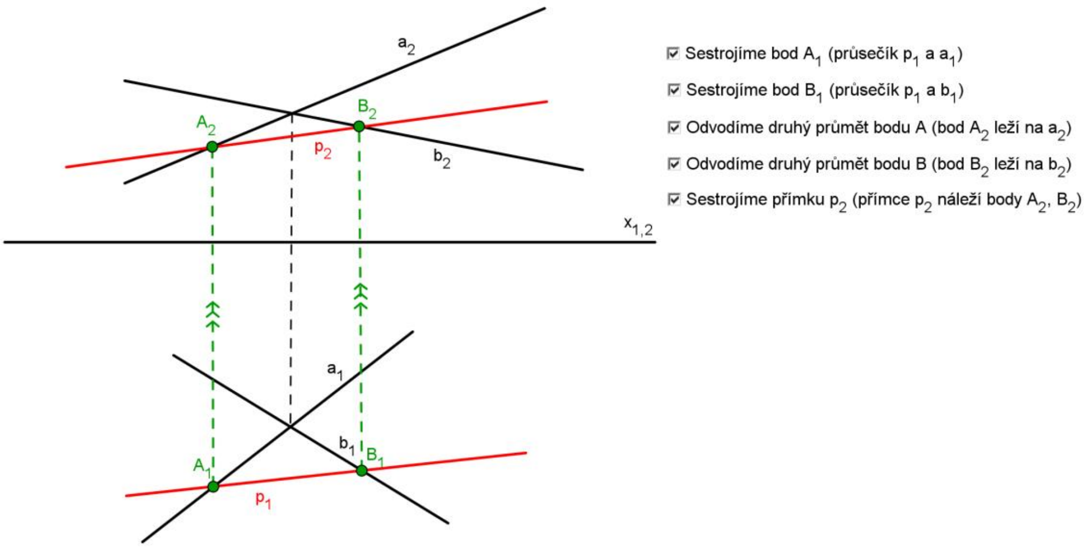
Rovina α je určena přímkami *a, b.* Je dán jeden průmět přímky *p* ležící v rovině α. Sestrojte druhý průmět přímky *p*. (obrázek 24)



Obrázek 24 - Zadání příkladu č. 1 – Přímka v rovině

Řešení:

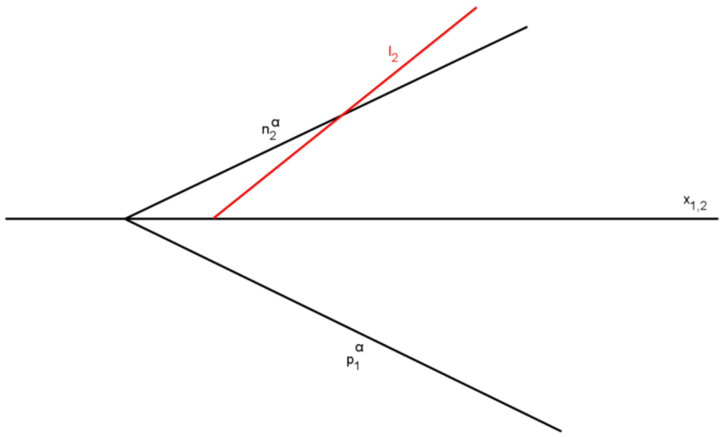
Nejprve sestrojíme bod A_1 (který je průsečíkem přímek p_1 a a_1) a bod B_1 (který je průsečíkem přímek p_1 a b_1). Odvodíme druhé průměty bodů A a B (bod A_2 leží na přímce a_2 a bod B_2 leží na přímce b_2). Řešením je přímka p_2 procházející body A_2 a B_2. (obrázek 25)



Obrázek 25 - Řešení příkladu č. 1 – Přímka v rovině

Příklad č. 2

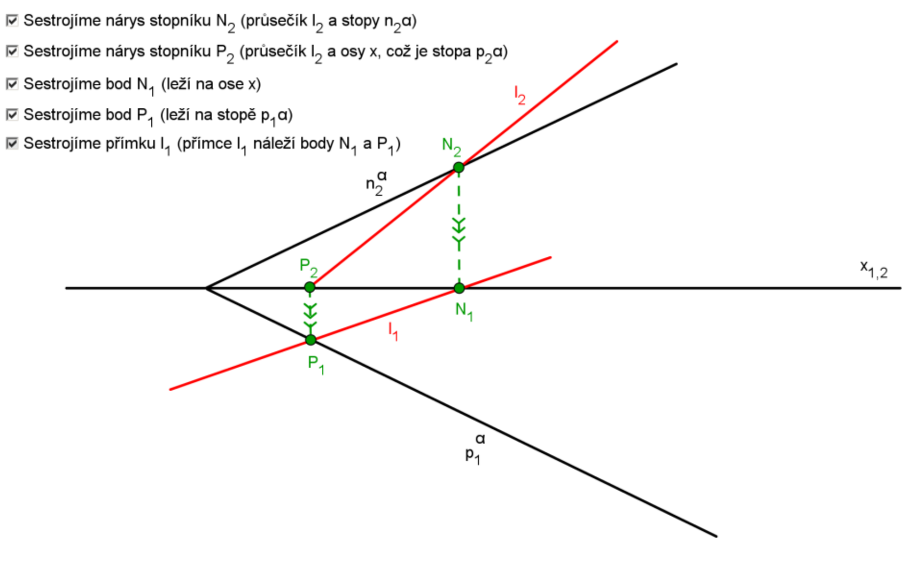
Rovina α je určena stopami. Je dán jeden průmět přímky *l* ležící v rovině α. Sestrojte druhý průmět přímky *l*. (obrázek 26)



Obrázek 26 - Zadání příkladu č. 2 – Přímka v rovině

Řešení:

Nejprve sestrojíme nárys nárysného stopníku N_2 (který je průsečíkem přímek l_2 a stopy n_2^α) a nárys půdorysného stopníku P_2 (který je průsečíkem přímek l_2 a osy $x_{1,2} = p_2^\alpha$). Poté sestrojíme body N_1 a P_1. Přičemž bod N_1 leží na ose $x_{1,2}$ a bod P_1 leží na stopě p_1^α. Řešením je přímka l_1, které náleží body N_1 a P_1. (obrázek 27)



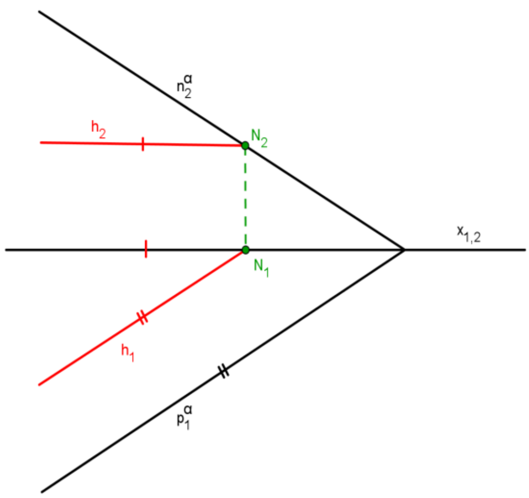
Obrázek 27 - Řešení příkladu č. 2 – Přímka v rovině

4.1.1 HLAVNÍ PŘÍMKA ROVINY

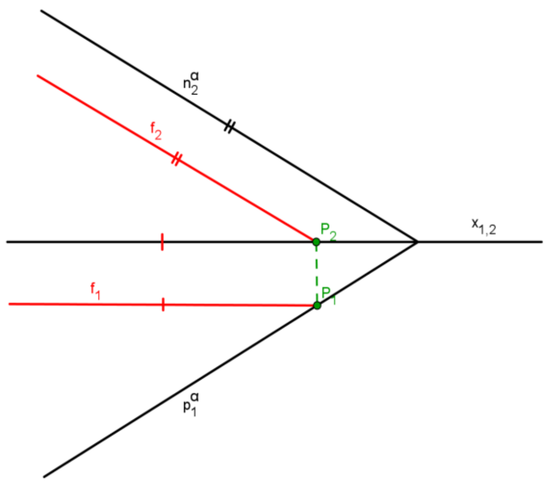
Hlavní přímky roviny α jsou přímky, které leží v rovině α a jsou rovnoběžné s průmětnou. Podle toho, zda jsou rovnoběžné s půdorysnou nebo nárysnou, označujeme je jako horizontální hlavní přímky nebo frontální hlavní přímky. Můžeme tedy říci, že hlavní přímky roviny jsou:

a) <u>Horizontální hlavní přímka roviny</u> (resp. hlavní přímka první osnovy) je přímka, která je rovnoběžná s půdorysnou. Značíme ji *h*. Pro obrazy horizontálních hlavních přímek roviny α platí: $h_1 \parallel p_1^{\alpha}$ a $h_2 \parallel x_{1,2}$. Speciálním případem horizontální hlavní přímky je půdorysná stopa. Všechny horizontální hlavní přímky téže roviny jsou navzájem rovnoběžné. (obrázek 28)

b) <u>Frontální hlavní přímka roviny</u> (resp. hlavní přímka druhé osnovy) je přímka, která je rovnoběžná s nárysnou. Značíme je *f*. Pro obrazy frontálních hlavních přímek roviny α platí: $f_1 \parallel x_{1,2}$ a $f_2 \parallel n_2^{\alpha}$. Speciálním případem frontální hlavní přímky je nárysná stopa. Všechny frontální hlavní přímky téže roviny jsou navzájem rovnoběžné. (obrázek 29)



Obrázek 28 - Horizontální hlavní přímka roviny



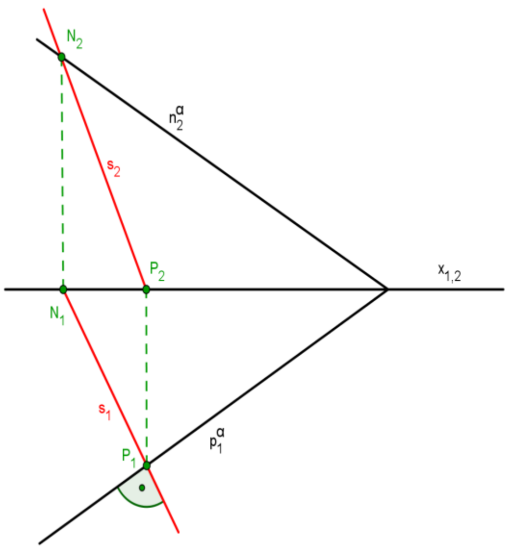
Obrázek 29 - Frontální hlavní přímka roviny

4.1.2 SPÁDOVÉ PŘÍMKY ROVINY

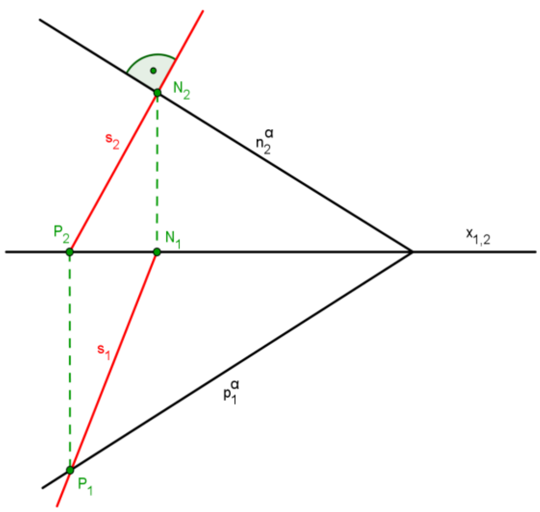
Spádové přímky roviny α jsou přímky, které leží v rovině α a jsou kolmé na hlavní přímky. Podle toho, zda jsou kolmé na horizontální hlavní přímky nebo na frontální hlavní přímky, označujeme je jako spádové přímky první osnovy nebo spádové přímky druhé osnovy. Spádové přímky roviny značíme *s.* Můžeme tedy říci, že spádové přímky roviny jsou:

a) Spádové přímky první osnovy, které jsou kolmé na hlavní přímky první osnovy (horizontální hlavní přímky), tedy i na půdorysnou stopu. (obrázek 30)

b) Spádové přímky druhé osnovy, které jsou kolmé na hlavní přímky druhé osnovy (frontální hlavní přímky), tedy i na nárysnou stopu. (obrázek 31)



Obrázek 30 - Spádová přímka první osnovy



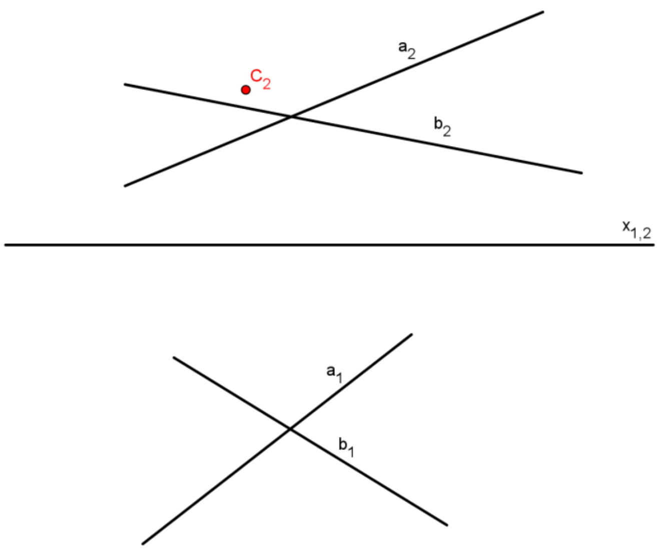
Obrázek 31 - Spádová přímka druhé osnovy

4.2 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 2 – BOD V ROVINĚ

Bod leží v rovině α právě tehdy, když leží na některé z přímek náležejících rovině α. Při odvozování druhého průmětu bodu ležícího v rovině zvolíme přímku, která tímto bodem prochází. Touto přímkou můžeme zvolit i hlavní přímku roviny α. Druhý průmět bodu pak leží na odvozené přímce a na ordinále.

<u>Příklad č. 1</u>

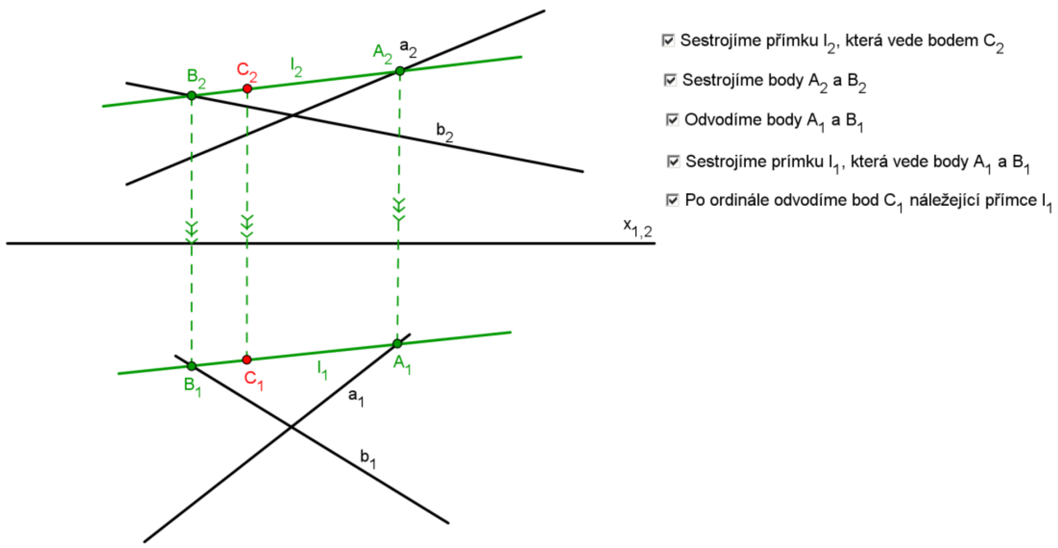
Rovina α je určena přímkami *a* a *b*. Sestrojte půdorys bodu C, který náleží rovině α, pokud je dán jeho nárys. (obrázek 32)



Obrázek 32 - Zadání příkladu č. 1 - Bod v rovině

<u>Řešení:</u>

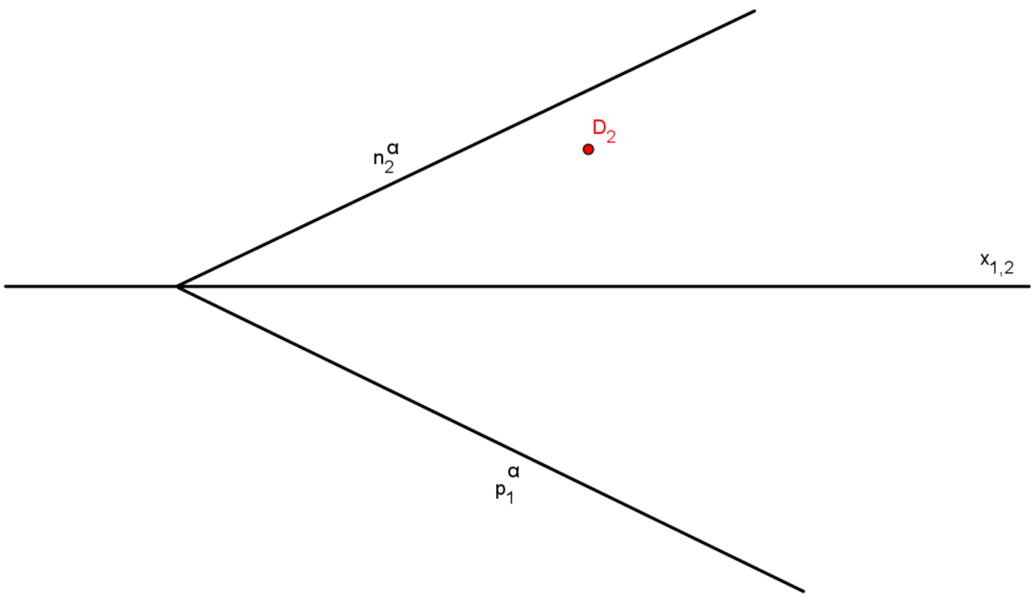
Bodem C_2 vedeme přímku l_2. Sestrojíme průsečíky bodů A_2 a B_2 ($A_2 \in a_2 \cap l_2, B_2 \in b_2 \cap l_2$). Po ordinále odvodíme body A_1 a B_1 ($A_1 \in a_1, B_1 \in b_1$) a sestrojíme přímku l_1, které tyto body (A_1, B_1) náleží. Bod C_1 získáme tak, že jej odvodíme po ordinále vedené bodem C_2 a zároveň náleží přímce l_1. (obrázek 33)



Obrázek 33 - Řešení příkladu č. 1 - Bod v rovině

Příklad č. 2

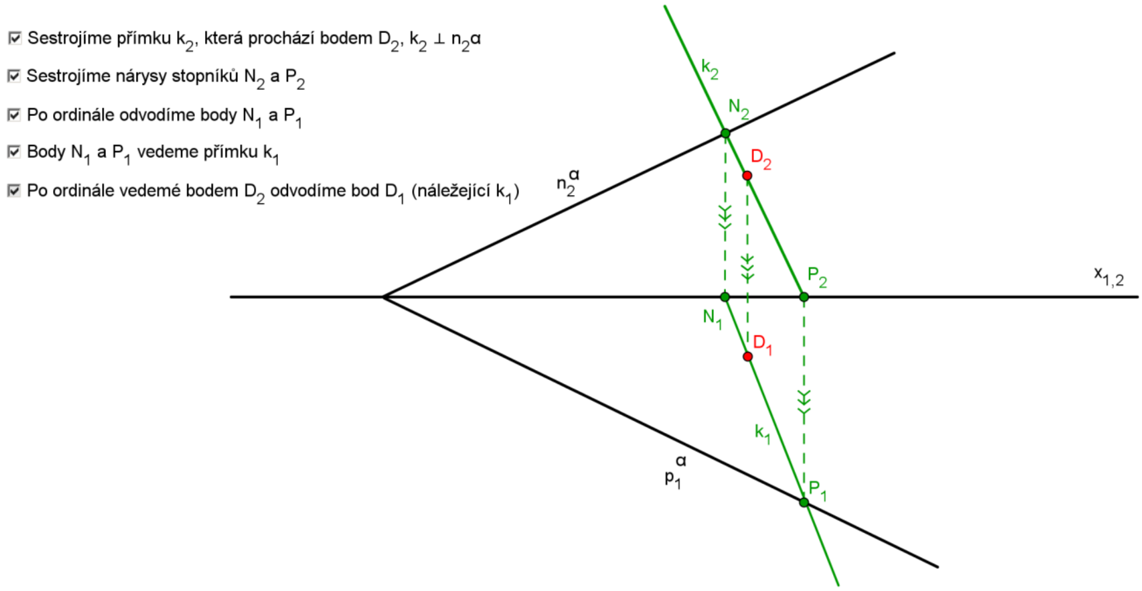
Rovina α je určena stopami. Sestrojte půdorys bodu D, který náleží rovině α, pokud je dán jeho nárys. (obrázek 34)



Obrázek 34 - Zadání příkladu č. 2 - Bod v rovině

<u>Řešení</u>:

Bodem D_2 vedeme přímku k_2 ($k_2 \perp n_2^\alpha$). Sestrojíme nárys nárysného stopníku N_2 ($N_2 \in k_2 \cap n_2^\alpha$) a nárys půdorysného stopníku P_2 ($P_2 \in k_2 \cap p_2^\alpha = x_{1,2}$). Odvodíme body N_1 ($N_1 \in x_{1,2}$) a P_1 ($P_1 \in p_1^\alpha$). Body N_1 a P_1 vedeme přímku k_1. Bodem D_2 vedeme ordinálu a hledaný bod D_1 nalezneme na této ordinále a přímce k_1. (obrázek 35)



Obrázek 35 - Řešení příkladu č. 2 - Bod v rovině

4.3 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 3 - ROVNOBĚŽNÉ ROVINY

Před řešením této úlohy si připomeňme:

a) *kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:* Přímka je rovnoběžná s rovinou, jestliže v rovině leží aspoň jedna přímka, která je s danou přímkou rovnoběžná. (Pomykalová, str. 12)

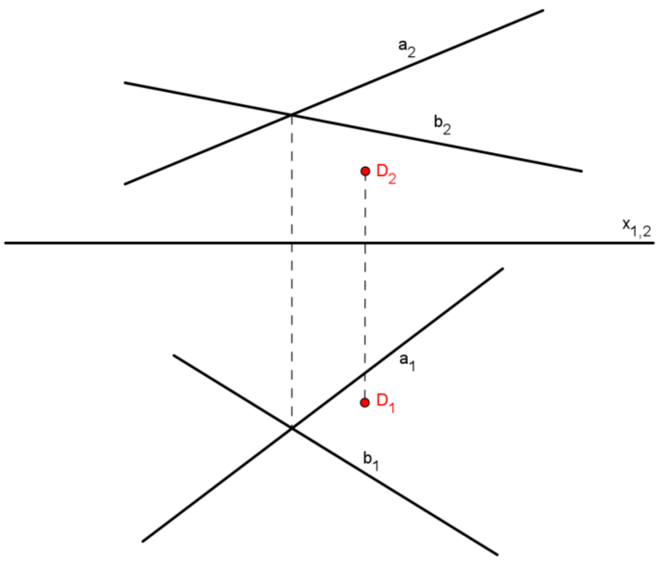
b) *kritérium rovnoběžnosti dvou rovin:* Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže v jedné z nich leží dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou. (Pomykalová, str. 13)

c) *Rovnoběžné roviny mají rovnoběžné stopy.*

d) *Stopy roviny obecně neprocházejí nárysem i půdorysem bodu ležícím v této rovině* (aby nastal tento případ, musel by bod ležet na ose x). (Tomiczková, str. 53).

Příklad č. 1

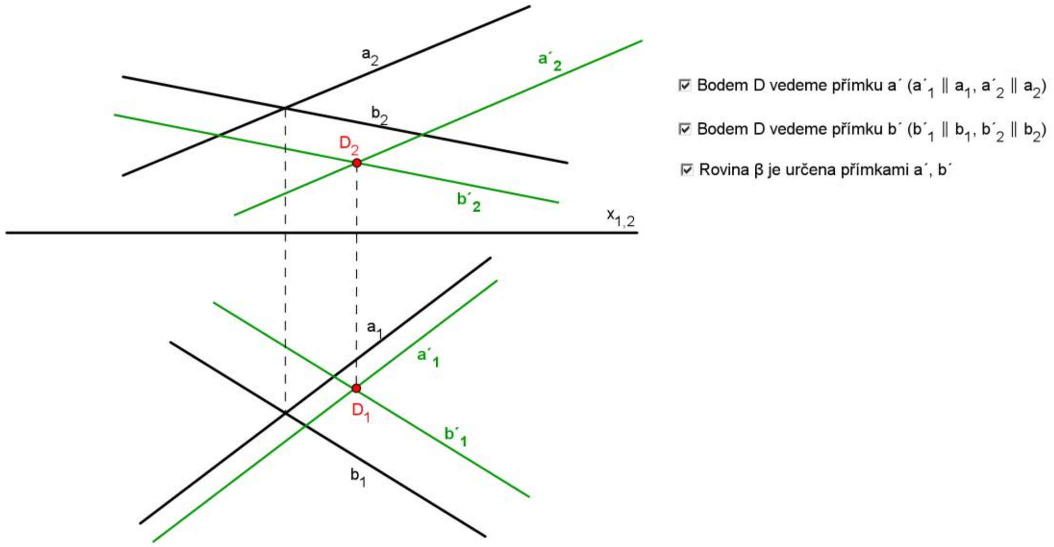
Rovina α je určena přímkami *a* a *b*. Veďte bodem D rovinu β, která bude rovnoběžná s rovinou α. (obrázek 36)



Obrázek 36 - Zadání příkladu č. 1 - Rovnoběžné roviny

Řešení:

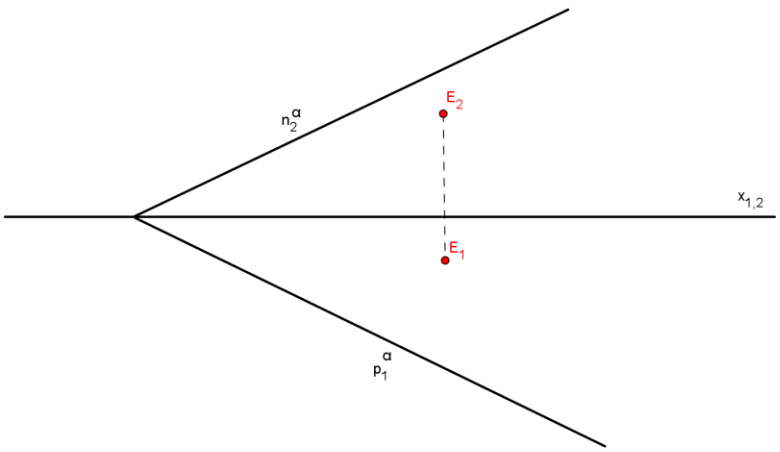
Bodem D vedeme přímku *a´*, která je rovnoběžná s přímkou *a* (to znamená, že platí: $a_1' \parallel a_{1,} a_2' \parallel a_2$). Bodem D vedeme i přímku *b´*, která je rovnoběžná s přímkou *b* (to znamená, že platí: $b_1' \parallel b_{1,} b_2' \parallel b_2$). Řešením je rovina β, která je určena přímkami *a´b´*.



Obrázek 37 - Řešení příkladu č. 1 - Rovnoběžné roviny

Příklad č. 2

Rovina α je určena stopami. Veďte bodem E rovinu β, která bude rovnoběžná s rovinou α. (obrázek 38)

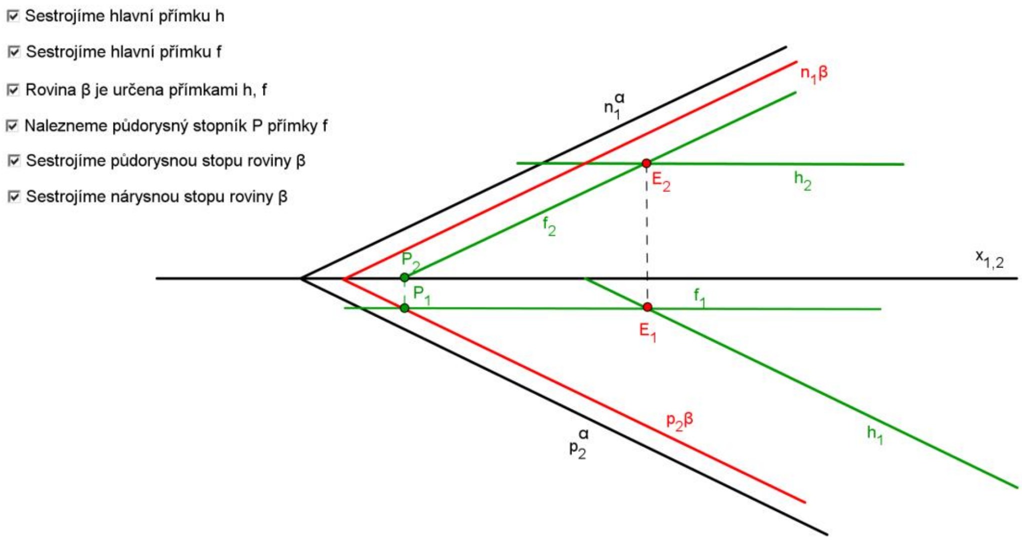


Obrázek 38 - Zadání příkladu č. 2 - Rovnoběžné roviny

<u>Řešení:</u>

Nejprve sestrojíme hlavní přímku *h*, která je rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny α a vede bodem E (to znamená, že platí: $h_1 \parallel p_1^\alpha, h_2 \parallel p_2^\alpha = x_{1,2}$). Poté sestrojíme hlavní přímku *f*, která je rovnoběžná s nárysnou stopou roviny α a taktéž vede bodem E (to znamená, že platí: $f_2 \parallel n_2^\alpha, f_1 \parallel n_1^\alpha = x_{1,2}$). Hledaná rovina β je určena přímkami *h* a *f*.

Pokud bychom chtěli mít rovinu β určenou stopami, pak nalezneme nejprve stopník jedné z přímek *h,f* (např. půdorysný stopník P přímky *f*). Půdorysná stopa roviny β prochází půdorysným stopníkem a je rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny α. Nárysná stopa roviny β je rovnoběžná s nárysnou stopou roviny α a protíná se s půdorysnou stopou na ose $x_{1,2}$. (obrázek 39)



Obrázek 39 - Řešení příkladu č. 2 - Rovnoběžné roviny

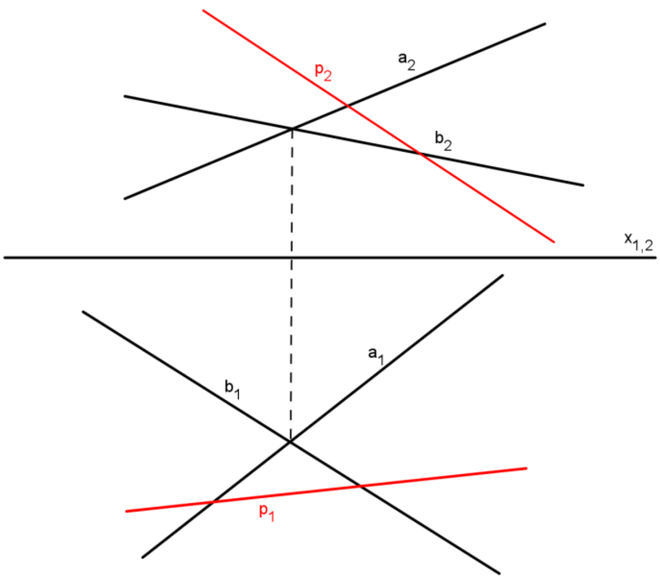
4.4 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 4 – PRŮSEČÍK PŘÍMKY S ROVINOU

Je-li přímka různoběžná s rovinou, hledáme jejich společný bod – průsečík. Postupujeme tak, že využijeme metodu krycí přímky.

V rovině σ zvolíme přímku *s*, která se kryje s přímkou *p* v některém průmětu, tj. leží s přímkou *p* v jedné promítací rovině a zároveň leží v rovině σ. Přímka *s* je průsečnicí roviny σ a promítací roviny přímky *p.* Průsečík přímky *p* a *s* je zároveň i průsečíkem přímky *p* s rovinou σ. V průmětně, ve které průměty přímek *p* a *s* nesplývají, najdeme jejich průsečík a odvodíme pomocí ordinály do druhé průmětny. (Tomiczková, str. 55)

Příklad č. 1:

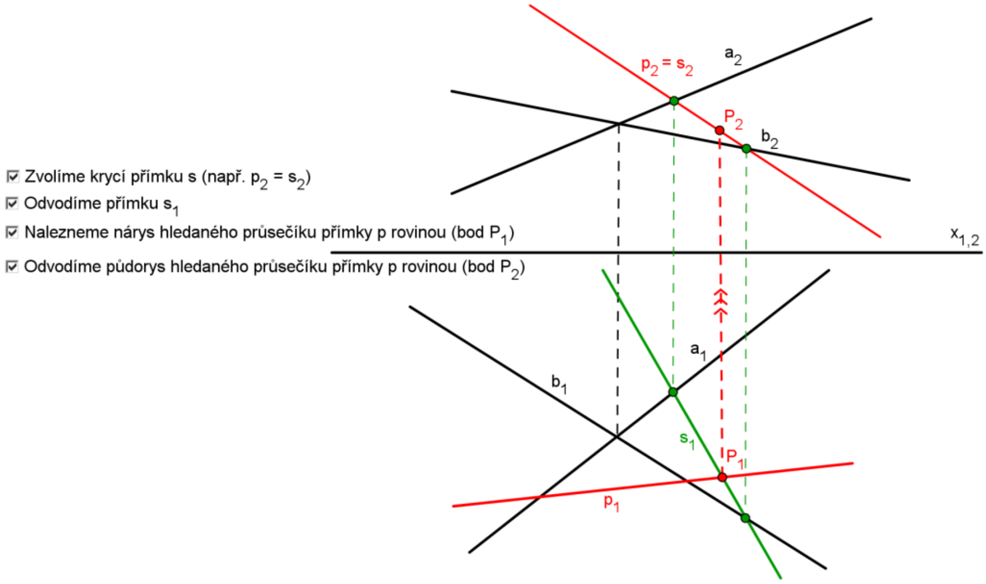
Rovina σ je určena přímkami *a, b*. Sestrojte průsečík přímky *p* s rovinou σ. (obrázek 40)



Obrázek 40 - Zadání příkladu č. 1 - Průsečík přímky s rovinou

Řešení:

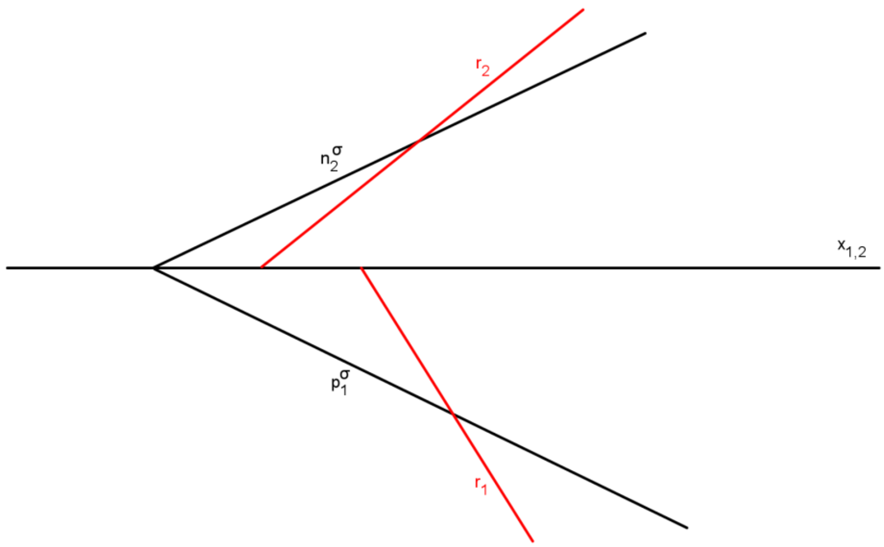
V rovině σ zvolíme půdorysně krycí přímku *s* (např. $s_2 = p_2, s \subset \sigma$). Poté pomocí průsečíků přímky s_2 s přímkami a_2 a b_2 odvodíme přímku s_1. Nárysem hledaného průsečíku přímky *p* s rovinou σ je průsečík P_1 ($P_1 \in p_1 \cap s_1$). Půdorysem hledaného průsečíku přímky *p* s rovinou σ je bod, který se nachází na ordinále vedené bodem P_1 a který zároveň náleží přímce p_2. (obrázek 41)



Obrázek 41 - Řešení příkladu č. 1 - Průsečík přímky s rovinou

Příklad č. 2:

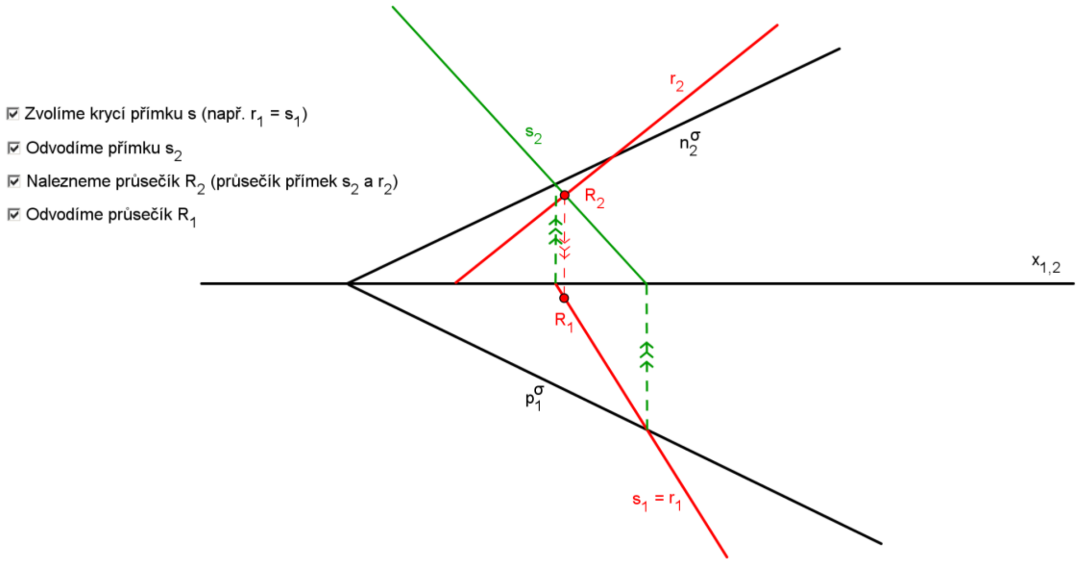
Rovina σ je určena stopami. Sestrojte průsečík přímky *r* s rovinou σ. (obrázek 42)



Obrázek 42 - Zadání příkladu č. 2 - Průsečík přímky s rovinou

Řešení:

Nejprve si v rovině σ zvolíme nárysně krycí přímku *s* (například $s_1 = r_1,\ s \subset \sigma$). Následně pomocí stopníků odvodíme přímku *s* do nárysu. Nárys hledaného průsečíku přímky *r* s rovinou σ se shoduje s průsečíkem R_2 přímek r_2 a s_2. Půdorys hledaného průsečíku R_1 přímky *r* s rovinou σ najdeme na ordinále vedeném bodem R_2, který zároveň leží na přímce r_1. (obrázek 43)

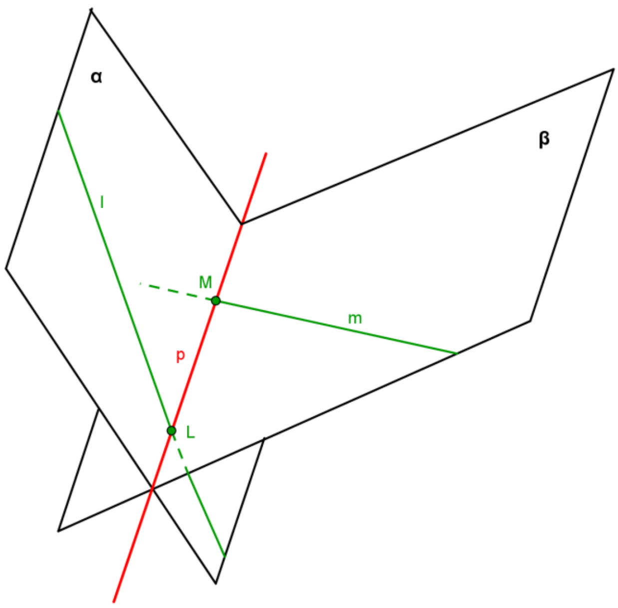


Obrázek 43 - Řešení příkladu č. 2 - Průsečík přímky s rovinou

4.5 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 5 – PRŮSEČNICE 2 ROVIN

Průsečnici, neboli společnou přímku, určujeme u různoběžných rovin. K sestrojení průsečnice je zapotřebí určit 2 její různé body. Pokud máme roviny zadány pomocí stop, pak můžeme říci, že nárysný stopník průsečnice leží na nárysné stopě obou zadaných rovin a půdorysný stopník průsečnice leží na půdorysné stopě obou zadaných rovin.

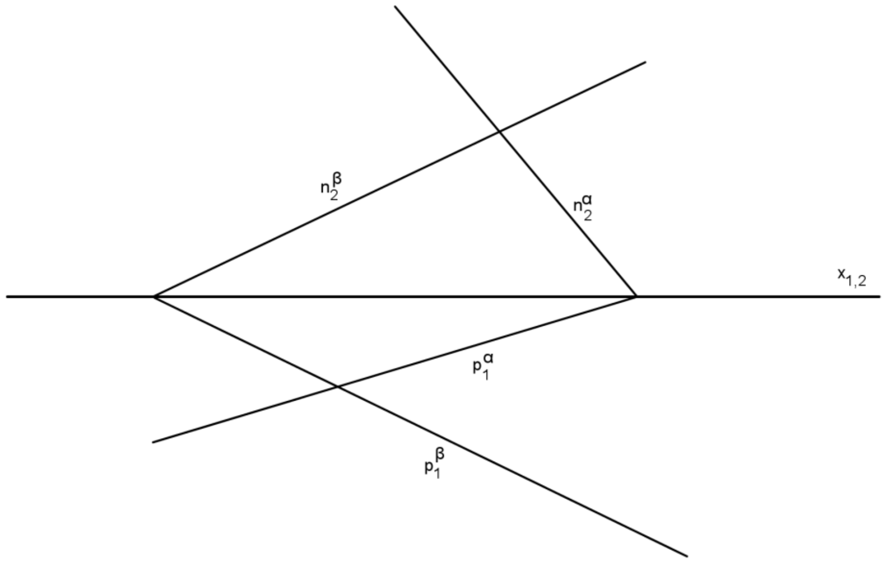
Pokud přímka *l* leží v rovině α, pak průsečík L přímky *l* s rovinou β leží na průsečnici *p* rovin α a β. Stejně tak můžeme říci, že pokud přímka *m* leží v rovině β, pak průsečík M přímky *m* s rovinou α leží na průsečnici *p* rovin α a β. (obrázek 44)



Obrázek 44 - Průsečnice 2 rovin

Příklad č. 1:

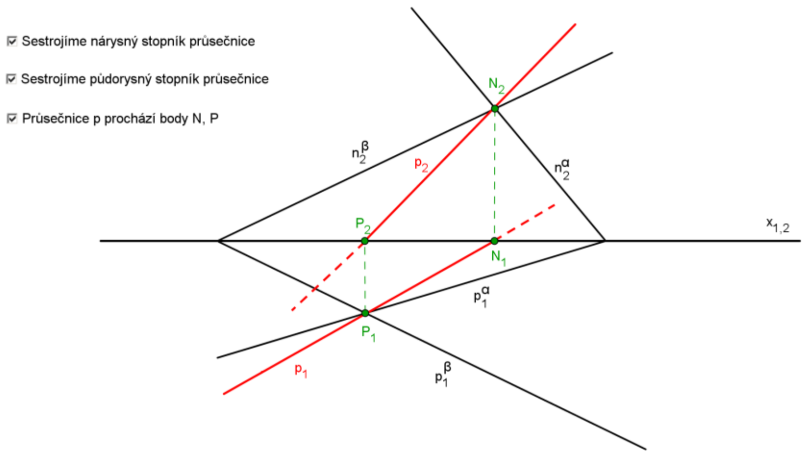
Roviny α a β jsou zadány stopami. Sestrojte průsečnici těchto dvou rovin. (obrázek 45)



Obrázek 45 - Zadání příkladu č. 1 - Průsečnice 2 rovin

Řešení:

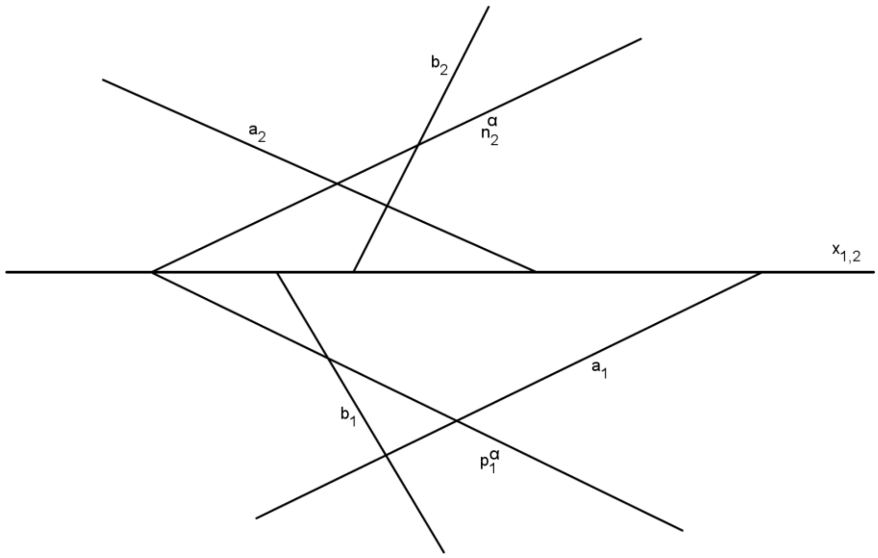
Najdeme nárysný i půdorysný stopník průsečnice. Přitom platí, že nárysný stopník průsečnice leží na nárysné stopě roviny α i roviny β ($N_2 \in n_2^\alpha \cap n_2^\beta, N_1 \in x_{1,2}$) a půdorysný stopník průsečnice leží na půdorysné stopě roviny α i roviny β ($P_1 \in p_1^\alpha \cap p_1^\beta, P_2 \in x_{1,2}$). Přímka *p*, která prochází body NP, je hledanou průsečnicí. (obrázek 46)



Obrázek 46 - Řešení příkladu č. 1 - Průsečnice 2 rovin

<u>Příklad č. 2:</u>

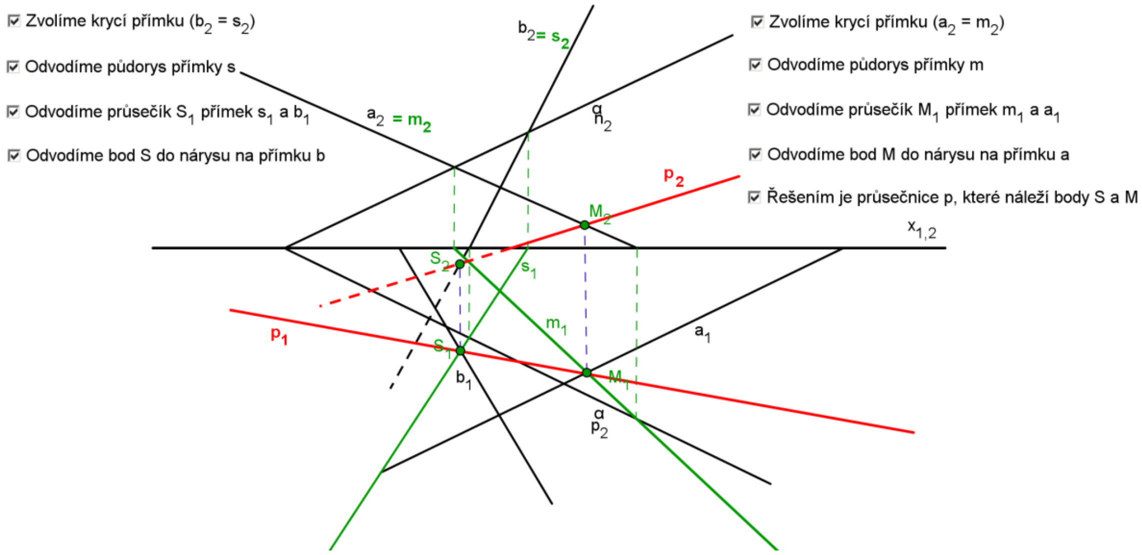
Sestrojte průsečnici rovin α a β. Rovina α je zadána stopami, rovina β je určena přímkami *a* a *b*. (obrázek 47)



Obrázek 47 - Zadání příkladu č. 2 - Průsečnice 2 rovin

<u>Řešení:</u>

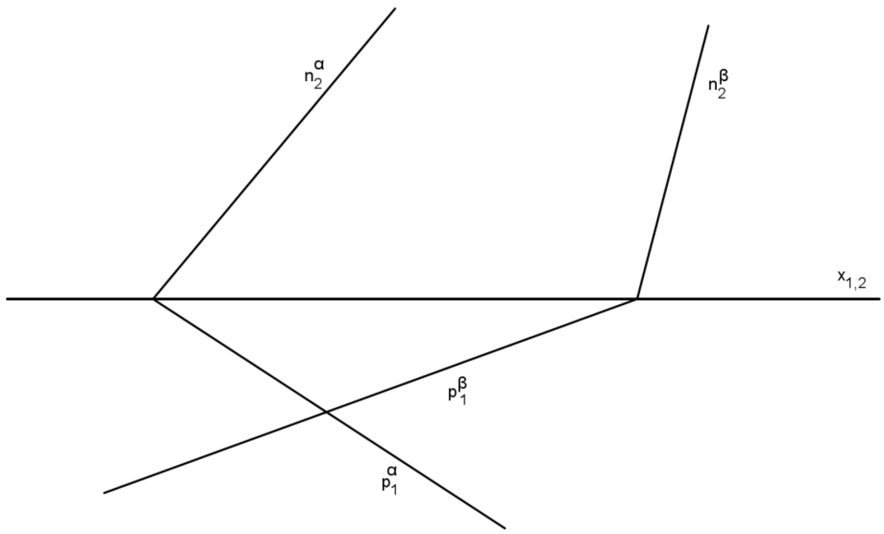
K nalezení průsečnice potřebujeme 2 různé body. Ty nalezneme tak, že dvakrát provedeme úlohu nalezení průsečíku přímky s rovinou. Nejdříve zvolíme krycí přímku *s* tak, aby $s_2 = b_2$ a zároveň $s \subset \beta$. Poté odvodíme půdorys s_2 přímky *s*. Najdeme průsečík S_1 přímek s_1 a b_1. Odvodíme bod S do nárysu na přímku b. Stejný postup zvolíme pro nalezení bodu M (krycí přímka m: $m_2 = a_2, m \subset \beta$). Průsečnicí rovin α a β je přímka *p*, která prochází body S a M. (obrázek 48)



Obrázek 48 - Řešení příkladu č. 2 - Průsečnice 2 rovin

Příklad č. 3:

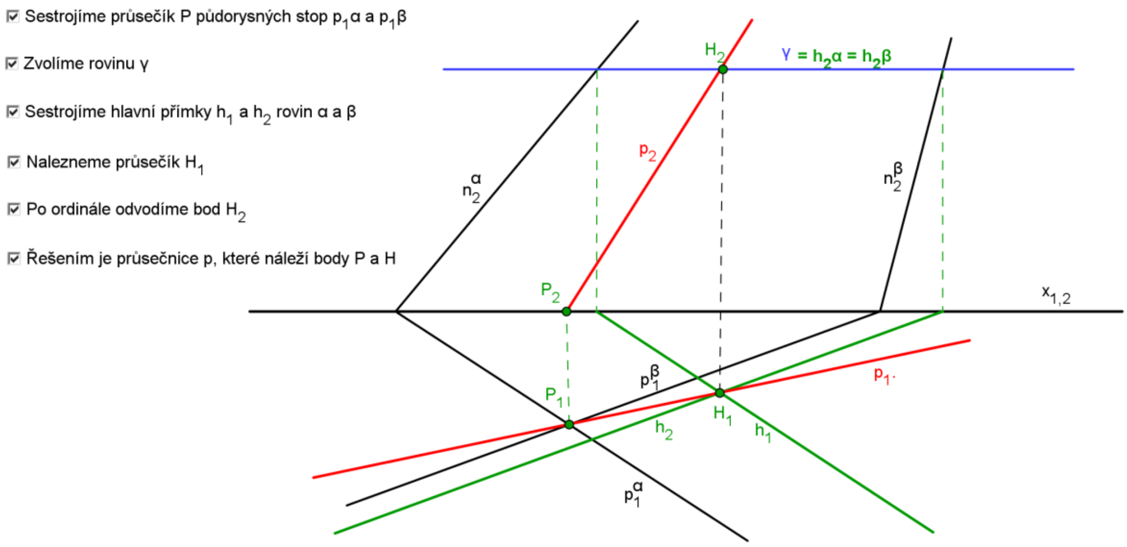
Sestrojte průsečnici rovin α a β, které jsou zadány stopami. Průsečík nárysných stop n^{α} a n^{β} však leží mimo nákresnu. (obrázek 49)



Obrázek 49 - Zadání příkladu č. 3 - Průsečnice 2 rovin

Řešení:

Jedním bodem průsečnice *p* je průsečík P půdorysných stop p^{α} a p^{β}. Průsečík nárysných stop však leží mimo nákresnu. Proto roviny α a β protneme například rovinou γ rovnoběžnou s půdorysnou ($\gamma_2 \parallel x_{1,2}$). Rovina γ protne rovinu α v hlavní přímce h^{α} a rovinu β v hlavní přímce h^{β}. Bude tedy platit: $\gamma_2 = h_2^{\alpha} = h_2^{\beta}, h_1^{\alpha} \parallel p_1^{\alpha}, h_1^{\beta} \parallel p_1^{\beta}$. Nalezneme průsečík H_1 ($H_1 \in h_1^{\alpha} \cap h_1^{\beta}$) a po ordinále odvodíme bod H_2. Průsečnicí rovin α a β je přímka *p*, která prochází body P a H. (obrázek 50)



Obrázek 50 - Řešení příkladu č. 3 - Průsečnice 2 rovin

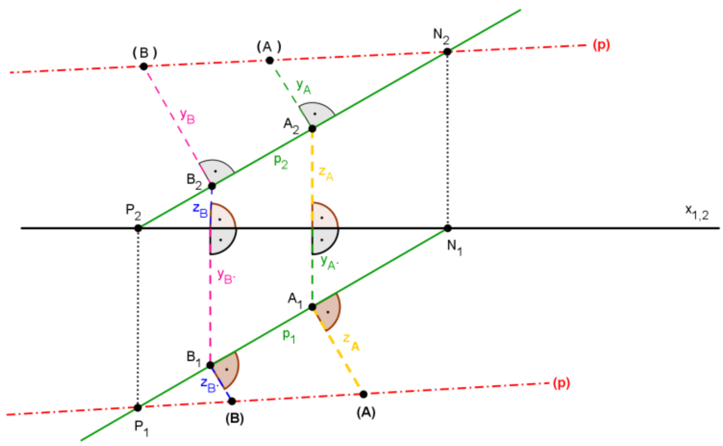
4.6 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 6 – SKUTEČNÁ VELIKOST ÚSEČKY

4.6.1 SKLOPENÍ ÚSEČKY

Skutečnou velikost úsečky můžeme zjistit pomocí sklopení. Toto provedeme tak, že buď sklopíme její první promítací rovinu do půdorysny, nebo její druhou promítací rovinu do nárysny. To znamená, že sklopíme příslušnou promítací rovinu kolem příslušného průmětu úsečky do půdorysny nebo do nárysny. Při sklápění si uvědomíme, že pokud sklápíme první promítací rovinu přímky do půdorysny, zůstává půdorysný stopník P přímky na místě, to znamená, že se sklopí sám na sebe. Stejně tak je to s nárysným stopníkem N při sklápění druhé promítací roviny přímky do nárysny.

Postup je takový, že k nárysu úsečky AB sestrojíme kolmice z bodů A_2 a B_2. Na tyto kolmice naneseme ypsilonové souřadnice bodů A, B. Dostaneme tím sklopené body (A) a (B). Skutečná velikost úsečky AB je tedy velikost úsečky (A)(B). Totéž provedeme i v půdorysně.

Útvary A_1B_1(B)(A) a A_2B_2(B)(A) nazýváme promítací lichoběžníky úsečky. A_1B_1(A)(B) je první (půdorysně promítací) lichoběžník a A_2B_2(A)(B) je druhý (nárysně promítací lichoběžník. (obrázek 51)



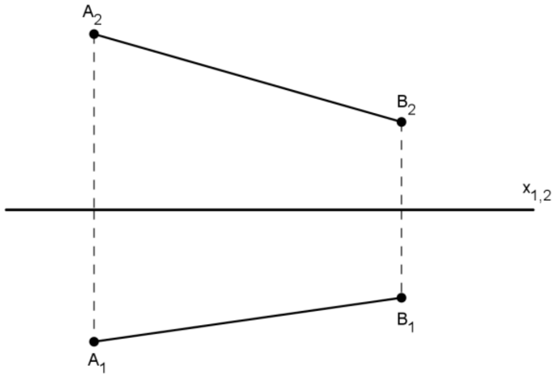
Obrázek 51 - Sklopení úsečky

Pozn.: Velikosti sklopených úseček (A)(B) jsou stejné jak v půdorysně, tak i v nárysně.

Pozn.: Je-li úsečka rovnoběžná s některou z průměten, pak se do této průmětny zobrazí ve skutečné velikosti.

Příklad č. 1:

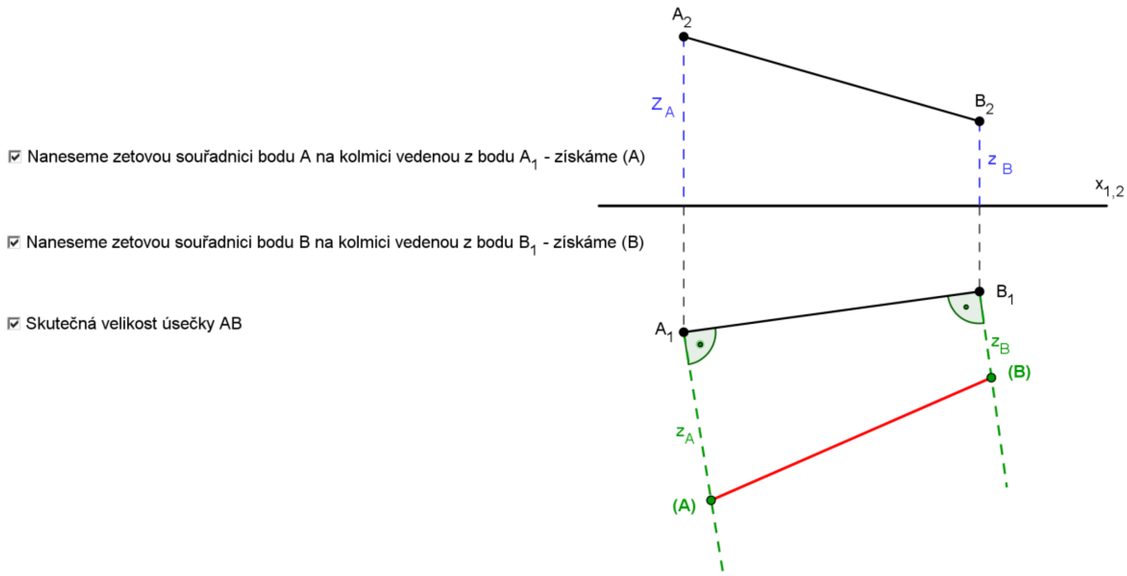
Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB. (obrázek 52)



Obrázek 52 - Zadání příkladu č. 1 – Skutečná velikost úsečky

Řešení:

Zetové souřadnice bodů A a B naneseme na kolmice k úsečce A_1B_1 vedené bodem A_1 (získáme bod (A)) a B_1 (získáme bod (B)). Vzdálenost bodů (A) a (B) je skutečnou vzdáleností úsečky AB. (obrázek 53)

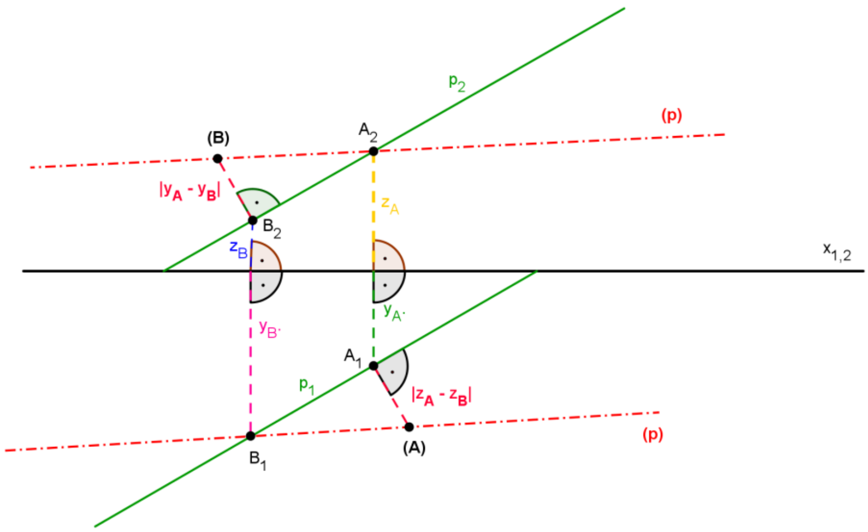


Obrázek 53 - Řešení příkladu č. 1 – Skutečná velikost úsečky

4.6.2 METODA ROZDÍLOVÉHO TROJÚHELNÍKU

První (půdorysně promítací) rozdílový trojúhelník je shodný s pravoúhlým trojúhelníkem A_1B_1(A). Jednou z jeho odvěsen je úsečka A_1B_1. Jeho druhou odvěsnou je úsečka A_1(A), jejíž velikost je dána výrazem: $|z_A - z_B|$. Pak skutečná velikost úsečky AB je rovna velikosti přepony B_1(A).

Druhý (nárysně promítací) rozdílový trojúhelník je shodný s pravoúhlým trojúhelníkem A_2B_2(B). Jednou z jeho odvěsen je úsečka A_2B_2. Jeho druhou odvěsnou je úsečka B_2(B), jejíž velikost je dána výrazem: $|y_A - y_B|$. Pak skutečná velikost úsečky AB je rovna velikosti přepony A_2(B). (obrázek 54)



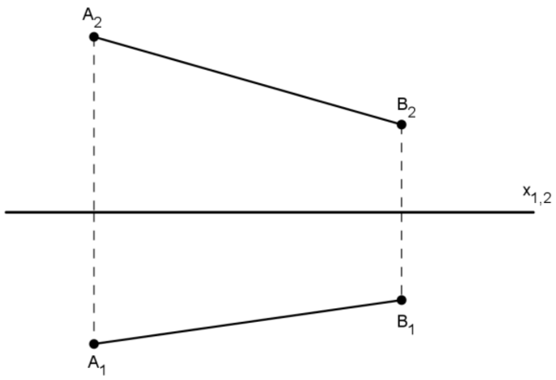
Obrázek 54 - Metoda rozdílového trojúhelníku

Pozn.: Velikosti úseček A_2(B) a B_1(A) jsou stejné jak v půdorysně, tak i v nárysně.

Pozn.: Je-li úsečka rovnoběžná s některou z průměten, pak se do této průmětny zobrazí ve skutečné velikosti.

Příklad č. 1:

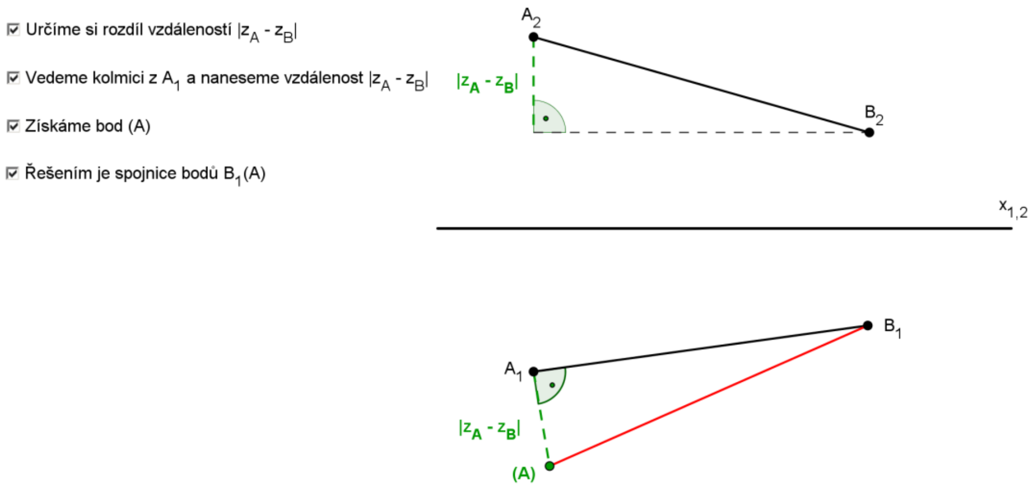
Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB použitím metody rozdílového trojúhelníku. (obrázek 55)



Obrázek 55 - Zadání příkladu č. 1 – Skutečná velikost úsečky

Řešení:

Na kolmici k úsečce A_1B_1 vedenou bodem A_1 naneseme vzdálenost $|z_A - z_B|$. Bod, který získáme, označíme (A). Spojnice bodů $(A)B_1$ je sklopená úsečka AB a vzdálenost bodů $(A)B_1$ je skutečná velikost úsečky AB. (obrázek 56)



Obrázek 56 - Řešení příkladu č. 1 – Skutečná velikost úsečky

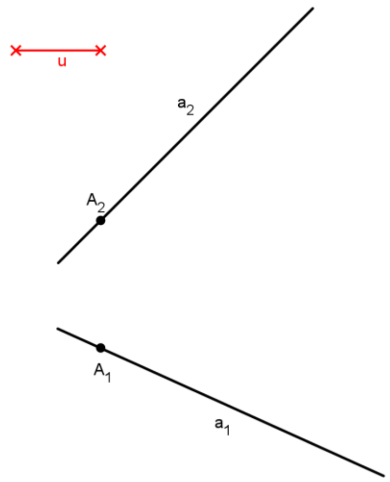
Pozn.: Ve výše uvedeném příkladě pracujeme s relativními souřadnicemi. Vzhledem k tomu, že není třeba absolutních souřadnic, je možné v příkladu vynechat základnici (osa $x_{1,2}$).

4.7 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 7 – NANESENÍ ÚSEČKY NA PŘÍMKU

Často potřebujeme na danou přímku nanést úsečku určité délky. Toto provádíme pomocí sklápění – metoda rozdílového trojúhelníku. Zvolíme si na přímce dva body a přímku sklopíme. Na sklopenou přímku naneseme úsečku dané velikosti (skutečnou délku) a úsečku sklopíme zpět.

Příklad č. 1:

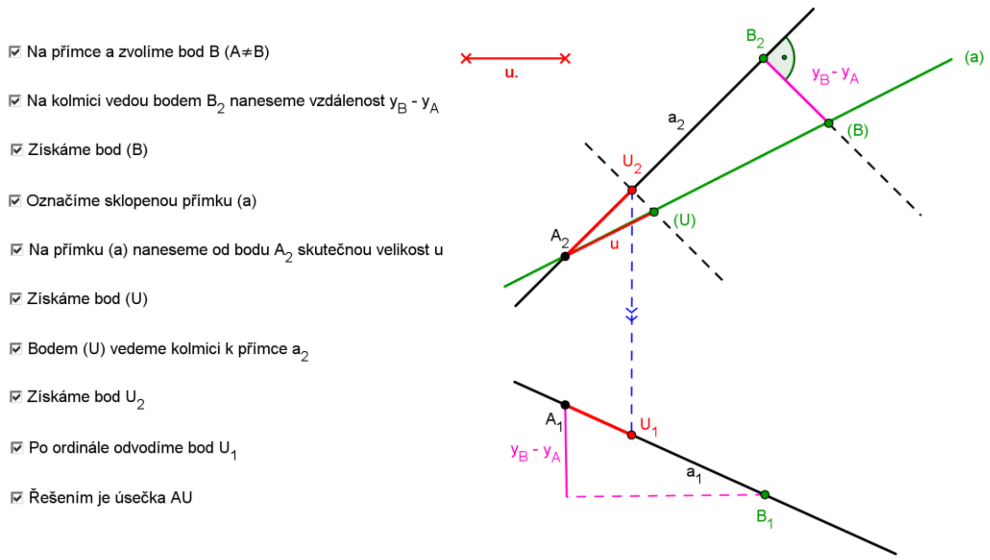
Na přímku *a* na níž leží bod A neneste danou úsečky *u* tak, aby bod A byl počátečním bodem úsečky *u.* (obrázek 57)



Obrázek 57 - Zadání příkladu č. 1 - Nanesení úsečky na přímku

Řešení:

Na přímce *a* si zvolíme jakýkoliv bod B, tak aby platilo: $B \in a \wedge A \neq B$. Úsečku AB sklopíme na kolmici vedenou bodem B_2 a to tak, že na tuto kolmici naneseme vzdálenost $|y_B - y_A|$ a získaný bod označíme (B). Pak spojnice bodů (B)A_2 je sklopená přímka *a*. Na sklopenou přímku *a* naneseme velikost úsečky *u* a získaný bod označíme (U). Bod (U) sklopíme zpět na přímku a_2 pomocí kolmice vedené bodem (U) k přímce a_2. Tím získáme bod U_2. Po ordinále odvodíme na přímku a_1 bod U_1. Zadanou úsečku u pak představuje úsečka AU. (obrázek 58)



Obrázek 58 - Řešení příkladu č. 1 - Nanesení úsečky na přímku

Pozn: Je zřejmé, že délka průmětu úsečky u je menší než skutečná délka úsečky u, nebo je rovna skutečné délce úsečky u.

4.8 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 8 – PŘÍMKA KOLMÁ K ROVINĚ

Nejdříve si připomeňme:

a) *kritérium kolmosti přímky a roviny:* Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny. (Pomykalová, str. 13)

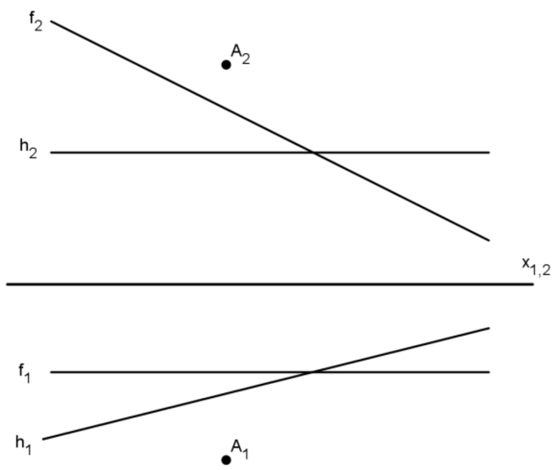
b) *Větu o pravoúhlém průmětu pravého úhlu:* Jestliže jedno rameno pravého úhlu je rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno není k průmětně kolmé, je pravoúhlým průmětem tohoto úhlu pravý úhel. (Pomykalová, str. 31)

c) *Protože $h \parallel \pi, tak\ a_1 \perp h_1$.*

d) *Protože $f \parallel \upsilon, tak\ a_2 \perp f_2$.*

Příklad č. 1:

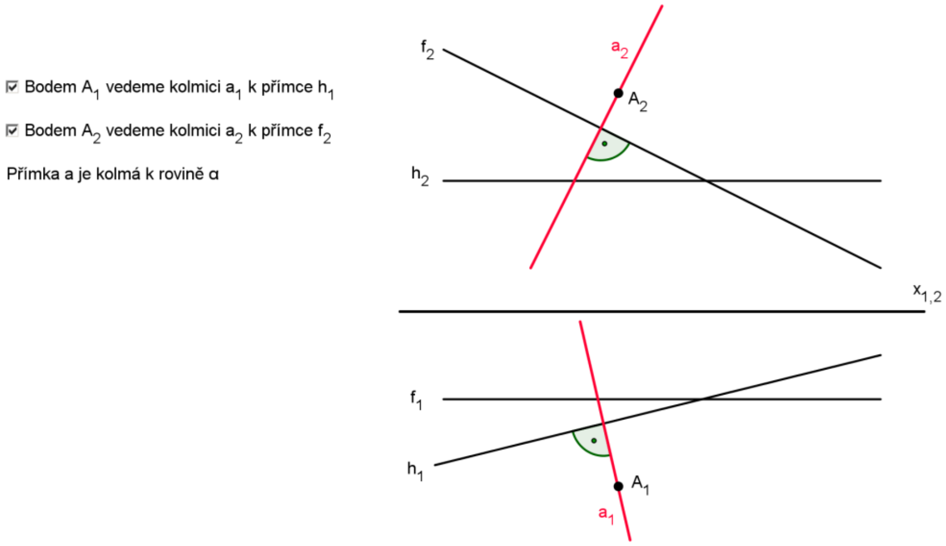
Sestrojte kolmici *a* vedenou bodem A k rovině α, která je zadána hlavními přímkami *h, f.* (obrázek 59)



Obrázek 59 - Zadání příkladu č. 1 - Přímka kolmá k rovině

Řešení:

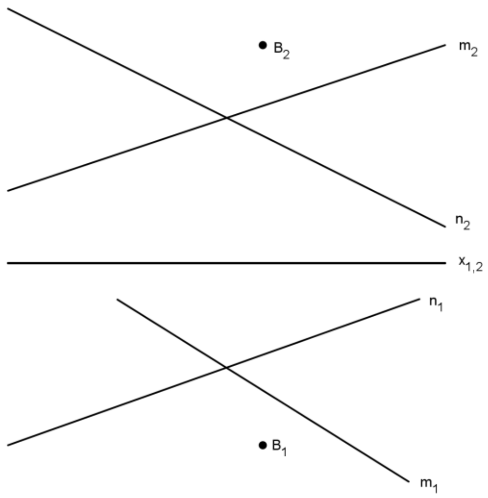
Bodem A_1 vedeme kolmici a_1 k přímce h_1 a zároveň bodem A_2 vedeme kolmici a_2 k přímce f_2. Kolmice a k rovině α je určena přímkami a_1 a a_2. (obrázek 60)



Obrázek 60 - Řešení příkladu č. 1 - Přímka kolmá k rovině

Příklad č. 2:

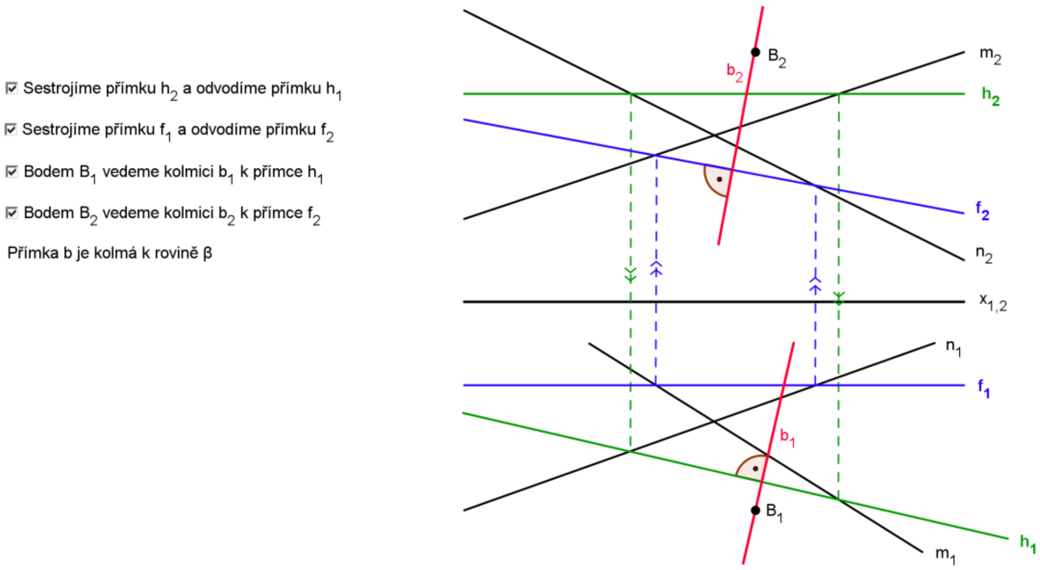
Sestrojte kolmici b vedenou bodem B k rovině β, která je zadána přímkami m, n. (obrázek 61)



Obrázek 61 - Zadání příkladu č. 2 - Přímka kolmá k rovině

Řešení:

Nejprve sestrojíme libovolné hlavní přímky *h, f* roviny β. Postupujeme tak, že nejdříve sestrojíme přímku h_2, která je rovnoběžná s $x_{1,2}$ a h_1 odvodíme pomocí průsečíků přímky *h* s přímkami *m, n*. Poté sestrojíme přímku f_1, která taktéž je rovnoběžná s $x_{1,2}$ a f_2 odvodíme rovněž pomocí průsečíků přímky *f* s přímkami *m, n*. Potom již můžeme vést kolmice bodem B (bodem B_1 vedeme kolmici k přímce h_1 a dostaneme přímku b_1; bodem B_2 vedeme kolmici k přímce f_2 a dostaneme přímku b_2). Přímka *b* kolmá k rovině β je určena přímkami b_1 a b_2. (obrázek 62)



Obrázek 62 - Řešení příkladu č. 2 - Přímka kolmá k rovině

4.9 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 9 – ROVINA KOLMÁ K PŘÍMCE

Při řešení této úlohy můžeme vycházet z toho, že:

a) nárys horizontální hlavní přímky je rovnoběžný s osou $x_{1,2}$ (můžeme i říci, že je kolmý na ordinály) a půdorys horizontální hlavní přímky je kolmý k zadané přímce *m,*

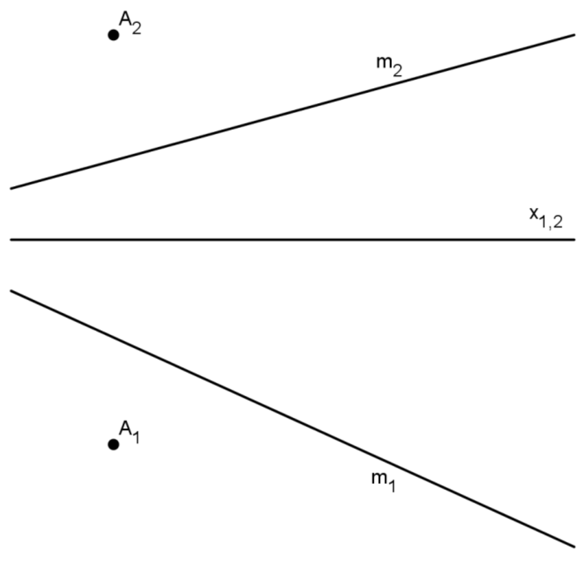
b) půdorys frontální hlavní přímky je rovnoběžný s osou $x_{1,2}$ (můžeme i říci, že je kolmý na ordinály) a nárys frontální hlavní přímky je kolmý k zadané přímce *m*.

Platí tedy: $h_1 \perp m_1, h_2 \parallel x_{1,2} \wedge f_2 \perp m_2, f_1 \parallel x_{1,2}$.

Vzhledem k tomu, že hlavní přímky jsou zpravidla s danou přímkou mimoběžné, neexistují mezi nimi průsečíky, a tudíž tyto hlavní přímky nemůžeme odvozovat pomocí průsečíků, ale pomocí sestrojení kolmic k průmětům zadané přímky.

<u>Příklad č. 1:</u>

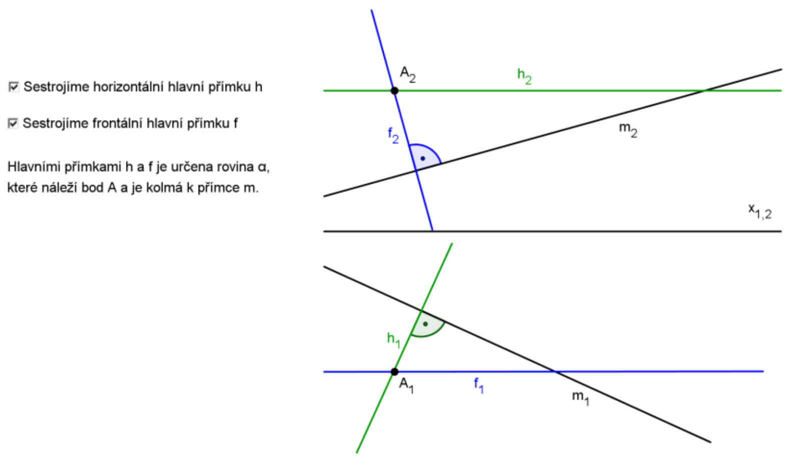
Sestrojte rovinu α, které náleží bod A a která je kolmá k přímce *m*. (obrázek 63)



Obrázek 63 - Zadání příkladu č. 1 - Rovina kolmá k přímce

Řešení:

Rovinu α určíme pomocí hlavních přímek h a f. O horizontální hlavní přímce h víme, že $h_1 \perp m_1$, $h_2 \parallel x_{1,2}$ a zároveň $A_1 \in h_1$, $A_2 \in h_2$. O frontální hlavní přímce f víme, že $f_2 \perp m_2$, $f_1 \parallel x_{1,2}$ a zároveň $A_1 \in f_1$, $A_2 \in f_2$. (obrázek 64)



Obrázek 64 - Řešení příkladu č. 1 - Rovina kolmá k přímce

4.10 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 10 – OTOČENÍ ROVINY DO POLOHY ROVNOBĚŽNÉ S PRŮMĚTNOU

Otočení roviny do polohy rovnoběžné s průmětnou provádíme proto, abychom mohli v obecné rovině α sestrojit a zobrazit nějaký útvar, nebo naopak abychom zjistili skutečnou velikost a tvar útvaru, který je v dané rovině již zobrazen. Víme totiž, že útvary se promítají do útvarů shodných v případě, že se jedná o rovinu, která je rovnoběžná s průmětnou (tj. jedná se o rovinu hlavní).

Rovinu, která není hlavní, otočíme kolem přímky, kterou si určíme. V případě, že otáčíme přímo do průmětny, je osou otáčení průsečnice rovin α a π (tj. stopa roviny α).

Může nastat případ, že nemáme zadanou osu $x_{1,2}$ nebo nechceme sestrojovat stopu roviny. Pak můžeme otočit rovinu α do polohy rovnoběžné s průmětnou kolem přímky, která je rovnoběžná s průmětnou. Jedná se o hlavní přímky roviny α.

Body a přímky roviny α a jim odpovídající body a přímky v otočení, jsou ve vztahu osové afinity s osou afinity ve stopě roviny α. Obrazy bodů a přímek roviny α a obrazy otočených bodů a přímek si odpovídají v osové afinitě v rovině π s osou afinity v obrazu stopy. Osovou afinitu v rovině π můžeme využít při otáčení dalších bodů roviny a při odvozování obrazů bodů z otočení. Osou afinity je osa otáčení, párem odpovídajících si bodů je průmět bodu (např. A_1) a jeho otočený obraz A_0.

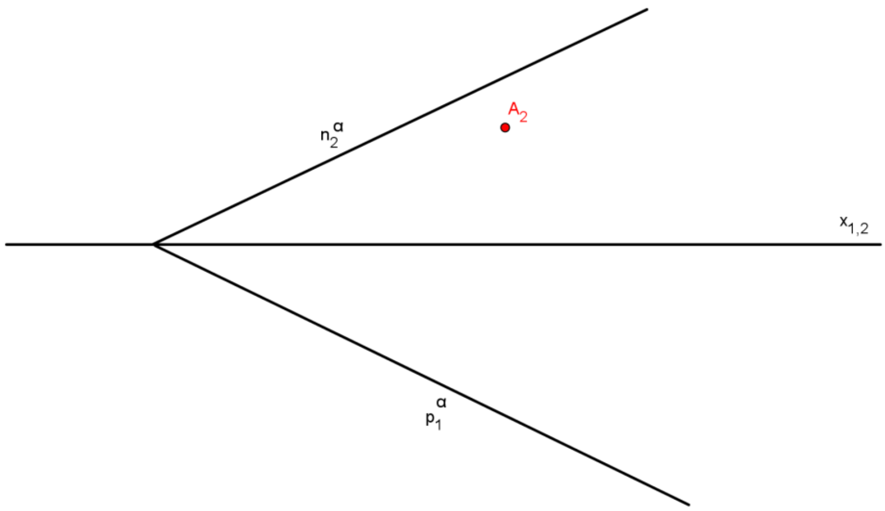
<u>Při řešení těchto úloh postupujeme takto:</u>

1. určíme si osu otáčení (stopu roviny nebo hlavní přímku)
2. sestrojíme rovinu, střed a poloměr kružnice otáčení
3. otočíme jeden bod
4. další otočené body získáme pomocí afinity

5. provedeme rovinnou konstrukci
6. s využitím afinity otočíme výsledek zpět
7. body výsledného útvaru odvodíme do druhého průmětu.

Příklad č. 1:

Otočte rovinu α určenou stopami kolem stopy do průmětny. (obrázek 65)

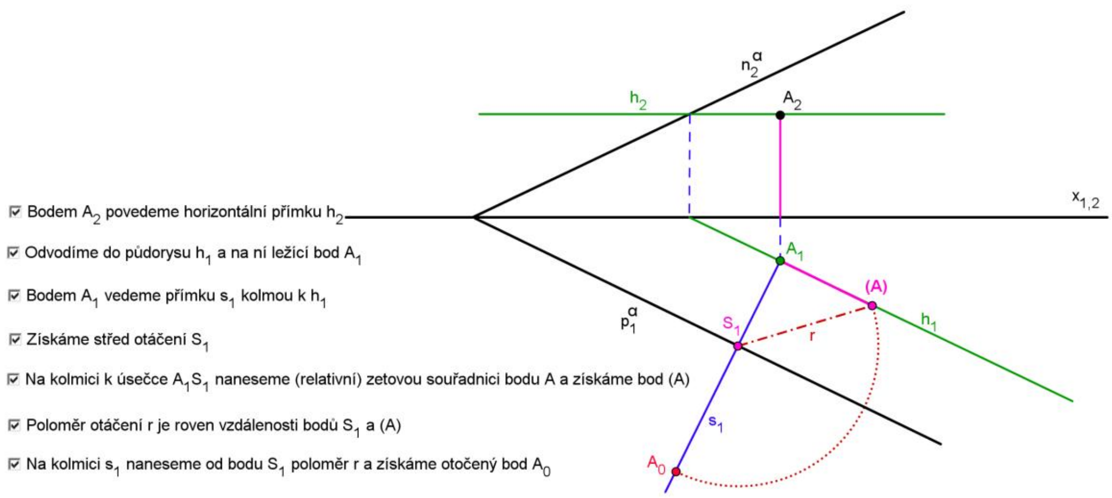


Obrázek 65 - Zadání příkladu č. 1 - Otočení roviny

Řešení:

Nejdříve povedeme bodem A_2 horizontální hlavní přímku h_2 a odvodíme horizontální hlavní přímku h_1 a na ní ležící půdorys bodu A (bod A_1). Rovinu α otáčíme do půdorysny tak, že otočíme její bod A kolem půdorysné stopy dané roviny, tj. p_1^α. Stopa bude samodružná, stačí otočit jen bod A. Při otáčení se A pohybuje po kružnici se středem S na stopě roviny ($S_1 \in s_1 \cap p_1^\alpha$). V půdorysu se tato kružnice promítne jako úsečka kolmá ke stopě roviny ležící na přímce s_1 ($s_1 \perp p_1^\alpha \wedge A_1 \in s_1$). Poloměr *r* otáčení bodu A je roven skutečné vzdálenosti bodu A od středu S. Poloměr otáčení *r* zjistíme sklopením, to znamená, že na kolmici k úsečce A_1S_1 naneseme (relativní) zetovou souřadnici bodu A (tj.

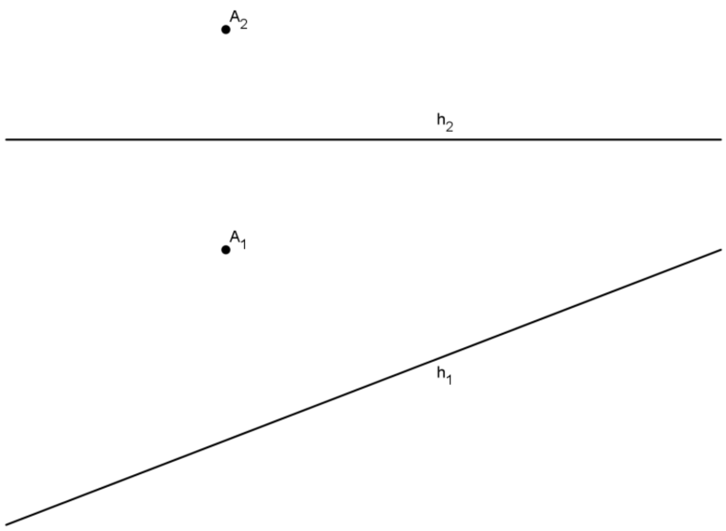
rozdíl zetových souřadnic bodů A a S, S má zetovou souřadnici 0, protože leží v půdorysně). Získáme bod (A). Vzdálenost bodů (A)(S) je rovna poloměru otáčení. A nyní již můžeme sestrojit bod A v otočení a označíme jej A_0. (obrázek 66)



Obrázek 66 - Řešení příkladu č. 1 - Otočení roviny

<u>Příklad č. 2:</u>

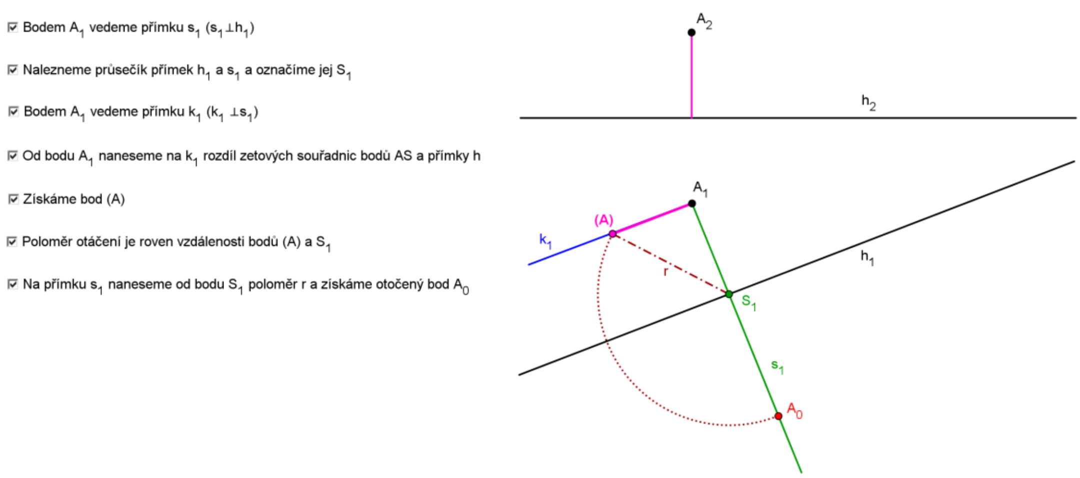
Otočte rovinu α určenou bodem A a hlavní přímkou *h* do roviny rovnoběžné s průmětnou. (obrázek 67)



Obrázek 67 - Zadání příkladu č. 2 - Otočení roviny

Řešení:

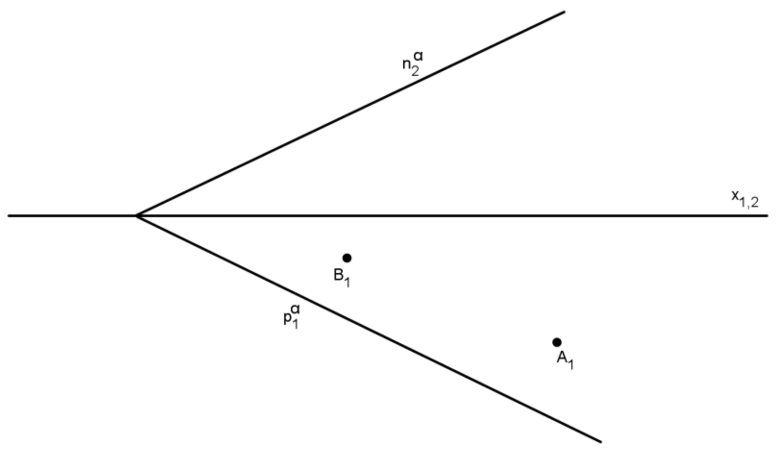
Rovinu α otočíme kolem hlavní přímky *h* do polohy rovnoběžné s půdorysnu. Za osu otáčení si zvolíme hlavní přímku *h*. Poté sestrojíme kolmici s_1 k přímce h_1, přičemž bod $A_1 \in k_1$. Nalezneme průsečík přímek s_1 a h_1. Tento průsečík je půdorysem středu otáčení S (označíme S_1). Sklopíme úsečku AS a zjistíme skutečnou velikost poloměru otáčení *r*. Toto provedeme tak, že na kolmici k A_1S_1 naneseme od bodu A_1 rozdíl zetových souřadnic bodů AS a přímky *h*. Od bodu S_1 naneseme na přímku s_1 poloměr *r* a získáme otočený bod A_0. (obrázek 68)



Obrázek 68 - Řešení příkladu č. 2 - Otočení roviny

<u>Příklad č. 3:</u>

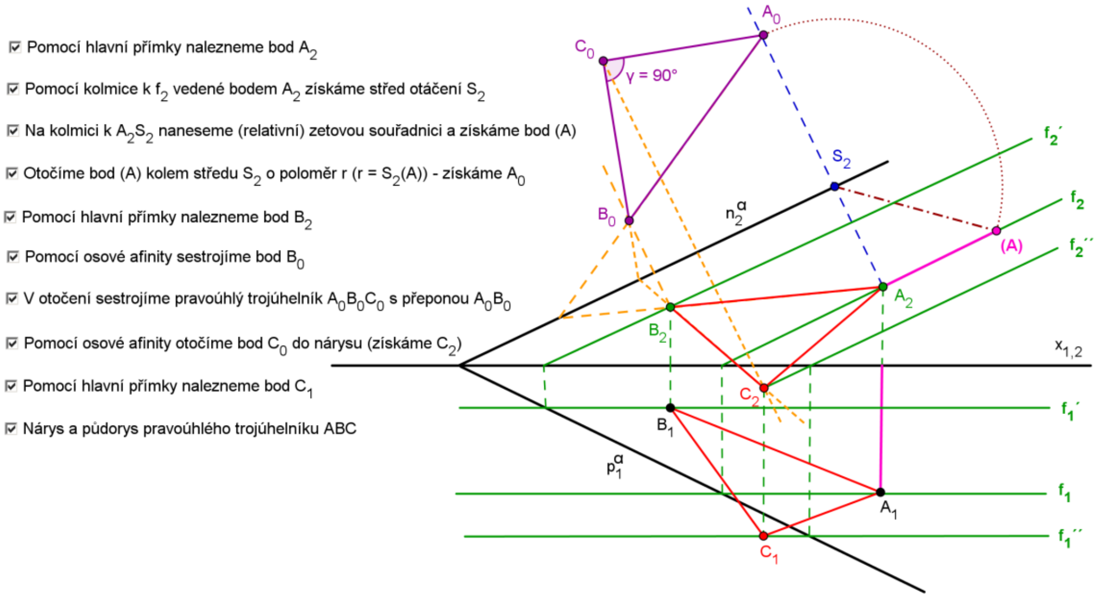
Sestrojte libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, který leží v rovině α. V rovině α jsou zadány body A_1 a B_1 a rovina α je určena svými stopami. (obrázek 69)



Obrázek 69 - Zadání příkladu č. 3 - Otočení roviny

<u>Řešení:</u>

Pomocí hlavní přímky odvodíme bod A do nárysu. Otočíme bod A do nárysny, abychom získali bod A_0. Pomocí hlavní přímky odvodíme bod B do nárysu. Bod B_0 sestrojíme pomocí afinity (osa afinity je n_2^α, pár odpovídajících si bodů je B_2,B_0). V otočení sestrojíme pravoúhlý trojúhelník $A_0B_0C_0$ s přeponou A_0B_0. Pomocí afinity otočíme bod C_0 zpět do nárysu. S využitím hlavních přímek najdeme půdorys bodu C. (obrázek 70)



Obrázek 70 - Řešení příkladu č. 3 - Otočení roviny

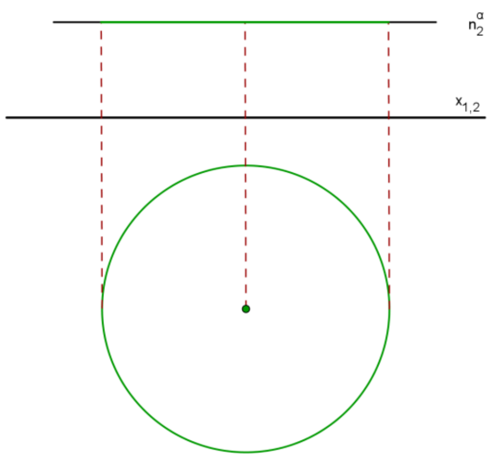
4.11 ZÁKLADNÍ ÚLOHA Č. 11 – OBRAZ KRUŽNICE

Pravoúhlým průmětem kružnice $k(S,r)$, která leží v obecné rovině, je elipsa. Střed elipsy je průmětem středu kružnice. Hlavní osou elipsy je průmět hlavní přímky roviny, která prochází středem kružnice. Délka hlavní poloosy má velikost: $a = r$. Vedlejší osou je průmět spádové přímky roviny, která prochází středem kružnice.

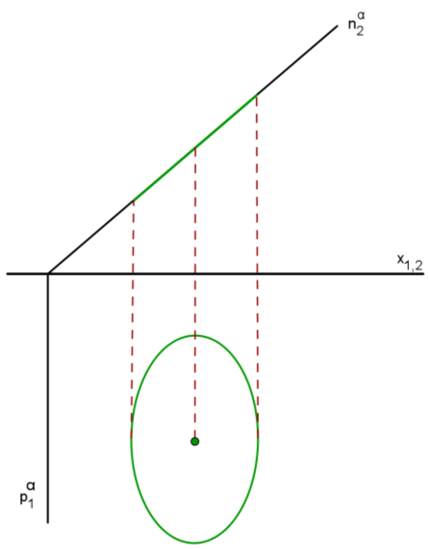
Existují speciální případy polohy kružnice:

a) *<u>kružnice leží v rovině rovnoběžné s průmětnou</u>* – pak jejím pravoúhlým průmětem je shodná kružnice a její střed je průmětem středu dané kružnice. (obrázek 71)

b) *<u>kružnice leží v rovině kolmé k průmětně</u>* – pak jejím pravoúhlým průmětem je úsečka, která leží na průmětu roviny a jejíž délka je rovna průměru kružnice. Její střed je průmětem středu kružnice. (obrázek 72)



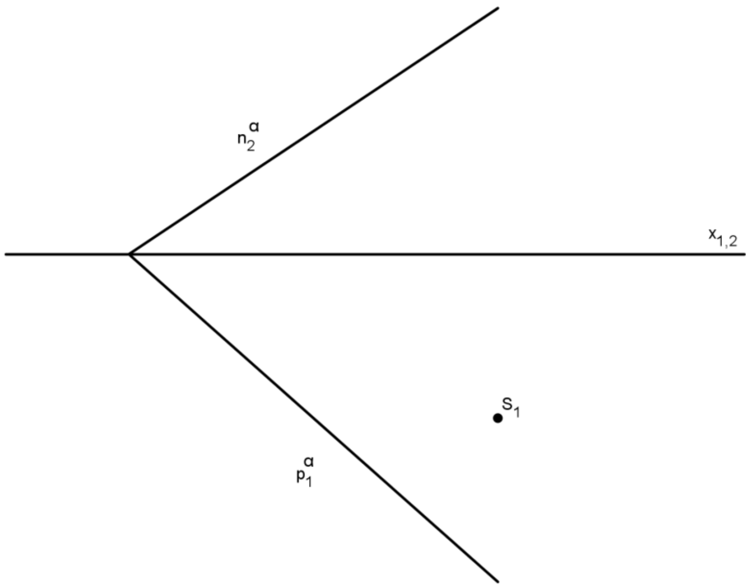
Obrázek 71 - Kružnice v rovině rovnoběžné s průmětnou



Obrázek 72 - Kružnice v rovině kolmé k průmětně

Příklad č. 1:

Zobrazte kružnici $k(S, r = 3\ cm)$ v rovině α, která je určena svými stopami. (obrázek 73)



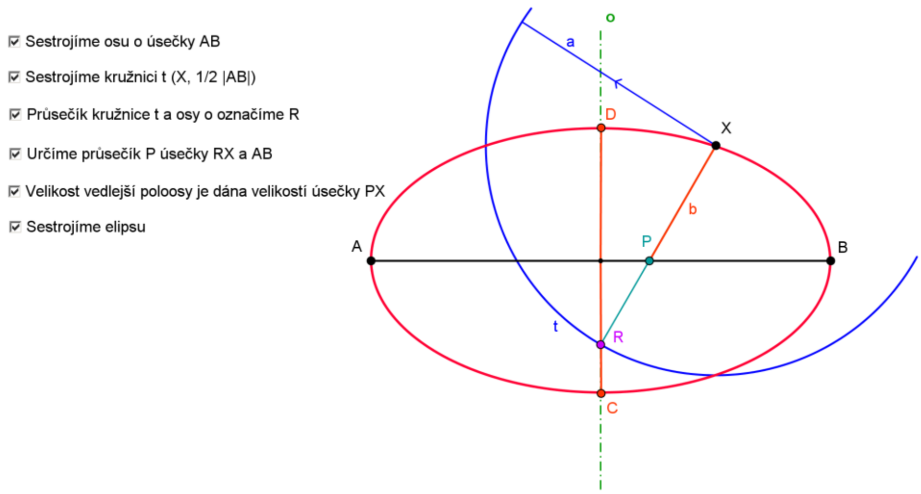
Obrázek 73 - Zadání příkladu č. 1 - Obraz kružnice

Řešení:

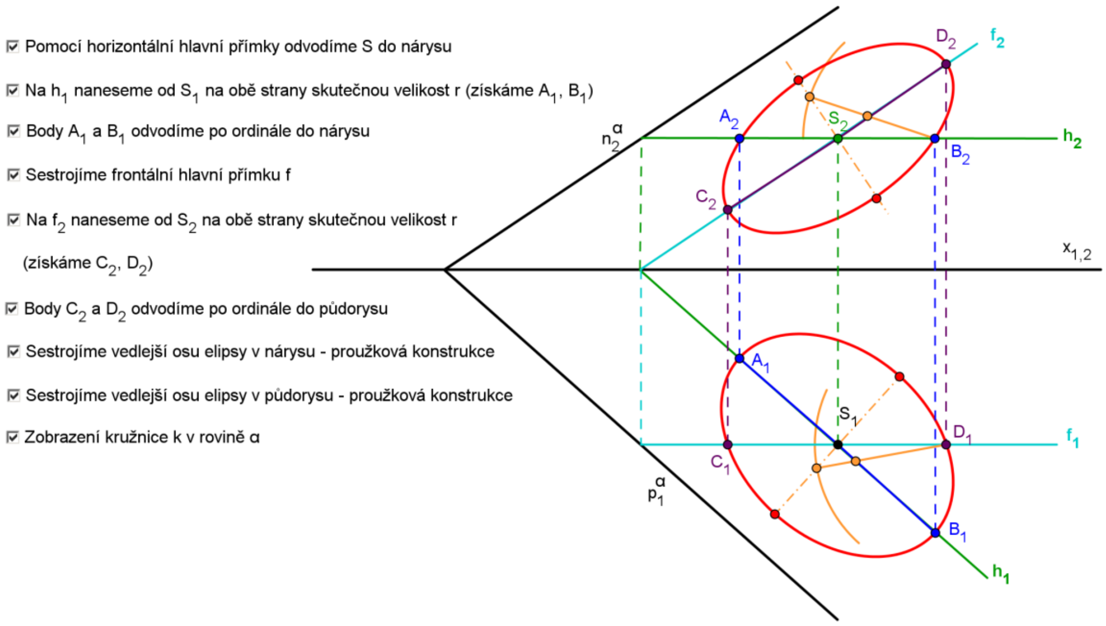
Vzhledem k tomu, že rovina má k oběma průmětnám obecnou polohu (není ani na jednu z průměten kolmá, ani není s průmětnou rovnoběžná), půdorysem i nárysem kružnice bude elipsa. Pomocí horizontální hlavní přímky si odvodíme bod S do nárysu. Na tuto horizontální hlavní přímku h naneseme v půdorysu od bodu S_1 na obě strany skutečnou velikost poloměru ($r = 3cm$) a body označíme A_1 a B_1. Tyto body odvodíme po ordinále do nárysu. Poté sestrojíme frontální hlavní přímku *f* a v nárysu opět naneseme od bodu S_2 na obě strany skutečnou velikost poloměru ($r = 3cm$). Tyto body označíme C_2 a D_2 a po ordinále je odvodíme do půdorysu. Obrazem kružnice *k* v nárysu je elipsa s hlavní osou A_1B_1, přičemž body C_1 a D_1 této elipse náleží. Obrazem kružnice *k* v půdorysu je elipsa s hlavní osou C_2D_2, přičemž body A_2 a B_2 této elipse náleží. Abychom obě elipsy mohli sestrojit, potřebujeme si určit vedlejší osu. Vedlejší osu získáme pomocí proužkové konstrukce. (obrázek 75)

Připomeňme si postup při proužkové konstrukci elipsy: Určete velikost vedlejší poloosy elipsy, která je určena hlavní osou AB a bodem X, který této elipse náleží.

Postup je následující: Nejdříve sestrojíme osu *o* úsečky AB. Poté sestrojíme kružnici $t(X; a = \frac{1}{2}\,|AB|)$ a nalezneme průsečík kružnice *t* s osou *o*, který leží v opačné polorovině k polorovině určené osou AB a bodem X. Tento průsečík označíme R. Následně sestrojíme průsečík P ($P \in RX \cap AB$). Velikost vedlejší poloosy *b* dané elipsy je rovna vzdálenosti bodů PX. (obrázek 74)



Obrázek 74 - Proužková konstrukce elipsy



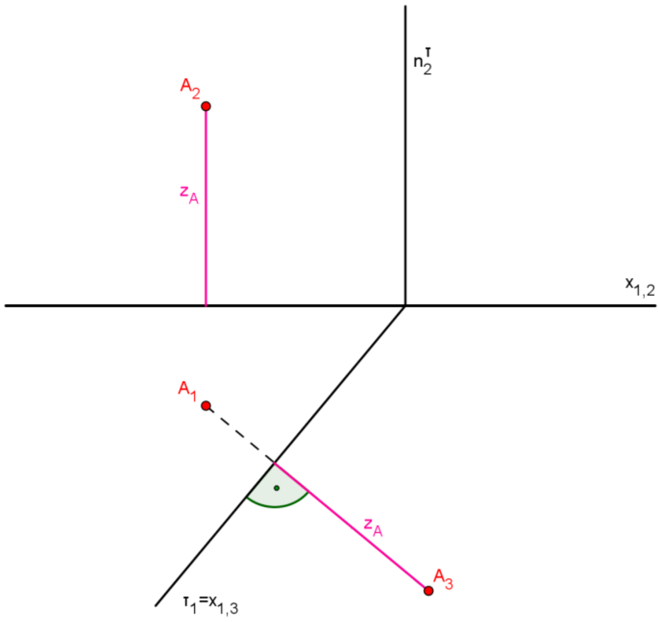
Obrázek 75 - Řešení příkladu č. 1 - Obraz kružnice

4.12 ZÁKLADNÍ ÚLOHY Č. 12 – TRANSFORMACE PRŮMĚTEN

V Mongeově promítání jsou úlohy, které vyřešíme snadněji, a úlohy, jejichž řešení je obtížnější. Například, máme-li zkonstruovat průsečnici dvou promítacích rovin, je to rozhodně snadnější, než zkonstruovat průsečnici dvou rovin v obecné poloze (toto řešíme pomocí krycích přímek). Taktéž sestrojit kolmici k promítací rovině je snadnější, než sestrojení kolmice k rovině v obecné poloze. Celkově tedy můžeme říci, že v Mongeově promítání se obtížněji řeší úlohy, v nichž mají objekty, s nimiž pracujeme, obecnou polohu vůči průmětnám.

Řešením je změna neboli transformace průmětny tak, že vznikne nové Mongeovo promítání, v němž by útvary vzhledem k nové průmětně měly speciální polohu a došlo by tak ke zjednodušení konstrukcí.

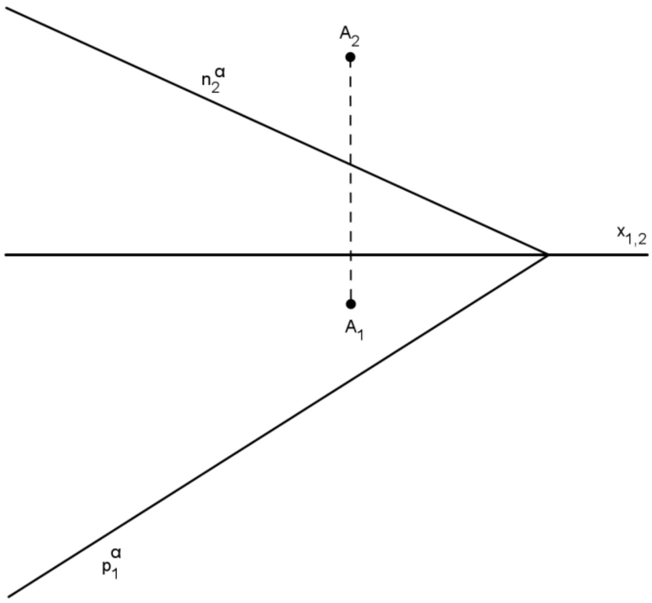
Aby mohlo vzniknout nové Mongeovo promítání, jehož základem je dvojí kolmé promítání do dvou navzájem kolmých průměten, musíme sestrojit novou (třetí) průmětnu. Tu nazveme τ a je nutností, aby tato nová průmětna byla kolmá k průmětně π nebo k průmětně ν. V této nové průmětně se nám zobrazí třetí průmět bodu A. Postupujeme tak, že průsečnici rovin τ a k ní kolmé průmětně (např. π) nazveme novou osou *x* – označíme ji $x_{1,3}$ a bod A promítneme do třetí průmětny, průmět označíme indexem A_3 a provedeme sdružení průmětů. Ordinála bude spojnicí bodů A_1 a A_3 a bude kolmá k ose $x_{1,3}$, vzdálenost A_3 od osy $x_{1,3}$ je zetovou souřadnicí bodu A. (obrázek 76)



Obrázek 76 - Transformace průměten

Příklad č. 1:

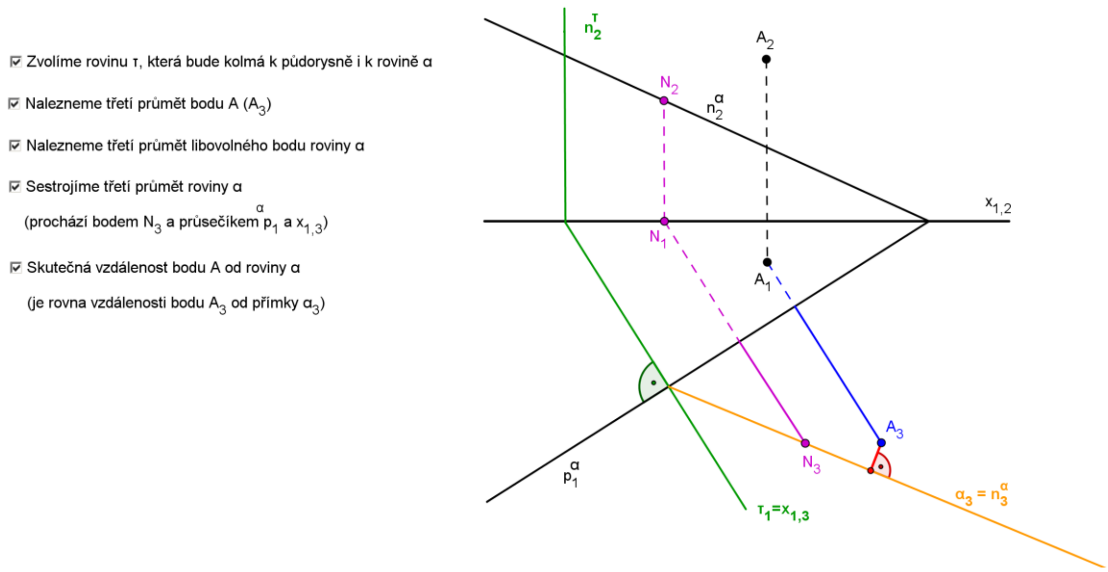
Určete vzdálenost bodu A od roviny α s využitím třetí průmětny. (obrázek 77)



Obrázek 77 - Zadání příkladu č. 1 - Transformace průměten

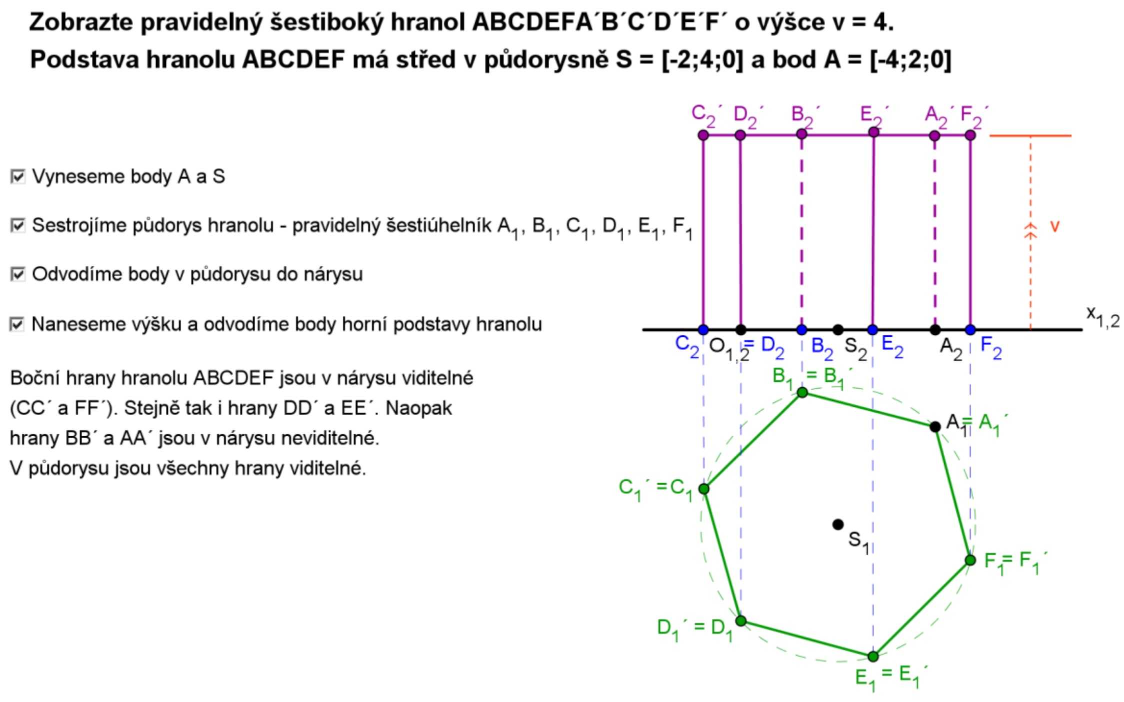
Řešení:

Nejdříve si zvolíme třetí průmětnu τ, která bude kolmá k půdorysně a k rovině α. Rovina α se do nové roviny zobrazí jako přímka. Poté najdeme třetí průmět bodu A (bod A_3). Najdeme třetí průmět libovolného bodu roviny α, můžeme si zvolit například stopník N. Třetím průmětem roviny α je přímka, která prochází bodem N_3 a protíná se se stopou p_1^{α} na ose $x_{1,3}$. Vzdálenost bodu A od roviny α je rovna vzdálenosti bodu A_3 a α_3. (obrázek 78)

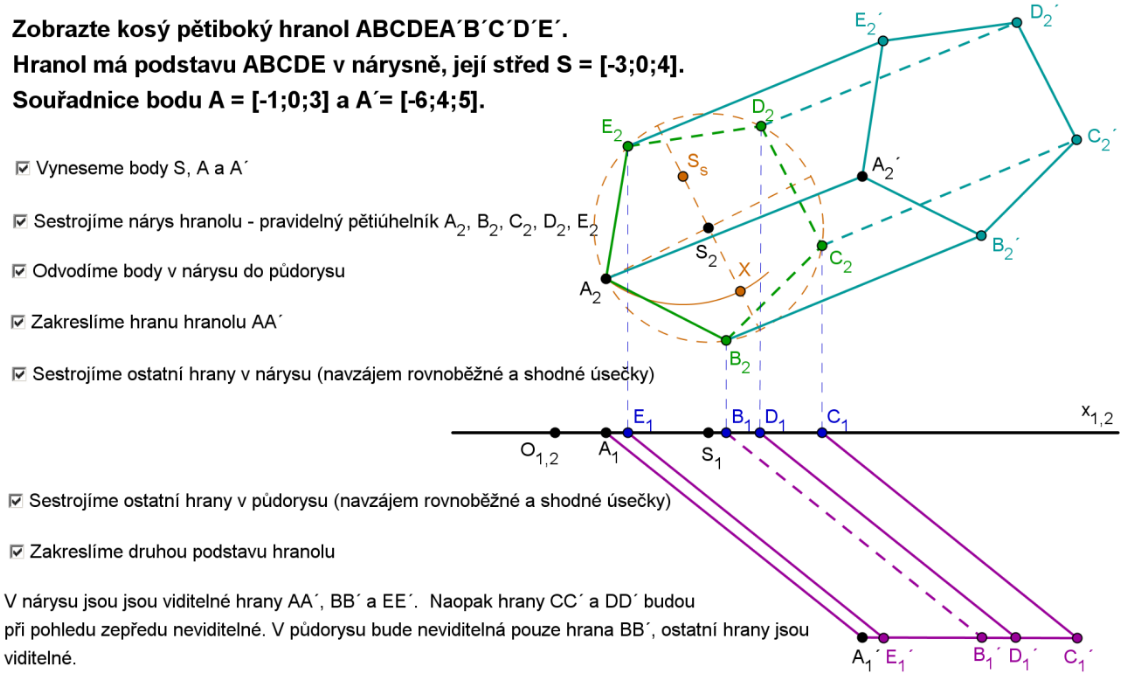


Obrázek 78 - Řešení příkladu č. 1 - Transformace průměten

5 TĚLESA



Obrázek 79 - Pravidelný šestiboký hranol

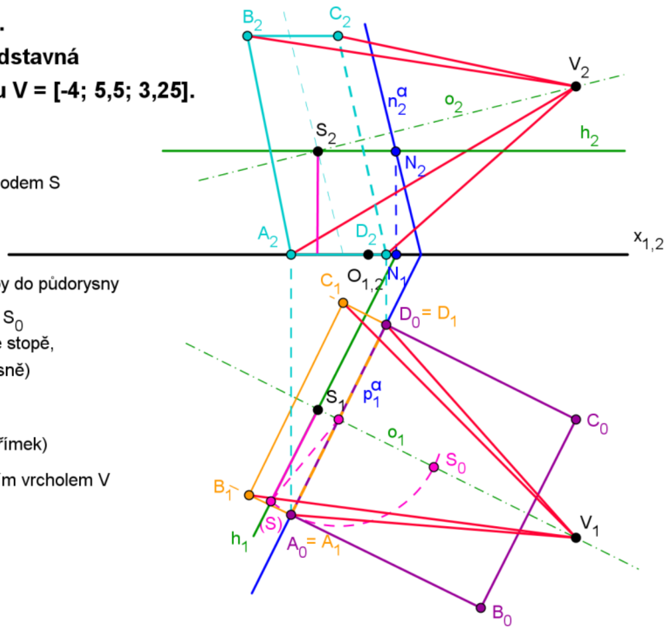


Obrázek 80 - Kosý pětiboký hranol

Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV.
Bod S = [1; 3; 2] je střed podstavy, jedna podstavná hrana leží v půdorysně. Hlavní vrchol jehlanu V = [-4; 5,5; 3,25].

- ☑ Vyneseme body S a V
- ☑ Sestrojíme osu jehlanu o a hlavní přímku procházející bodem S ($S_1 \in h_1 \perp o_1$, $S_2 \in h_2 \parallel x_{1,2}$)
- ☑ Sestrojíme rovinu podstavy jehlanu α
- ☑ Rovinu α otočíme pomocí bodu S kolem půdorysné stopy do půdorysny
- ☑ V otočení sestrojíme čtverec A_0, B_0, C_0, D_0 se středem S_0 (jedna jeho strana, např. strana A_0D_0, leží na půdorysné stopě, neboť jedna podstavná hrana hranolu má ležet v půdorysně)
- ☑ Odvodíme body podstavy do půdorysu
- ☑ Odvodíme body podstavy do nárysu (pomocí hlavních přímek)
- ☑ V nárysu i v půdorysu spojíme vrcholy podstavy s hlavním vrcholem V

V nárysu je neviditelná pouze hrana CD.
V půdorysu je neviditelná pouze hrana AD

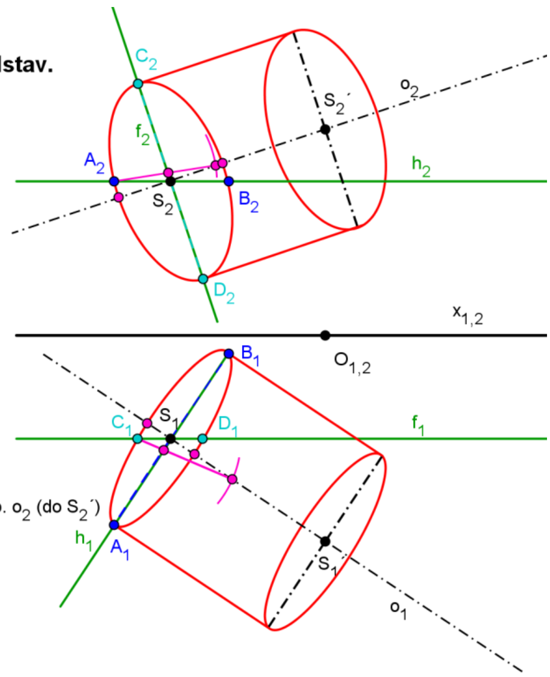


Obrázek 81 - Pravidelný čtyřboký jehlan

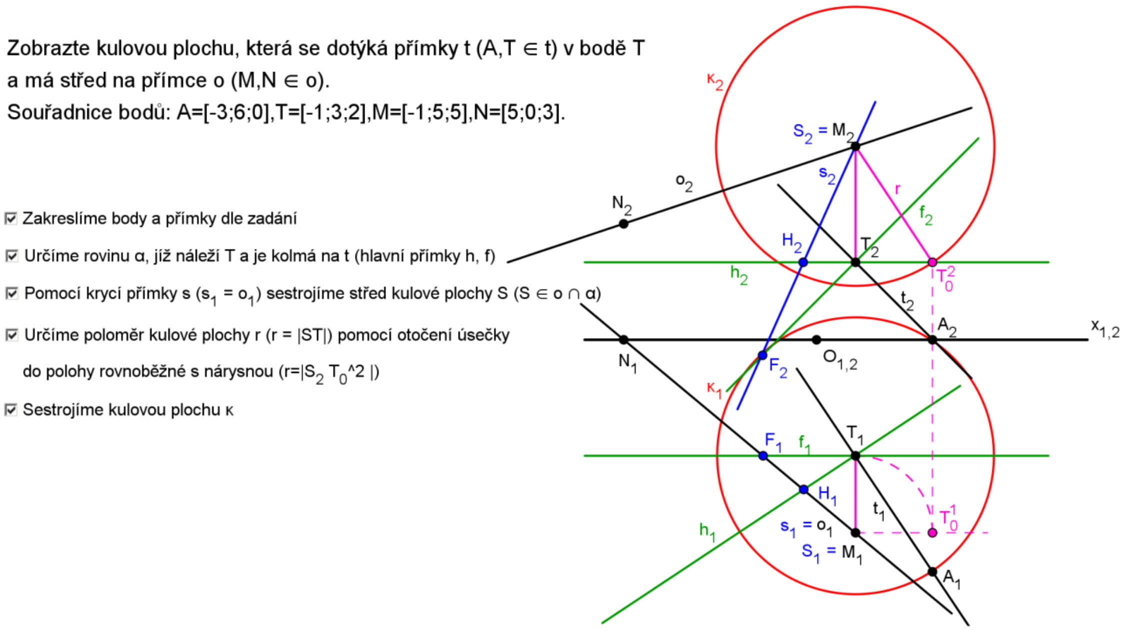
Sestrojte rotační válec, jsou-li body S, S´ středy jeho podstav.
S = [3;2;3], S´ = [0;4;4] a poloměr podstav r = 2.

- ☑ Zakreslíme středy podstav dle zadání a osu válce
- ☑ Sestrojíme hlavní přímky h, f procházející bodem S
- ☑ Na h_1 naneseme od S_1 poloměr r (získáme A_1, B_1) a po ordinále přeneseme na h_2 (získáme A_2, B_2)
- ☑ Na f_2 naneseme od S_2 poloměr r (získáme C_1, D_1) a po ordinále přeneseme na f_1 (získáme C_1, D_1)
- ☑ Sestrojíme podstavu válce v nárysně (proužková konstrukce)
- ☑ Sestrojíme podstavu válce v půdorysně (proužková konstrukce)
- ☑ Zobrazíme druhou podstavu válce (přesuneme ve směru o_1 (do S_1´), resp. o_2 (do S_2´) a zobrazíme hrany válce

Na nárysu válce bude neviditelná pouze část podstavy C_2, B_2, D_2.
V půdorysu válce bude neviditelná pouze část podstavy A_1, D_1, B_1.
Ostatní hrany válce jsou viditelné.



Obrázek 82 - Rotační válec



Obrázek 83 - Kulová plocha

6 ZÁVĚR

Cílem mé diplomové práce bylo seznámit čtenáře se zobrazovací metodou, která nepatří mezi zobrazovací metody úplně známé. Postupovala jsem od elementárních informací, až po informace složitější tak, abych čtenářům přiblížila základy zobrazování nejrůznějších objektů a ulehčila jim pochopení a zároveň užití Mongeova promítání.

Jako první seznamuji čtenáře s obrazem bodu, přímky a roviny. Následují základní úlohy, pomocí jejichž konstrukcí jsou posléze zobrazovány požadované útvary.

Ve své diplomové práci jsem se soustředila na to, aby všechny postupy a konstrukce byly názorně zobrazeny. K tomu jsem využila grafický program GeoGebra. Tento program je volně dostupný na internetu a každý zájemce si jej může nainstalovat do svého počítače. Konstrukce jsou „nakrokovány" pomocí zaškrtávacích políček tak, aby každý mohl v konstrukci postupovat individuálně a měl možnost během konstrukce jít nejen kupředu, ale i se vracet, a upevňovat si tak získané informace. Svou diplomovou práci jsem převedla na webové stránky z toho důvodu, aby byla volně k dispozici všem zájemcům o tuto zobrazovací metodu.

Pro člověka neznalého problematiky Mongeova promítání může být výsledné zobrazení ne zcela jasné a nemusí si tak vždy hned uvědomit výsledný tvar a umístění objektu. A právě po seznámení s pravidly a řešenými příklady Mongeova promítání uvedenými v mé diplomové práci se čtenář „vpraví" do problematiky této zobrazovací metody a ocení její krásu a velké schopnosti autora metody, jemuž se za svou celoživotní práci dostalo mimo jiné té cti být jedním ze 72 vědců napsaných na Eiffelově věži v Paříži.

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

8 SEZNAM LITERATURY

[1] BORECKÁ, Květoslava, Ludmila CHVALINOVÁ, Mája LOVEČKOVÁ a Veronika ŠMÍDOVÁ - ROUŠAROVÁ. *Konstruktivní geometrie*. 2. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3229-2.

[2] DOLEŽAL, Milan. *Základy deskriptivní a konstruktivní geometrie*: *Díl III: Mongeovo promítání*. 1. vydání. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2003. ISBN 80-7078-465-2.

[3] DRS, Ladislav. *Deskriptivní geometrie pro střední školy I*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-321-6.

[4] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskritivní geometrie pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.

[5] ŘÍHA, Ota. *Konstrukční geometrie II*. 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4803-4.

[6] SPURNÁ, Ivona. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*: *Mongeovo promítání, 1. díl*. 1. vydání. Kralice na Hané: Computer Media, 2010. ISBN 978-80-7402-066-7.

[7] SPURNÁ, Ivona. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*: *Mongeovo promítání, 2. díl*. 1. vydání. Kralice na Hané: Computer Media, 2010. ISBN 978-80-7402-067-4.

[8] ŠTĚPÁNOVÁ. *Geometrie*. 2. vydání. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. ISBN 978-80-7395-323-2.

Internetové zdroje:

[1] PANÁK, Marek. *Základní úlohy Mongeovy projekce* [online]. Přerov, 31.3.2006 [cit. 2012-02-07]. Dostupné z: http://www.monge.wz.cz. Písemná práce. Střední průmyslová škola Přerov. Vedoucí práce Mgr. Miroslav Bílek.

[2] TOMICZKOVÁ, Světlana. *Deskriptivní geometrie 1*: *Pomocný učební text, 1. část* [online]. 2.vyd. Plzeň, 2009 [cit. 2012-03-02]. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/785/

[3] Gaspard Monge. In: *Wikipedia*: *the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2012-02-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Monge

9 RESUMÉ

The thesis deals with the Monge projection, which is an important part of descriptive geometry. This projection allows to convert a three-dimensional objects (such as buildings, constructions, geometric objects, etc.) into two-dimensional space.

The first projection methods were already used in ancient Egypt but they were very simple (it was a rectangular projection on one plane of projection). Other new techniques appeared in the 15th century with the development of painting (linear perspective, parallel projection).

The beginnings of descriptive geometry as we know it today belongs to the 18th century when the French mathematician Gaspard Monge designed a method which is now called after him. This method combines vertical and horizontal projection of a described object into a single chart so it is possible to extract all its important characteristics (such as shape, height, etc.) from the drawing.

In the thesis, the reader becomes acquainted with basic concepts of the Monge projection, learns how points, lines and planes are being displayed and becomes familiarized with basic positional and metric tasks. All text is illustrated with charts created in the geometry program called GeoGebra.

Additionally, all examples presented in the thesis are available on www.kmt.zcu.cz/monge/, where the reader can go through the whole process of projection from its assignment to the completed construction.