ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA EKONOMICKÁ

Diplomová práce

Modelování a odhady produkčních funkcí

Modeling and estimation of production functions

Bc. Lucie Zábranová

Plzeň 2024

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma

Modelování a odhady produkčních funkcí

vypracovala samostatně pod odborným dohledem vedoucího diplomové práce za použití pramenů uvedených v přiložené bibliografii.

Plzeň dne 22. 4. 2024 v.r. *Bc. Lucie Zábranová*

Zásady pro vypracování práce

1. Popište historii používaných produkčních funkcí a jejich tvary
2. Zanalyzujte nedostatky produkčních funkcí
3. Definujte použité diagnostické nástroje
4. Vytvořte a odhadněte odpovídající modely produkčních funkcí

Studijní program

Ekonomika a management: Podniková ekonomika a management

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu této diplomové práce JUDr. Ing. Davidovi Martinčíkovi, Ph.D. za vedení práce, rychlou a věcnou komunikaci, konzultace a cenné rady.

Obsah

Úvod

V současné době, kdy konkurence mezi státy stále více sílí a efektivita využití zdrojů je zásadním faktorem úspěchu, je zkoumání produkčních funkcí důležitým prvkem analýzy. Produkční funkce slouží jako nástroj, který pomáhá pochopit spojení mezi vstupy a výstupy v procesu výroby, což umožňuje nalézt nejlepší kombinaci vstupů pro dosažení co nejvyššího výstupu.

Tato práce je zaměřena na rozbor produkčních funkcí. Jsou představeny základní principy a definice týkající se produkčních funkcí. Dále jsou v práci zohledněny i ekonomické koncepty, které se vztahují k danému tématu. Je vysvětlen i rozdíl mezi krátkodobým a dlouhým obdobím v kontextu produkčních funkcí, což může být zásadní pro praktické rozhodování na úrovni státu nebo podniku.

Následně jsou produkční funkce rozebrány z historického hlediska. Je především zkoumáno, jak se funkce vyvíjely a měnily v průběhu času a jaké podněty na změny měly vliv. Důležitým zmíněným bodem jsou i samotné tvary produkčních funkcí a jejich charakteristiky, které je nutné pečlivě zvážit v praxi.

Nedílnou součástí tématu jsou i samotné nedostatky funkcí, kterým je věnovaná samostatná kapitola.

Následuje určení diagnostických nástrojů pro analýzu a hodnocení produkčních funkcí, které budou následně použité v samotné praktické části.

S využitím dostupných dat jsou následně vytvořeny odpovídající modely produkčních funkcí, jsou aplikované teoretické koncepty a diagnostické nástroje. Data byla převzata z webových stránek Statistického úřadu Evropské unie, z nich byly vybrány relevantní proměnné a ty pak upravené pro následnou analýzu. Výsledky jsou následně slovně ohodnoceny.

Cílem této práce je poskytnout komplexní přehled o produkčních funkcích, jejich významu a aplikaci v ekonomické analýze a rozhodování.

Dílčími podcíli jsou:

1. porozumět základním principům a klíčovým pojmům v rámci produkčních funkcí,
2. seznámit se s historií a vývojem produkčních funkcí,
3. prozkoumat nedostatky produkčních funkcí,
4. definovat jednotlivé modely produkčních funkcí,
5. najít vhodné diagnostické nástroje pro analýzu produkčních funkcí,
6. vytvořit odpovídající kódy v jazyce R pro analýzu funkcí,
7. najít vhodná data pro analýzu funkcí,
8. aplikovat kód na reálná data,
9. vytvořit grafy s výsledky,
10. zhodnotit výsledky ekonomické analýzy.

Autorka práci vypracovala v jazyce LaTeX.

1 Historie používaných produkčních funkcí a jejich tvary

Aby bylo možné zaměřit se na historický vývoj produkčních funkcí a jejich tvarů, je potřeba si nejdříve definovat samotnou produkční funkci. Tato kapitola bude proto zaměřena nejdříve na pochopení samotné podstaty produkční funkce a následně na její historický vývoj.

1.1 Produkční funkce

Produkční funkce je ekonomický koncept, který se používá k popisu vztahu mezi množstvím fyzických vstupů a množstvím výstupů ve výrobním procesu. Tato funkce se používá k modelování a pochopení, jak se mění výstup (produkce) v závislosti na změnách vstupů, jako jsou práce, kapitál, suroviny nebo technologie. V praxi se využívají například k predikci chování firem v čase, jejich ekonomického růstu a vývoje (Sickles & Zelenyuk, 2019).

Obecně je možné tvrdit, že ekonomický výstup není matematickou funkcí vstupu, jelikož jakýkoli daný soubor vstupů lze použít k produkci řady výstupů. Aby byla uspokojena matematická definice funkce, předpokládá se, že produkční funkce specifikuje maximální výstup dosažený z každé možné kombinace vstupů. Alternativně lze produkční funkci definovat jako specifikaci minimálních vstupních požadavků potřebných k výrobě určitého množství výstupu (Sickles & Zelenyuk, 2019).

V produkční funkci je vztah výstupu ke vstupům nepeněžní. Produkční funkce dává do vztahu pouze fyzické vstupy a fyzické výstupy, samotné ceny za služby výrobních faktorů se ve funkci neodrážejí. Za určitých předpokladů lze produkční funkci použít k odvození mezního produktu pro každý faktor. Firma, která maximalizuje zisk v dokonalé konkurenci, přidává vstup až do bodu, kdy mezní náklady dodatečného vstupu (změna celkových nákladů, která vzniká při zvýšení množství tohoto vstupu o jednotku) odpovídají meznímu produktu v dodatečné produkci. To znamená, že firma efektivně využívá své zdroje a odměny pro tyto zdroje jsou přiměřené jejich přínosu k výrobě (Sickles & Zelenyuk, 2019).

1.1.1 Mezní produkt

Mezní produkt vyjadřuje změnu výstupu (produkce) při mírné změně vstupu, zatímco všechny ostatní vstupy jsou udržovány konstantní. Jinými slovy, mezní produkt ukazuje, jak se produkce zvýší nebo sníží, když se přidá další jednotkový vstup.

Matematicky je mezní produkt definován jako první derivace produkční funkce (∂) podle jednotlivých vstupů. Pro jednotlivé vstupy práce (L), kapitálu (K), surovin (R) a technologie (T) by mezní produkty byly (Mukherjee et al., 2003):

$$\text{mezní produkt práce } (MP_L) = \frac{\partial Q}{\partial L}, \tag{1.1}$$

$$\text{mezní produkt kapitálu } (MP_K) = \frac{\partial Q}{\partial K}, \tag{1.2}$$

$$\text{mezní produkt surovin } (MP_R) = \frac{\partial Q}{\partial R}, \tag{1.3}$$

$$\text{mezní produkt technologie } (MP_T) = \frac{\partial Q}{\partial T} \tag{1.4}$$

1.1.2 Mezní míra technické substituce (MRTS)

Klesající směrnice izokvanty je dána substitucí vstupů, tedy možnostmi firmy snižovat objem jednoho vstupu a zvyšovat množství druhého vstupu, aniž by se změnila velikost výstupu. Míra nahrazování těchto vstupů se nazývá mezní míra technické substituce a vyjadřuje míru, ve které firma může nahrazovat kapitál prací, aniž by se změnila velikost výstupu. Efektivnost daného vstupu závisí na používaném množství obou vstupů (Kelton, 2023).

Matematický výpočet se může znázornit následovně:

$$\text{MRTS} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{\text{MP}_L}{\text{MP}_K} \tag{1.5}$$

kde: ΔK... změna množství kapitálu,

ΔL ... změna množství práce,

MP_L ... mezní produkt práce,

MP_K ... mezní produkt kapitálu (Kelton, 2023).

Substituce má ovšem své hranice. V místě, kde izokvanty dosáhnou zcela vodorovné pozice, není již možné dále substituovat kapitál prací a mezní míra technické substituce je rovna nule. V opačném případě, kdy izokvanta je ve svislé pozici, není možné dále zmenšovat zapojení práce a mezní míra technické substituce je rovna nekonečnu, protože další snížení práce by vyžadovalo nekonečně velké zvýšení objemu kapitálu pro zachování stejného objemu výroby (Kelton, 2023).

Existují situace, kdy mají křivky izokvant jiný tvar. V nepříliš obvyklém případě, kdy jsou práce a kapitál dokonalými substituty a je tedy jedno, který z nich se ve výrobě použije, jsou izokvanty zobrazeny jako přímky se zápornou směrnicí. V opačném, ovšem daleko častějším případě, jsou práce a kapitál dokonalými komplementy, tedy každá jednotka práce musí být vybavena konstantním objemem kapitálu, a izokvanty zde mají tvar písmene L (Kelton, 2023).

1.1.3 Marginální míra substituce (MRS)

Marginální míra substituce (MRS) je pojem v ekonomii, který označuje množství jednoho zboží, které je možné nahradit jiným. MRS se používá v teorii indiference k analýze spotřebitelského chování. Když je někdo lhostejný k nahrazování jednoho zboží za druhé, jeho marginální užitek z nahrazení je nulový, protože z obchodu nezískává ani neztrácí žádnou spokojenost (Hayes, 2023).

Marginální míra substituce (MRS) vyjadřuje ochotu spotřebitele nahradit jedno zboží za druhé, pokud je nové zboží stejně uspokojivé. MRS je omezená tím, že zohledňuje pouze dvě položky. Nebere v úvahu, jak se mohou dodatečné jednotky podílet na různých preferencích spotřeby (Hayes, 2023).

Vzorec pro marginální míru substituce (MRS) je:

$$|MRS_{xy}| = \frac{dx}{dy} = \frac{MU_y}{MU_x} \tag{1.6}$$

kde: x, y ... dvě různá zboží

$\frac{dx}{dy}$ ... derivace x podle y

MU ... marginální užitek zboží x, y

MRS a indiferenční křivka

Sklon indiferenční křivky je klíčový pro analýzu marginální míry substituce. MRS je sklon indiferenční křivky v libovolném bodě na křivce. Sklon bude často odlišný, jakmile se hodnota pohybuje podél indiferenční křivky (Hayes, 2023).

Většina indiferenčních křivek je obvykle konvexní, protože čím více je konzumováno jedno zboží, tím méně je spotřebováváno druhé. Indiferenční křivky mohou být přímé linie, pokud je sklon konstantní, což znamená, že indiferenční křivka je reprezentována sestupně se svažující přímou linií (Hayes, 2023).

Pokud je marginální míra substituce rostoucí, indiferenční křivka bude konvexní k počátku souřadnic. To je často neobvyklé, protože to znamená, že spotřebitel by konzumoval více X za zvýšenou spotřebu Y (a naopak). Obvykle je marginální substituce klesající, což znamená, že spotřebitel volí substituci místo jiného zboží, než aby současně spotřeboval více (Hayes, 2023)

1.1.4 Marginální míra transformace (MRT)

Marginální míra transformace (MRT) je počet jednotek nebo množství statku, které musí být obětováno k vytvoření nebo získání jedné jednotky jiného statku. Je to počet jednotek statku Y, které budou obětovány k výrobě další jednotky statku X při zachování konstantních faktorů produkce a technologie (Hargrave, 2020).

Marginální míra substituce se zaměřuje na poptávku, zatímco MRT se zaměřuje na nabídku. Vzorec a výpočet marginální míry transformace (MRT):

$$\mathrm{MRT} = \frac{\mathrm{MC}_y}{\mathrm{MC}_x} \tag{1.7}$$

kde: MC_x ... změna celkových nákladů potřebných k výrobě další jednotky X

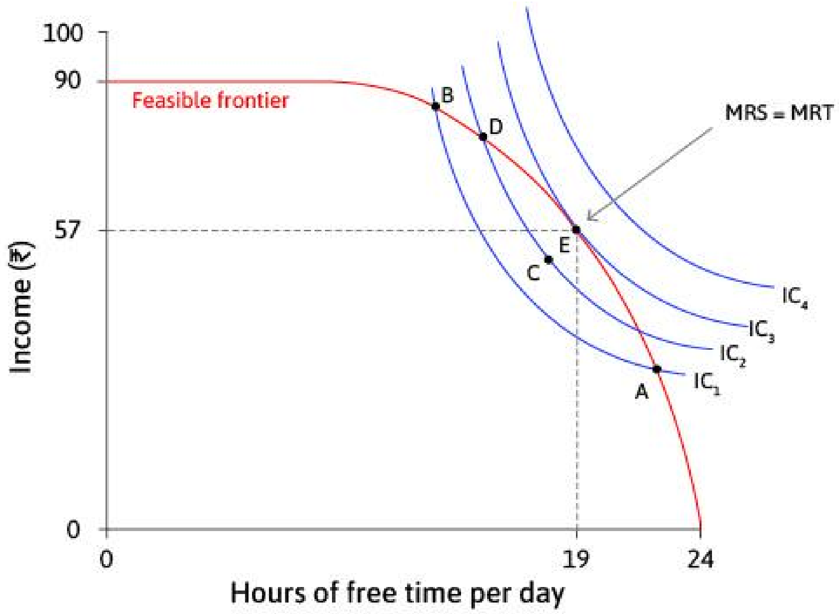
MC_y = změna celkových nákladů potřebných k výrobě další jednotky Y

Marginální míra transformace je spojena s hranicí produkčních možností, která zobrazuje výstupní potenciál pro dva statky pomocí stejných zdrojů (Hargrave, 2020). MRT je absolutní hodnota sklonu hranice možností produkce. Pro každý bod na hranici, která je zobrazena jako zakřivená čára, existuje odlišná marginální míra transformace. Tato míra je založena na ekonomice výroby obou statků (Hargrave, 2020).

Větší výroba jednoho statku znamená menší výrobu statku jiného, protože zdroje jsou efektivně alokovány na bodech na hranici možností produkce. Jinými slovy, zdroje použité k výrobě jednoho statku jsou přesměrovány z jiných statků, což znamená, že méně jiných statků bude vytvořeno (Hargrave, 2020).

Marginální míra substituce (MRS) je spojena s marginální mírou transformace. Zatímco MRS se zaměřuje na poptávkovou stranu spotřebitele, MRT se zabývá výrobní stranou. Často se tyto dva koncepty prolínají a vzájemně ovlivňují (Hargrave, 2020). Následující obrázek zobrazuje osy MRT a MRS a bod, kde se rovnají.

Obrázek 1: Graf zobrazení MRS + MRS



Zdroj: (Core, 2021)

1.1.5 Elasticita substituce

Elasticita substituce vyjadřuje, o kolik procent se změní poměr podílu práce a kapitálu, pokud se mezní míra technické substituce změní o 1 procento. Vysoká elasticita substituce naznačuje, že firmy jsou schopny rychle a snadno nahrazovat jeden vstup za druhý, což může vést k různým tvarům produkčních funkcí.

Vzorec elasticity substituce:

$$s = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta \mathrm{MRTS}} \cdot \frac{\mathrm{MRTS}}{\frac{K}{L}} \tag{1.8}$$

kde: Δ ... malá změna hodnoty,

MRTS ... mezní míra technické substituce,

K ... kapitál,

L ... práce (Mas-Colell, 1995).

1.1.6 Izokvantová analýza

Jedná se o grafické znázornění produkční funkce v dlouhém období, která zohledňuje substituce vstupů a výnosy z rozsahu. Jde o funkci dvou proměnných, dvou vstupů, nejčastěji práce a kapitálu, které mohou mít pouze specifický výstup. Grafem je prostorová plocha zobrazující maximální možné vyrobené množství výstupu při různých kombinacích těchto dvou vstupů. Promítnutím takové plochy do základny vzniká již zmíněná izokvantová mapa (Kelton, 2023).

Izokvanty jsou křivky, které zobrazují všechny kombinace práce a kapitálu vedoucí k výrobě stejného množství výstupu. V mapě izokvant jsou izokvanty uspořádané tak, že vzdálenější izokvanta znamená vyšší úroveň výstupu. Izokvanty se neprotínají. Kdyby k tomu došlo, znamenalo by to, že by stejná kombinace vstupů vyráběla více než jednu úroveň výstupu, čímž by byl porušen předpoklad, že firma využívá vstupy efektivně. Dále jsou klesající a konvexní směrem k počátku. Izokvanty jsou fakticky vrstevnicemi produkčního kopce a tvoří kružnice. Z těchto kružnic je ale relevantní pouze levá spodní čtvrtina, neboť ostatní čtvrtiny představují využití více zdrojů k výrobě stejného množství (Kelton, 2023).

1.1.7 Izokosty

Snahou firmy je vyrobit daný objem výstupu s minimálními náklady vzhledem k produkční funkci. Přímka obsahující všechny kombinace práce a kapitálu, které mohou být pořízeny za dané celkové náklady, se nazývá přímka stejných nákladů neboli izokosta. Směrnice izokosty závisí na poměru cen vstupů (Varian, 1992).

Firma bude tedy minimalizovat své náklady tehdy, jestliže mezní produkt z jedné koruny vynaložené na nákup vstupů bude u všech používaných vstupů stejný. Graficky je optimum možné znázornit tam, kde je izokosta tečnou izokvanty, tedy jejich směrnice jsou shodné (Varian, 1992).

Firma se přitom může rozhodovat, zda chce maximalizovat výstup při daných nákladech nebo zda chce minimalizovat náklady pro daný výstup. Spojením bodů optima pro všechny úrovně výstupu je možné získat soubor bodů vyjadřujících tu nejlepší kombinaci práce a kapitálu pro daný objem výroby, které tvoří křivku rostoucího výstupu (Varian, 1992).

1.1.8 Výnosy z rozsahu

Vztah mezi změnami vstupů a změnou výstupu vyjadřují výnosy z rozsahu. Když se vynásobí oba vstupy v produkční funkci konstantou t, pak jestliže se výstup zvýší také t krát, mluví se o konstantních výnosech z rozsahu (Den Hartigh & Langerak, 2001).

Pokud zvýšení objemu obou vstupů o t procent vyvolá změnu výstupu o více než t procent, potom se hovoří o rostoucích výnosech z rozsahu. V opačném případě, kdy zvýšení objemu obou vstupů o t procent vyvolá změnu výstupu nižší než o t procent, se jedná o klesající výnosy z rozsahu (Den Hartigh & Langerak, 2001).

Typ výnosů z rozsahu je potom dán dle exponentu k, přičemž $k = 1$ znamená konstantní, $k > 1$ rostoucí a $k < 1$ klesající výnosy z rozsahu. Typ výnosů se promítá do vzdálenosti izokvant (Den Hartigh & Langerak, 2001).

1.1.9 Produkční sady (produkční funkce s více výstupy)

Produkční sady jsou definovány dostupnými zdroji, technologií a omezeními firmy. Zatím co produkční funkce znázorňují všechny možné kombinace vstupů, které jsou použity k výrobě určité, definované úrovně výstupu, produkční sady zobrazují všechny možné kombinace vstupů, které mohou být použity k výrobě všech různých úrovní výstupu. To nám umožňuje vidět, co firma může potenciálně produkovat za daných podmínek. Celkově lze produkční sadu chápat jako mapu existujících výrobních možností, kterou firma může využít. Tato sada definuje hranice toho, co je technicky a zdrojově možné (Varian, 1992).

Základní vlastnosti produkční sady jsou následovné. Obsahuje konečný počet možných kombinací vstupů. Kombinace jsou definovány základními omezeními zdrojů a technologií.

Zahrnuje pouze ty kombinace vstupů, které jsou technicky proveditelné s dostupnými zdroji a technologií. To znamená, že výstupy lze skutečně dosáhnout (Mas-Colell, 1995).

Produkční sada je separovatelná na vstupy a výstupy, pokud je každé pole buď nezáporné ve všech prvcích, nebo záporné ve všech prvcích. To obvykle platí pro jednotlivé podniky, ale například ne pro národní ekonomiku (Mas-Colell, 1995).

Není možné vytvořit něco z ničeho. Matematicky není ve výrobní sadě žádný vektor s alespoň jedním kladným prvkem a žádnými zápornými prvky (Mas-Colell, 1995).

Nulový vektor patří také do produkční sady. Jinými slovy, je možné nic nevyprodukovat ani nic spotřebovat. Tato vlastnost téměř nikdy neplatí, protože zdroje budou potřebné buď k zastavení podniku nebo k jeho udržení v klidu (Mas-Colell, 1995).

Produkční sada může být konvexní, konkávní, lineární či jinak zakřivená. To znamená, že míra substituce mezi vstupy se může měnit v závislosti na jejich poměru. Některé faktory mohou být snadno nahrazeny jinými, zatímco jiné mohou být nákladnější na substituci(Mas-Colell, 1995).

Produkční proces je nezvratný. Je nemožné z nějakého výstupu získat zpět všechny vstupy, které byly použity k jeho vytvoření (Mas-Colell, 1995).

Pokud je možné dosáhnout určitého výstupu v rámci produkční sady, pak je i proveditelné dosáhnout výstupu, který je menší se stejnými vstupy. Zároveň je možné naopak dosáhnout stejného výstupu za použití více vstupů (Mas-Colell, 1995).

1.2 Agregátní produkční funkce

Agregátní produkční funkce popisuje, jak celkový reálný hrubý domácí produkt (reálné HDP) v ekonomice závisí na dostupných vstupech. Celkový výstup závisí na následujících faktorech:

- fyzický kapitál, za který lze považovat stroje, výrobní zařízení a další prvky používané ve výrobě,
- práce, která se počítá v součtu odpracovaných hodin v ekonomice,
- lidský kapitál, který lze definovat jako dovednosti a vzdělání,
- základní vědecké znalosti a plány popisující dostupné výrobní procesy,
- sociální infrastruktura neboli podnikatelské, právní a kulturní prostředí,
- množství přírodních zdrojů dostupných v ekonomice.

Vstupy, které nejsou prací, fyzickým ani lidským kapitálem, se spojují dohromady a nazývají se technologií (Cooper & John, 2012).

Agregátní produkční funkce má několik klíčových vlastností. Především výstup roste s nárůstem fyzického kapitálu, práce a přírodních zdrojů. Marginální produkty všech zmíněných vstupů jsou proto kladné. Další charakteristickou vlastností je klesající marginální produkt. Nárůst výstupu se postupně snižuje s přidáním další jednotky tohoto vstupu do výrobního procesu (Cooper & John, 2012).

Zvýšení výstupu může také pocházet z nárůstu lidského kapitálu, znalostí a sociální infrastruktury. Na rozdíl od kapitálu a práce se nepředpokládá, že existují klesající výnosy z lidského kapitálu a technologie. Jedním důvodem je to, že není přirozený nebo zřejmý způsob měření lidského kapitálu, znalostí ani sociální infrastruktury, jaké existují pro měření práce a kapitálu. Zde se totiž používají hodiny práce a využití kapitálu (Cooper & John, 2012).

1.3 Vývoj produkčních funkcí

První zmínky o produkční funkci pochází již z poloviny 19. století, kde došlo k její první algebraické formulaci. K jejímu rozmachu došlo ale až mezi roky 1950 až 1970, kdy se stala velmi diskutovaným tématem. Samotný vývoj je potřeba rozdělit na dvě kategorie, a to vývoj produkční funkce s jedním výstupem a vývoj produkční funkce s více výstupy (Humphrey, 1997).

1.3.1 Produkční funkce s jedním výstupem

V roce 1928 Paul Douglas a Charles W. Cobb sestavili společně již zmíněnou Cobb-Douglas produkční funkci. S nápadem přišel Paul Douglas, který se snažil kvantifikovat, jak výroba reaguje na změny v práci a kapitálu. Použil na to data o vstupu práce a kapitálu za období 1889–1922. Nicméně základní myšlenku kvantifikace vztahu mezi vstupy a výstupy je možné nalézt již dříve u řady ekonomů. Například Turgot zmiňuje ve své práci z roku 1767 vliv variabilních vstupů na výstupu. Mezi další je možné jmenovat ekonomy jako Malthus a Johann von Thünen (Humphrey, 1997; Schumpeter, 1954).

Johann von Thünen formuloval první konkrétní matematický model exponenciální produkční funkce v roce 1840. Funkce vypadala takto: $p = h \cdot q^n$, kde p je výstup na pracovníka, q je kapitál na pracovníka a h je úrodnost půdy a n efektivita práce. Produkční funkce vznikla ve spojitosti se zemědělskou produkcí. Pokud se funkce vynásobí „L“ jakožto prací, najde se ve funkci ukrytá již známá Cobb-Douglasova produkční funkce (Blaug, 1985).

(Mishra, 2007) ve své práci zdůrazňuje, že funkce má své nedostatky, a to především že práce sama o sobě nemůže produkovat nic. Proto byla funkce upravena do tvaru $p = h(L + C)^n L^{n-1}$. Rovnici postavil na myšlence, že práce sama o sobě něco produkuje i tehdy, když není vybavena žádným kapitálem. Moderní ekonomové však s touto myšlenkou nesouhlasí a nikdy nepostavili funkci, ve které by práce sama o sobě něco produkovala.

Cobb-Douglasova produkční funkce nebyla následně řadu let měněna. Pouze v roce

1961 došlo k jejímu rozšíření na čemž se podíleli ekonomové Arrow, Chenery, Minhas a Solow. Došlo k rozšíření o nekvalifikovanou pracovní sílu a parametr nekvalifikované pracovní síly. Funkce vypadala následovně: $Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot H^{A} \cdot L^{\beta}$. Mezitím ovšem dochází také k rozvoji Leontiefovi produkční funkce díky pracím ekonomů Jevonse, Mengera a Leona Walrase (Bruno, 1962).

Arrow také vymyslel produkční funkci CES. Produkční funkce CES přináší pružnost do konceptu produkčních funkcí. To znamená, že elasticita substituce mezi vstupy se může měnit v závislosti na ekonomickém prostředí. CES funkce se stává univerzální, zahrnuje například i formy jako je Cobb-Douglas, Leontief a lineární funkce. Tyto specializované případy ukazují různé reakce výroby na změny ve vstupních faktorech (Bruno, 1962).

Přesto se ukázalo, že formulování CES funkcí s více než dvěma vstupy je obtížné, což bylo zdůrazněno tzv. teorémy nemožnosti Uzawy a McFaddena, které vychází z vlastností produkčních funkcí a zdůrazňují, že nelze dosáhnout efektivní alokace zdrojů a jednoznačného zobrazení produkční funkce současně. S každým dalším vstupem totiž vzniká nová elasticita. Tento aspekt omezil jejich praktickou aplikaci ve složitějších ekonomických modelech (Bruno, 1962).

V roce 1963 proto ekonom Mukerji zobecnil CES pro konstantní poměry elasticit substituce. Ekonom Bruno následně navrhl zobecnění funkce, které ale umožňuje proměnlivou elasticitu substituce. O to se pokoušeli také ekonomové Lu a Fletcher a Ryuzo Sato a Hoffman, Brown a Cani, Nerlove, Ringstad. Po něm Kazuo Sato zobecnil produkční funkci CES tak, aby do ní mohli být zahrnuty více než dva vstupy. Satův matematický model vypadal následovně:$Q = A\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$, Kde Q je výstup, A je skalární faktor, X_i jsou vstupy, α_i jsou jejich váhy a ρ je parametr elasticity substituce (Blaug, 1985).

Zellner a Revankar v roce 1969 přišli na způsob výpočtu produkční funkce, která nejenom umožnuje elasticitu substituce, ale především i proměnlivé výnosy z rozsahu s velikostí výstupu. Do teď všechny funkce předpokládali nereálné stejné výnosy z rozsahu na všech úrovních výstupu. V roce 1971 představil funkci proměnlivé elasticity substituce (VES) (Zellner & Revankar, 1969).

Následně ekonomové jako Diewert, Griliches, Ringstad, Berndt a Christensen představili další generalizace produkčních funkcí v podobě translog a generalizovaných lineárních funkcí. Tyto modely se pokoušejí lépe zachytit složitost reálných ekonomických vztahů, což ale s sebou přináší výzvy v podobě obtížnosti odhadu parametrů (Diewert, 1971).

Kadiyala následně přinesl víceúčelovou produkční funkci, která měla tvar: $Q = A\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}\right)$.Tato funkce umožňovala kombinovat různé vstupy X_i s jejich vlastními elastickými vahami α_i, což poskytovalo flexibilitu v modelování různých produktivních procesů. Přestože byla tato funkce významná pro rozšíření možností modelování, nedostala se do širšího povědomí ekonomického prostředí. Kmenta a McCarthy se následně zabývali možnou nejednoznačností aproximace produkčních funkcí pomocí Taylorovy řady. To naznačuje, že odhady parametrů na základě reálných dat mohou být výsledkem kompromisu mezi různými modely, a tedy nemusí jednoznačně odpovídat určité produkční funkci (Mishra, 2007).

V roce 1989 Rolf Färe a Thomas Mitchell provedli modifikaci produkční funkce McCarthyho, čímž vytvořili produkční funkci nazývanou McCarthy-Färe-Mitchell (MFM). Tato funkce má osm speciálních případů, což umožňuje lépe modelovat různé situace v ekonomii. Estimace MFM produkční funkce je náročná, zejména kvůli možnosti nulových parametrů v některých speciálních případech. Tato možnost nulových parametrů může zkreslit výsledek výpočtu. Rovnice vypadá následnově: $Q = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{\beta_i}\right)^A$, kde Q je výstup (produkce), A je parametr škálování, X_i jsou vstupní faktory, α_i jsou koeficienty příspěvků vstupů k výstupu, β_i jsou elastické parametry substituce mezi vstupy, A je celková elasticita substituce mezi vstupy (Mishra, 2007).

V 70. letech byl téměř dokončen proces generalizace dvou klíčových produkčních funkcí: Cobb-Douglasovy a CES. Předpokládá se, že mezní míra substituce mezi libovolnými dvěma faktory produkce souvisí pouze s relativními cenami faktorů a je nezávislá na technickém pokroku nebo úrovni výstupu, takzvaně technologický pokrok je Hicks-neutrální. To znamená, že změny v technologii neovlivňují relativní substituční vztahy mezi faktory výroby. Technologická změna může být buď Hicks-neutrální, tedy že poměr mezi mezními produkty kapitálu a práce zůstává stejný, nebo může být Harrod-neutrální (ovlivňuje jen práci) nebo Solow-neutrální (ovlivňuje jen kapitál) (Sato, 1975).

Ryuzo Sato v roce 1975 rozšířil koncept mezní míry substituce tím, že zahrnul vliv technologického pokroku na ceny faktorů. Empirická data ukázala, že poměr cen faktorů se může měnit i při konstantním vstupním poměru. Tímto způsobem bylo možné lépe modelovat reálné ekonomické vztahy a zachytit variabilitu cenových poměrů v různých situacích. Sato představil takzvanou třídu CES funkcí, která zahrnovala různé typy vstupů a umožnila lépe analyzovat změny ve vstupních faktorech. Díky této třídě funkcí bylo možné rozkládat změny v produkci na složky způsobené změnami v substituci faktorů a změnami v příjmech. Funkce vypadala následovně: $Q = A\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$, kde Q je výstup, A je parametr škálování, X_i jsou vstupní faktory, α_i jsou koeficienty příspěvků vstupů k výstupu, ρ je koeficient elasticity substituce (Sato, 1975).

Energetická krize způsobená válkami v 70: letech zdůraznila význam energie v ekonomickém smyslu. Ekonometři začali zahrnovat energii a materiály jako vstupy do produkčních funkcí vedle tradičních faktorů jako práce nebo kapitál (Mishra, 2007).

V 80. letech přišli Kümmel a jeho spolupracovníci s inovativním lineárně exponenciálním modelem známým jako LINEX. Tato funkce zohledňuje vliv energie na výrobu a zároveň reflektuje lineární a exponenciální vztahy mezi faktory výroby. To umožnilo lépe modelovat reálné vztahy mezi energií, kapitálem a prací a zároveň zachytit jejich vzájemnou závislost. Model vypadal následovně: $U = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta x}) + Ax$, kde U je užitek spotřebitele, x je množství konzumovaného statku, α, β a A jsou parametry modelu, které ovlivňují tvar křivky preference (Lindenberger & Kummel, 2002).

Hollis Chenery byl prvním ekonomem, který ukázal, jak inženýrské informace mohou zlepšit empirická studia produkce. Tím, že propojoval teoretické a empirické analýzy, bylo možné lépe porozumět ekonomickým procesům a přinést realističtější pohled na produkční vztahy (Lindenberger & Kummel, 2002).

V roce 2003 přišel Lindenberger s rozšířením LINEX funkce na tzv. "service production functions". Tyto funkce kromě pracovního faktoru také zohledňovaly závislost na práci. Tímto způsobem bylo možné modelovat situace, kde práce hraje klíčovou roli a ovlivňuje výstupy. Funkce se liší v závislosti na konkrétních specifikacích práce. Obecně lze funkci zapsat takto: $Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot W^{A}$, kde Q je výstup, K je kapitálový faktor, L je pracovní faktor, W je faktor zohledňující další vlivy (např. technologie, organizace práce), A je skalární faktor, α, β, A jsou parametry, které ovlivňují vztah mezi vstupy a výstupy (Lindenberger & Kummel, 2002).

1.3.2 Produkční funkce s více výstupy

V předchozí kapitole byl rozebírán koncept, ve kterém byl vždy pouze jeden výstup. Nyní bude rozebrána situace, kdy dochází k více výstupům nebo dochází ke sdílené produkci. Obecně se tento problém pojí především se zemědělskou nebo enviromentální ekonomikou.

Mishra (2007) zmiňuje, že klíčovou otázkou týkající se společné výrobní funkce je její definice a existence. Zatímco v předchozí kapitole byla výrobní funkce definována jako maximální výstup získaný z daného vstupního vektoru, pro technologii s více výstupy neexistoval jednoduchý maximální výstup, což komplikovalo definici a prokázání existence funkce výroby s více výstupy.

V roce 1977 provedli Al-Ayat a Färe analýzu nezbytných podmínek pro existenci společné produkční funkce. Bylo dokázáno, že společná produkční funkce existuje pouze tehdy, pokud dochází ke vzájemnému zvyšování hodnoty vstupu i hodnoty výstupu v odpovídajícím stejném směru (Färe, 1986).

Färe v roce 1986 představil tři alternativní způsoby, jak produkční funkci s více výstupy definovat. První způsob je založen na konceptu izokvantové společné produkční funkce, která určuje, že pro daný pár vstupních a výstupních vektorů musí patřit vstupní vektor a výstupní vektor do izokvanty odpovídajícího vstupním, respektive výstupním vztahům. Druhý přístup tvrdí, že efektivní společná produkční funkce charakterizuje takové vstupní a výstupní vektory, které jsou zároveň efektivní z hlediska vstupů i výstupů. Třetí koncept společné produkce spočívá ve vztahu slabě efektivních vstupních vektorů a slabě efektivních výstupních vektorů (Färe, 1986).

Klíčovým zjištěním Färeho je, že společná výrobní funkce existuje, pokud jsou splněny určité podmínky týkající se disjunktnosti množin vstupů a výstupů. Tyto podmínky zajišťují nezáporné vstupy a výstupy. Také dokázal, že za určitých podmínek jsou všechny tři definice společné produkční funkce ekvivalentní (Färe, 1986).

Počátky ekonometrické analýzy spojených produkčních funkcí se ovšem datují do roku 1932, kde Stackelberg publikoval produkční funkce s více výstupy ve své práci. Poté na práci navázal Klein roku 1947. Funkce měla základní tvar: $Q_1 = f_1(L, K)$. Následně se studie rozdělili do čtyř hlavních kategorií. Modely formulující procesní analýzu, formulující složené implicitní makro funkce, formulující složené makro funkce a formulující systémy současných rovnic(Mishra, 2007).

Analýza procesu

Přístup se zaměřuje na mikroprodukční funkce jednotlivých produktů a jejich následné agregování do makroprodukční funkce. To může vyžadovat rozsáhlou databázi a řešení rozsáhlých programovacích modelů. Příkladem je práce Manneho v roce 1958, který model zveřejnil ve své práci. Nicméně metoda nemusí být účinná pro nelineární produkční funkce (Blaug, 1985).

Složené implicitní makro funkce

Tento přístup spočívá v transformaci vstupních a výstupních vektorů pomocí implicitní funkce, která může být nelineární. Způsob byl použit například v práci Mundlaka v roce 1964. $Q = F(K, L, X_1, X_2, ..., X_n)$, kde F je implicitní funkce popisující vztah mezi vstupy a výstupem (Blaug, 1985).

Složené makro funkce

Tato funkce spočívá v transformaci vstupních a výstupních vektorů na složené vážené lineární agregátní vektory, které maximalizují korelaci mezi nimi. Nicméně tento postup může být problematický, pokud jsou produkční funkce přirozeně nelineární. Touto problematikou se zabýval Vinod v roce 1968 (Blaug, 1985).

Analýza současných rovnic

Technika formuluje a odhaduje systém nelineárních současných rovnic pro více výstupů. Ocenění parametrů může být provedeno pomocí nelineární metody dvoustupňové nebo třístupňové metody nejmenších čtverců. Just v roce 1983 použil analýzu pro odhad vícenásobných produkčních funkcí v zemědělství (Blaug, 1985).

1.3.3 Agregátní produkční funkce

Agregátní produkční funkce jsou nejvíce turbulentní oblastí výzkumu. Doposud byl popisován vztah mezi vstupy a výstupy na úrovni firmy. Nyní bude produkční funkce identifikována na úrovni odvětví, sektoru nebo celé ekonomiky. Odvětví je složeno z mnoha firem, přičemž každá vyrábí podobné produkty, využívá vlastní vstupy s vlastními náklady a má vlastní dopady na trh. Dalším rozdílem je, že firma může být cenovým příjemcem na trhu faktorů, zatímco odvětví může být tvůrcem cen. Funkce je proto získána agregací vstupů a výstupů z jednotlivých firem. Nabízí se tedy otázka, zda agregovaná produkční funkce skutečně reprezentuje technologický vztah mezi vstupy a výstupy většiny firem, nebo zda spíše reprezentuje ideální firmu, která nemusí existovat v reálném světě (Mishra, 2007).

Již od doby Adama Smithe se ekonomové soustředili na dokázání, že autonomní řízení společnosti na základě kapitalistických principů je nejlepším, stabilním a nejživotaschopnějším přístupem k řízení společnosti. Karl Marx následně zpochybnil účinnost systému v tom, že nezajišťuje pouze spravedlnost, ale také nekonečnou expanzi. Následně bylo potřeba vymyslet silné argumenty, které by obhájili legitimitu kapitalistického systému. Právě agregovaná produkční funkce je jeden z těchto argumentů. O rozvoj se zasloužil především Alfred Marshall a Knut Wicksell. Obecně lze funkci definovat následovně: $Y = F(K, L, \dots)$, Y je celkový výstup nebo produkce, K, L, …jsou vstupy do produkčního procesu (například kapitál, práce, suroviny) (Humphrey, 1997).

V období po Velké hospodářské krizi až do konce druhé světové války se ekonomové zabývali možnostmi růstu bez prudkých výkyvů. K tomuto se ukázalo jako dobré řešení koncepce agregované produkční funkce. Díky rozvoji lineárního programování jako metody optimalizace se tato výzkumná oblast rychle posouvala kupředu. Velký přínos měl Koopmans v oblasti analýzy činnosti, Leontief s analýzou vstupů a výstupů, agregovaná lineární výrobní funkce od Georgescu-Roegena v roce 1951. Funkce vypadá následovně: $Y = A + BK + CL$, kde Y je celkový výstup, A je konstanta označující nezávislou produkci, K je množství vstupu kapitálu (např. stroje, vybavení), L je množství vstupu práce (např. počet zaměstnanců), B a C jsou parametry, které určují, jak moc každý vstup přispívá k celkové produkci (Georgescu-Roegen, 1971).

V 50. letech nebylo na funkci nahlíženo kladně. Kontroverze začala zejména ohledně měření kapitálu, ve které se Piero Sraffa, Luigi Pasinetti, Pierangelo Garegnani, Joan Robinson a další zastávali názor, že by se neměla používat agregovaná výrobní funkce, protože je nemožné představit si abstraktní množství kapitálu, které by bylo nezávislé na úrovni úroků a mezd. Paul Samuelson, Robert Solow, Frank Hahn a Christopher Bliss a další naopak hájili použití agregované výrobní funkce k vysvětlení relativních podílů faktorů. Dalším problémem byla substituce faktorů (Sraffa, 1960).

Tyto spory trvaly až do poloviny 70. let. Díky této kontroverzi byl odhalen nedostatek agregovaných výrobních funkcí, zejména funkce Cobb-Douglas. Téměř jednoznačně prokázala, že tyto funkce postrádají ekonomické aspekty a jejich vlastnosti vycházejí pouze z matematických operací. Solow v roce 1957 a Samuelson v roce 1962 provedli řadu empirických výzkumů, aby dokázali funkčnost agregované produkční funkce, bohužel ani jeden z výzkumů není možné aplikovat univerzálně v reálném světě (Solow, 1963).

Kapitálová kontroverze, která začala kritikou používání agregované výrobní funkce k vysvětlování relativních podílů faktorů, měla katastrofální dopad na neoklasickou ekonomii. V důsledku těchto sporů existuje skupina ekonomů, kteří opustili neoklasickou ekonomii ve prospěch zdokonalení klasické ekonomie, jakožto jediné pravdivé. Byly ovlivněné i některé základní ekonomické teorie, včetně mezinárodní teorie obchodu, teorie technického pokroku, teorie daní a ekonomické teorie životního prostředí. Doposud nebyl představen soubor teoretických nástrojů, který by vyřešil problém neoklasické ekonomie (Lavoie, 2000).

1.4 Vyjádření a typy produkčních funkcí

Vstupy do produkční funkce se nazývají výrobními faktory. Výrobní faktory mohou představovat primární faktory, kterými jsou půda, práce a kapitál. Primární faktory jsou hlavní součástí výrobního procesu, ale samy o sobě nejsou ve výrobě transformovány, jsou pouze kombinovány, aby dosáhly požadovaného výstupu. Produkční funkce není úplným modelem výrobního procesu. Záměrně nezohledňuje inherentní aspekty fyzických výrobních procesů. Důležité je brát v úvahu i ostatní aspekty výrobního procesu, například úroveň technologií a znalostí, které můžou produkční funkci značně ovlivnit (Varian, 1992).

Mezi nejčastější a nejznámější produkční funkce je možné jmenovat níže zmíněné.

1.4.1 Lineární produkční funkce

Lineární produkční funkce je jednoduchý ekonomický model, který předpokládá, že výstup (produkce) je přímo úměrný pouze jednomu vstupu. Tato funkce se často používá v ekonomických analýzách a modelech, zejména pro jednoduché případy, kdy existuje jediný vstup a lineární vztah mezi vstupem a výstupem. Má nekonečnou elasticitu substituce. Faktory produkce jsou proto plně substituovatelné mezi sebou. V lineární produkční funkci může být jeden vstup zcela nahrazen jiným bez jakýchkoli dopadů na výstup (Rehal, 2023).

Matematicky může být lineární produkční funkce vyjádřena následovně:

$$Q = f(K, L) = a \cdot K + b \cdot L \tag{1.9}$$

Kde: Q ... je produkce (výstup),

L ... vstup (množství práce),

K ... vstup (množství kapitálu),

a ... koeficient účinnosti, který reprezentuje změnu produkce na

jednotkovou změnu vstupu,

b ... konstanta, která představuje produkci, která by existovala, i kdyby nebyl použit žádný vstup (tj. základní produkce nezávislá na vstupu).

Lineární produkční funkce předpokládá, že mezní produkt je konstantní, což znamená, že každá další jednotka vstupu přidává stejný přídavek k výstupu. Je tedy snadné pochopit, že lineární produkční funkce má stoupající lineární charakter (Rehal, 2023).

1.4.2 Cobb-Douglasova produkční funkce

Jedná se o pravděpodobně nejznámější produkční funkci v ekonomii. Jde o homogenní funkci, kterou lze použít pro modelování konstantních, rostoucích a klesajících výnosů z rozsahu a lze ji rozšířit o další vstupy nebo výrobní faktory (Rehal, 2023).

Matematické vyjádření lze zobrazit následovně:

$$Q = f(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \tag{1.10}$$

kde: Q ... produkce (výstup),

A ... proměnná, která reprezentuje celkovou produktivitu a technologický pokrok,

L ... množství práce (pracovní síly),

K ... množství kapitálu,

α a β ... konstanty, které určují, jak se vstupy kombinují k vytvoření výstupu.

Charakter výnosů z rozsahu je závislý na hodnotách „α“ a „β“. Pokud $\alpha + \beta = 1$, jedná se o konstantní výnosy z rozsahu, jestliže $\alpha + \beta > 1$, jedná se o rostoucí výnosy z rozsahu a opačně pokud $\alpha + \beta < 1$, půjde o klesající výnosy z rozsahu (Rehal, 2023).

Tento model také reflektuje substituční efekt mezi pracovní silou a kapitálem, což znamená, že pokud je jeden z těchto vstupů dražší nebo obtížněji dostupný, firma může reagovat tím, že bude více využívat druhý vstup (Rehal, 2023).

I přes tyto důležité vlastnosti, díky kterým je Cobb-Douglasova produkční funkce velice oblíbená, skýtá i důležitou nevýhodu a to elasticitu substituce, která se rovná jedné. Tento jev je ve skutečnosti nereálný, a proto se používají často jiné produkční funkce (Rehal, 2023).

1.4.3 Produkční funkce konstantní elasticity substituce (CES)

Hlavní výhodou této funkce je, jak již název napovídá, konstantní elasticita substituce. Je proto mnohem více flexibilní než předešlá produkční funkce. Může se použít pro modelování konstantních, klesajících i rostoucích výnosů z rozsahu. Záleží na stupni homogenity funkce. Pokud stupeň homogenity se rovná jedné, jedná se o konstantní výnosy z rozsahu, pokud stupeň homogenity je větší než jedna, jedná se o rostoucí, pokud menší než jedna, jedná se o klesající výnosy z rozsahu (Rehal, 2023).

CES produkční funkce umožňuje zachytit jak substituci, tak i komplementaritu mezi vstupy v závislosti na hodnotě parametru α. Tímto způsobem dokáže modelovat širší škálu ekonomických situací než jiné produkční funkce (Rehal, 2023).

Matematický zápis rovnice vypadá následovně:

$$Q = A\left[(\alpha K)^{-\delta} + (1-\alpha)\, L^{-\delta}\right]^{-\frac{\theta}{\delta}} \tag{1.11}$$

kde: Q ... produkce (výstup),

A ... konstanta, která reprezentuje celkovou produktivitu a technologický pokrok,

L ... množství práce (pracovní síly),

K ... množství kapitálu,

θ ... stupeň homogenity,

δ ... substituční parametr,

α ... distribuční parametr (úhel elasticity substituce).

Elasticitu substituce je možné zapsat následovně:

$$\sigma = \frac{1}{1+\delta} \tag{1.12}$$

1.4.4 Leontiefova produkční funkce

Předpokladem funkce je, že výstup lze vyrobit pouze s použitím pevných podílů vstupů. Jednu jednotku výstupu je možné vyrobit použitím pouze určitého množství práce a kapitálu. Neexistuje žádná flexibilita ve změně množství vstupů. Tyto předpoklady fungují pouze pro specifické případy, kdy je pevně stanoveno množství vstupů. Například při výrobě pečiva, kdy je přesně známo, kolik mouky na výrobu je potřeba. Zobrazuje pouze konstantní výnosy z rozsahu. Výstup se zvýší stejným poměrem, jako nárůst vstupů (Rehal, 2023).

Funkce má substituční elasticitu rovnu nule, což znamená, že faktory vstupu jsou pevně propojené a nelze je substituovat.

Funkce se zapíše následovně:

$$Q = \min(\alpha L, \beta K) \tag{1.13}$$

kde: Q ... produkce (výstup),
L ... množství práce (pracovní síly),
K ... množství kapitálu,
α a β ... pevné poměry práce a kapitálu potřebné k výrobě jednotky výstupu.

1.4.5 Produkční funkce s proměnlivou elasticitou substituce (VES)

V předešlých produkčních funkcích byla elasticita substituce rovna jedné nebo konstantní. V této funkci se elasticita substituce mezi dvěma vstupy může měnit v závislosti na množství těchto vstupů, na technologii a jiných faktorech. Například v určitém množství vstupů může být elasticita substituce mezi prací a kapitálem jiná než v jiném množství.

Jde o homogenní funkci, kde je možné pozorovat opět všechny druhy výnosů z rozsahu a je možné zobrazit proměnnou elasticitu substituce (Rehal, 2023).

Matematický zápis rovnice je možné zapsat následovně:

$$Q = AK^{\alpha(1-\delta\rho)} \left[L + (\rho - 1)K\right]^{\alpha\delta\rho} \tag{1.14}$$

kde: Q ... produkce (výstup),

A ... konstanta, která reprezentuje celkovou produktivitu a technologický pokrok,

K ... množství kapitálu,

L ... množství práce,

α ... výnosy z rozsahu,

ρ ... parametr elasticity substituce,

δ ... parametr elasticity substituce mezi kapitálem a prací. Elasticitu substituce je umožněno zapsat následovně:

$$\sigma = 1 + \frac{\rho - 1}{1 - \delta\rho} \cdot \frac{K}{L} \tag{1.15}$$

1.4.6 Translogová produkční funkce (Translog)

Jedná se o velmi flexibilní produkční funkci, kterou lze použít k modelování proměnné elasticity substituce a je možné ji použít pro všechny typy výnosů z rozsahu.

Funkce může být snadno rozšířena tak, aby zahrnovala libovolný počet vstupů. Je ovšem homogenní pouze za určitých podmínek (Rehal, 2023).

Translog funkce se zapíše následovně:

$$\ln Q = \ln \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln X_i \ln X_j \tag{1.16}$$

kde: Q ... výstup,

K ... počet vstupů,

β_k ... elasticita vstupů.

Pokud má funkce dva rozdílné vstupy, je možné rovnici napsat následovně (Rehal, 2023).

$$\ln Q = \ln \beta_0 + \ln \beta_1 \ln X_1 + \ln \beta_2 \ln X_2 + \frac{1}{2}\beta_3(\ln X_1)^2 + \frac{1}{2}\beta_4(\ln X_2)^2 + \frac{1}{2}\beta_5(\ln X_1 \ln X_2) \tag{1.17}$$

kde: β_1 ... vstupní elasticita kapitálu,

β_2 ...vstupní elasticita práce,

β_3 ... zobrazuje druhotné efekty kapitálu,

β_4 ... zobrazuje druhotné efekty práce,

β_5 ... zobrazuje společné působení kapitálu a práce.

Produkční funkce translog se může redukovat na Cobb-Douglasovu produkční funkci, pokud jsou druhé derivace vůči logaritmu vstupů nulové, což odpovídá případu, kdy jsou výsledné hodnoty derivací symetrické. Taková situace znamená, že substituční efekty jsou konstantní a nemění se s úrovní vstupů, což odpovídá charakteru Cobb--Douglasovy funkce. Matematicky řečeno:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0 \tag{1.18}$$

Následně se funkce převede do tvaru:

$$\ln Q = \ln \beta_0 + \ln \beta_1 \ln X_1 + \ln \beta_2 \ln X_2 \tag{1.19}$$

Rovnice odpovídá charakteru Cobb-Douglasovi produkční funkce.

1.4.7 Převody funkcí

Funkce je možné mezi sebou za určitých podmínek vzájemně převádět. Některé převody se ovšem nepoužívají často, protože v praci nemají velký smysl kvůli rozdílnosti samozných funkcí. Například kvůli rozdílné elasticitě substituce. Jsou zde proto definovány pouze nejčastější převody.

Cobb-Douglasova produkční funkce na VES funkci

Při tomto převodu je nutné zajistit, aby elasticita substituce nebyla konstantní, ale aby měla různé hodnoty v závislosti na úrovni vstupů. Převod na VES funkci je prakticky stejný, akorát se nakonec použije definice pro VES funkci (Hardy et al., 1952).

Logaritmická forma:

$$\ln(Q) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + (1-\alpha)\ln(L) \tag{1.20}$$

Derivace logaritmů:

$$\frac{\partial \ln(Q)}{\partial \ln(K)} = \alpha \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial \ln(Q)}{\partial \ln(L)} = 1-\alpha \tag{1.22}$$

Definice funkce:

$$Q = AK^{\alpha(1-\delta\rho)}\left[L + (\rho-1)K\right]^{\alpha\delta\rho} \tag{1.23}$$

Převod lineární produkční funkce na Cobb-Douglas funkci

Lineární produkční funkce má tvar:

$$Q = a + bK + cL \tag{1.24}$$

Cobb-Douglasova produkční funkce má tvar:

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \tag{1.25}$$

Při převodu z lineární produkční funkce na Cobb-Douglasovu funkci platí tyto pravidla, díky kterým je možné rovnice mezi sebou bez úprav převádět (Hardy et al., 1952):

$$A = e^a \tag{1.26}$$

$$\alpha = b \tag{1.27}$$

$$\beta = c \tag{1.28}$$

Převod CES funkce na Cobb-Douglas funkci

CES funkce je definována takto:

$$Y = \left(\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(A_K K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(A_N N)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1.29}$$

kde: σ ... je elasticita substituce

Pro převod je hlavní podmínka, že $\sigma = 1$.

Pro zjednodušení výpočtů bude definováno $\rho = \frac{1}{\sigma-1} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{1+\rho}$:

$$Y = \left(\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \tag{1.30}$$

Případ $\sigma = 1$ je tedy stejný jako $\rho = 0$. Bude provedena limita při $\rho \to 0$ (Moll, 2023):

$$Y = \exp\left(\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \ln(\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}\right) \tag{1.31}$$

Limita dává $\frac{0}{0}$. Použije se tedy L'Hopitalovo pravidlo:

$$\begin{aligned} Y = \exp\left(\lim_{\rho\to\infty} \frac{\alpha^{1+\rho}\ln(\alpha)(A_K K)^{-\rho} - \alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho}\ln(A_K K)}{\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}}\right) \\ + \frac{(1-\alpha)^{1+\rho}\ln(1-\alpha)(A_N N)^{-\rho} - (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}\ln(A_N N)}{\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Po dosazení a úpravě rovnice je možné dostat (Moll, 2023):

$$\begin{aligned} Y &= \exp\left(-\frac{\alpha\ln(\alpha) - \alpha\ln(A_K K) + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (1-\alpha)\ln(A_N N)}{\alpha + (1-\alpha)}\right) \\ &= \left(\frac{A_K K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{A_N N}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Převod Leontiefovi produkční funkce na Cobb-Douglas funkci

Pro tento převod je nutné splnit podmínku, že $\sigma = 0$

Bude použita alternativní reprezentace CES jako funkce ρ a použita limita, kdy $\rho \rightarrow \infty$:

$$Y = \exp\left(\lim_{\rho\to\infty} -\frac{1}{\rho}\ln\left(\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + 1 - \alpha^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}\right)\right) \tag{1.34}$$

Tentokrát při limitě $\rho \to \infty$, je možné získat $\frac{\infty}{\infty}$. Proto opět dojde k použití L'Hopitalovo pravidla:

$$\begin{aligned} Y = \exp&\left(\lim_{\rho\to\infty}\frac{\alpha^{1+\rho}\ln(\alpha)(A_K K)^{-\rho} - \alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho}\ln(A_K K)}{\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}}\right) \\ &+ \frac{(1-\alpha)^{1+\rho}\ln(1-\alpha)(A_N N)^{-\rho} - (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}\ln(A_N N)}{\alpha^{1+\rho}(A_K K)^{-\rho} + (1-\alpha)^{1+\rho}(A_N N)^{-\rho}} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Nechť $x = \min\left\{\frac{A_K K}{\alpha}, \frac{A_N N}{1-\alpha}\right\}$, $\theta_K = \frac{A_K K}{\alpha x}$ a $\theta_N = \frac{A_N N}{(1-\alpha)x}$. Bude použit předchozí výraz a rozdělí se čitatel a jmenovatel pomocí $x^{-\rho}$. Zjednodušení vede k (Moll, 2023):

$$Y = \exp\left(\lim_{\rho\to\infty}\frac{\alpha\ln(\alpha)\theta_K^{-\rho} - \alpha\ln(A_K K)\theta_K^{-\rho} + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\theta_N^{-\rho} - (1-\alpha)\ln(A_N N)\theta_N^{-\rho}}{\alpha\theta_N^{-\rho} + (1-\alpha)\theta_N^{-\rho}}\right) \tag{1.36}$$

Použitím definic x, θ_K a θ_N máme $1 = \min\{\theta_K, \theta_N\}$. Proto nastane buď $\theta_K = 1 \Leftrightarrow x = \frac{A_K K}{\alpha}$ nebo $\theta_N = 1 \Leftrightarrow x = \frac{A_N N}{1-\alpha}$, protože jedna z hodnot θ_K nebo θ_N musí být menší. Z toho také plyne, že $\theta_i \geq 1, \forall i = \{K, N\}$, protože jedna z hodnot θ_K nebo θ_N musí být menší. Z toho plyne:

$$\lim_{\rho\to\infty}\theta_i^{-\rho} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \theta_i = 1 \\ 0 & \text{pokud } \theta_i > 1 \end{cases} \tag{1.37}$$

Použití tohoto výsledku na limitu:

$$Y = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\alpha \ln(\alpha) - \alpha \ln(A_K K)}{\alpha}\right) & \text{pokud } \theta_K = 1 \\ \exp\left(-\frac{(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (1-\alpha)\ln(A_N N)}{1-\alpha}\right) & \text{pokud } \theta_N = 1 \end{cases} \tag{1.38}$$

$$= \begin{cases} \frac{A_K K}{\alpha} & \text{pokud } x = \frac{A_K K}{\alpha} \\ \frac{A_N N}{\alpha} & \text{pokud } x = \frac{A_N N}{\alpha} \end{cases} \tag{1.39}$$

$$= x = \min\left\{\frac{A_K K}{\alpha}, \frac{A_N N}{1-\alpha}\right\} \tag{1.40}$$

(Moll, 2023).

1.5 Krátké a dlouhé období

V krátkém období není možné změnit nebo upravit všechny vstupy najedou. Vždy dochází ke změně pouze části vstupů, například zvýšení množství zaměstnané práce. Některé vstupy jsou proto proměnlivé, zatím co jiné jsou krátkodobě fixní. Obecně je práce považována za variabilní faktor a kapitál za fixní faktor v krátkém období (Rehal, 2023).

Tato funkce typicky vykazuje klesající mezní výnosy, což znamená, že zatím co se variabilní vstup zvyšuje a fixní vstup zůstává konstantní, mezní produkt variabilního vstupu nakonec klesá. Dodatečný výstup produkovaný každou další jednotkou proměnného vstupu začne po určitém bodě klesat, nakonec se stane i záporným (Rehal, 2023).

V dlouhém období jsou všechny vstupy variabilní. Proto je možné v dlouhodobém horizontu rozšířit rozsah výroby navýšením kapitálu. Je zde snaha o maximalizaci výstupů, které lze vyrobit pomocí libovolné kombinace vstupů s ohledem na stav technologie (Rehal, 2023).

Z tohoto důvodu dlouhodobá produkční funkce může zobrazit klesající, konstantní nebo i rostoucí výnosy z rozsahu. To znamená, že pokud se všechny vstupy zvyšují úměrně, výstup se zvyšuje o menší, stejný, nebo i větší poměr. Díky tomu může firma využívat úspory z rozsahu. Úspor z rozsahu je možné dosáhnout nižšími výrobními náklady a vyšší efektivitou (Rehal, 2023).

1.6 Rozdíly mezi krátkodobou a dlouhodobou produkční funkcí

Hlavním rozdílem je především fakt, že krátkodobá produkční funkce bere v úvahu období, kdy je alespoň jeden vstup pevný, fixní a nelze jej upravovat. V dlouhodobé produkční funkci jsou všechny vstupy variabilní a lze je volně měnit (Surbhi, 2017).

Dalším rozdílem jsou v krátkém období klesající mezní výnosy, kde každý dodatečný výstup produkovaný další jednotkou proměnné vstupu klesá. V dlouhodobém období je možné pozorovat klesající, rostoucí i konstantní výnosy z rozsahu (Surbhi, 2017).

Krátkodobé funkce se zaměřují na maximalizaci výkonu v aktuálním období při současné úrovni technologií, vybavení a zařízení. Dlouhodobá funkce umožňuje firmám plánovat budoucnost a provádět dlouhodobé investice do nových vybavení a zařízení (Surbhi, 2017).

2 Nedostatky produkčních funkcí

2.1 Kontroverze kolem kapitálu

Kontroverze o kapitálu v Cambridgi odkazuje na debatu, která začala v 50. letech a pokračovala až do 70. let. Jádrem debaty je měření kapitálových statků způsobem, který je v souladu s požadavky neoklasické ekonomické teorie. Debata zahrnovala ekonomy jako Piero Sraffa, Joan Robinson, Piero Garegnani a Luigi Pasinetti na univerzitě v Cambridgi v Anglii a Paula Samuelsona a Roberta Solowa na Massachusettském technologickém institutu (Samuelson, 1966).

Debata řešila základní předpoklady teorií hodnot, distribuce a růstu, z nichž každý závisí na agregátní výrobní funkci, kde jsou vstupy nebo výrobní faktory kapitál a práce agregovány nějakým způsobem před určením míry zisku (úroku) a mzdy. Podle neoklasické teorie je cena každého faktoru výroby určena jeho marginálním příspěvkem k výrobě, navíc existuje substituovatelnost mezi faktory výroby, která vede ke klesajícím výnosům. V důsledku toho je míra zisku (nebo úrok) cenou kapitálu, jako taková odráží relativní vzácnost kapitálu, konkrétně řečeno relativní nadbytek kapitálu v kombinaci se zákonem klesajících výnosů faktoru výroby (který znamená, že větší použití vstupu bude znamenat nižší marginální produkt za stejných podmínek) povede k nízké míře zisku (úroku). Opak platí v případě relativního nedostatku kapitálu. Kapitálový příjem by představoval produkt míry zisku krát množství kapitálu, které je využíváno (Solow, 1963).

Piero Sraffa upozornil, že existuje charakteristický problém měření při aplikaci neoklasického modelu hodnoty a distribuce příjmů, protože odhad míry zisku vyžaduje předchozí měření kapitálu. Problém spočívá v tom, že kapitál na rozdíl od práce nebo půdy, které lze redukovat na homogenní jednotky vyjádřené ve svých vlastních jednotkách (například hodin práce se stejnou dovedností a intenzitou nebo půdy se stejnou úrodností), je souborem různorodě vyráběných statků, které musí být sčítány tak, aby umožnily volbu technik minimalizujících náklady. Z různých alternativ si neoklasická teorie vybírá měření kapitálových statků ve formě hodnoty (součin fyzických jednotek krát jejich odpovídající ceny.) Joan Robinson a Piero Sraff tvrdili, že hodnotové měření kapitálu vyžaduje předchozí znalost rovnovážných cen, která zase vyžaduje rovnovážnou míru zisku, kterou nelze získat, pokud se nemůže zjistit hodnota kapitálu (Sraffa, 1960).

Paul Samuelson představil model založený na odvážném předpokladu, že kapitálová intenzita je stejná ve všech sektorech, což je ekvivalentem tvrzení, že existuje svět s jedinou komoditou. V takové ekonomice, když se mění distribuce příjmů, následná revalorizace kapitálu vede k výsledkům, které jsou naprosto v souladu s požadavky neoklasické teorie. Samuelson odvodil přímku představující hranici mezi mzdou a mírou zisku (zrcadlové zachycení konvexních izokvantových křivek), přičemž každá z nich představuje volbu techniky minimalizující náklady, což vedlo k dobře chovající se poptávce po kapitálu (Samuelson, 1966).

Samuelsonův předpoklad byl kvůli nedostatečné realističnosti napaden ekonomy z univerzity z Cambridge, kteří ukázali, že jakmile je předpoklad různé kapitálové intenzity mezi odvětvími, neoklasické výsledky nemusí nutně platit. Myšlenka spočívá v tom, že jak se mění relativní ceny, revalorizace kapitálu může jít jakýmkoli směrem a je možné, že odvětví, které je kapitálově náročné v jedné distribuci příjmů, se v jiné stane pracovně náročným. V důsledku toho již neplatí Samuelsonovi přímky mezi mzdou a mírou zisku. V přítomnosti mnoha kapitálových statků a různých kapitálových intenzit v průmyslových odvětvích nastává situace, že hranice mezi mzdou a mírou zisku nejsou lineární a mohou se vícekrát překřížit, což znamená, že pro nízkou míru zisku lze zvolit kapitálově náročnou techniku. S růstem míry zisku může být zvolena technika s nižší kapitálovou intenzitou a pro vyšší míru zisku je znovu zvolena původní technika s vyšší kapitálovou intenzitou. Je možné sledovat, že kapitálově náročná technika může být zvolena jak pro nízké, tak pro vysoké míry zisku, což je v rozporu s neoklasickou teorií hodnoty a distribuce příjmů. Za těchto okolností je nemožné určit rozumnou poptávku po kapitálu, a tak je celá neoklasická konstrukce zpochybňována (Solow, 1963).

Kritika kapitálové teorie neovlivňuje klasickou teorii hodnoty a distribuce, protože klasická teorie nepředpokládá, že relativní ceny faktorů výroby odrážejí relativní vzácnost, navíc tato teorie předpokládá jednu z distribučních proměnných, obvykle reálnou mzdu, jako údaj, který ve spojení s danou technologií a úrovní výroby určuje relativní rovnovážné ceny spolu s rovnovážnou mírou zisku. Navíc vyhodnocení různorodých kapitálových statků lze dosáhnout v pojmech hodnot práce, proto by mohl vzniknout problém konzistence, protože proměnné odhadnuté v pojmech hodnot práce budou odlišné od těch, které jsou odhadovány v pojmech rovnovážných cen. To je však především otázka empirická a empirický výzkum ukázal, že oba typy cen jsou blízko sebe a proměnné odhadované hodnotami práce nebo rovnovážnými cenami jsou přibližně rovny sobě (Shaikh & Tonak, 1994).

Nová generace ekonomů kapitálovou kontroverzi buď odmítá, nebo o ní vůbec neví. V důsledku toho neoklasický výzkum používá agregátní výrobní funkce, kde se kapitál stále používá spolu s prací při určování výstupu a marginální produkty těchto vstupů jsou odhadovány za předpokladu substituovatelnosti mezi faktory výroby, jako by kapitálová kontroverze nikdy neprobíhala. Ke konci dvacátého století byly podniknuty nové pokusy moderními klasickými ekonomy o obnovení klasického přístupu (Cohen & Harcourt, 2003).

Kapitálová kontroverze obnovila zájem o Marxovu ekonomii, přispěla k založení neo-Ricardské nebo Sraffianské ekonomie a inspirovala vývoj post-keynesiánské ekonomie. Byla to právě Sraffova kritika neoklasické teorie firmy a jeho kritika neoklasické teorie hodnoty, která výrazně ovlivnila Keynesovu Všeobecnou teorii zaměstnanosti, úroku a peněz (1936) (Cohen & Harcourt, 2003; Gechert et al., 2019).

2.2 Slabá a silná udržitelnost

Georgescu-Roegenův model toku finančního fondu

Georgescu-Roegenův model ekonomiky vzešel z jeho nespokojenosti s neoklasickou teorií výroby a také dle jeho názoru neuspokojivým modelem ekonomiky založeným na vstupu a výstupu, vyvinutým Wassilym Leontiefem. Georgescu-Roegen si uvědomil, že výrobu nelze dostatečně popsat pouze fyzickými zásobami a vybavením, jakožto materiály, stroji a dalšími prvky potřebnými k výrobě zboží a k poskytování služeb nebo pouze toky vstupů a výstupů. Tyto dva koncepty spojil a přidal nový koncept „fondu“ (Ayres, 1978; Daly, 1991; Faber & Proops, 1998).

V jeho modelu toku finančního fondu výroby je faktorem fondu buď pracovní síla, orná půda nebo umělý kapitál, který poskytuje užitečnou službu v libovolném okamžiku. ”Faktor zásob” označuje materiální nebo energetický vstup, který je k dispozici pro libovolné použití, zatímco ”faktor toku” je zásoba, která se postupně spotřebovává v průběhu času. Faktory fondu představují aktéry v ekonomickém procesu, kteří ovlivňují nebo s nimi pracují faktory toku. Na rozdíl od faktorů zásoby, fondový faktor nelze libovolně využívat, protože jeho míra využití závisí na specifických fyzikálních vlastnostech fondu. Například pracovní síla a orná půda mohou čelit riziku nadměrného využití a vyčerpání, pokud jim není poskytována adekvátní péče (Daly, 1991; Faber & Manstetten, 2013; Faber & Proops, 1998; Gowdy, 2005).

Přírodní zdroje procházejí ekonomikou a končí jako odpad a znečištění. Na rozdíl od neoklasické teorie výroby Georgescu-Roegen identifikuje přírodu jako výhradní primární zdroj všech výrobních faktorů. Podle prvního zákona termodynamiky hmota a energie nejsou v ekonomice vytvářeny ani ničeny (zásada zachování). Podle druhého zákona termodynamiky (zákona entropie) se v ekonomice veškerá hmota a energie transformují ze stavů dostupných pro lidské účely do stavů nedostupných pro lidské účely (zásada degradace). Tato transformace představuje jednosměrný a nevratný proces. Důsledkem toho cenné přírodní zdroje jsou získávány vstupem do ekonomiky, zdroje procházejí ekonomikou, jsou transformovány a vyráběny do produkce, bezcenný odpad a znečištění se nakonec hromadí na výstupu. Lidstvo existuje v symbióze s přírodou, zejména s respektem k ní, a zbytky své činnosti navrací zpět do přírody. Tímto způsobem se postupně zvyšuje entropie celého systému spojujícího přírodu a ekonomiku. Přítomnost toků přírodních zdrojů v Georgescu-Roegenově modelu výroby odlišuje tento model od modelů jak keynesiánské makroekonomie, tak od neoklasické ekonomie, stejně jako od klasické ekonomie. Pouze v ekologické ekonomii jsou toky přírodních zdrojů pozitivně uznávány jako platný teoretický základ pro ekonomické modelování a analýzu (Georgescu-Roegen, 1999).

Od 80. let 20. století pracuje mnoho ekonomů na modelu toku finančního fondu Georgescu-Roegenova. V roce 1992 představil Mario Morroni vývoj modelu toku finančního fondu pro aplikovanou analýzu. Tento model byl použit v některých případových studiích týkajících se textilního průmyslu, elektronických zařízení pro telekomunikační průmysl, obuvního průmyslu a oděvního průmyslu (Daly, 1991; Faber & Manstetten, 2013; Faber & Proops, 1998; Gowdy, 2005).

Kromě kritiky neoklasické produkce z důvodu reprezentace ekonomiky jako mechanického, uzavřeného systému, který nebere v potaz vyčerpání minerálních zdrojů na straně vstupů a hromadění odpadu a znečištění na straně výstupů, kritizoval Nicholas Georgescu-Roegen neoklasickou ekonomii ještě z jiného důvodu (Georgescu-Roegen, 1999).

Tvrdí, že neoklasická teorie selhává, jelikož se přiklání k ignorování nebo, v nejlepším případě, zkreslování problému, jak rozdělit vyčerpatelné minerální zdroje mezi současnými a budoucími generacemi. Georgescu-Roegen upozorňuje, že tržní mechanismy nabídky a poptávky systematicky nedokážou uspokojivě vyřešit problém mezigeneračního rozdělení, protože budoucí generace nejsou a nemohou být přítomny na dnešním trhu. Tato anomálie tržního mechanismu je popsaná jako "ekologické selhání trhu". Robert Solow a Joseph Stiglitz, hlavní oponenti tohoto názoru, tvrdí, že substituce lidského kapitálu za přírodní kapitál je možná. Díky tomu by se jakákoli obava o mezigenerační alokaci přírodních zdrojů měla ignorovat. Tento názor byl později označen jakožto „slabá udržitelnost“ (Georgescu-Roegen, 1999; Turner, 1993).

Georgescu-Roegen následně na tvrzení Roberta Solowa a Josepha Stiglitze konstatuje, že neoklasickým ekonomům obvykle chybí povědomí o důležitém rozdílu mezi materiálními a energetickými zdroji v ekonomickém procesu. Odkazuje se na svůj model produkce založený na toku, který byl již zmíněn výše. Georgescu-Roegen tvrdí, že pouze materiální zdroje mohou být přeměněny na lidský kapitál. Energetické zdroje se naopak nemohou přeměnit, protože je fyzicky nemožné přeměnit energii na hmotu, a hmota je právě to, z čeho se fyzicky skládá lidský kapitál. Energetické zdroje mohou pouze pomáhat (obvykle jako palivo nebo elektřina) v procesu přeměny materiálních zdrojů na lidský kapitál. V Georgescu-Roegenově vyjádření může energie mít podobu buď zásobního faktoru (minerální zásoby v přírodě) nebo tokového faktoru (zdroje přeměněné v ekonomice), nikdy však faktoru fondu (lidský kapitál v ekonomice). Proto je fyzicky nemožné nahrazovat lidský kapitál energetickými zdroji (Daly, 2005; Georgescu-Roegen, 1999).

Kromě toho všechny materiální zdroje nejsou přeměňovány na lidský kapitál. Některé materiální zdroje jsou přímo vyráběny na spotřební zboží s omezenou životností. Nakonec se časem všechen lidský kapitál opotřebovává a potřebuje nahrazení, ale jak starý, tak nový lidský kapitál je zpočátku vyroben z materiálních zdrojů. Obecně platí, že ekonomický proces je neustále více chaotický a myšlenka, že vše lze v neoklasické ekonomii univerzálně nahradit, jak tvrdí Georgescu-Roegen, není akceptovatelná (Georgescu-Roegen, 1999).

Na rozdíl od neoklasického postoje tvrdí Georgescu-Roegen, že tokové faktory a fondové faktory (přírodní zdroje a lidský kapitál) jsou v podstatě doplňkové, protože oba jsou potřeba v ekonomickém procesu pro fungující ekonomiku. Jeho závěr je tedy takový, že rozdělení vyčerpatelných minerálních zdrojů mezi současnými a budoucími generacemi je velkým problémem, který nemůže být uvolněn nebo ignorován. Tento postoj, včetně jeho kritiky neoklasické ekonomie, byl později označen jako "silná udržitelnost". Avšak Georgescu-Roegen jasně zamítal jakýkoli koncept udržitelného rozvoje jakožto pouhý pokus o oklamání veřejnosti. Ve svých pozdějších letech tento názor dokonce vehementně odmítal jakožto jeden z nejnebezpečnějších receptů pro lidstvo (Georgescu-Roegen, 1999).

2.3 Endogenita

Endogenita označuje stav, kdy je nějaká proměnná ovlivněna jinými proměnnými uvnitř daného systému. Endogenní proměnná je taková, která je determinována v rámci modelu, na rozdíl od exogenní proměnné, která je vně modelu a není ovlivňována ostatními proměnnými v modelu (Kawaguchi, 2022).

Pro ukázku endogenity poslouží model produkční funkce typu Cobb-Douglas. Tento model je často používán jako základní referenční model pro analýzy produkce. Model zobrazuje vztah mezi výstupem (Y), pracovní silou (L) a kapitálem (K) ve firmách (Kawaguchi, 2022). V tomto modelu existuje předpoklad, že výstup je funkcí pracovní síly a kapitálu s určitými parametry, které představují jejich vliv na produkci.

Model má následující podobu:

$$Y_{jt} = A_{jt} L_{jt}^{\beta_l} K_{jt}^{\beta_k} \tag{2.1}$$

kde: A_{jt} ... nezjištěná heterogenita specifická pro firmu j a časové období t

β_l a β_k ... parametry, které odrážejí elasticitu výstupu vzhledem k pracovní síle a kapitálu (Kawaguchi, 2022).

Endogenita je proměnná, jejíž hodnota je odvozena z dalších proměnných ve stejném modelu a není určena vnějšími faktory. V modelu ovlivňuje vstupy i výstup. Proměnná ϵ_{jt} zobrazuje nezjištěnou chybu. Takovou chybu, kterou nelze vysvětlit pozorovanými vstupy. Například mohlo být použito lepšího kapitálu, mohl být najmut pracovník s lepšíma dovednostma. Manažer firmy proto volí vstupy na základě neznámých faktorů, což způsobuje korelaci mezi chybou modelu (ϵ_{jt}) a pracovní silou. Statickou optimalizaci pracovní síly L_{jt} vzhledem k množství kapitálu K_{jt} a nezjištěné chybě ϵ_{jt} je možné vyjádřit následující rovnicí:

$$L_{jt} = \left[p_{jt} w_{jt}^{\beta_l} \exp(\beta_0) + \epsilon_{jt} K_{jt}^{\beta_k} \right]^{\frac{1}{1-\beta_l}} \tag{2.2}$$

Kde: L_{jt} ... množství pracovní síly v odvětví j a v čase t.

p_{jt} ... cena výrobku v odvětví j a v čase t.

w ... hodinová mzda pracovní síly.

K_{jt} ... množství kapitálu v odvětví j a v čase t.

β_l ... elasticita poptávky po práci.

β_k ... elasticita poptávky po kapitálu.

β_0 ... konstanta.

ϵ_{jt} ... nezjištěná chyba nebo náhodný šum.

Tato rovnice ukazuje, že pokud je chyba ϵ_{jt} vysoká, práce L_{jt} bude také vysoká, což může způsobit, že zvýšení výstupu způsobené chybou ϵ_{jt} bude zachyceno, jako kdyby bylo způsobeno zvýšením pracovní síly (Kawaguchi, 2022).

2.3.1 Selektivní zkreslení

Selektivní zkreslení vzniká v důsledku toho, že firmy s nízkou chybou ϵ_{jt} mají větší pravděpodobnost zůstat na trhu, zatímco ty s vysokou chybou ϵ_{jt} mají tendenci opustit trh. Existuje korelace mezi kapitálem firmy K_{jt} a chybou ϵ_{jt}, i když volba kapitálu sama o sobě není funkcí této chyby (Kawaguchi, 2022).

2.3.2 Řešení zkreslení endogenity

Panelová Data

Předpokládá se, že chyba ϵ_{jt} v našem modelu produkční funkce se skládá z dvou částí: μ_j a η_{jt}, přičemž η_{jt} není korelovaná s volbami vstupů a jejich změnami. Model se může napsat ve tvaru:

$$y_{jt} = \beta_0 + \beta_l l_{jt} + \beta_k k_{jt} + \mu_j + \eta_{jt} \tag{2.3}$$

Díky tomu je možné identifikovat parametry modelu, protože rozdíl $\eta_{jt} - \eta_{j,t-1}$ není korelovaný s rozdílem vstupů $l_{jt} - l_{j,t-1}$ nebo $k_{jt} - k_{j,t-1}$ (Kawaguchi, 2022).

Podmínka Prvního Řádu pro Vstupy

Firma dosahuje konstantních výnosů z rozsahu. Potom podmínka prvního řádu pro vstupy říká, že změna v produkci firmy způsobená změnou vstupů se bude rovnat poměrné změně vstupů. Jinými slovy, firma dosáhne konstantního poměru mezi změnou vstupů a změnou výstupu při různých úrovních výroby (Kawaguchi, 2022).

Instrumentální proměnné

Je vycházeno z předpokladu, že volby vstupů jsou ovlivněny některými exogenními proměnnými. Pokud tedy existují nástroje, které ovlivňují vstupy, ale jsou nezávislé na chybách ϵ_{jt}, je možné pomocí metody instrumentálních proměnných identifikovat parametry (Kawaguchi, 2022).

První možností mohou být ceny vstupů. Ceny vstupů ovlivňují rozhodování o vstupech. Ceny vstupů nejsou korelovány s ϵ_{jt}, pokud je trh s faktory konkurenční a ϵ_{jt} je zcela neočekávaným šokem pro firmu (Kawaguchi, 2022).

Další možností mohou být zpožděné vstupy. Pokud ϵ_{jt} nemá korelaci v čase, zpožděné vstupy nejsou korelovány se současnou nečekanou změnou. Pokud se vynaloží náklady na úpravu vstupů, pak je korelace mezi vstupy z minulosti a současnými vstupy (Kawaguchi, 2022).

Problémy první možnosti řešení:

Ceny vstupů často postrádají mezifiremní variabilitu.

Mezifiremní variabilita je často způsobena nepozorovanou kvalitou vstupů.

Problém řešení se zpožděnými vstupy:

Pokud ϵ_{jt} má korealci v čase, jsou všechny zpožděné vstupy korelovány s chybami: Například pokud je ϵ_{jt} AR(1), pak $\epsilon_{jt} = \alpha\epsilon_{j,t-1} + \nu_{j,t-1} = \cdots \alpha^l \epsilon_{j,t-l} + \nu_{j,t-1} + \cdots, \alpha^{l-1}\nu_{j,t-l}$ pro libovolné l. α v modelu značí Koeficient autoregrese (AR), který určuje, jak moc je aktuální chyba závislá na minulých chybách. $\nu_{j,t-1}$ je minulá chyba nebo náhodný šum v odvětví j a v předchozím čase $t-1$ (Kawaguchi, 2022).

Přístup Olley-Pakes

Vychází se z ekonomické teorie omezení z knihy Olley & Pakes, 1996. Je definováno: $\epsilon_{jt} = \omega_{jt} + \eta_{jt}$, kde ω_{jt} je předpokládaný, budoucí šok a η_{jt} je naopak šok, který již nastal a je hodnocen retrospektivně. Vstupy jsou korelovány s ω_{jt}, ale nejsou s η_{jt} (Kawaguchi, 2022).

Model je vyjádřen jako:

$$y_{jt} = \beta_0 + \beta_l l_{jt} + \beta_k k_{jt} + \omega_{jt} + \eta_{jt} \tag{2.4}$$

Přístup využívá ekonomickou teorii k nalezení vhodné náhrady pro očekávaný šok ω_{jt} (Kawaguchi, 2022).

3 Diagnostické nástroje

3.1 Testování heteroskedasticity

Heteroskedasticita je statistický termín označující nestandardní rozptyl reziduí v regresní analýze. Jinými slovy, heteroskedasticita znamená, že rozptyl chyb (reziduí) v regresním modelu se mění v závislosti na hodnotách nezávislých proměnných. Tento jev je často problematický, protože standardní metody odhadu parametrů v regresní analýze předpokládají konstantní rozptyl reziduí (Hušek, 2009).

Testování bude provedeno grafickým zobrazením reziduí proti pozorovaným hodnotám. Pokud je rozptyl reziduí konstantní při různých hodnotách pozorovaných proměnných, pak bodový graf reziduí proti pozorovaným hodnotám bude mít náhodné rozptýlení bodů kolem horizontální osy bez zjevného trendu nebo šíření směrem k určité oblasti a jedná se o homoskedasticitu (Hušek, 2009).

Pokud se rozptyl reziduí mění s hodnotami pozorovaných proměnných, pak bodový graf reziduí může ukázat nějaký vzor, jako je například postupné zvětšování nebo zmenšování rozptylu směrem k určitému směru na grafu. To může způsobit, že přímka regrese bude vykazovat nerovnoměrné rozložení reziduí kolem ní, což naznačuje heteroskedasticitu (Hušek, 2009).

Další testování bude provedeno pomocí Breusch-Paganovo testu statistiky. Bude využito balíčku lmtest a funkce bptest v R. Tento test je definován jako:

$$BP = n \cdot R^2 \tag{3.1}$$

kde: n ... počet pozorování

R^2 ... koeficient determinace z regrese reziduí kvadratické regrese na vysvětlující proměnné.

Nulová hypotéza testu je, že chyby jsou homoskedastické (nezávislé na vysvětlujících proměnných), zatímco alternativní hypotéza je, že chyby jsou heteroskedastické (závisí na vysvětlujících proměnných).

Kritická hodnota pro testování se často určuje pomocí chi-kvadrát rozdělení s k stupni volnosti, kde k je počet vysvětlujících proměnných ve sledovaném modelu.

Pokud je p-hodnota testu menší než určená hladina významnosti (např. 0.05), je zamítnuta nulová hypotéza a dochází se k závěru, že rezidua jsou heteroskedastická (Hušek, 2009).

3.2 Testování autokorelace reziduí

Autokorelace reziduí, také nazývaná jako sériová korelace, je statistický jev, kdy se hodnoty reziduí regresního modelu korelují s předchozími hodnotami reziduí. Jinými slovy, pokud existuje autokorelace reziduí, znamená to, že chyby modelu v jednom časovém bodě jsou korelovány s chybami v předchozích časových bodech (Iastat, 2021).

Autokorelace může být problematická, protože porušuje předpoklad o nekorelovaných reziduích regresního modelu. To může vést k nepřesným odhadům parametrů modelu, nesprávným intervalům spolehlivosti a zkresleným hodnotám p-hodnot významnosti regresních koeficientů (Iastat, 2021).

Durbin-Watsonův test je jedním z testů na autokorelaci reziduí. V Rku existuje funkce durbinWatsonTest() z balíčku lmtest. Hodnoty se pohybují v rozmezí mezi 0 - 4 (Iastat, 2021).

Hodnota blíže k 0 naznačuje pozitivní autokorelaci (sousední rezidua jsou kladně korelována). Hodnota blíže k 4 naznačuje negativní autokorelaci (sousední rezidua jsou záporně korelována). Hodnota 2 znamená, že neexistuje žádná autokorelace mezi rezidui, což značí ideální stav. Durbin-Watson test lze zapsat následovně:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \tag{3.2}$$

Kde: e_t ... rezidua v čase t,

n ... počet pozorování,

DW ... testovací statistika Durbin-Watson.

3.3 Testování normality reziduí

Normalita reziduí znamená, že rezidua regresního modelu jsou distribuována podle normálního rozdělení. Residua jsou rozdíly mezi pozorovanými hodnotami a hodnotami predikovanými modelem. Pokud jsou rezidua normálně distribuovaná, znamená to, že chyby modelu jsou náhodné a nejsou ovlivněny žádnými systematickými chybami nebo vzory. Díky tomu je větší jistota, že regresní model popisuje data správně a že odhadnuté parametry modelu jsou spolehlivé. V opačném případě může model zobrazovat systematické chyby nebo může být model nevhodný pro zobrazení daných dat (Hušek, 2009).

Shapiro-Wilk test je jedním z testů na normalitu reziduí. V Rku se používá funkce shapiro.test(). Shapiro-Wilk test je možné vyjádřit následovně:

$$H_0 : \text{Rezidua pocházejí z normálního rozdělení}$$

$$H_1 : \text{Rezidua nejsou z normálního rozdělení}$$

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3.3}$$

Kde: W ... statistika testu Shapiro-Wilk,

$x_{(i)}$ ... pořadové statistiky,

x_i ... hodnoty reziduí,

$\bar{x}$ ... průměr reziduí,

a_i ... konstanty.

Pokud p-hodnota testu je vyšší než 0,05, nezamítá se nulová hypotéza a předpokládá se, že rezidua jsou normálně distribuovaná (Hušek, 2009).

3.4 Testování multikolinearity

Multikolinearita znamená, že ve statistickém modelu existuje vysoká korelace mezi dvěma nebo více nezávislými proměnnými. To znamená, že tyto proměnné jsou lineárně závislé na sobě navzájem, což může vést k problémům při odhadu parametrů modelu (Hušek, 2009).

Jakožto hlavní důsledky multikolinearity je možné jmenovat níže zmíněné, nevěrohodné odhady parametrů. Multikolinearita může vést k velkým standardním chybám odhadů parametrů, což znamená, že odhady mohou být nepřesné a mohou vést k chybným závěrům o vztazích mezi proměnnými (Hušek, 2009).

Nadměrná citlivost modelu. Malé změny ve vstupních datech mohou mít výrazný vliv na odhady parametrů, což může vést k nestabilitě modelu.

Multikolinearita může znemožnit určení přesné příčinné vztahy mezi proměnnými, protože je obtížné odlišit jejich individuální vlivy na vysvětlovanou proměnnou (Hušek, 2009).

Matice korelace je tabulka, která zobrazuje míru lineárního vztahu mezi páry proměnných v datasetu. Každý prvek v této matici je hodnota korelace mezi dvěma proměnnými. Pokud jsou dvě proměnné silně pozitivně korelované, hodnota korelace je blíž k 1. Pokud jsou proměnné negativně korelované, je hodnota blíž k -1. Hodnota 0 znamená, že mezi proměnnými není žádný lineární vztah (Hušek, 2009).

V tomto případě bude multikolinearita testována pomocí matice korelace mezi nezávislými proměnnými. Při této analýze je důležité hledat vysoké hodnoty korelace, které mohou naznačovat přítomnost multikolinearity. Identifikace těchto problémů v modelu je důležitá pro správnou interpretaci výsledků a případné úpravy modelu pro zlepšení jeho přesnosti a spolehlivosti. Pro vytvoření matice korelace v jazyce R bude použita funkce cor() (Hušek, 2009).

4 Modelování produkčních funkcí

V předchozích částech byly popsané teoretické základy, které nyní budou využity k praktické aplikaci získaných poznatků. Naším cílem bude modelovat produkční funkce ve formách uvedených v první kapitole - Cobb-Douglas produkční funkce, CES produkční funkce, VES produkční funkce. Ostatní funkce zmíněné v první kapitole nebudou použity z toho důvodu, že tyto modely nejsou schopny zachytit složitost a dynamiku produkčního procesu v takovém rozsahu, jaký jsou pro naše data potřebný.

Modely budou zobrazovat několik vybraných zemí, pro které bylo možné najít všechna potřebná data. Výsledkem bude získání více tvarů agregátních produkčních funkcí.

Pro modelování produkčních funkcí je zvolen programovací jazyk R. Jedná se o programovací jazyk a prostředí určené pro statistickou analýzu dat a jejich grafické zobrazení. Jde o implementaci programovacího jazyka S pod svobodnou licencí. Součástí diplomové práce jsou také vytvořené zdrojové a datové soubory. Jejich detailní popis se nachází v Příloze A.

4.1 Použitá data

První podkapitola se věnuje ekonomickým datům, která jsou nezbytná pro samotnou analýzu. Veškeré data byla převzata ze stránek Statistického úřadu Evropské unie. Bylo nutné najít průnik dat pro všechny země. Ačkoliv se autorka snažila o maximalizaci počtu pozorování, byla z tohoto důvodu vybrána pouze roční data a to v období od roku 2011 do roku 2021, což dává celkem 11 pozorování. Tento rozsah představuje nejdelší časové období, ve kterém byly známy všechny sledované veličiny. Po procesu výběru společných hodnot bylo vybráno 27 zemí, které se budou následně zkoumat. Jedná se o: Rakousko, Belgii, Bulharsko, Chorvatsko, Kypr, Česko, Dánsko, Estonsko, Finsko, Francii, Německo, Řecko, Maďarsko, Irsko, Itálii, Lotyšsko, Litvu, Lucembursko, Maltu, Nizozemsko, Polsko, Portugalsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko, Španělsko, Švédsko.

Závislé a nezávislé proměnné prošly procesem normalizace, konkrétně přeškálováním. To znamená, že každá veličina byla vydělena její směrodatnou odchylkou. Tím bylo dosaženo toho, že nebude záležet na jednotkách měření jednotlivých veličin. Normalizace dat byla provedena také s cílem vyjádřit všechny proměnné v jednotných jednotkách směrodatných odchylek, což umožňuje přesně porovnat vliv jednotlivých proměnných na výstup a lépe porozumět jejich relativnímu přínosu v produkčním procesu. A posledním důležitým bodem je fakt, že normalizace umožňuje srovnání produkčních funkcí mezi různými státy, aniž by byla ovlivněna jejich velikostí. Tím se získává lepší přehled o relativní produktivitě a výkonnosti jednotlivých ekonomik. Nyní nastává volba vhodných reprezentantů daných proměnných (Fašanek, 2010).

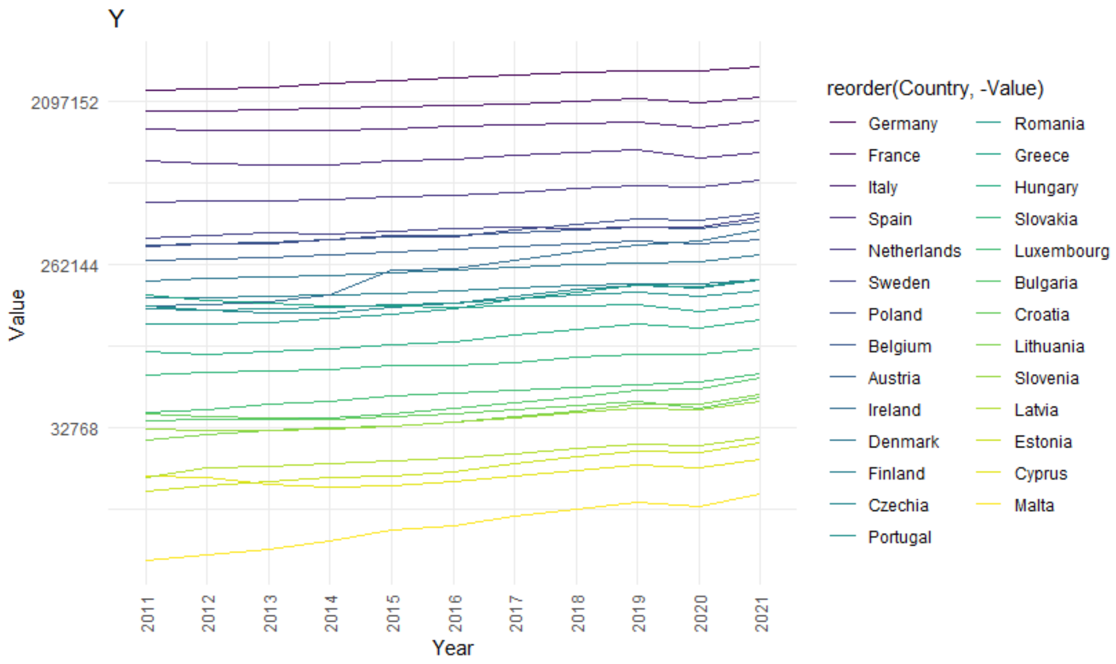
4.1.1 Výstup

Jako ukazatel výstupu Y byla zvolena veličina hrubá přidaná hodnota (GVA). K výpočtu byla vybrána celková data (ze všech sektorů) v jednotkách měření na milion euro. Jde o ekonomický ukazatel, který měří hodnotu, kterou přidávají podniky nebo odvětví k vstupním faktorům při výrobě statků a služeb. Tento ukazatel je získán odečtením nákladů na vstupy (mzdy, materiál, energie) od hodnoty výstupů (výnosy ze zprostředkovaného prodeje statků a služeb). Je to důležitý ukazatel ekonomické aktivity a produktivity jednotlivých průmyslových odvětví, regionů nebo celých ekonomik. Vybrané hodnoty jsou již očištěny od inflačního vlivu (Wikipedia, 2024).

Další veličina, která přicházela v úvahu, byl hrubý domácí produkt, který měří celkovou hodnotu všech finálních statků a služeb vyprodukovaných v rámci hranic daného státu za určité období.

Použití ukazatele GVA místo hrubého domácího produktu má několik výhod v makroekonomické analýze produkčních funkcí. Hrubý domácí produkt zahrnuje hodnotu všech finálních statků a služeb vyprodukovaných v ekonomice, zatímco GVA měří pouze přidanou hodnotu vytvořenou. Tím se zabrání dvojímu počítání hodnoty, což může vést k přesnější analýze ekonomické aktivity. GVA měří přidanou hodnotu vytvořenou v procesu výroby. To umožňuje lépe porozumět vztahu mezi vstupy a výstupy a poskytuje lepší základ pro tvorbu produktivních funkcí a analýzu efektivnosti výroby. Následující obrázek ukazuje vývoj produkce jednotlivých zemí se seřazeným popisem podle celkové hodnoty.

Obrázek 2: Vývoj produkce jednotlivých zemí



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Z obrázku je jasně vidět, že Německo předstihlo ostatní státy. Je to způsobeno tím, že Německo má vzdělanou pracovní sílu s potřebnými dovednostmi, investují do výzkumu a vývoje nových technologií a produktů a mají silný výrobní sektor. Kromě toho Německo těží z efektivních pracovních dob a nízké nezaměstnanosti.

Naopak nejhůře se v grafu umístila Malta. Malta má malou ekonomiku a je závislá na obchodu a cestovním ruchu, což jí činí zranitelnou a pracovníci nemají takové vzdělání a dovednosti jako v jiných zemích.

4.1.2 Kapitál

Najít vhodnou veličinu pro kapitál již nebylo tak jednoduché. Kapitál v produkční funkci zahrnuje veškeré materiální a nehmotné prostředky, které stát vlastní a využívá je k produkci zboží a služeb. Mezi kapitálová aktiva patří například budovy, stroje, zařízení, technologické know-how, patenty a další investice do dlouhodobých aktiv. Byla proto vybrána hodnota celková hmotná aktiva (čistá), která označuje celkovou hodnotu dlouhodobých hmotných aktiv po odečtení jejich akumulovaného odpisu či amortizace a v jednotkách měření na milion euro. Tato hodnota zahrnuje veškerá hmotná aktiva, která stát vlastní a využívá k provozu své činnosti a jsou určena k dlouhodobému použití.

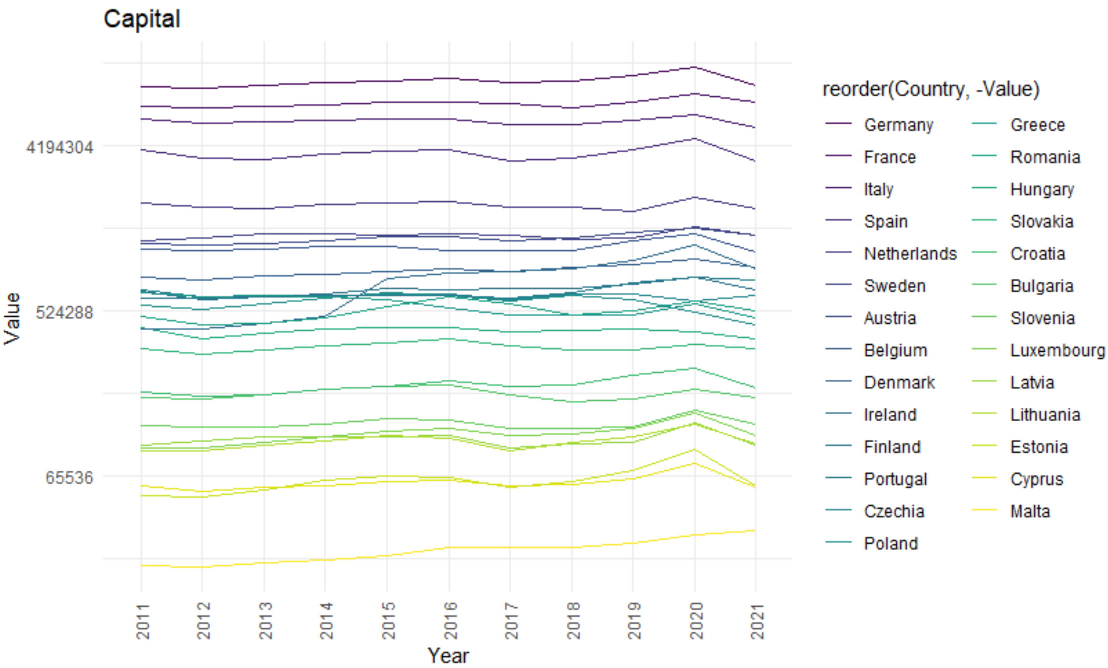
Do výpočtu produkční funkce by měly být zahrnuty reálné hodnoty kapitálu, nikoli pouze nominální. Důvodem je eliminace vlivu inflace na výsledky analýzy a zachování konzistence v hodnocení produktivity kapitálu v různých obdobích. Obyčejná celková hmotná aktiva (čistá) nezohledňují změny v cenách fixního kapitálu v průběhu času. To znamená, že pokud by se použily pouze tyto hodnoty v produkční funkci, změny v cenách by ovlivnily výsledky a vedly by ke zkreslení interpretace. Proto je vhodné tuto hodnotu očistit přes Harmonised Index of Consumer Prices (HICP). Očištění přes HICP umožňuje přizpůsobit hodnotu aktiv inflaci a zachovat tak reálnou hodnotu kapitálu v produkční funkci v čase. HICP je ukazatel inflace, který se používá k měření změn cen zboží a služeb, které spotřebitelé běžně kupují. Je navržen tak, aby poskytoval srovnatelné informace o inflaci napříč různými zeměmi Evropské unie. Jelikož data o HICP jsou zobrazeny jako procentuální změna ve srovnání s předchozím rokem, bude pro očištění hodnoty využit vzorec, který bere v úvahu inflaci a čistou hodnotu celkových hmotných aktiv:

$$\text{Kapitál} = \frac{\text{Celková hmotná aktiva (čistá)}}{(1 + \text{HICP})^n} \tag{4.1}$$

kde: n ... počet let, pro které jsou data očištěna.

Následující graf zobrazuje již očištěné hodnoty celková hmotná aktiva (čistá) pro jednotlivé země v jednotlivých letech. Vývoj a pořadí států v grafu je velmi podobné jako v grafu produkce. To naznačuje správnost dat. Je patrné, že na prvním místě se opět umístilo Německo. Německo v posledních letech investovalo do infrastruktury, jako jsou silnice, železnice a telekomunikace, a pak také do technologií, jako je automatizace a robotika.

Obrázek 3: Vývoj kapitálu jednotlivých zemí



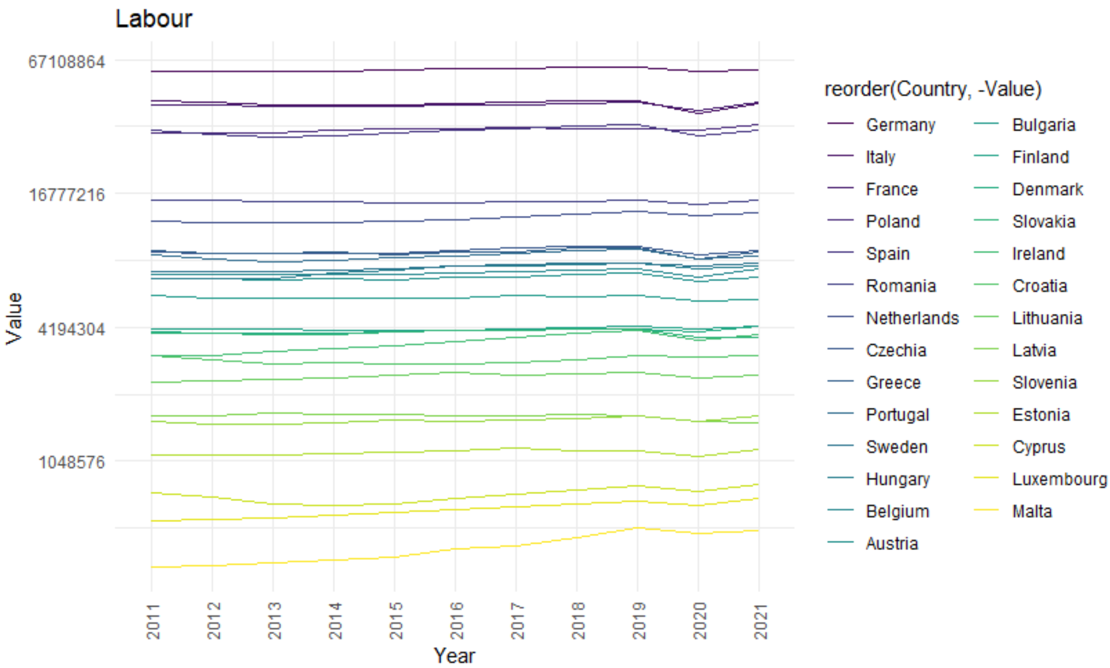
Zdroj: vlastní zpracování (2024)

4.1.3 Práce

Vhodná hodnota pro práci byla prakticky jasná. Práce je chápána jako jedna ze vstupních proměnných, která odráží lidskou pracovní sílu využívanou k výrobě zboží nebo poskytování služeb. Proto byla vybrána data o zaměstnanosti, které zobrazují informace o počtu osob zaměstnaných v ekonomice v určitém časovém období.

Byla vybrána kompletní data (ze všech hospodářských aktivit) v jednotce měření na tisíce odpracovaných hodin. Graf zobrazuje vývoj zaměstnanosti v jednotlivých zemích. V grafu je vidět pokles v roce 2020, který bude pravděpodobně způsoben covid-19 restrikcemi, které znemožnily stejnou zaměstnanost jako doposud. Na prvním místě se opět drží Německo a na posledním Malta.

Obrázek 4: Vývoj práce jednotlivých zemí



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

4.1.4 Technologický pokrok

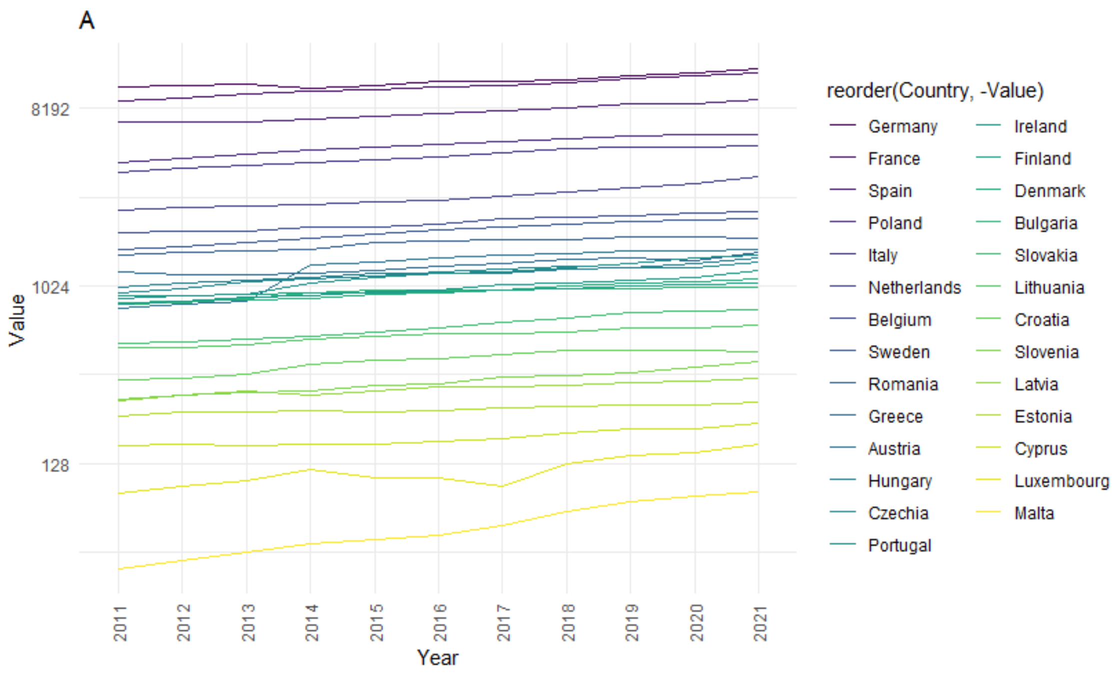
Ve výpočtech je důležité brát v úvahu technologický pokrok, který může ovlivnit výsledky. Proto bylo zapotřebí zvolit vhodnou kladnou hodnotu pro tuto proměnnou. Parametr A představuje míru technologického pokroku, která má vliv na ekonomické ukazatele. Pro tento parametr byla vybrána data o zaměstnanosti, která jsou rozdělena podle úrovně vzdělání. Konkrétně se jedná o skupinu s nejvyšším stupněm vzdělání (úroveň 5-8), která zahrnuje osoby ve věku 20 až 64 let. Tato data jsou vyjádřena v jednotkách tisíc lidí, což umožňuje přesnější a srovnatelnější analýzu.

Skupina s nejvyšším stupněm vzdělání (úroveň 5-8) obvykle zahrnuje lidi s vysokoškolským vzděláním nebo ekvivalentní kvalifikací. Tito lidé mají obvykle rozsáhlejší a specializovanější znalosti a dovednosti, které mohou mít vliv na technologický pokrok a ekonomický růst.

Kladné hodnoty parametrů zajišťují, že zvyšování vstupů (kapitálu a práce) povede k růstu produkce. Pokud by některý z parametrů byl záporný, znamenalo by to, že zvýšení vstupů by vedlo ke snížení produkce, což je v rozporu s ekonomickou logikou a realitou.

V grafu níže je možné sledovat opět stejný trend. Na prvním místě se nachází Německo, na posledním Malta.

Obrázek 5: Vývoj technologického pokroku jednotlivých zemí



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

4.2 Model Cobb-Douglas

V této části se budou odhadovat a interpretovat parametry pro případ Cobb-Douglasovy produkční funkce. Na základě našich odhadů se může například zjistit, jaké výnosy z rozsahu převládají v jednotlivých zemích a jak se vyvíjela hranice substituce. Nejprve se však zohlední model, ze kterého se vycházelo.

$$Q = f(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \tag{4.2}$$

kde: Q ... produkce (výstup),

A ... proměnná, která reprezentuje celkovou produktivitu a technologický pokrok,

L ... množství práce (pracovní síly),

K ... množství kapitálu,

α a β ... konstanty, které určují, jak se vstupy kombinují k vytvoření výstupu.

4.2.1 Výpočet základních proměnných

Z modelu je jasné, že chybí konstanty α a β, které je nutné vypočítat. Jejich výpočet bude proveden regresní analýzou, kde budou použity logaritmované normalizované hodnoty. Logaritmovaní může pomoci stabilizovat variabilitu dat. Pokud jsou rozptyly dat neúměrně velké vzhledem k průměru, může logaritmování pomoci vytvořit rovnoměrnější variabilitu a přispět k normalizaci rozložení proměnných (Behr, 2015).

Po logaritmování základní rovnice je vidět tvar regresního vztahu, ze kterého se bude vycházet při ekonometrické analýze:

$$\ln Y_i = \ln A + \alpha \cdot \ln K_i + \beta \cdot \ln L_i \tag{4.3}$$

Pro samotný výpočet regresní analýzy byla použita regresní metoda pro výpočet nelineárních modelů, byla ovšem aplikována nad zmíněným lineárním modelem z 4.3. Pro potřeby použité regresní metody bylo nutno omezit hledaný interval alfa a beta, což funkce pro lineární modely nedovolovala. Vzhledem k informacím v teoretické části je patrné, že by se součet koeficientů alpha a beta měl pohybovat kolem hodnoty 1. Koeficienty musí být větší než 0 a menší než 1. Výsledné hodnoty součtu alpha a beta odráží výnosy z rozsahu pro dané země.

4.2.2 Výpočet elasticity vstupů na výstup

Elasticitu je možné vypočítat jako poměr procentuální změny výstupu ke procentuální změně daného vstupu. V případě Cobb-Douglas se elasticita vypočte následovně:

Elasticita kapitálu

$$\eta_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \cdot \frac{Y}{K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \tag{4.4}$$

Elasticita práce

$$\eta_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \beta \cdot \frac{Y}{L} \cdot \frac{L}{Y} = \beta \tag{4.5}$$

V tomto kontextu jsou elasticitami přímo hodnoty parametrů α a β produkční funkce.

4.2.3 Výpočet MRS

Z produkční funkce Cobb-Douglas je možné zjistit i hodnotu MRS, která udává, jakým poměrem jsou jednotlivé vstupy (práce a kapitál) substituovány tak, aby výstup zůstal konstantní. Pro Cobb-Douglas produkční funkci je možné vztah zapsat jako (Fašanek, 2010):

$$MRS_{K,L} = \frac{\partial Y}{\partial K} \div \frac{\partial Y}{\partial L} \tag{4.6}$$

Parciální derivace výrobní funkce Cobb-Douglas jsou odvozeny podle vstupů kapitálu (K) a práce (L) a jsou definovány jako:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot \frac{Y}{K} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \cdot \frac{Y}{L} \tag{4.8}$$

Podle definice MRS je možné použít parciální derivace k výpočtu. Když se dosadí parciální derivace do definice MRS, vychází:

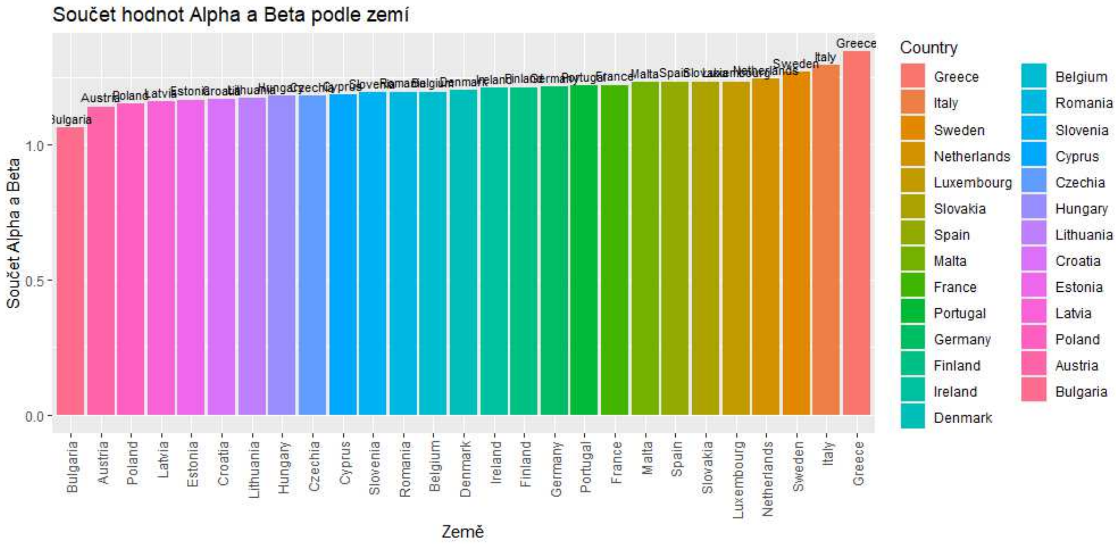
$$MRS_{K,L} = \frac{\alpha \cdot \frac{Y}{K}}{\beta \cdot \frac{Y}{L}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L} \tag{4.9}$$

4.2.4 Výsledky

4.2.4.1 Výsledek alpha a beta

Graf hodnot součtu alpha a beta. Data jsou normalizovaná, aby se eliminoval vliv velikosti zemí. Z grafu je možné vyčíst, že hodnoty se liší s porovnáním vstupních dat. Nejvyšší hodnoty ve vstupních datech dosahovalo Německo a nejnižších hodnot naopak Malta. Zde se ale na opačných koncích spektra nachází Řecko a Bulharsko.

Obrázek 6: Součet hodnot alpha + beta



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

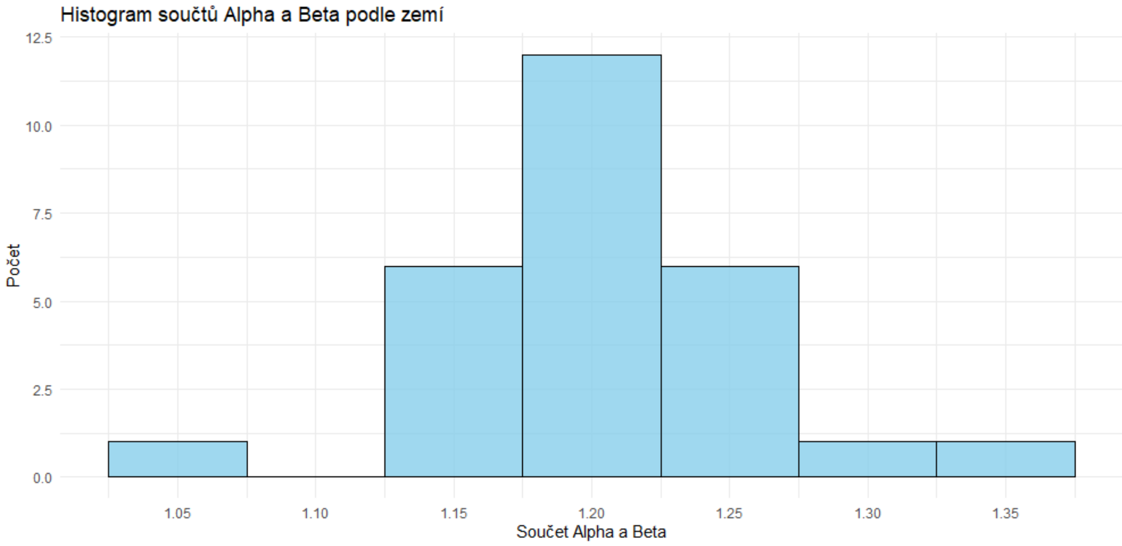
Tento výsledek je patrně způsoben normalizací dat. Řecko má oproti Německu menší rozlohu a především mnohem menší počet obyvatel. To způsobilo onen posun státu a nejvyšší hodnoty alpha + beta.

Bulharsko má na druhou stranu mnohonásobně větší rozlohu i počet obyvatel, než Malta. Vstupní hodnoty sice mělo Bulharsko vyšší, ovšem rozdíl zas nebyl tak velký oproti Maltě. Je tedy pochopitelné, že Malta se dostala v grafu výš, zatím co Bulharsko kleslo na nejnižší příčku.

Celkově mají jižní státy dobré výsledky. Může to být způsobeno tím, že je krize a špatné podmínky donutili k austeriornímu šetření státních prostředků a zodpovědné státní politice.

Z histogramu součtu hodnot alpha + beta zobrazeného na další straně, je možné pozorovat, že nejvíce zemí nabývá hodnoty alpha + beta kolem 1.2. Tato hodnota vyjadřuje míru, jakým kombinovaný efekt kapitálu a práce přispívá k růstu výnosů z rozsahu. V tomto případě každá jednotková změna v kapitálu a práci vede k nárůstu výstupu o 1.2 jednotky. Lze tedy interpretovat, že dochází k rostoucím výnosům z rozsahu.

Obrázek 7: Histogram hodnot alpha + beta



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Rostoucí výnosy z rozsahu naznačují, že při dalším zvětšování množství vstupu (kapitálu a práce) se zvyšuje produkce v poměrně vyšším tempu než předchozí zvětšení vstupu. To indikuje zlepšující se efektivitu využití výrobních zdrojů nebo dosažení bodu, kde nárůst výstupu převyšuje nárůst vstupu. Tento trend může být důsledkem optimálního výběru vstupních parametrů.

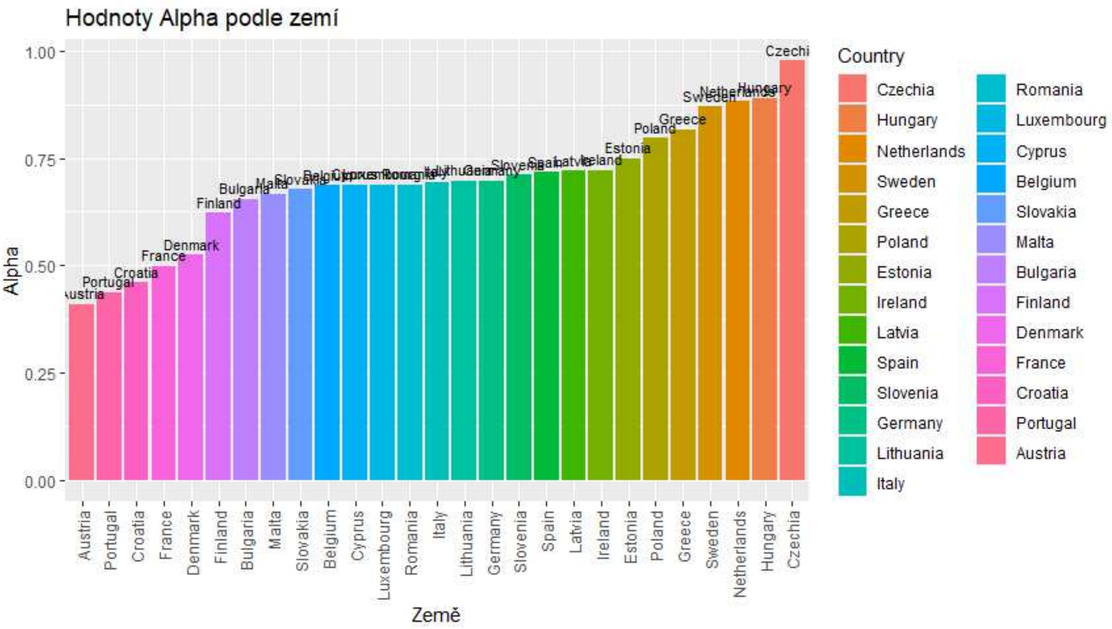
4.2.4.2 Výsledek elasticity vstupů na výstup

Elasticita kapitálu

Je vycházeno z funkčního vztahu vysvětleného výše. Elasticita kapitálu je zobrazena v parametru alpha. Elasticita kapitálu je míra, která měří, jak citlivě reaguje výstup (například produkce) na změnu kapitálu. Konkrétně vyjadřuje procentuální změnu výstupu v reakci na jednotkovou procentuální změnu kapitálu.

V našem případě hodnota alpha nabývá hodnot od 0.1 do 0.9, což naznačuje, že změna kapitálu má menší procentuální dopad na výstup, což znamená, že produkce je kapitálem neelastická. Graf je na další stránce.

Obrázek 8: Alpha



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

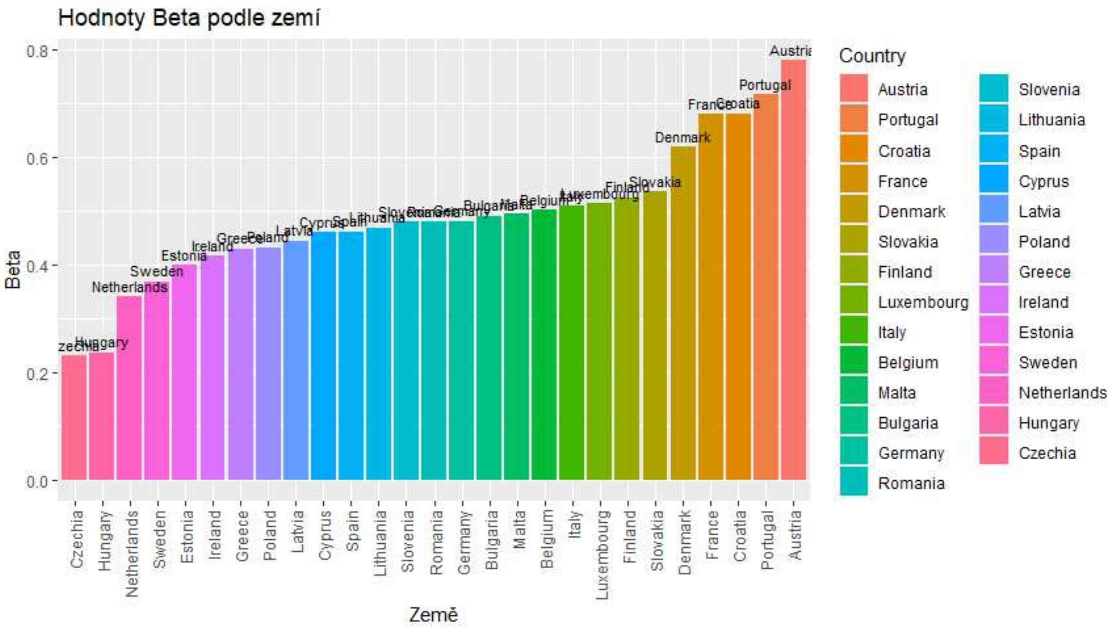
V praxi to znamená, že pokud je hodnota alpha (elasticity kapitálu) hodnota například v našem nejčastějším případě 0.65, tak produkce reaguje na změny kapitálu méně než proporcionálně. Pokud kapitál vzroste o 1 procento, pak produkce vzroste přibližně o 0.65 procent.

Výrazně nižší hodnoty nabývá Rakousko. Nízké hodnoty značí velice nízké reakce na změny v množství kapitálu. Naopak nejvyšší hodnotu má Česko, kde změny v kapitálu mají nejvyšší dopad na produkci.

Elasticita práce

Elasticita práce je zobrazena v parametru beta. Elasticita práce je míra, která vyjadřuje, jakým způsobem se mění výstup v reakci na změny v množství práce, které je v procesu výroby využíváno. Vyšší hodnoty elasticity práce naznačují, že změny v počtu pracovníků mají výraznější dopad na produkci nebo mzdy, zatímco nižší hodnoty naznačují menší reakci na změny v množství práce.

Obrázek 9: Beta



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

V grafu výše je možné vidět, že hodnoty beta nabývají hodnot od 0.25 do 1, což znamená, že produkce je kapitálem neelastická. Pouze v případě Rakouska se jedná o případ, kdy je produkce kapitálem elastická.

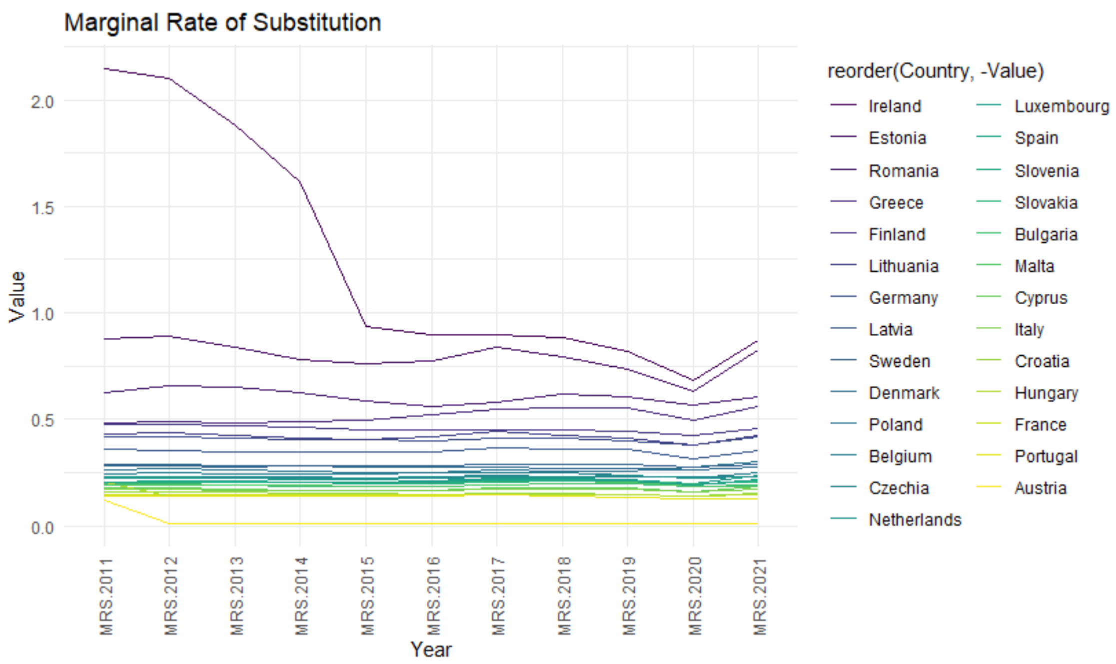
Obecně platí, že pokud je hodnota beta (elasticita práce) hodnota například 0.5, tak produkce reaguje na změnu práce méně než proporcionálně. Pokud práce vzroste o 1 procento, pak produkce vzroste přibližně o 0.5 procent.

Následující graf na další straně zobrazuje výsledky vývoje MRS seřazené dle úrovně jednotlivých zemí.

Na výpočet práce a kaptiálu byly využity normalizované, zlogaritmované hodnoty. Vzhledem k tomu, že hodnoty alpha i beta vyšly kolem jedné, bylo zřejmé, že hodnoty MRS vyjdou v relativně nízkých hodnotách. Ve všech zemích je produkce méně citlivá na změny v množství použité práce a kapitálu. Pouze v Irsku v prvních letech byla překročena hodnota 1. Kombinace faktorů práce a kapitálu, kterou tyto země využívají, není příliš flexibilní a nelze je snadno nahradit nebo změnit. To vede k nižší elasticitě práce a kapitálu a celkově nižší účinnosti ve využívání těchto vstupů k produkci. To platí především pro Rakousko, které má nejnižší hodnotu.

4.2.4.3 Výsledek MRS

Obrázek 10: Graf vývoje MRS



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Nízké hodnoty MRS, zejména pokud klesají v průběhu času, mohou naznačovat, že míra substituce mezi prací a kapitálem se snižuje. To znamená, že země se stávají méně schopnými nahradit práci kapitálem nebo naopak, což může být způsobeno například technologickými omezeními, nedostatkem investic do výzkumu a vývoje nebo specifickými charakteristikami trhu práce. To je patrné především v roce 2020, z již vysvětlených důvodů. V grafu je možné sledovat, že na prvním místě se nachází Irsko, které má i relativně vysokou hodnotu alpha a beta.

Hodnota MRS 0.3 v tomto případě indikuje, že v daném bodě produkční funkce je společnost ochotna nahradit 0.3 jednotky jednoho vstupu (například práce) za jednu jednotku druhého vstupu (například kapitálu), aby udržela konstantní úroveň produkce. Výrazný pokles MRS v Irsku v průběhu let by mohl být způsoben specializací Irska na výrobu produktů, které vyžadují převážně jeden druh vstupu. To by snížilo potřebu substituce mezi vstupy. Dalším faktorem by bylo, pokud by některé zdroje začaly být omezené nebo nedostupné. Irsko je navíc velice specifický stát. Je v něm spousta cizích firem a funguje trochu jako daňový ráj. Má dobré zázemí a nachází se vedle Anglie. Propad mohl způsobit i Brexit.

4.2.4.4 Diagnostické nástroje

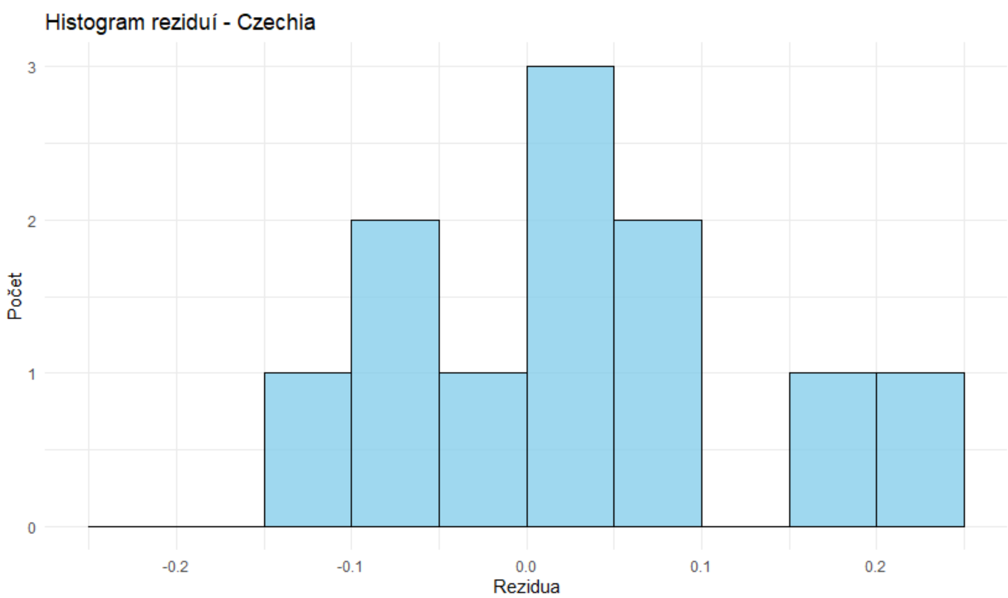
Nyní je nutné vyhodnotit výsledky dle výše zmíněných diagnostických nástrojů, které nám ověří správnost modelu.

Test homoskedasticity

Výsledek testu Breusch-Pagan ukazuje, že p-hodnota je 0.106, což je vyšší než konvenční hladina významnosti 0.05. To znamená, že není dostatek důkazů pro odmítnutí nulové hypotézy o homoskedasticitě (konstantní variabilitě reziduí) na úrovni 5 procentní významnosti. Tento výsledek naznačuje, že není důvod předpokládat, že rozptyl reziduí se mění s rostoucími hodnotami vysvětlujících proměnných kapitálu a práce. Je tedy pravděpodobné, že rezidua mají konstantní rozptyl, což je předpoklad běžných lineárních regresních modelů.

Kvůli rozsahu práce bude vložena ukázka histogramu reziduí pouze pro Českou republiku a následně kompletní histogram všech reziduí všech zemí. Následující graf zobrazuje histogram reziduí pro Českou republiku.

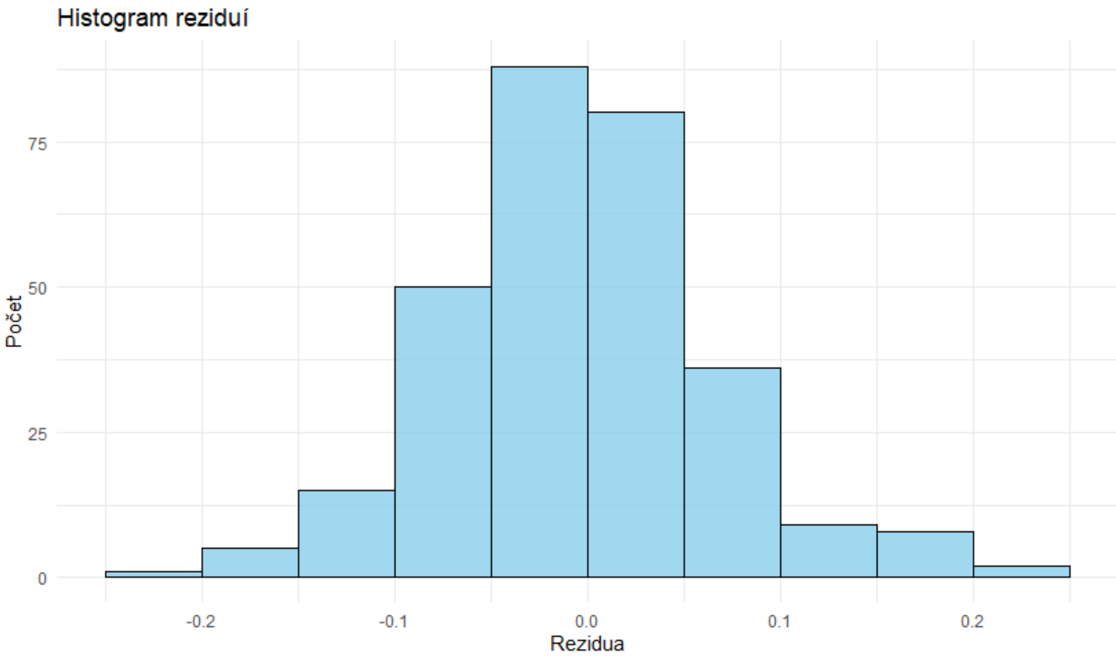
Obrázek 11: Rezidua pro Českou republiku



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Jak je patrné z modelu reziduí, hodnoty pro jednotlivé státy a zejména pro Českou republiku neodpovídají tak přesně normálnímu rozdělení, jak je zobrazeno v celkovém histogramu. Není možné s jistotou tvrdit, že rezidua mají přibližně stejné normální rozdělení. Rezidua s nejvyšší četností kolem nuly naznačují, že model má dobrou schopnost předpovídat průměrné hodnoty cílové proměnné. To znamená, že model má tendenci správně predikovat průměrné hodnoty.

Obrázek 12: Rezidua



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Jak je z grafu všech reziduí patrné, vychází většina hodnot kolem nuly. To naznačuje, že model dobře vysvětluje většinu variability dat. Rezidua kolem nuly signalizují, že model dobře odhaduje skutečné hodnoty v datech, a není náchylný k systematickým chybám.

Test autokorelace reziduí

Výsledek testu Durbin-Watsona je 1.7. Tento test zkoumá přítomnost autokorelace reziduí v lineárním regresním modelu. Interpretace tohoto výsledku se provádí porovnáním s kritickými hodnotami testu Durbin-Watsona.

Pokud je výsledek testu blízko 2, jak je tomu v tomto výsledku 1.7, naznačuje to malou autokorelaci mezi rezidui. Hodnoty testu Durbin-Watsona blízko 2 indikují, že neexistuje systematický trend v reziduích, což je v souladu s předpokladem nekorelovaných reziduí v lineárním regresním modelu.

Hodnota 1.7 naznačuje, že rezidua modelu jsou relativně nekorelovaná a splňují předpoklady lineární regrese.

Test normality reziduí

Test Shapiro-Wilk testuje nulovou hypotézu, že rezidua pocházejí z normálního rozdělení. V tomto případě je p-hodnota 0.88 vyšší než konvenční hladina významnosti 0.05, což naznačuje, že neexistují dostatečné důkazy na to, aby byla zamítnuta nulová hypotéza. To znamená, že rezidua pravděpodobně pocházejí z normálního rozdělení.

Test multikolinearity

Korelace mezi kapitálem a prací je na hodnotě 0.09. To znamená, že mezi těmito proměnnými existuje slabý pozitivní lineární vztah. Neboli s rostoucí hodnotou jedné proměnné se pravděpodobně zvyšuje i hodnota druhé proměnné, avšak tento vztah není silný. Celkově řečeno, korelace blízko nule mezi těmito proměnnými naznačuje, že mezi proměnnými není téměř žádný lineární vztah a v modelu tím pádem nebudou přítomny problémy s multikolinearitou.

4.3 Model CES

4.3.1 Výpočet základních proměnných

Produkční funkce s konstantní elasticitou substituce (CES) představuje obecnější tvar než Cobb-Douglas produkční funkce, protože uvolňuje omezení kladené na hodnotu elasticity substituce, která v tomto případě může nabývat hodnot $0 < \sigma < \infty$, ale musí zůstat konstantní (Fašanek, 2010). Funkční tvar má podobu:

$$Q = A \cdot \left(\alpha \cdot K^{-\delta} + (1-\alpha) \cdot L^{-\delta}\right)^{-\frac{1}{\delta}} \tag{4.10}$$

kde: A .... parametr efektivity,

α ... distribuční parametr,

δ ... substituční parametr.

Za stupeň homogenity θ z původní rovnice bylo možné dosadit hodnotu 1. To totiž ve funkci znamená, že výstupní elastická substituce mezi vstupy bude konstantní a rovna jedné. To znamená, že výrobní proces by měl konstantní schopnost nahrazení jednoho vstupu za druhý při zachování stejné úrovně produkce (Fašanek, 2010).

Parametr efektivity A byl již představen v případě Cobb-Douglas produkční funkce, i v tomto případě je jeho úloha stejná. Jeho velikost záleží na zvolených jednotkách všech proměnných. Při porovnávání dvou produkčních funkcí, které se liší v tomto parametru, je efektivnější funkce, která má hodnotu parametru A vyšší. Na jeho hodnotu je kladené omezení $A > 0$.

Distribuční parametr zachycuje rozdělení vlivu mezi jednotlivé vstupy. Jeho hodnota se nachází v intervalu (0, 1) (Fašanek, 2010).

Substituční parametr vystupuje ve vztahu elasticity substituce. Nejmenší hodnota, jakou může nabývat, je $\delta = -1$, tehdy se funkce stává lineární. Pro případ, kdy je $\delta = 0$, nemusí být zřejmé, že se jedná o případ této produkční funkce. Po dosazení do pravé strany rovnice se získá totiž neurčitý tvar $1/\infty$, který se na funkci nepodobá (Fašanek, 2010).

Právě tento parametr bude nutné dopočítat pomocí regrese.

Technologický pokrok zde zastupuje, jak už bylo řečeno, parametr A. Při CES funkci je důležité brát v úvahu vlastnosti samotné funkce. Pokud byl stanoven stupeň homogenity 1 a tím pádem konstantní výnosy z rozsahu, je nutné tuto podmínku dodržet vzhledem k Cobb-Douglas produkční funkci, kde je podmínka splněna, pokud alpha + beta = 1. Ve výpočtu bude proto nutné hodnotu alpha pozměnit od hodnoty alpha v minulém vzorci.

Vzhledem k rozsahu práce se již nebude zohledňovat vyhodnocení diagnostických nástrojů. Na rozdíl od předchozí produkční funkce se tentokrát jedná o případ nelineárního regresního modelu.

4.3.2 Výpočet MP

Výpočet hraničních produktů jednotlivých výrobních faktorů není jednoduchý. Postupnými úpravami - parciální derivací podle daného vstupu, krácením, následným rozšířením výrazu o $Y^\delta \cdot Y^\delta$ a zjednodušením je možné získat (Fašanek, 2010):

$$\mathrm{FK} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{K^{1+\delta}} \tag{4.11}$$

$$\mathrm{FL} = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1-\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{L^{1+\delta}} \tag{4.12}$$

4.3.3 Výpočet elasticity vstupů na výstup

Elasticita výstupu na vstupy je v tomto případě pro kapitál rovna (Fašanek, 2010):

$$\eta_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{K^{1+\delta}} \cdot \frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \left(\frac{Y}{K}\right)^\delta \tag{4.13}$$

a pro práci:

$$\eta_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{1-\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{L^{1+\delta}} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{1-\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \left(\frac{Y}{L}\right)^\delta \tag{4.14}$$

4.3.4 Výpočet MRS

Další vlastností, kterou se tato práce zabývá, je hraniční míra substituce, jejíž vyjádření už na základě uvedených rovnic je možné získat jednoduše (Fašanek, 2010):

$$\mathrm{MRS}_{K,L} = \frac{FK}{FL} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{K^{1+\delta}} : \frac{1-\alpha}{\mathrm{A}^\delta} \cdot \frac{Y^{1+\delta}}{L^{1+\delta}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1+\delta} \tag{4.15}$$

4.3.5 Výpočet elasticity substituce

Na závěr je důležité určit výraz pro elasticitu substituce. Vzhledem k faktu, že v literatuře se často vyskytuje pouze konstatování, že hodnota výrazu je rovna $1/\delta + 1$, v tomto případě bude rozebráno, jak se k danému výrazu došlo. Nejprve rovnici logaritmuji (Chirinko et al., 2011):

$$\ln \frac{FK}{FL} = (1+\delta) \cdot \ln \frac{L}{K} + \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4.16}$$

Využije se rozkladu diferenciálu (Fašanek, 2010):

$$d \ln \frac{FK}{FL} = \frac{\partial \ln \frac{FK}{FL}}{d(1+\delta) \cdot \ln \frac{L}{K}} = \cdot d(1+\delta) \ln \frac{L}{K} + \frac{\partial \ln \frac{FK}{FL}}{\partial \frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot d \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4.17}$$

V prvním sčítanci je parciální derivace rovna jedné. Ve druhém sčítanci je změna konstanty, která se může považovat za nulovou, a tudíž celý druhý sčítanec dává 0. Získá se tedy:

$$d \ln \frac{FK}{FL} = d(1+\delta) \cdot \ln \frac{L}{K} \tag{4.18}$$

Změna nastává v L/K, protože $(\delta + 1)$ má stálou hodnotu. Přepíše se rovnice 4.18.

$$\frac{\partial \ln \frac{L}{K}}{\partial \ln \frac{FK}{FL}} = \frac{1}{1+\delta} \tag{4.19}$$

Následuje výsledný vztah pro elasticitu substituce:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{L}{K}} : \frac{d\mathrm{MRS}_{K,L}}{\mathrm{MRS}_{K,L}} = \frac{\partial \ln \frac{L}{K}}{\partial \ln \frac{FK}{FL}} = \frac{1}{1+\delta} \tag{4.20}$$

4.3.6 Výsledky modelu CES

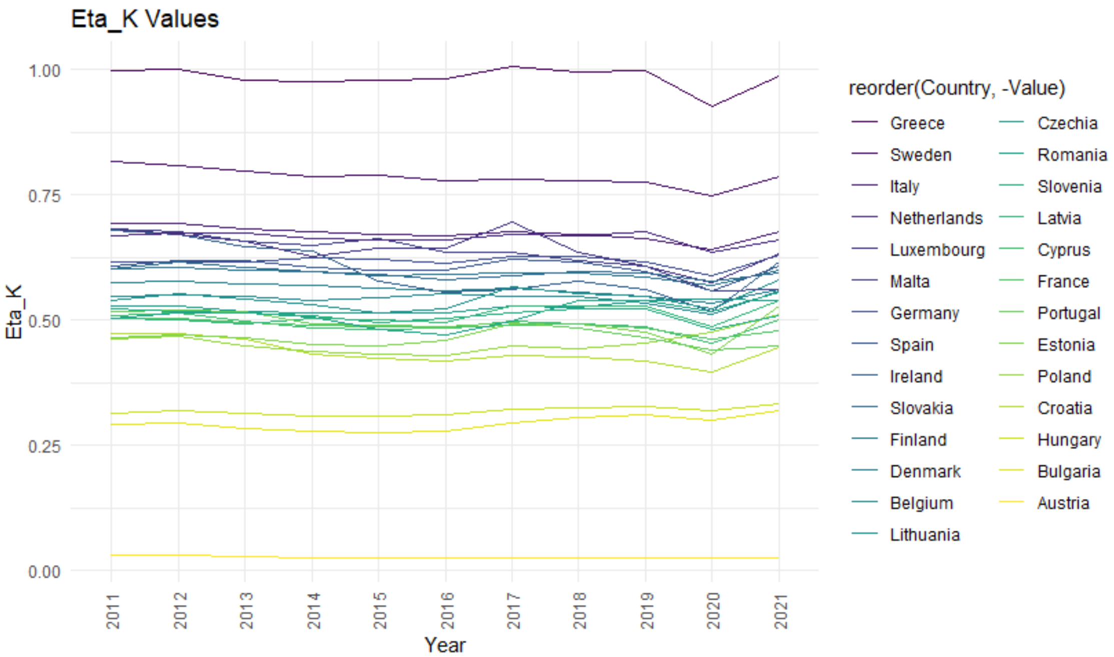
4.3.6.1 Výsledek elasticity vstupů na výstup

Následující graf na další stránce zobrazuje elasticitu výstupu na vstup kapitálu.

Jak je možné vidět z grafu na další straně, největší elasticitu výstupu na kapitál má Řecko, což koreluje s nejvyšší hodnotou α, po upravení hodnot na součet alpha + beta = 1. Stejně tak i následujících několik států.

Elasticitu výstupu na kapitál má mírně klesající tendenci a drží se většinou pod hodnotou 1, což znamená, že přidání další jednotky kapitálu již nepřináší tolik nového výstupu, jak tomu bylo dříve. To může signalizovat, že využití kapitálu je blíže svému maximu nebo že další investice do kapitálu jsou stále méně efektivní.

Obrázek 13: Elasticita kapitálu na výstup CES



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Hodnota 1 byla překročena pouze mírně Řeckem v jednom roce. Opět je viditelný šok v roce 2020.

Na poslední místě se umístilo Rakousko, stejně jako v parametru α v Cobb-Douglas funkci. V této zemi je elasticita prakticky na nule. To znamená, že změna vstupu (kapitálové dotace, práce) mají jen malý vliv na výstup. Za to může její malá hodnota α.

Důvodů k takovým výsledkům může být několik. Rozdíly ve struktuře ekonomiky, které můžou ovlivnit míru substituce mezi vstupy. Například země s vysoce rozvinutým průmyslem a technologickým sektorem mohou mít vyšší elasticity, protože jsou schopny efektivněji nahrazovat kapitál pracovní silou nebo jinými faktory.

Rozdíly ve využití technologie a inovací mohou vést k variabilitě v hodnotách elasticity. Země, které jsou v čele s technologickými inovacemi, mohou mít vyšší elasticity, protože jsou schopny lépe využívat kapitál a optimalizovat svou produkční funkci.

Politické a institucionální faktory mohou také ovlivnit hodnoty elasticity. Například země s podporou pro výzkum a vývoj mohou mít vyšší elasticity.

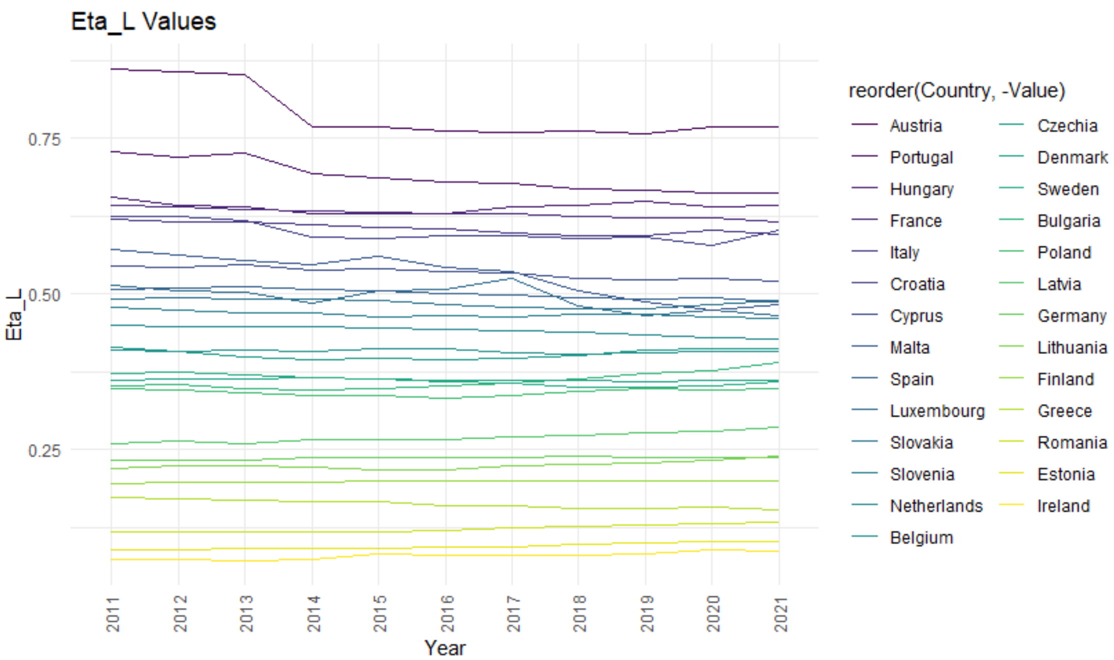
Ve všech letech vychází velmi podobná úroveň substituce. To může být způsobeno tím, že ve všech letech existuje homogenní produkční prostředí, ve kterém jsou využívány stejné technologie, postupy a faktory výroby. V takovém případě by se očekávalo, že hodnota elasticity výstupu na vstup kapitálu zůstane konstantní.

Pokud se ekonomické podmínky ve sledovaných zemích a letech neměnily významně, může to vést k relativní stabilizaci hodnot elasticity výstupu na vstup kapitálu.

Na výpočet byla využita normalizovaná data, což také mohlo mít vliv na výsledný tvar křivky.

Následující graf zobrazuje elasticitu výstupu na vstup práce.

Obrázek 14: Elasticita práce na výstup CES



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Při porovnání vzorců pro substituci na výstupu práce a kapitálu je jenom malý, ale důležitý rozdíl. Tento rozdíl nám zaručil, že seřazení států koreluje s upravenou hodnotou beta z Cobb-Douglas produkční funkce, kde má nejvyšší hodnotu Rakousko.

Rakousko je známé svou rozvinutou průmyslovou základnou a vysokou úrovní technologických znalostí. Vysoká míra inovací a investic do výzkumu a vývoje může vést k efektivnějšímu využití pracovní síly a vyšší produktivitě práce.

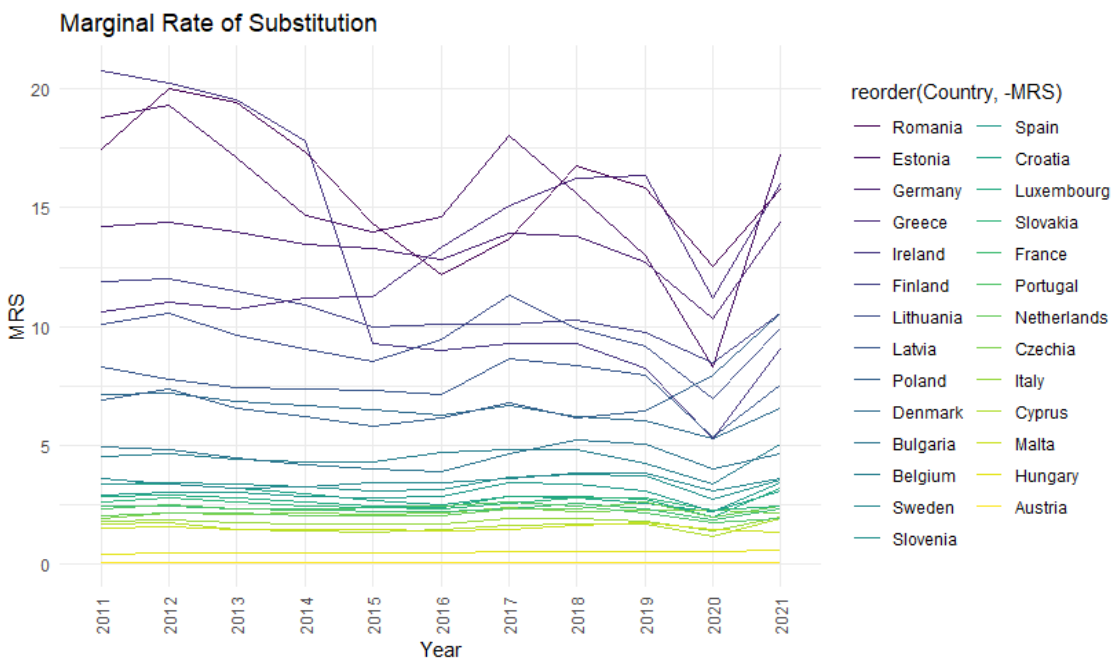
Rakousko má flexibilní trh práce, který umožňuje snadnější přizpůsobení se změnám na trhu a lepší přizpůsobení dovedností pracovní síly potřebám trhu. To by mohlo vést k vyšší produktivitě práce a tedy i vyšší elasticitě výstupu na práci.

Dalším faktorem může být vysoká úroveň infrastruktury a investic do lidského kapitálu, jako jsou vzdělávací a odborné programy. Díky těmto investicím může být pracovní síla lépe vybavena potřebnými dovednostmi a znalostmi, což může vést k vyšší produktivitě práce a tedy i k vyšší elasticitě výstupu na práci.

Je důležité zohlednit i další faktory, jako jsou politiky zaměstnanosti, pracovní právo a sociální dávky, které mohou mít vliv na výkonnost pracovní síly a tedy i na elasticitu výstupu na práci v Rakousku. Celkově lze tedy očekávat, že země s vyšším technologickým pokrokem, lepším vzděláním pracovní síly a podporou inovací a investic budou mít vyšší elasticitu výstupu na práci než země s nižší úrovní těchto faktorů.

4.3.6.2 Výsledek MRS

Obrázek 15: Graf MRS v CES funkci



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Výše zmíněný graf zobrazuje hodnoty MRS pro CES funkci. Vzhledem k povaze výpočtu graf evokuje v podstatě opačné hodnoty elasticity výstupu na práci. Na posledním místě je Rakousko. Důvodem je její velice malá hodnota alpha. Na prvním místě je Rumunsko. To je způsobeno jejím skoro posledním místem v grafu výstupu elasticity na práci.

Je samozřejmě možné vidět podobné pořadí států, jako je v MRS v Cobb-Douglas produkční funkci. Liší se ovšem v celkových hodnotách. Není zde uvažováno s konstantní elasticitou substituce jako v modelu Cobb-Douglas, proto se model více mění v průběhu let.

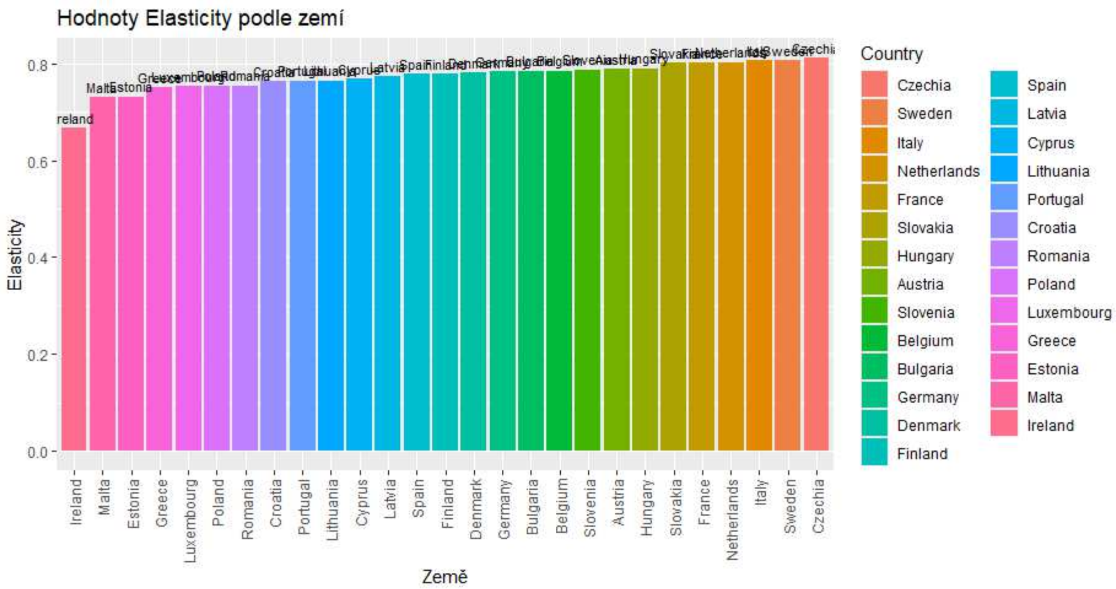
Obecně k vysoké hodnotě mohla přispět například dostupnost zboží. Pokud jsou určité statky nebo služby vzácné nebo obtížně dostupné, mohou mít spotřebitelé vyšší ochotu obětovat jiné statky, aby je získali.

Kulturní faktory mohou hrát roli v tom, jaké statky jsou v určité zemi více ceněny nebo žádané, což může ovlivnit i hodnoty MRS. Ekonomická stabilita a dostatek zdrojů mohou mít vliv na to, jak lidé v dané zemi hodnotí různé statky a jsou ochotni za ně zaplatit vyšší cenu.

4.3.6.3 Výpočet elasticity substituce

Elasticita substituce odráží hodnoty parametru delta v CES funkci. Určuje, jak rychle jsou vstupy (práce a kapitál) nahrazovány při změně relativních cen. V grafu zobrazeném na další straně je vidět, že se většina zemí pohybuje kolem hodnoty 0.8. Znamená to, že vstupy jsou relativně dobře substituovatelné. Pokud se země rozhodne dát pryč jednotku jednoho výstupu z důvodu změny cen nebo dostupnosti, dostane 0.8 druhého výstupu.

Obrázek 16: Elasticita substituce v CES funkci



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

4.4 Model VES

4.4.1 Výpočet základních proměnných

VES produkční funkce je dalším modelem v teorii produkčních funkcí. Tato funkce poskytuje flexibilitu v modelování substituce mezi vstupy.

VES produkční funkce umožňuje flexibilní modelování substituce mezi kapitálem a prací pomocí substitučního parametru δ. Při $\delta = 1$ je funkce lineární, což dokazuje perfektní substituci mezi kapitálem a prací. Naopak, pro $\delta > 1$ je substituce mezi kapitálem a prací nerovnoměrná a pro $\delta < 1$ je substituce zcela nerovnoměrná.

Ve výpočtu se nachází další neznámé proměnné. K jejich výpočtu bude využito vztahu mezi základní VES produkční funkcí představenou dříve (1.14) a druhým tvarem, který je obecnější VES produkční funkce.

Základní tvar:

$$Q = AK^{\alpha(1-\delta\rho)} \left[L + (\rho - 1)K\right]^{\alpha\delta\rho} \tag{4.21}$$

Obecnější tvar:

$$AK^{\alpha\nu}(L+\beta\alpha K)^{(1-\alpha)\nu} \tag{4.22}$$

Pokud se porovná tato rovnice s druhou rovnicí, je možné vyvodit důležité rovnice, z kterých již bude jednoduché určit proměnné. A to přesně:

$$\rho * \delta = (1-\alpha) \tag{4.23}$$

$$(\rho - 1) = \alpha * \beta \tag{4.24}$$

Zmíněná α a β z těchto rovnic je myšlena již známá α a β z Cobb-Dougalsovi produkční funkce. Vyjádření ρ a δ:

$$\rho = \frac{\alpha \cdot \beta + 1}{1} \tag{4.25}$$

$$\delta = \frac{1-\alpha}{\alpha \cdot \beta + 1} \tag{4.26}$$

Následně je možné vypočítat hodnotu α pro VES přes již známou nelineární regresní funkci.

4.4.2 Výpočet MP

Marginální produkt kapitálu (MPK)

Marginální produkt kapitálu (MPK) je dán parciální derivací výstupu (Y) podle kapitálu (K) při konstantní pracovní síle (L). Výsledný tvar vypadá následovně (Fašanek, 2010):

$$MP_K = \alpha(1-\delta\rho)\frac{Y}{K} + \alpha\delta\rho(\rho-1)\frac{Y}{L+(\rho-1)K} \tag{4.27}$$

Marginální produkt práce (MPL)

Opět se provede parciální derivace funkce Y podle L.

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha\delta\rho \cdot \frac{Y}{L+(\rho-1)K} \tag{4.28}$$

4.4.3 Výpočet elasticity vstupů na výstup

Elasticitu vstupu na výstup se vypočítá pomocí parciální derivace produkce podle vstupů. Pro VES produkční funkci je vzorec pro elasticitu práce na výstup dán jako (Fašanek, 2010):

$$\frac{\alpha\delta L\rho}{L+K(-1+\rho)} \tag{4.29}$$

Pro VES produkční funkci je vzorec pro elasticitu kapitálu na výstup dán jako:

$$\frac{\alpha(L+K(-1+\rho)-\delta L\rho)}{L+K(-1+\rho)} \tag{4.30}$$

4.4.4 Výpočet MRS

Vzorec pro MRS vypadá následovně:

$$\frac{L+K(-1+\rho)-\delta L\rho}{dK\rho} \tag{4.31}$$

(Fašanek, 2010)

4.4.5 Výpočet elasticity substituce

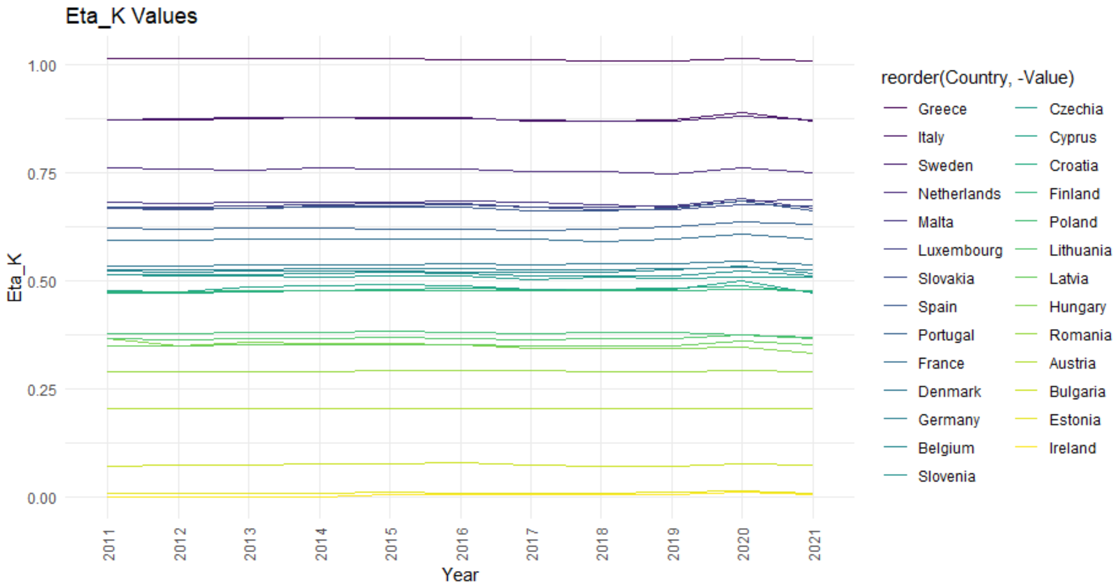
Při výpočtu elasticity substituce se využije již představený vzorec (1.12).

4.4.6 Výsledky

4.4.6.1 Výsledek elasticity vstupů na výstup

Následně zobrazený graf zobrazuje elasticitu výstupu na kapitál. Elasticita výstup na kapitál je prakticky konstantní ve všech letech. Elasticita je totiž ovlivněna parametrem sigma, který vyšel pro veškeré státy velice podobně. (Pro hodnotu alpha byly použity nové hodnoty bez úpravy dat na alpha + beta = 1). Nejnižší hodnotu má Irsko, které má zároveň i nejnižší hodnotu nové hodnoty alpha. Řecko naopak patří mezi státy s nejvyšší hodnotu alpha a zároveň má i nejvyšší hodnotu ρ.

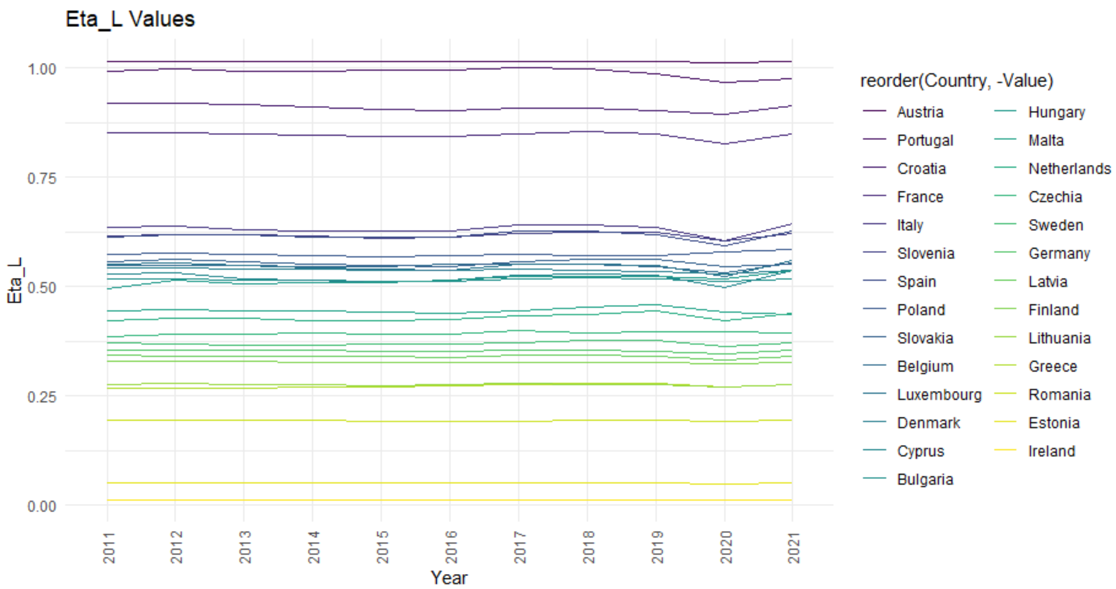
Obrázek 17: Elasticita kapitálu na výstup VES



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Výsledky se relativně shodují s elasticitou výstupu na kapitál CES funkce.

Obrázek 18: Elasticita práce na výstup VES



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Tento další graf zobrazuje elasticitu výstupu na práci. Opět je možné sledovat konstantní vývoj ve všech letech. Pouze v roce 2020 je též mírný propad. Důvody jsou stejné, jako ve výstupu na kapitál. Hodnoty opět vypadají částečně otočeně, oproti elasticitě výstupu na kapitál. Je možné sledovat určitou podobnost s elasticitou výstupu na práci v CES funkci.

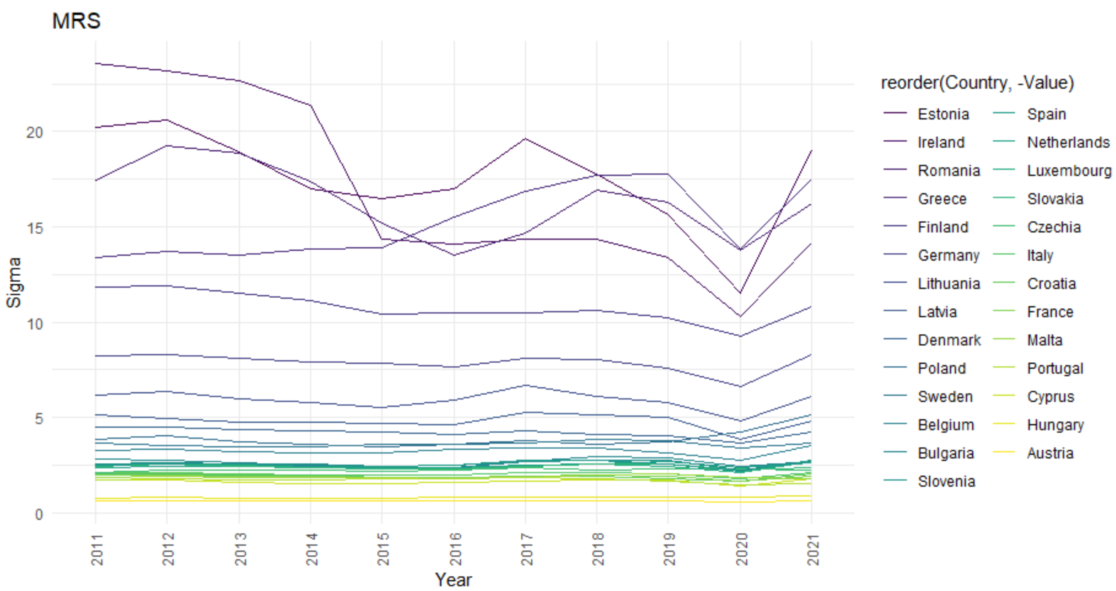
Irsko dosahuje jak v grafu elasticty výstupu na kapitál, tak v grafu elasticity výstupu na práci nejnižší hodnoty. Znamená to, že výstup nebude reagovat na změny v množství kapitálu a práce. To může znamenat, že výrobní proces je nasycen pracovní silou i kapitálem.

Nízké hodnoty elasticit výstupů ovšem neznamenají i nízké hodnoty MRS. Důvodem může být, že země využívá technologie nebo výrobní postupy, které umožňují dosáhnout vysokého MRS při nízké elasticitě výstupu na kapitál. To může být například případ, kdy je využívána vyspělá technologie nebo jsou implementovány efektivní organizační strategie, které umožňují efektivní využití kapitálu a práce.

4.4.6.2 Výsledek MRS

Následující graf zobrazuje graf MRS pro VES funkci.

Obrázek 19: MRS pro VES



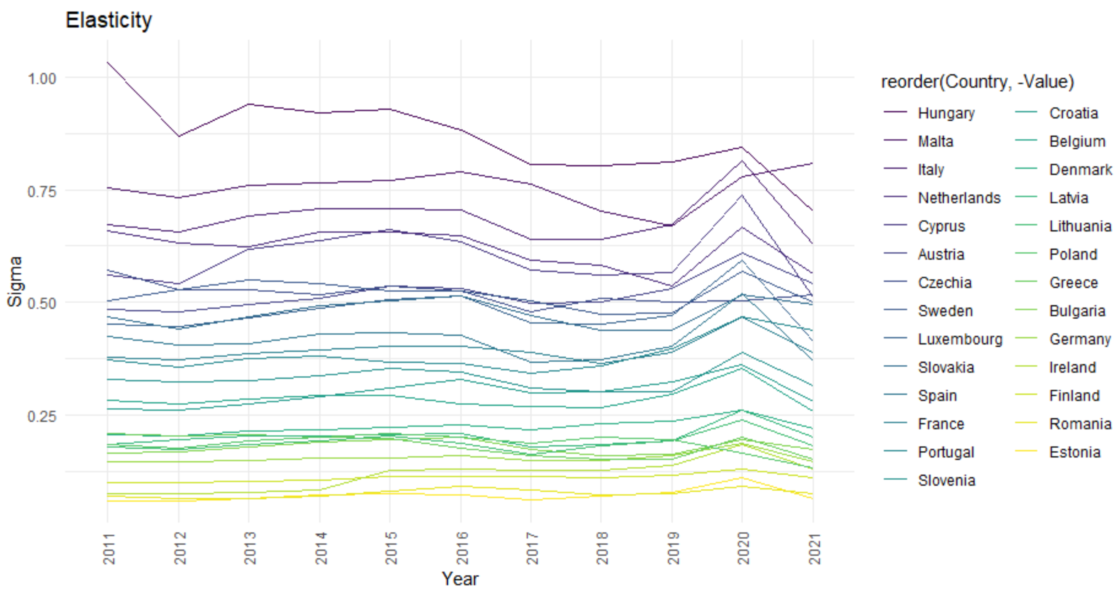
Zdroj: vlastní zpracování (2024)

V grafu MRS je vidět opět klesající trend. Hodnoty jsou do určité míry podobné předcházejícím modelům MRS. VES funkce má obecně méně variabilní hodnoty kvůli různým stupňům substituce mezi vstupy.

4.4.6.3 Výsledek elasticity substituce

V následujícím grafu jsou zobrazené elasticity substituce.

Obrázek 20: Elasticita substituce VES



Zdroj: vlastní zpracování (2024)

Maďarsko má nejvyšší elasticitu substituce především kvůli vysoké hodnotě delta. Hodnoty elasticity jsou pro všechny země velice rozdílné.

4.5 Zhodnocení

Z provedené analýzy bylo možné zhodnotit, že každý funkční model má své charakteristické vlastnosti, které silně ovlivňují výsledný model. Cílem tohoto výzkumu bylo zjistit, jak moc jednotlivé produkční funkce mají vliv na výsledek a zjištěné hodnoty. Je možné konstatovat, že volba vhodné funkce je pro výsledek zásadní a silně výsledek ovlivňuje.

Další věcí, která mohla silně ovlivnit výsledky byl výběr nelineární regresní funkce. Použitá funkce NLSM pro výpočet hodnot má tendenci být robustnější vůči odlehlým hodnotám než tradiční LMS algoritmus. S malým vzorkem dat může být robustnost NLMS algoritmu omezená, protože není dostatek informací pro účinný odhad parametrů modelu. Metoda NLSM na druhou stranu umožňuje modelovat širokou škálu nelineárních vztahů mezi proměnnými. To zahrnuje exponenciální, logaritmické, mocninné a další typy nelineárních vztahů, což umožňuje lépe zachytit složitější vzory a struktury v datech.

NLSM umožňuje lépe přizpůsobit model datům, protože je schopen zachytit nelineární vztahy, které by lineární modely nemohly zachytit. To umožňuje přesnější modelování reálných situací, které jsou často komplexní a nelineární, a identifikovat nejlepší model pro danou situaci. Z tohoto důvodu se používá často pro ekonomické analýzy.

Pro ověření správnosti dat byla na každý model aplikována funkce summary, která zjistí odhad zkoumané hodnoty a odpovídající t hodnotu a p hodnotu k odhadu. Odhad se shodoval s vypočítanou hodnotou z modelu a t hodnota vycházela vždy vysoká (v rozmezí 30 - 6) zatím co p hodnota vycházela v rozmezí (0.0008 - 0.2).

Závěr

Produkční funkce prošly za posledních několik desetiletí významným vývojem, který reflektuje změny v ekonomických myšlenkových pochodech a samotných vzorcích. Moderní produkční funkce berou v úvahu složitější vztahy a dynamiku výrobních procesů. V kombinaci s pokročilými metodami analýzy dat a ekonometrických technik umožňují tyto funkce přesnější predikci vývoje ekonomiky a poskytují cenné informace pro politická rozhodnutí a strategické plánování.

V této studii byly zkoumány charakteristiky a vlastnosti různých modelů produkčních funkcí v kontextu ekonomické analýzy. Na základě dostupných dat byly vytvořeny a testovány různé modely, aby bylo možné porozumět jejich chování a přesnosti při predikci výstupu na základě vstupů.

Vzhledem k omezené dostupnosti české literatury na dané téma využila autorka při psané této diplomové práce zejména zahraniční literaturu.

Práce si za hlavní cíl stanovila podat kompletní přehled o produkčních funkcích a modelovat odpovídající modely produkčních funkcí. Výsledky analýzy ukazují, že volba vhodného modelu je klíčová pro přesnost predikce výstupu a účinnost využití zdrojů. Každý model má své charakteristické vlastnosti, které je třeba zvážit při jeho aplikaci v konkrétním prostředí.

Důležitým aspektem studie bylo také zkoumání vlivu strukturálních faktorů na výkon produkčních funkcí. Ukázalo se, že faktory, jako je technologický pokrok, kapitálové investice a lidský kapitál, mohou významně ovlivnit tvar a parametry produkčních funkcí.

Práce se nezaměřuje na nalezení vhodného modelu zohledňující aktuální ekonomickou situaci. Zde je proto prostor pro další zpracování.

Seznam použitých zkratek

CES Constant Elasticity of Substitution

GERD Hrubé domácí výdaje na výzkum a vývoj

HDP Hrubý domácí produkt

HICP Harmonised Index of Consumer Prices

K Kapitál

LINEX Linear Exponential Function

L Práce

MFM McCarthy-Färe-Mitchell

MPL Mezní produkt práce

MPK Mezní produkt kapitálu

MPR Mezní produkt surovin

MPT Mezní produkt technologie

MRS Marginal rate of substitution

MRT Marginal Rate of Transformation

MRTS Mezní míra technické substituce

Translog Translogová produkční funkce

VES Variable Elasticity of Substitution

GVA Hrubá přidaná hodnota

Seznam použitých zdrojů

Ayres, R. U. (1978). *Resources, environment, and economics: Applications of the materials/energy balance principle.* Wiley.

Behr, A. (2015). *Production and Efficiency Analysis with R.* Springer Cham.

Blaug, M. (1985). *Economic Theory in Retrospect.* (4. vyd.) Cambridge University Press.

Bruno, M. (1962). A note on the implications of an empirical relationship between output per unit of labour, the wage rate and the capital-labour ratio. Unpub. mimeo, Stanford.

Chirinko, R. S., Fazzari, S. M., & Meyer, A. P. (2011). A new approach to estimating production function parameters: The elusive capital–labor substitution elasticity. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(4),587–594. https://doi.org/10.1198/jbes.2011.08119.

Cohen, A. J. & Harcourt, G. C. (2003). Whatever happened to the cambridge capital theory controversies? *Journal of Economic Perspectives*, 17(1),199–214.

Cooper, R. & John, A. (2012). *Macroeconomics: Theory through Applications.* Saylor Foundation.

Core (2021). The economy: South asia. Dostupné 14. 12. 2023 z `https://www.core-econ.org/the-economy-south-asia/book/text/leibniz-03-05-01.html`.

Daly, H. E. (1991). *Steady-State Economics: Second Edition With New Essays.* Island Press.

Daly, H. E. (2005). *Economics in a full world.* Edward Elgar.

Den Hartigh, E. & Langerak, F. (2001). Managing increasing returns. *European Management Journal*, 19(4),370–378.

Diewert, W. E. (1971). An application of the shephard duality theorem: A generalized leontief production function. *The Journal of Political Economy*, 79(3),481–507.

Faber, M. & Manstetten, R. (2013). Some basic reflections on the relation between economics and thermodynamics. *Ecological Economics*, 85,1–7.

Faber, M. & Proops, J. L. (1998). Evolution, time, production and the environment. *Ecological Economics*, 25(2),147–154.

Fašanek, R. (2010). Ekonometrická analýza produkčných funkcií: Econometric analysis of production functions. [diplomová práce, Masarykova univerzita, Ekonomicko-správní fakulta]. https://is.muni.cz/th/mqmp0/DP_FASANEK_Radoslav.pdf.

Färe, R. (1986). On the existence and equivalence of three joint production functions. *Scand. J. of Economics*, 88(4),669–674.

Gechert, S., Havranek, T., Irsova, Z., & Kolcunova, D. (2019). *Death to the Cobb--Douglas Production Function? A Quantitative Survey of the Capital-Labor Substitution Elasticity.* EconStor Preprints 203136, ZBW Leibniz Information Centre for Economics.

Georgescu-Roegen, N. (1971). *The Entropy Law and the Economic Process.* Harvard University Press.

Georgescu-Roegen, N. (1999). *The Entropy Law and the Economic Problem.* Routledge.

Gowdy, J. M. (2005). Toward a new welfare economics for sustainability. *Ecological Economics*, 53(2),211–222.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities.* Cambridge University Press.

Hargrave, M. (2020). Marginal rate of transformation (mrt): Definition and calculation. Dostupné 30. 12. 2023 z https://www.investopedia.com/terms/m/marginal_rate_transformation.asp.

Hayes, A. (2023). Mrs in economics: What it is and the formula for calculating it. Dostupné 16. 1. 2024 z https://www.investopedia.com/terms/m/marginal_rate_substitution.asp#:~:text=In%20economics%2C%20the%20marginal%20rate,new%20good%20is%20equally%20satisfying.

Humphrey, T. (1997). Algebraic production functions and their uses before cobb-douglas. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 83(1),51–83.

Hušek, R. (2009). *Aplikovaná ekonometrie Teorie a praxe*. Oeconomica.

Iastat (2021). Autokorelace reziduí. Dostupné 4. 1. 2024 z https://iastat.vse.cz/regrese/Regrese11.htm.

Kawaguchi, K. (2022). Empirical industrial organization. Dostupné 10. 11. 2023 z https://kohei-kawaguchi.github.io/EmpiricalIO/production.html#potential-bias-i-endogeneity.

Kelton, W. (2023). Isoquant curve. Dostupné 1. 1. 2024 z https://www.investopedia.com/terms/i/isoquantcurve.asp.

Lavoie, M. (2000). Capital reversing. In *Encyclopedia of Political Economy*. Routledge.

Lindenberger, D. & Kummel, R. (2002). Energy-dependent production functions and the optimization model 'prise' of price-induced sectoral evolution. *Inernationalt. Journal of Applied Thermodynamics*, 5(3),101–107.

Mas-Colell, A. W. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.

Mishra, S. K. (2007). A brief history of production functions. Dostupné 11. 12. 2023 z https://ssrn.com/abstract=1020577.

Moll, B. (2023). Supplement to lecture 3: Derivation of ces special cases. https://benjaminmoll.com/wp-content/uploads/2023/07/Lecture3_EC2B1_Moll_supplement.pdf.

Mukherjee, S., Mukherjee, M., & Ghose, A. (2003). *Microeconomics*. Prentice-Hall of India.

Rehal, V. (2023). Production function: Definition and types. Dostupné 30. 3. 2024 z https://spureconomics.com/production-function-definition-and-types/.

Samuelson, P. A. (1966). A summing up. *Quarterly Journal of Economics*, 80(4),568–583.

Sato, R. (1975). The most general class of ces functions. *Econometrica*, 43(5-6),999–1003.

Schumpeter, J. (1954). *History of Economic Analysis*. Allen and Unwin.

Shaikh, A. & Tonak, A. (1994). *Measuring the Wealth of Nations*. Cambridge University Press.

Sickles, R. & Zelenyuk, V. (2019). *Measurement of Productivity and Efficiency: Theory and Practice*. Cambridge University Press.

Solow, R. (1963). *Capital Theory and the Rate of Return*. North-Holland.

Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory*. Cambridge University Press.

Surbhi, S. (2017). Difference between short run and long run production function. Dostupné 3. 2. 2024 z https://keydifferences.com/difference-between-short-run-and-long-run-production-function.html.

Turner, R. K. (1993). *Sustainability: Principles and Practice*. BelhavenPress.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. (3. vyd) Norton.

Wikipedia (2024). Gross value added. Dostupné 4. 4. 2024 z https://en.wikipedia.org/wiki/Gross_value_added.

Zellner, A. & Revankar, N. (1969). Generalized production functions. *The Review of Economic Studies*, 36(2),241–250.

Seznam obrázků

Seznam příloh

příloha A: Kód v jazyce R pro modelování produkčních funkcí

```
# ZÁKLADNÍ ÚPRAVA DAT
# Seznam společných let
 common_years <- Reduce(intersect, lapply(list(names(capital)[-1],
 names(labour)[-1], names(A)[-1], names(Y)[-1], names(HICP)[-1]),
 unique))

# Odstranění řádků obsahujících NA hodnoty
 Y <- na.omit(Y)

# Společné země ve všech datasetech
 common_countries <- Reduce(intersect, lapply(list(A$Country,
 labour$Country,
capital$Country, Y$Country, HICP$Country), unique))

# Filtrace datasetů na společné země
 A <- filter(A, Country %in% common_countries)
 labour <- filter(labour, Country %in% common_countries)
 capital <- filter(capital, Country %in% common_countries)
 Y <- filter(Y, Country %in% common_countries)
 HICP <- filter(HICP, Country %in% common_countries)

# Filtrace datasetů na společné roky
 A <- select(A, Country, all_of(common_years))
labour <- select(labour, Country, all_of(common_years))
 capital <- select(capital, Country, all_of(common_years))
 Y <- select(Y, Country, all_of(common_years))
 HICP <- select(HICP, Country, all_of(common_years))
```

```
# HICP
# Počáteční rok
start_year <- 2011
# Smyčka přes jednotlivé roky
for (col in names(capital)[-1]) {
  # Extrahování čísla roku ze jména sloupce
  year <- as.numeric(col)
  # Výpočet počtu let od počátečního roku
  years <- year - start_year
  # Upravení kapitálu pomocí mocniny počtu let
  exponent <- years + 1
  capital[[col]] <- capital[[col]] / (1 +
  HICP_copy[[col]])^exponent
}

# SMĚRODATNÉ ODCHYLKY
# LABOUR
# Převedení původního datasetu labour_copy na data frame
labour_df <- as.data.frame(labour_copy)
# Normalizace hodnot řádek pomocí směrodatné odchylky
labour_scaled <- labour_df
labour_scaled[, -1] <- t(apply(labour_df[, -1], 1, function(x) x /
sd(x)))
# Zobrazení výsledného datasetu
head(labour_scaled)

# Y
# Převedení původního datasetu Y_copy na data frame
Y_df <- as.data.frame(Y_copy)
# Normalizace hodnot řádek pomocí směrodatné odchylky
Y_scaled <- Y_df
Y_scaled[, -1] <- t(apply(Y_df[, -1], 1, function(x) x / sd(x)))
```

```
# Zobrazení výsledného datasetu
head(Y_scaled)

# CAPITAL
# Převedení původního datasetu capital_copy na data frame
capital_df <- as.data.frame(capital_copy)
# Normalizace hodnot řádek pomocí směrodatné odchylky
capital_scaled <- capital_df
capital_scaled[, -1] <- t(apply(capital_df[, -1], 1, function(x) x
/ sd(x)))
# Zobrazení výsledného datasetu
head(capital_scaled)

# A
> # Převedení původního datasetu capital_copy na data frame
> A_df <- as.data.frame(A_copy)
> # Normalizace hodnot řádek pomocí směrodatné odchylky
> A_scaled <- A_df
> A_scaled[, -1] <- t(apply(A_df[, -1], 1, function(x) x / sd(x)))
> # Zobrazení výsledného datasetu
> head(A_scaled)

# LOGARITMY
# Aplikace logaritmu na dataset Y
Y[, -1] <- log(Y_scaled[, -1])

# Aplikace logaritmu na dataset labour
labour[, -1] <- log(labour_scaled[, -1])

# Aplikace logaritmu na dataset capital
capital[, -1] <- log(capital_scaled[, -1])
```

```
# Aplikace logaritmu na dataset A
> A[, -1] <- log(A_scaled[, -1])

# VÝPOČTY PRO COBB-DOUGLAS
# LINEÁRNÍ REGRESE
library(minpack.lm)
# Inicializace seznamu reziduí
rezidua <- list()
# Inicializace datového rámce pro výsledky
vysledek <- data.frame(Country = character(), alpha = numeric(),
beta =  numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude provedena regrese
for (i in 1:nrow(Y)) {
  Y_numeric <- as.numeric(unlist(Y[i, -1]))
  capital_numeric <- as.numeric(unlist(capital[i, -1]))
  labour_numeric <- as.numeric(unlist(labour[i, -1]))
  A_numeric <- as.numeric(unlist(A[i, -1]))
  # Nelineární optimalizace s omezeními
  model <- nlsLM(Y_numeric ~ A_numeric + alpha * capital_numeric +
  beta *  labour_numeric,
                 start = list(alpha = 0.5, beta = 0.5),
                 lower = c(0, 0),
                 upper = c(2, 2))
  # Získání koeficientů
  alpha <- coef(model)[1]
  beta <- coef(model)[2]
  # Uložení reziduí do seznamu
  rezidua[[i]] <- residuals(model)
  # Uložení výsledků do dataframe
  vysledek <- rbind(vysledek, data.frame(Country = Y$Country[i],
  alpha = alpha,  beta = beta))
}
```

```
# Vytvoření nového datového rámce s rezidui a názvy zemí
rezidua_df <- data.frame(Country = Y$Country, Residua =
unlist(rezidua))

# MRS pro CD
# Vytvoření prázdného dataframe pro ukládání výsledků MRS
MRS_data <- data.frame(Country = character(), MRS = numeric())
# Procházení jednotlivých zemí
for (i in 1:nrow(vysledek)) {
  # Výpočet MRS pro danou zemi
  MRS <- vysledek$alpha[i] * labour[i, -1] / (vysledek$beta[i] *
  capital[i, -1])
  # Uložení výsledku do dataframe
  MRS_data <- rbind(MRS_data, data.frame(Country =
  vysledek$Country[i], MRS =  MRS))
}
print(MRS_data) # Výpis výsledků

# VÝPOČTY PRO CES
# ÚPRAVA HODNOT ALPHA + BETA = 1
library(minpack.lm)
# Inicializace datového rámce pro výsledky
vysledek <- data.frame(Country = character(), alpha = numeric(),
beta = numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude provedena regrese
for (i in 1:nrow(Y)) {
  Y_numeric <- as.numeric(unlist(Y[i, -1]))
  capital_numeric <- as.numeric(unlist(capital[i, -1]))
  labour_numeric <- as.numeric(unlist(labour[i, -1]))
  A_numeric <- as.numeric(unlist(A[i, -1]))
  # Nelineární optimalizace s omezeními
  model <- nlsLM(Y_numeric ~ A_numeric + alpha * capital_numeric +
```

```
  beta *  labour_numeric,
                start = list(alpha = 0.5, beta = 0.5),
                lower = c(0, 0),
                upper = c(2, 2),
                control = nls.lm.control(maxiter = 1000))
  # Získání koeficientů
  alpha <- coef(model)[1]
  beta <- coef(model)[2]
  # Podmínka alpha + beta = 1
  sum_coef <- alpha + beta
  alpha <- alpha / sum_coef
  beta <- beta / sum_coef
  # Uložení výsledků do dataframe
  vysledek <- rbind(vysledek, data.frame(Country = Y$Country[i],
  alpha = alpha,  beta = beta))
}

# NELINEÁRNÍ REGRESE PRO CES
library(minpack.lm)
# Inicializace datového rámce pro výsledky
vysledek_CES <- data.frame(Country = character(), delta =
numeric(),
 stringsAsFactors = FALSE)
# Nelineární optimalizace s omezením na kladné hodnoty delta
for (i in 1:nrow(A)) {
  Y_numeric <- as.numeric(unlist(Y_scaled[i, -1]))
  capital_numeric <- as.numeric(unlist(capital_scaled[i, -1]))
  labour_numeric <- as.numeric(unlist(labour_scaled[i, -1]))
  # Načtení hodnoty alpha pro danou zemi
  alpha <- vysledek$alpha[i]
  A_numeric <- as.numeric(unlist(A_scaled[i, -1]))
  # Nelineární optimalizace pro odhad delta s omezením na kladné hodnoty
```

```
  model <- nlsLM(Y_numeric ~ A_numeric * ((alpha *   capital_numeric^(-
  delta) + (1 - alpha) * labour_numeric^(-delta))^-(1/delta)),
                 start = list(delta = 1),
                 lower = 0,  # Omezení na kladné hodnoty
                 upper = Inf)
  # Získání odhadnutého parametru delta
  delta <- coef(model)["delta"]
  # Uložení výsledků do datového rámce
  vysledek_CES <- rbind(vysledek_CES, data.frame(Country =
  A$Country[i], delta = delta))
}
print(vysledek_CES) # Výpis výsledků

# VÝPOČET ELASTICITY KAPITÁLU NA VÝSTUP PRO CES
# Inicializace prázdného seznamu pro ukládání výsledků
results <- list()
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet elasticity kapitálu
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
    country <- vysledek_CES$Country[i]
    alpha <- vysledek$alpha[i]
    delta <- as.numeric(vysledek_CES$delta[i])  # Převod na num. typ
    for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
        Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year])   # Převod na num. typ
        K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        A_value <- as.numeric(A_scaled[i, year])  # Převod na numerický typ
        # Výpočet elasticity vstupu kapitálu pro danou zemi a rok
        eta_K <- ((alpha) / (A_value^delta)) * ((Y_value /
        K_value)^delta)
        # Uložení výsledku do seznamu
        result <- data.frame(Country = country, Year =
         as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Eta_K = eta_K)
        results <- append(results, list(result))
```

```
    }
}
# Konverze seznamu na datový rámec
results_df <- do.call(rbind, results)
# Výpis výsledků
print(results_df)

# VÝPOČET ELASTICITY PRÁCE NA VÝSTUP PRO CES
# Inicializace prázdného seznamu pro ukládání výsledků
results_formula <- list()
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet elasticity kapitálu
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
    country <- vysledek_CES$Country[i]
    alpha <- vysledek$alpha[i]
    delta <- as.numeric(vysledek_CES$delta[i])  # Převod na numerický typ
    for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
        Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year])   # Převod na numerický typ
        K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        A_value<- as.numeric(A_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        # Výpočet elasticity vstupu kapitálu pro danou zemi a rok
        eta_L <- ((1 - alpha) / (A_value^delta)) * ((Y_value /
        L_value)^delta)
        # Uložení výsledku do seznamu
        result <- data.frame(Country = country, Year =
         as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Eta_L = eta_L)
        results_formula <- append(results_formula, list(result))
    }
}
# Konverze seznamu na datový rámec
results_df_formula <- do.call(rbind, results_formula)
# Výpis výsledků
```

```
print(results_df_formula)

# VÝPOČET MRS PRO CES
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků MRS
vysledek_MRS <- data.frame(Country = character(), Year =
integer(), MRS =
 numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude proveden výpočet MRS
for (i in 1:nrow(A)) {
  alpha <- vysledek$alpha[i]
  delta <- vysledek_CES$delta[i]
  for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
    K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
    L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
    # Výpočet MRS
    MRS <- (alpha / (1 - alpha)) * (L_value / K_value)^(1 + delta)
    # Uložení výsledků do datového rámce
    MRS_df <- data.frame(Country = A$Country[i], Year =
     as.numeric(names(Y_scaled)[year]), MRS = MRS)
    vysledek_MRS <- rbind(vysledek_MRS, MRS_df)
  }
}
# Výpis výsledků
print(vysledek_MRS)

# VÝPOČET ELASTICITY SUBSTITUCE PRO CES
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků elasticity
elasticity_df <- data.frame(Country = character(), Elasticity =
numeric(),
 stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude proveden výpočet elasticity
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
```

```
  delta <- as.numeric(vysledek_CES$delta[i])  # Převod na num. typ
  # Výpočet elasticity
  elastic <- 1 /(1 + delta)
  # Uložení výsledku do datového rámce
  elasticity_df <- rbind(elasticity_df, data.frame(Country =
 vysledek_CES$Country[i], Elasticity = elastic))
}
# Výpis výsledků
print(elasticity_df)

# VÝPOČTY PRO VES
# VÝPOČET RHO A DELTA
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků VES
VES_vysledky <- data.frame(Country = character(), rho = numeric(),
delta = numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude proveden výpočet rho a delta
for (i in 1:nrow(A)) {
  alpha <- vysledek$alpha[i]
  beta <- vysledek$beta[i]
  # Výpočet rho a delta
  rho <- (alpha * beta + 1) / (1)
  delta <- (1 - alpha) / (alpha * beta + 1)
  # Uložení výsledků do datového rámce
  VES_vysledky <- rbind(VES_vysledky, data.frame(Country =
  A$Country[i], rho = rho, delta = delta))
}
# Výpis výsledků
print(VES_vysledky)

# VÝPOČET NOVÉ HODNOTY ALPHA PRO VES
library(minpack.lm)
# Inicializace datového rámce pro výsledky
```

```
VES_vysledky_alpha <- data.frame(Country = character(), alpha =
numeric(),
 stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi bude provedena nelineární optimalizace
for (i in 1:nrow(A)) {
  Y_numeric <- as.numeric(unlist(Y_scaled[i, -1]))
  capital_numeric <- as.numeric(unlist(capital_scaled[i, -1]))
  labour_numeric <- as.numeric(unlist(labour_scaled[i, -1]))
  A_numeric <- as.numeric(unlist(A_scaled[i, -1]))
  # Načtení hodnoty alpha pro danou zemi
  alpha <- VES_vysledky$alpha[i]
  delta <- VES_vysledky$delta[i]
  rho <- VES_vysledky$rho[i]
  # Nelineární optimalizace pro odhad parametru alpha
  model <- nlsLM(Y_numeric ~ A_numeric * (capital_numeric^(alpha *
  (1 - delta *
  rho))) * (labour_numeric+(rho - 1 ) * capital_numeric) ^(alpha *
  delta * rho),
                 start = list(alpha = 1),
                 lower = 0,  # Omezení na kladné hodnoty
                 upper = Inf)
  # Získání odhadnutého parametru alpha
  alpha <- coef(model)["alpha"]
  # Uložení výsledků do datového rámce
  VES_vysledky_alpha <- rbind(VES_vysledky_alpha, data.frame(Country =
 A$Country[i], alpha = alpha))
}
# Výpis výsledků
print(VES_vysledky_alpha)

# VÝPOČET VSTUPU PRÁCE NA VÝSTUPU VES
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků
```

```
novy_dataset <- data.frame(Country = character(), Year = integer(), Eta_L =
 numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet elasticity kapitálu
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
    country <- vysledek_CES$Country[i]
    alpha <- VES_vysledky_alpha$alpha[i]
    delta <- VES_vysledky$delta[i]
    rho <- VES_vysledky$rho[i]
    for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
        Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year])   # Převod na num. typ
        K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num.typ
        L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year])  # Převod na nume. typ
        # Výpočet elasticity vstupu kapitálu pro danou zemi a rok
        eta_L <- (alpha * delta * L_value * rho) / (L_value +
        (K_value)*(-1 + rho))
        # Uložení výsledku do datového rámce
        novy_radek <- data.frame(Country = country, Year =
         as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Eta_L = eta_L)
        novy_dataset <- rbind(novy_dataset, novy_radek)
    }
}
# Výpis výsledků
print(novy_dataset)

# VÝPOČET VSTUPU KAPITÁLU NA VÝSTUPU VES
# Inicializace datového rámce pro ukládání výsledků
eta_K2 <- data.frame(Country = character(), Year = integer(), Eta_K =
numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet elasticity kapitálu
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
  country <- vysledek_CES$Country[i]
  alpha <- VES_vysledky_alpha$alpha[i]
```

```
  delta <- VES_vysledky$delta[i]
  rho <- VES_vysledky$rho[i]
  for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
    Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year]) # Převod na num. typ
    K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year]) # Převod na num. typ
    L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year]) # Převod na num. typ
    # Výpočet elasticity vstupu kapitálu pro danou zemi a rok
    eta_K <- (alpha * (L_value + K_value * (-1 + rho)) - delta * L_value *
    rho) / (L_value + (K_value) * (-1 + rho))
    # Uložení výsledku do datového rámce
    novy_radek <- data.frame(Country = country, Year =
    as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Eta_K = eta_K)
    eta_K2 <- rbind(eta_K2, novy_radek)
  }
}
# Výpis výsledků
print(eta_K2)

# VES ELASTICITA
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků
sigma_results <- data.frame(Country = character(), Year =
integer(), Sigma =
 numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet hodnoty
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
    country <- vysledek_CES$Country[i]
    alpha <- VES_vysledky_alpha$alpha[i]
    delta <- VES_vysledky$delta[i]
    rho <- VES_vysledky$rho[i]
    for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
        Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year])   # Převod na num. typ
        K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
```

```
        L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        # Výpočet hodnoty pro danou zemi a rok
        sigma <- 1 + ((rho - 1) / (1 - delta * rho)) * (K_value /
        L_value)
        # Uložení výsledku do datového rámce
        new_row <- data.frame(Country = country, Year =
         as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Sigma = sigma)
        sigma_results <- rbind(sigma_results, new_row)
    }
}
# Výpis výsledků
print(sigma_results)

# MRS PRO VES
# Inicializace prázdného datového rámce pro ukládání výsledků sigma
sigma_results <- data.frame(Country = character(), Year =
integer(), Sigma =
 numeric(), stringsAsFactors = FALSE)
# Pro každou zemi a každý rok bude proveden výpočet hodnoty
for (i in 1:nrow(vysledek_CES)) {
    country <- vysledek_CES$Country[i]
    alpha <- VES_vysledky_alpha$alpha[i]
    delta <- VES_vysledky$delta[i]
    rho <- VES_vysledky$rho[i]
    for (year in 2:ncol(Y_scaled)) {
        Y_value <- as.numeric(Y_scaled[i, year])   # Převod na num. typ
        K_value <- as.numeric(capital_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        L_value <- as.numeric(labour_scaled[i, year])  # Převod na num. typ
        # Výpočet hodnoty pro danou zemi a rok
        sigma <- (L_value + K_value * (-1 + rho) - delta * L_value
        * rho) /
         (delta * K_value * rho)
```

```
        # Uložení výsledku do datového rámce
        new_row <- data.frame(Country = country, Year =
         as.numeric(names(Y_scaled)[year]), Sigma = sigma)
        sigma_results <- rbind(sigma_results, new_row)
    }
}
# Výpis výsledků
print(sigma_results)

# GRAFY
# GRAF PRO CAPITAL
# Převedení dat do dlouhého formátu s funkcí pivot_longer
long_data <- pivot_longer(capital_copy, cols = -Country, names_to
= "Year",
 values_to = "Value")
# Vytvoření grafu s logaritmickou škálou na ose y
ggplot(long_data, aes(x = as.factor(Year), y = Value, group =
Country, color =
 reorder(Country, -Value))) +
  geom_line() +
  labs(x = "Year", y = "Value", title = "Capital") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  scale_color_viridis_d() +
  scale_y_continuous(trans = "log2")

# GRAF PRO LABOUR
# Převedení dat do dlouhého formátu
labour_long <- gather(labour_copy, Year, Value, -Country)
# Vytvoření grafu pro labour s seřazenými popisky zemí podle hodnoty
ggplot(labour_long, aes(x = as.factor(Year), y = Value, group = Country,
```

```
color  = reorder(Country, -Value))) +
  geom_line() +
  labs(x = "Year", y = "Value", title = "Labour") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  scale_color_viridis_d()
scale_y_continuous(trans = "log2")

# GRAF PRO Y
# Převedení dat do dlouhého formátu
Y_long <- gather(Y_copy, Year, Value, -Country)
# Vytvoření grafu s seřazenými popisky zemí podle hodnoty
ggplot(Y_long, aes(x = as.factor(Year), y = Value, group =
Country, color =
 reorder(Country, -Value))) +
  geom_line() +
  labs(x = "Year", y = "Value", title = "Y") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  scale_color_viridis_d()
scale_y_continuous(trans = "log2")

# HISTOGRAM ALPHA BETA
# Vytvoření histogramu
# Určení hranic sloupců histogramu
bins <- seq(0.7, 2.0, by = 0.05)
# Vytvoření histogramu
ggplot(data = vysledek_ordered, aes(x = alpha + beta)) +
  geom_histogram(binwidth = 0.05, color = "black", fill =
  "skyblue", alpha =
```

```
    0.8) +
  scale_x_continuous(breaks = bins) +  # Nastavení hranic na ose x
  labs(title = "Histogram součtů Alpha a Beta podle zemí", x = "Součet
  Alpha a  Beta", y = "Počet") +
  theme_minimal()

# SLOUPCOVÝ GRAF HODNOT ALPHA A BETA
library(ggplot2)
# Seřazení výsledku podle součtu alpha a beta
vysledek_ordered <- vysledek[order(-(vysledek$alpha +
vysledek$beta)), ]
# Vytvoření faktoru pro seřazení legendy podle hodnot v grafu
vysledek_ordered$Country <- factor(vysledek_ordered$Country,
levels =
 vysledek_ordered$Country)
# Vytvoření grafu s legendou a seřazenou legendou podle hodnot v grafu
ggplot(data = vysledek_ordered, aes(x = reorder(Country, -(alpha +
beta)), y =
    alpha + beta, fill = Country)) +
  geom_col() +
  labs(title = "Součet hodnot Alpha a Beta podle zemí", x =
  "Země", y = "Součet
    Alpha a Beta") +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  geom_text(aes(label = Country), vjust = -0.5, size = 3, color =
  "black") +
  theme(legend.position = "right", legend.box = "horizontal",
  legend.direction
  = "vertical") +
  scale_x_discrete(limits = rev(levels(vysledek_ordered$Country)))
```

```
# SLOUPCOVÝ GRAF HODNOT ALPHA
library(ggplot2)
# Seřazení výsledku podle hodnoty alpha
vysledek_ordered <- vysledek[order(-vysledek$alpha), ]
# Vytvoření faktoru pro seřazení legendy podle hodnot v grafu
vysledek_ordered$Country <- factor(vysledek_ordered$Country,
levels =
vysledek_ordered$Country)
# Vytvoření grafu s legendou a seřazenou legendou podle hodnot v grafu
ggplot(data = vysledek_ordered, aes(x = reorder(Country, -alpha),
y = alpha, fill =
Country)) +
  geom_col() +
  labs(title = "Hodnoty Alpha podle zemí", x = "Země", y =
  "Alpha") +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  geom_text(aes(label = Country), vjust = -0.5, size = 3, color =
  "black") +
  theme(legend.position = "right", legend.box = "horizontal",
  legend.direction =
  "vertical") +
  scale_x_discrete(limits = rev(levels(vysledek_ordered$Country)))

# SLOUPCOVÝ GRAF PRO BETA
# Seřazení výsledku podle hodnoty beta
vysledek_ordered <- vysledek[order(-vysledek$beta), ]
# Vytvoření faktoru pro seřazení legendy podle hodnot v grafu
vysledek_ordered$Country <- factor(vysledek_ordered$Country,
levels =
vysledek_ordered$Country)
# Vytvoření grafu s legendou a seřazenou legendou podle hodnot v grafu
```

```
ggplot(data = vysledek_ordered, aes(x = reorder(Country, -beta), y
= beta, fill =
Country)) +
  geom_col() +
  labs(title = "Hodnoty Beta podle zemí", x = "Země", y = "Beta") +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust
  = 1)) +
  geom_text(aes(label = Country), vjust = -0.5, size = 3, color = "black") +
  theme(legend.position = "right", legend.box = "horizontal",
  legend.direction =  "vertical") +
  scale_x_discrete(limits = rev(levels(vysledek_ordered$Country)))

# GRAF PRO ELASTICITU PRÁCE NA VÝSTUPU
# Vytvoření grafu pro elasticity vstupu práce s legendou seřazenou vzestupně
podle velikosti hodnoty
library(ggplot2)
ggplot(data = results_df, aes(x = Year, y = X2011, color = reorder(Country, -
X2011))) +
  geom_line() +
  labs(title = "Elasticity of Labor Input Over Time",
       x = "Year",
       y = "Elasticity of Labor Input",
       color = "Country") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "right") +
  scale_color_discrete(guide = guide_legend(title = "Country"))

# VYTVOŘENÍ GRAFU PRO MRS
library(ggplot2)
library(tidyr)
# Převedení dat do dlouhého formátu
MRS_long <- pivot_longer(vysledek_MRS, -c(Country, Year), names_to = "Year",
```

```r
values_to = "Value")
# Vytvoření grafu
ggplot(MRS_long, aes(x = as.factor(Year), y = Value, group = Country, color
= reorder(Country, -Value))) +
  geom_line() +
  labs(x = "Year", y = "Value", title = "Marginal Rate of Substitution") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust = 1)) +
  scale_color_viridis_d()

# GRAF PRO ELASTICITU KAPITÁLU NA VÝSTUPU CES
library(ggplot2)
# Seřazení legendy vzestupně podle hodnot proměnné Eta_K
results_df$Country <- factor(results_df$Country, levels =
unique(results_df$Country[order(-results_df$Eta_K)]))
# Vytvoření spojnicového grafu s diskrétní osou x pro každý rok
ggplot(results_df, aes(x = as.factor(Year), y = Eta_K, group = Country,
color = Country)) +
  geom_line() +
  labs(x = "Year", y = expression(eta[K]), title = "Elasticity of Capital Input
  by Year and Country") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust = 1),
        legend.position = "bottom") + # Otočení popisků na ose x
  scale_color_viridis_d()  # Nastavení barev podle zemí

# PRO VES VÝSTUPY BYLY POUŽITY STEJNÉ GRAFY

# DIAGNOSTIKA
bptest(residuals(model) ~ capital_numeric + labour_numeric)
HISTOGRAM REZIDUÍ
library(ggplot2)
```

```r
histogram <- ggplot(rezidua_df, aes(x = Residua)) +
  geom_histogram(binwidth = 0.05, breaks = seq(-0.25, 0.25, by = 0.05),
  fill =   "skyblue", color = "black", alpha = 0.8) +
  labs(title = "Histogram reziduí", x = "Rezidua", y = "Počet") +
  theme_minimal()
print(histogram)

# HISTOGRAM REZIDUÍ PRO JEDNOTLIVÉ STÁTY
library(ggplot2)
num_countries <- nrow(rezidua_df) # Počet zemí
# Vytvoření prázdného listu pro ukládání histogramů
histograms <- vector("list", length = num_countries)
# Vytvoření histogramů pro jednotlivé země
for (i in 1:num_countries) {
  country <- rezidua_df$Country[i]
  rezidua_country <- rezidua_df$Residua[rezidua_df$Country == country]
  # Vytvoření histogramu pro danou zemi
  histogram <- ggplot(data.frame(Residua = rezidua_country), aes(x =
  Residua)) +
  geom_histogram(binwidth = 0.05, breaks = seq(-0.25, 0.25, by = 0.05),
  fill =   "skyblue", color = "black", alpha = 0.8) +
    labs(title = paste("Histogram reziduí -", country), x = "Rezidua", y =
    "Počet") +
    theme_minimal()
  histograms[[i]] <- histogram
}
print(histograms) # Zobrazení histogramů

# Test autokorelace reziduí
library(lmtest)
# Získání reziduí z modelu
residuals <- as.vector(residuals(model))
```

```r
# Použití funkce durbinWatsonTest() na rezidua
durbinWatsonTest(residuals)

# Shapiro-Wilk test normality
> residuals <- resid(model)
> shapiro.test(residuals)

# Test multikolinearity
# Vytvoření matice korelace
cor_matrix <- cor(data.frame(capital_numeric, labour_numeric))
print(cor_matrix) # Výpis matice korelace
```

Abstrakt

Zábranová, L. (2024). *Modelování a odhady produkčních funkcí* [Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni].

Klíčová slova: produkční funkce; modelování; odhad; historický vývoj; diagnostické nástroje; ekonomická analýza

Tato práce zkoumá modelování produkčních funkcí, zahrnující historický vývoj, tvary a klíčové ekonomické koncepty. Diskutuje krátkodobé a dlouhodobé rozdíly a řeší nedostatky produkčních funkcí, včetně kontroverzí kolem kapitálu a otázek udržitelnosti a endogenity. Jsou zde zkoumány diagnostické nástroje pro analýzu, jako jsou testy heteroskedasticity a autokorelace, a je provedena jejich aplikace na produkční funkce. Práce dále analyzuje modelování produkčních funkcí pomocí reálných dat a aplikuje teoretické koncepty, zejména se zaměřuje na modely Cobb-Douglas, CES a VES. Výsledky nabízejí podrobný pohled na vztah mezi vstupy a výstupy. Celkově práce poskytuje komplexní přehled o produkčních funkcích a jejich aplikaci v ekonomické analýze, což je přínosem k lepšímu porozumění optimalizace výrobních procesů a rozhodování v podnikovém prostředí. Důležitým zjištěním práce je, že zvolená produkční funkce má klíčový vliv na výsledky analýzy, což podtrhuje důležitost správného výběru modelu.

Abstract

Zábranová, L. (2024). *Modeling and estimation of production functions* [Master's Thesis, University of West Bohemia].

Key words: production functions; modeling; estimation; historical development; diagnostic tools; economic analysis

This study delves into the modeling of production functions, covering their historical evolution, various forms, and fundamental economic concepts. It explores both short-term and long-term distinctions while addressing the limitations of production functions, including debates surrounding capital and issues of sustainability and endogeneity. Diagnostic tools for analysis, such as tests for heteroskedasticity and autocorrelation, are examined and applied to production functions. Additionally, the study scrutinizes the modeling of production functions using real-world data and applies theoretical frameworks, with a specific emphasis on the Cobb-Douglas, CES and VES models. The findings provide a nuanced understanding of the relationship between inputs and outputs. Overall, this research offers a comprehensive insight into production functions and their relevance in economic analysis, contributing to enhanced comprehension of optimizing production processes and decision-making in business settings. A key revelation of this work is the pivotal influence of the chosen production function on analysis outcomes, underscoring the importance of model selection.