ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYŠETŘOVÁNÍ VLASTNOSTÍ A VÝZNAMNÝCH PRVKŮ BINÁRNÍCH OPERACÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Rašková
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne …………………

....
vlastnoruční podpis

Ráda bych poděkovala panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za vstřícný přístup při vedení mé bakalářské práce a za odborné konzultace a rady, kterých se mi dostávalo.

OBSAH

SEZNAM SYMBOLŮ **3**
ÚVOD **4**
1 BINÁRNÍ OPERACE **5**
1.1 KARTÉZSKÝ SOUČIN 5
1.1.1 Počet prvků kartézského součinu *5*
1.1.2 Grafické znázornění kartézského součinu *5*
1.2 RELACE 7
1.2.1 Zápis binární relace *8*
1.3 ZOBRAZENÍ 8
1.3.1 Zápis zobrazení *8*
1.3.2 Základní typy zobrazení *9*
1.4 OPERACE 9
1.4.1 Příklady n-árních operací *10*
1.5 SOUVISLOST POJMŮ RELACE, ZOBRAZENÍ, OPERACE 10
1.6 BINÁRNÍ OPERACE 11
1.6.1 Označení binární operace *11*
1.6.2 Způsoby zápisu binární operace *12*
1.6.3 Možnosti zadávání binárních operací *12*
1.6.4 Příklady binárních operací na množině *14*
2 VLASTNOSTI BINÁRNÍCH OPERACÍ A JEJICH VÝZNAMNÉ PRVKY **16**
2.1 BINÁRNÍ OPERACE NEOMEZENĚ DEFINOVANÁ NA MNOŽINĚ 16
2.2 KOMUTATIVNOST BINÁRNÍ OPERACE 17
2.3 ASOCIATIVNOST BINÁRNÍ OPERACE 18
2.4 NEUTRÁLNÍ PRVEK 19
2.5 AGRESIVNÍ PRVEK 20
2.6 INVERZNÍ PRVEK 22
2.7 BINÁRNÍ OPERACE S KRÁCENÍM 24
2.8 IDEMPOTENTNÍ PRVEK 24
2.9 BINÁRNÍ OPERACE S DĚLENÍM 25
2.10 DISTRIBUTIVNOST BINÁRNÍ OPERACE 26
2.11 KOMUTATIVNOST VS ASOCIATIVNOST 27
3 BINÁRNÍ OPERACE NA ŠKOLÁCH **30**
3.1 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH 30
3.2 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA GYMNÁZIÍCH 31
3.3 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH 31
3.4 CHYBY PŘI VÝUCE BINÁRNÍCH OPERACÍ 33
4 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY **34**
4.1 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY S JEDNOU BINÁRNÍ OPERACÍ 34
4.1.1 Grupoid *34*
4.1.2 Pologrupa *34*
4.1.3 Monoid *34*
4.1.4 Grupa *35*
4.1.5 Přehled algebraických struktur s jednou binární operací *35*
4.2 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY SE DVĚMA BINÁRNÍMI OPERACEMI 36
4.2.1 Polookruh *36*
4.2.2 Okruh *37*
4.2.3 Obor integrity *37*
4.2.4 Těleso *37*
4.2.5 Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi *37*
5 PRAKTICKÁ ČÁST **39**
5.1 ÚLOHA Č. 1 39

5.2 ÚLOHA Č. 2 ... 42
5.3 ÚLOHA Č. 3 ... 45
5.4 ÚLOHA Č. 4 ... 49
5.5 ÚLOHA Č. 5 ... 52

ZÁVĚR ... 54

RESUMÉ ... 55

SEZNAM LITERATURY ... 56

SEZNAM TABULEK ... 59

SEZNAM OBRÁZKŮ ... 60

SEZNAM SYMBOLŮ

$\in$	je prvkem
$\wedge$	konjunkce
$\cup$	sjednocení
$\cap$	průnik
$\subseteq$	je podmnožinou
$\subset$	je podmnožinou nebo se rovná
$\exists!$	existuje právě jeden
$\exists$	existuje
$\forall$	pro všechny
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\emptyset$	prázdná množina
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Z}_n$	množina zbytkových tříd
$\square$	důkaz je dokázán

Poznámka: Nejsou zde uvedeny symboly všeobecně známé nebo ty, které jsou v textu přímo vysvětleny.

ÚVOD

Tématem této bakalářské práce je vyšetřování vlastností a významných prvků binárních operací. Práce se zaměřuje spíše na teoretickou matematiku než na matematickou didaktiku, té je věnována pouze jedna část. Důvodem je, že autorka se o toto téma zajímá více než o témata spojená s pedagogikou.

Práce je rozdělena do pěti hlavních kapitol. První kapitola se zabývá definováním pojmu binární operace a k němu pojmům nadřazeným, jako kartézský součin, relace, zobrazení či operace. V následující kapitole jsou podrobně rozebrány vlastnosti a významné prvky binárních operací, které jsou zároveň vysvětleny na vhodných příkladech. Tématem třetí části bakalářské práce je využití binárních operací na školách, kde autorka uvádí několik příkladů, při nichž se žáci setkají s binárními operacemi dříve než v učivu vysokých škol. Dále je krátce popsána problematika spojená právě s výukou binárních operací. V předposlední kapitole jsou stručně definovány základní typy algebraických struktur s jednou a se dvěma binárními operacemi. Poslední část je praktická.

Cílem práce je zkompletování veškerých podstatných informací týkajících se zvoleného tématu. Přestože se jedná o učivo vysokých škol, je důležité si uvědomit, že poměrně velký základ získají studenti již v průběhu svého předchozího studia počínaje základní školou. Díky těmto základním informacím lze následně pochopit i složitější látku a řešit náročnější úlohy. Právě v praktické části této práce je představeno několik takových úloh, které mohou v budoucnu posloužit například při výuce předmětů na vysokých školách, jejichž náplní jsou binární operace.

Pro napsání této práce bylo převážně využito odborné literatury, tedy knih s algebraickou tématikou zabývajících se především binárními operacemi. Dále autorka využila i několik vědeckých cizojazyčných článků či skripta od vyučujících na vysokých školách.

1 BINÁRNÍ OPERACE

Než se autorka začne dopodrobna zabývat vlastnostmi binárních operací a jejich významnými prvky, je nezbytné v této kapitole definovat základní pojmy, jako je kartézský součin, relace, zobrazení či operace, které jsou potřebné ke správnému definování pojmu binární operace.

1.1 KARTÉZSKÝ SOUČIN

Uspořádanou dvojici prvků x a y obvykle značíme $[x, y]$. Prvek x nazýváme první složkou, prvek y druhou složkou dané uspořádané množiny.[1]

Definice č. 1: Nechť máme dvě neprázdné množiny A a B, pak kartézským součinem těchto množin, značíme $A \times B$, rozumíme uspořádanou dvojici $[x, y]$, kde první složka obsahuje prvek z množiny A, druhá složka prvek z množiny B.[2]
Symbolicky: $A \times B = \{[x, y]: x \in A \land y \in B\}$ [3]

Příklad č. 1: Mějme množinu $A = \{a, b, c\}$ a množinu $B = \{1, 2\}$. Pak kartézský součin těchto množin je $A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$.

1.1.1 POČET PRVKŮ KARTÉZSKÉHO SOUČINU

Počet prvků kartézského součinu $A \times B$ lze snadno vypočítat jako součin počtu prvků množiny A a počtu prvků množiny B.
Symbolicky: $m\,(A \text{ x } B) = m\,(A) \cdot m\,(B)$ [4]

Příklad č. 2: Mějme množiny A a B z příkladu č. 1, pak se počet prvků kartézského součinu těchto množin rovná
$m\,(A \text{ x } B) = m\,(A) \cdot m\,(B) = 3 \cdot 2 = 6$.

1.1.2 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ KARTÉZSKÉHO SOUČINU

Kartézský součin je možné vypsat jako výčet uspořádaných dvojic, jak tomu bylo v předchozích příkladech, nebo znázornit v grafu. Existují tři základní způsoby grafického znázornění kartézského součinu, a to kartézský, šachovnicový a uzlový graf.

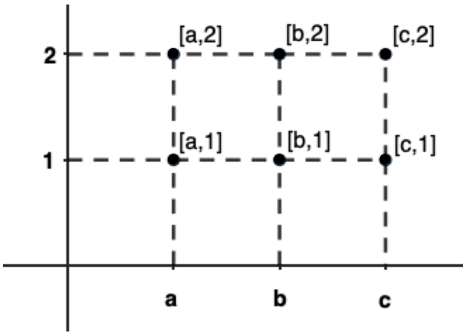
Poznámka (dále jen pozn.): Pro tvorbu kartézského a šachovnicového grafu budou opět využity množiny A, B z příkladu č. 1.

[1] BĚLÍK, Miroslav. Sbírka úloh z elementární aritmetiky s pokyny k řešení. s. 76.
[2] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 150.
[3] BĚLÍK, Miroslav. Sbírka úloh z elementární aritmetiky s pokyny k řešení. s. 76.
[4] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 150.

Kartézský graf

Pro tvorbu kartézského grafu si nejdříve zvolíme dvě kolmé přímky, nejlépe vodorovnou a svislou. Na vodorovné přímce vyznačíme množinu *A*, na přímce svislé množinu *B*. Ve všech bodech na daných přímkách vztyčíme kolmice. Poté označíme průsečíky vzniklé z těchto kolmic.[5]

Obrázek č. 1 – Kartézský graf.

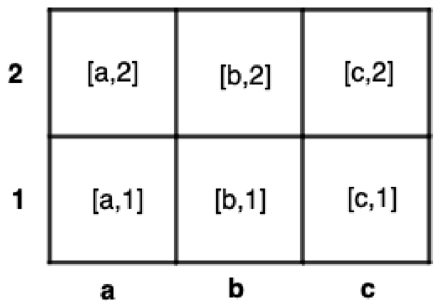


Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

Šachovnicový graf

Podobným postupem jako byl vytvořen kartézský graf, lze sestavit i šachovnicový graf. Symbolem prvku množiny není bod, ale celý čtverec o stranách $x \in A$ a $y \in B$.[6]

Obrázek č. 2 – Šachovnicový graf.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

Uzlový graf

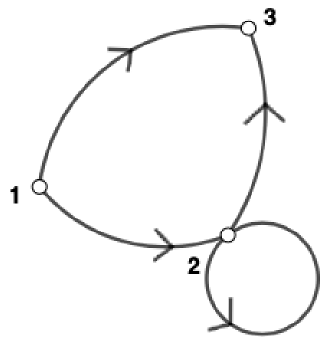
Zcela jiné je grafické znázornění kartézského součinu dvou množin pomocí uzlového grafu. Jako první krok je důležité vytvořit sjednocení množin *A* a *B*, tedy $A \cup B$. Každý prvek z průniku je znázorněn malým kroužkem, který nazýváme uzel. Uspořádanou dvojici

[5] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 151.
[6] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 152.

je pak možné vytvořit tak, že uzel x bude s uzlem y spojen jednoduchým obloučkem se šipkou, tím vznikne tzv. orientovaná hrana grafu. Šipka vždy směřuje od uzlu x k uzlu y. Pokud se nějaký prvek v množinách A, B opakuje, tedy m $(A \cup B)$ < m (A) + m (B), pak vzniká tzv. smyčka, jinak řečeno hrana grafu vycházející z jednoho uzlu vstupuje do uzlu stejného.[7]

Pozn.: Pro lepší příklad znázornění tohoto grafu použijeme množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Kartézský součin těchto množin bude $A \times B = \{[1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3]\}$, sjednocení množin $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

Obrázek č. 3 – Uzlový graf.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

1.2 RELACE

Definice č. 2: Nechť máme množiny $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ a množinu R, která je podmnožinou kartézského součinu n množin, pak se množina R nazývá n-ární relací mezi množinami $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, kde n je přirozené číslo.[8]

N-ární relaci lze také nazývat jako relaci četnosti n. Pro některé n-ární relace existují speciální výrazy. Například (dále jen např.), když $n = 1$, hovoříme o unární relaci, pro $n = 2$ používáme název binární relace a když $n = 3$, relaci nazýváme ternární.[9]

Nejčastějším případem relací, s nimiž se obvykle setkáváme, jsou relace binární, které budou probrány níže.

Definice č. 3: Nechť máme dvě libovolné množiny A, B a množinu R, která je podmnožinou kartézského součinu, tedy $R \subseteq A \times B$, pak binární relace z množiny A do

[7] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 152–153.
[8] VYŠÍN, Jan. Metodika řešení matematických úloh. s. 185.
[9] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 35.

množiny B je uspořádaná trojice $\langle R, A, B\rangle$. Množina A pak představuje levý obor binární relace, množina B pravý obor.[10]

Pokud $A = B$, pak následující relace $R \subseteq A \, x \, A$ se nazývá jako relace na množině A.[11]

Příklad č. 3: Mějme množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, jejichž kartézský součin je $A \times B = \{[1, 2], [1, 4], [1, 6], [2, 2], [2, 4], [2, 6], [3, 2], [3, 4], [3, 6]\}$, a relaci $R \subseteq A \times B$ definovanou takto $xRy \Leftrightarrow x < y$. Pak výsledná relace bude $R = \{[1, 2], [1, 4], [1, 6], [2, 4], [2, 6], [3, 4], [3, 6]\}$.

1.2.1 ZÁPIS BINÁRNÍ RELACE

Ve většině případech značíme binární relaci ne jako uspořádanou trojici, ale pouze jako množinu R.[12] V některých zdrojích autoři používají místo písmena R jiná značení, nejčastěji to je řecké písmeno ϱ.[13]

Binární relaci můžeme považovat za množinu určitých uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Pokud $[x, y] \in R$, pak prvek x je v relaci R s prvkem y, symbolicky zapsáno xRy. Lze tedy užít zápis $[x, y] \in R$ nebo xRy, jsou totiž ekvivalentní.[14]

1.3 ZOBRAZENÍ

Definice č. 4: Nechť máme dvě neprázdné množiny A, B a relaci $f \subseteq A \times B$, která splňuje vlastnost, že ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$, tak že x je v relaci s y. Pak relaci f nazýváme zobrazením.[15]

Množinu A nazýváme jako množinu vzorů, množinu B jako množinu obrazů. Jelikož je pojem zobrazení totožný s pojmem funkce, lze použít i jiného pojmenování, množina A představuje definiční obor funkce, množina B obor funkčních hodnot.[16]

1.3.1 ZÁPIS ZOBRAZENÍ

Říkáme, že zobrazení f zobrazuje množinu A do množiny B, což lze také zapsat jako $f\colon A \to B$ nebo $A \xrightarrow{f} B$.[17] V jiných zdrojích je pro označení množiny všech zobrazení množiny A do množiny B použit symbol B^A, tedy $f \in B^A$.[18]

[10] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 93.
[11] PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. s. 14.
[12] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 93.
[13] PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. s. 14.
[14] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 93.
[15] PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. s. 17.
[16] VYŠÍN, Jan. Metodika řešení matematických úloh. s. 184.

1.3.2 ZÁKLADNÍ TYPY ZOBRAZENÍ

Injektivní zobrazení

Řekněme, že zobrazení f: $A \to B$ je injektivní, nebo také prosté, právě tehdy, když každé dva různé vzory z množiny vzorů A mají různé obrazy v množině obrazů B.
Symbolicky: $\forall\, x,y \in A$: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ [19]

Surjektivní zobrazení

Řekněme, že zobrazení f: $A \to B$ je surjektivní, nebo také zobrazení na množinu, právě tehdy když každý prvek z množiny obrazů B je obrazem nějakého prvku množiny vzorů A.
Symbolicky: $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A$: $f(x) = y$ [20]

Bijektivní zobrazení

Řekněme, že zobrazení f: $A \to B$ je bijektivní, nebo také vzájemně jednoznačné, právě tehdy, když zobrazení je injektivní a surjektivní zároveň.
Symbolicky: $\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A$: $f(x) = y$ [21]

1.4 OPERACE

Definice č. 5: Nechť máme libovolnou neprázdnou množinu A a zobrazení f kartézské mocniny A^n do množiny A. Pak se toto zobrazení nazývá n-ární operace na množině A, nebo též operace četnosti n, kde $n \in \mathbb{N}$. K libovolné n-tici $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ z A^n existuje prvek $b \in A$, jenž je jejím obrazem v zobrazení f. Tento prvek se pak nazývá výsledkem operace a je označován $b = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.[22]

Definovat n-ární operaci lze i následujícím způsobem. Mějme opět neprázdnou množinu A a zobrazení $\circ$, které je formulováno takto:

- $\circ$: $A \to A$ se nazývá unární operace na množině A,
- $\circ$: $A \times A \to A$ se nazývá binární operace na množině A,
- $\circ$: $A \times A \times A \to A$ se nazývá ternární operace na množině A,

[17] KOSMÁK, Ladislav a Masarykova univerzita. Množinová algebra. s. 39.
[18] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 125.
[19] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 13.
[20] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 14.
[21] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 14.
[22] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 60.

- $\circ$: $A \times A \times \ldots \times A \rightarrow A$ se nazývá *n*-ární operace na množině *A*.[23]

Jelikož má *n*-ární operace na množině *A* za prvky uspořádané (n + 1)-tice prvků z množiny *A*, pak ji lze také rozumět jako (n + 1)-ární relaci na množině *A*.[24]

1.4.1 PŘÍKLADY N-ÁRNÍCH OPERACÍ

Základním typem *n*-árních operací jsou operace unární, kam je možné zařadit opačnou hodnotu $\circ (x) = -x$ pro celá čísla, nebo převrácenou hodnotu $\circ (x) = 1 / x$ pro nenulová racionální čísla. Nejčastěji se lze setkat s operacemi binárními. Příkladem těchto operací může být $\circ (x, y) = (x + y)$ pro celá čísla, či sjednocení $\circ (X, Y) = X \cup Y$ pro prvky systému 2^U. Aritmetický průměr tří reálných čísel $\circ (x, y, z) = \frac{(x + y + z)}{3}$ patří k operacím ternárním. Obvykle se ale operace četnosti tři a výše vyjadřují pomocí operací nižších četností.[25]

1.5 SOUVISLOST POJMŮ RELACE, ZOBRAZENÍ, OPERACE

Definice pojmů relace, zobrazení a operace byly již podrobně vysvětleny výše, proto není nutné je znovu uvádět. Pro snazší formulaci zde budou použita označení pro binární relace, popřípadě (dále jen popř.) binární operace, tvrzení však platí i pro relace, popř. operace jiných četností.

Lze tvrdit, že každé zobrazení f: $A \rightarrow B$ představuje speciální případ binární relace mezi množinami *A* a *B* a zároveň každá binární operace na množině *A* je speciálním případem zobrazení A x $A \rightarrow A$, a tedy i speciálním případem binární relace.[26]

Pro lepší představu byl vytvořen diagram, který zobrazuje vztahy mezi danými pojmy.

[23] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 18.
[24] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 61.
[25] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 128.
[26] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 21.

Obrázek č. 4 – Hierarchie mezi pojmy.

Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

1.6 BINÁRNÍ OPERACE

Definice č. 6: Nechť máme tři neprázdné množiny A, B, C, pak každé zobrazení neprázdné části kartézského součinu $A \times B$ do množiny C se nazývá binární operace. Pokud $A = B = C$, pak zobrazení $\circ: A \times A \to A$ lze nazvat jako binární operace na množině A.[27]

Binární operaci $\circ$ na množině A je možné chápat také jako pojem ekvivalentní s pojmem ternární relace na množině A.[28]

Pozn.: Pokud nebude dále jinak řečeno, pojmu binární operace, popř. operace budeme stále rozumět jako pojmu binární operace na množině.

1.6.1 OZNAČENÍ BINÁRNÍ OPERACE

Lze tvrdit, že binární operace $\circ$ na množině A přiřazuje každé uspořádané dvojici prvků $[x, y] \in A \times A$ jednoznačně určený prvek $\circ\ [x, y] \in A$. Pro tuto skutečnost je možné užít jednoduššího zápisu $x \circ y$, podobně jako tomu bylo u binárních relací.[29]

Pro označení binární operace na množině bylo doposud využíváno pouze symbolu $\circ$. Existuje však mnoho dalších symbolů, kterými se binární operace na množině dají označovat, např. $\triangle$, $\square$, $\oplus$, $\otimes$, $*$. Je možné využívat i symbolu $+$ nebo $\cdot$, toto označení však není zcela vhodné, jelikož pak snadno může dojít k záměně se znaky pro sčítání a násobení v číselných množinách.[30]

[27] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 234.
[28] KUROŠ, Aleksandr Gennad'jevič. Kapitoly z obecné algebry. s. 26.
[29] BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). s. 20.
[30] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 96.

1.6.2 ZPŮSOBY ZÁPISU BINÁRNÍ OPERACE

Jak bylo uvedeno výše, u binárních operací se operační symbol obvykle umisťuje mezi operandy, tento zápis nazýváme infixová notace. Je však možné operační symbol zapsat před, popř. za dané operandy, pak lze hovořit o prefixové, popř. postfixové notaci.

Zápisy, které jsou pro lepší přehlednost zapsány ve třech sloupcích, vypadají takto:

Prefixová notace	**Infixová notace**	**Postfixová notace**
$\circ\, xy$	$x \circ y$	$xy \circ$
$* \circ xy \circ xz$	$(x \circ y) * (x \circ z)$	$xy \circ xz \circ *$

Hlavní výhodou prefixové a postfixové notace je, že při určité znalosti četnosti daných operačních symbolů není potřeba při zápisu využívat závorky, což se např. využívá při překladu programovacích jazyků. [31]

Jak již bylo zmíněné pro označení binární operace se dají využívat i symboly + (sčítání) a · (násobení). Pro tyto zápisy pak existují následující speciální pojmenování:[32]

Obecný zápis	**Multiplikativní zápis**	**Aditivní zápis**
$x \circ y$	$x \cdot y$ nebo xy	$x + y$

Pozn.: V obecném zápisu byl použit symbol $\circ$, dá se však užít i jakéhokoliv jiného symbolu, mimo + a ·.

1.6.3 MOŽNOSTI ZADÁVÁNÍ BINÁRNÍCH OPERACÍ

Pro zadávání binárních operací existuje hned několik různých způsobů. V této podkapitole bude každý z nich podrobněji rozebrán a uveden na vhodném příkladě.

Binární operace zadané předpisem

Tímto způsobem je možné zapisovat operace definované na číselných množinách, využívá se zejména pokud jde o množiny s velkým počtem prvků. Nechť máme množinu čísel A, pak operaci $\circ$ na množině A lze zadat předpisem tak, že výsledná hodnota bude opět náležet do množiny A. Předpis definuje vztah mezi uspořádanou dvojicí $[x, y]$.[33]

[31] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 128.
[32] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 67.
[33] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 20.

Příklad č. 4: Mějme libovolnou uspořádanou dvojici čísel $[x, y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a operaci $\circ$, která je zadaná předpisem $x \circ y = 2x + y + 1$. Pokud za x a y dosadíme jakékoliv číslo z oboru $\mathbb{N}$, výsledek bude vždy přirozené číslo, jde tedy o operaci $\circ\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Binární operace zadané tabulkou

Pro konečné množiny s malým počtem prvků můžeme binární operace na množině zapsat pomocí tabulky, kde jsou přehledně zobrazeny výsledky operace pro každou dvojici operandů. Tuto tabulku nazýváme Cayleyho tabulkou.[34]

Konstrukce této tabulky není obtížná, v záhlaví sloupců i řádků jsou ve shodném pořadí zaznamenaný prvky určité množiny. Zpravidla platí, že do záhlaví řádků se umisťují první složky a do záhlaví sloupců druhé složky. V levém horním rohu tabulky se nachází označení binární operace. Zbylá prázdná pole pak lze snadno vyplnit na základě znalosti určité binární operace.[35]

Příklad č. 5: Mějme množinu $A = \{0, 1\}$ a operaci $\circ$ s předpisem $\forall\, x, y \in A\colon x \circ y = x \Rightarrow y$. Pak Cayleyho tabulka bude vypadat takto:

Tabulka č. 1 – Cayleyho tabulka pro implikaci.

$x \Rightarrow y$	**0**	**1**
0	1	1
1	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

Binární operace graficky znázorněné spojnicovým nomogramem

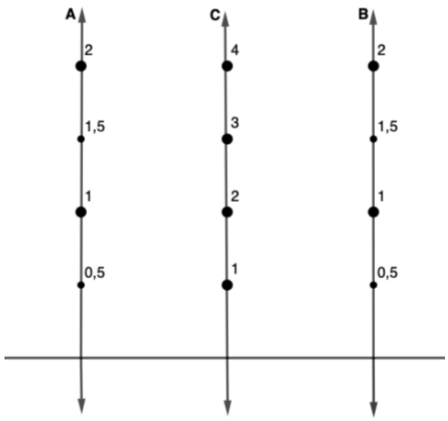
Posledním, ne příliš častým, a ne tak známým způsobem zadávání binárních operací je grafické znázornění pomocí spojnicového nomogramu. Dá se využít pouze pro některé typy binárních operací na množině.

Na spojnicový nomogram můžeme nahlížet jako na funkci $z = f\,(x, y)$, kde části oborů proměnných x, y, z jsou znázorněny na číselných osách A, B, C. Tyto osy představují množiny, pro které platí $x \in A$, $y \in B$ a $z \in C$.[36]

[34] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 20.
[35] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 96.
[36] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 237.

Příklad č. 6: Mějme množiny $A \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{R}$, výslednou množinu $C \in \mathbb{R}$ a binární operaci definovanou předpisem $\forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B\colon x \circ y = x + y$, pak spojnicový nomogram bude vypadat následujícím způsobem:

Obrázek č. 5 – Spojnicový nomogram.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

1.6.4 PŘÍKLADY BINÁRNÍCH OPERACÍ NA MNOŽINĚ

V první části této podkapitoly autorka uvede příklady binárních operací na množině. Dále bude představeno i několik případů, kdy se o binární operace na množině nejedná.

Příklady binárních operací na množině:

- Binární operace sčítání/násobení/odčítání na množině reálných čísel.
- Binární operace dělení na množině reálných čísel mimo nulu, symbolicky $\mathbb{R}$-{0}.
- Binární operace sčítání/násobení/dělení na množině přirozených čísel.
- Binární operace sčítání/násobení/odčítání na množině sudých čísel.
- Binární operace násobení/dělení na množině lichých čísel.
- Binární operace sčítání/násobení na množině zbytkových tříd $\mathbb{Z}_n$, kdy n je přirozené číslo.
- Binární operace konjunkce/disjunkce/ekvivalence/implikace dvou výroků.
- Binární operace průnik/sjednocení dvou množin.

Příklady, kdy se o binární operaci na množině nejedná:

- Odčítání na množině přirozených čísel není binární operace, jelikož např. 2 – 4 = –2, přičemž –2 nepatří do množiny přirozených čísel.
- Sčítání/odčítání na množině lichých čísel není binární operace, jelikož např. 3 + 1= 4, nebo 5 – 3 = 2, přičemž 2 ani 4 není liché číslo.
- Dělení na množině reálných čísel není binární operace, jelikož číslem nula se nedá dělit.
- Dělení na množině celých čísel není binární operace, jelikož např. $2 \div 3 = \frac{2}{3}$, přičemž $\frac{2}{3}$ nepatří do množiny celých čísel.
- Násobení na množině iracionálních čísel není binární operace, jelikož např. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$, přičemž 5 nepatří do množiny iracionálních čísel.

2 VLASTNOSTI BINÁRNÍCH OPERACÍ A JEJICH VÝZNAMNÉ PRVKY

Následující kapitola je věnována hlavnímu tématu této práce, a to vlastnostem binárních operací a jejich významným prvkům. Všechny vlastnosti, popř. významné prvky jsou podrobně rozebrány, definovány a uvedeny na vhodných příkladech. K jejich vyšetření lze využít předpisu operace či Cayleyho tabulky. Vlastnosti, popř. významné prvky v Cayleyho tabulce jsou barevně vyznačeny. V podkapitolách zabývajících se neutrálním, agresivním, inverzním prvkem a krácením binární operace jsou uvedeny věty, které autorka následně dokázala. Poslední část je věnována problému spojenému s komutativností a asociativností binárních operací.

2.1 BINÁRNÍ OPERACE NEOMEZENĚ DEFINOVANÁ NA MNOŽINĚ

Definice č. 7: Nechť máme binární operaci $\circ$ na množině A takovou, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x, y] \in A \times A$, pak ji nazýváme jako operaci neomezeně definovanou na množině A, nebo jen operaci definovanou na množině A.
Symbolicky: $\forall\, x, y \in A\ \exists\, z \in A: x \circ y = z$ [37]

V jiných zdrojích je vlastnost uváděna pod názvem úplná binární operace na množině A či operace uzavřená. V opačných případech pak lze mluvit o neúplné, částečné či parciální binární operaci na množině A.[38]

Tuto vlastnost považujeme za nutnou podmínku existence binární operace, protože pokud není splněna, pak se nejedná o operaci.[39]

Úplnost binární operace lze znázornit i v Cayleyho tabulce. Je-li binární operace neomezeně definovaná na množině A, pak veškerá pole tabulky jsou obsazena nějakým výsledkem z množiny A. Pokud některé z polí bude prázdné, jedná se o neúplnou binární operaci.[40]

[37] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 97.
[38] Operace v množině, vlastnosti binárních operací. PF UJEP, Katedra matematiky.; BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 60.; KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 41.
[39] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 18.
[40] Operace v množině, vlastnosti binárních operací. PF UJEP, Katedra matematiky.

Příklad č. 7: Mějme operaci ○ na množině $A = \{1, 2, 3\}$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 2 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině A.

x + y	**1**	**2**	**3**
1	1	3	×
2	3	×	×
3	×	×	×

Zdroj – vlastní tvorba.

Tabulka není zcela vyplněná, jelikož pro některé x, y neexistuje výsledek, který by patřil do množiny M. Jedná se tedy o neúplnou operaci.

Příklad č. 8: Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ definovanou předpisem $x \circ y = x - y$, pak je tato operace neomezeně definovaná na množině $\mathbb{Z}$, protože dosadíme-li jakoukoliv uspořádanou dvojici $[x, y] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ výsledek operace bude vždy patřit do této množiny.

2.2 KOMUTATIVNOST BINÁRNÍ OPERACE

Definice č. 8: Nechť máme binární operaci ○ na množině A, pak tuto operaci nazýváme komutativní, právě tehdy, když výsledek operace nezávisí na pořadí operandů.
Symbolicky: $\forall\, x, y \in A$: $x \circ y = y \circ x$ [41]

Komutativnost binární operace ○ na množině A lze poznat i z Cayleyho tabulky a to tehdy, když je tabulka osově souměrná podle hlavní diagonály, tedy podle řady prvků procházející horním levým a dolním pravým vrcholem tabulky.[42]

Příklad č. 9: Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 3 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$.

x + y	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

[41] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 19.
[42] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 99.

Pak můžeme říct, že operace je komutativní, jelikož tabulka je osově souměrná podle hlavní diagonály.

Příklad č. 10: Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = 5 \cdot x + 5 \cdot y$. Komutativnost ověříme přímým dosazením do definice:

$$x \circ y = y \circ x,$$

$$5 \cdot x + 5 \cdot y = 5 \cdot y + 5 \cdot x.$$

Jelikož rovnost platí, binární operace ○ je komutativní.

2.3 ASOCIATIVNOST BINÁRNÍ OPERACE

Definice č. 9: Nechť máme binární operaci ○ na množině A, pak tuto operaci nazýváme asociativní, právě tehdy, když konečný výsledek operace tří operandů nezávisí na pořadí uzávorkování.
Symbolicky: $\forall\, x, y, z \in A$: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ [43]

To, zda se jedná o asociativní operaci, nelze z Cayleyho tabulky vyčíst tak snadno, jako tomu je u jiných vlastností. Asociativnost je možné ověřit pouze poměrně zdlouhavým způsobem pomocí systematického dosazování.[44]

Příklad č. 11 a): Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = \frac{x+y}{2}$. Asociativnost ověříme přímým dosazením do definice:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \circ z = x \circ \left(\frac{y+z}{2}\right),$$

$$\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)+z}{2} = \frac{x+\left(\frac{y+z}{2}\right)}{2},$$

$$x = z.$$

Výsledkem rovnice je $x = z$, což znamená, že operace ○ by byla asociativní právě tehdy, pokud platí daná rovnost. Operace ○ tudíž není asociativní, protože vlastnost není splněna pro všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Příklad č. 11 b): Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = x - x \cdot y + y$. Asociativnost ověříme přímým dosazením do definice:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

$$(x - x \cdot y + y) \circ z = x \circ (y - y \cdot z + z),$$

[43] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 19.
[44] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 131.

$$(x - x \cdot y + y) - (x - x \cdot y + y) \cdot z + z = x - x \cdot (y - y \cdot z + z) + (y - y \cdot z + z),$$

$$x - x \cdot y + y - x \cdot z + x \cdot y \cdot z - y \cdot z + z = x - x \cdot y + x \cdot y \cdot z - x \cdot z + y - y \cdot z + z.$$

Pravá i levá strana rovnice jsou shodné, operace je tedy asociativní pro všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

2.4 NEUTRÁLNÍ PRVEK

Definice č. 10: Nechť máme binární operaci $\circ$ na množině A, pak prvek $e \in A$ nazýváme neutrálním prvkem množiny A vzhledem k operaci $\circ$, právě tehdy, když platí $\forall\, x \in A$: $e \circ x = x \circ e = x$.[45] Při multiplikativním zápisu nazýváme neutrální prvek prvkem jednotkovým, při zápisu aditivním používáme označení nulový prvek.[46]

Věta č. 1: Mějme binární operaci $\circ$ na množině A, pak v této množině existuje nejvýše jeden neutrální prvek.[47]

Důkaz č. 1: Předpokládejme, že máme dva neutrální prvky e_1 a e_2 vzhledem k operaci $\circ$ na množině A. Pak dosadíme dle definice:

$$\forall\, x \in A: e_1 \circ x = x \circ e_1 = x,$$

$$\forall\, x \in A: e_2 \circ x = x \circ e_2 = x.$$

Z toho vyplývá, že $e_1 = e_2$, tudíž je věta dokázána.

Je-li operace $\circ$ definována Cayleyho tabulkou, potom neutrální prvek poznáme tak, že sloupec i řádek tabulky, který připadá právě tomuto prvku, se shoduje se záhlavím tabulky.[48] Příkladem neutrálního prvku vzhledem k operaci sčítání na množině $\mathbb{Z}$ je číslo 0, vzhledem k násobení na množině $\mathbb{Z}$ je to číslo 1.[49]

Příklad č. 12: Mějme binární operaci $\circ$ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 4 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$.

x + y	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

[45] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 241.
[46] BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). s. 20.
[47] TLUSTÝ, Pavel a Jihočeská univerzita. Lineární algebra a její aplikace. s. 27.
[48] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 67.
[49] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 101.

Pak neutrálním prvkem vzhledem k operaci ○ je číslo 0, protože sloupec i řádek připadající tomuto číslu se kompletně shoduje se záhlavím tabulky.

Příklad č. 13: Mějme komutativní operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = x + y + 4$. Existenci neutrálního prvku ověříme přímým dosazením do definice pro první část výrokové formy:

$$x \circ e = x,$$
$$x + e + 4 = x,$$
$$e = -4,$$

a pro druhou část výrokové formy:

$$e \circ x = x,$$
$$e + y + 4 = y,$$
$$e = -4.$$

Neutrální prvek vzhledem k operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ je tedy jednoznačně určen.

Pozn. Lze si všimnout, že pokud je operace ○ komutativní, pak stačí dokazovat pouze pro jednu část výrokové formy.

2.5 Agresivní prvek

Definice č. 11: Nechť máme binární operaci ○ na množině A, pak prvek $g \in A$ nazýváme agresivním prvkem množiny A vzhledem k operaci ○, pokud platí $\forall\, x \in A$: $g \circ x = x \circ g = g$.[50] V jiných zdrojích se pro označení agresivního prvku užívá názvu nulový prvek.[51]

Věta č. 2: Mějme binární operaci ○ na množině A, pak v této množině existuje nejvýše jeden agresivní prvek.[52]

Důkaz č. 2: Předpokládejme, že máme dva agresivní prvky g_1 a g_2 vzhledem k operaci ○ na množině A. Pak dosadíme dle definice:

$$\forall\, x \in A: g_1 \circ x = x \circ g_1 = g_1,$$
$$\forall\, x \in A: g_2 \circ x = x \circ g_2 = g_2.$$

Z toho vyplývá, že $g_1 = g_2$, tudíž je věta dokázána.

Pokud bude binární operace ○ zadaná Cayleyho tabulkou, pak agresivní prvek poznáme tak, že řádek a sloupec tabulky patřící tomuto prvku obsahuje pouze jeden jediný

[50] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 100.
[51] PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. s. 31.
[52] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s.129.

prvek, a to agresivní.[53] Příkladem agresivního prvku pro operaci násobení na množině $\mathbb{Z}$ je číslo 0.[54]

Příklad č. 14: Mějme binární operaci ○ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 5 – Cayleyho tabulka pro násobení na množině $\mathbb{Z}_3$.

$x \cdot y$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Zdroj – vlastní tvorba.

Pak agresivním prvkem této množiny vzhledem k operaci ○ bude číslo 0, jelikož ve sloupci i řádku připadající tomuto číslu se nachází pouze samé nuly.

Příklad č. 15: Mějme komutativní operaci ○ na množině $\mathbb{R}$ zadanou předpisem $x \circ y = x - 2 \cdot x \cdot y + y$. Existenci agresivního prvku ověříme přímým dosazením do definice pro první část výrokové formy:

$$g \circ x = g,$$
$$g - 2 \cdot g \cdot y + y = g,$$
$$g = \frac{1}{2},$$

a pro druhou část výrokové formy:

$$x \circ g = g,$$
$$x - 2 \cdot x \cdot g + g = g,$$
$$g = \frac{1}{2}.$$

Agresivní prvek vzhledem k operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ je tedy jednoznačně určen.

Pozn. Lze si všimnout, že pokud je operace ○ komutativní, pak stačí dokazovat pouze pro jednu část výrokové formy.

[53] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 131.
[54] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 100.

2.6 INVERZNÍ PRVEK

Definice č. 12: Nechť máme binární operaci $\circ$ na množině A, neutrální prvek e vůči operaci $\circ$ na množině A a libovolný prvek $x \in A$. Pokud existuje prvek $x^{-1} \in A$ takový, že platí $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$, pak prvek $x \in A$ nazýváme invertibilním prvkem vůči operaci $\circ$ na množině A a prvek $x^{-1} \in A$ inverzním prvkem k prvku x vůči operaci $\circ$ na množině A.[55]

Je-li operace $\circ$ zadaná Cayleyho tabulkou, pak lze poznat, že se jedná o operaci s inverzními prvky právě tehdy, když v každém sloupci i řádku se nachází alespoň jeden neutrální prvek. Je tedy možné, aby jeden prvek z množiny A měl k sobě více inverzních prvků.[56]

Věta č. 3: Mějme binární operaci $\circ$ na množině A, která je asociativní a má neutrální prvek e. Pak ke každému $x \in A$ existuje právě jeden inverzní prvek.[57]

Důkaz č. 3: Předpokládejme, že máme dva inverzní prvky $x^{-1}{}_1$ a $x^{-1}{}_2$ vzhledem k operaci o na množině A. Dosadíme dle definice:

$$x \circ x^{-1}{}_1 = x^{-1}{}_1 \circ x = e,$$

$$x \circ x^{-1}{}_2 = x^{-1}{}_2 \circ x = e.$$

Potom $x^{-1}{}_1$ vyjádříme následujícím způsobem:

$$x^{-1}{}_1 = x^{-1}{}_1 \circ e = x^{-1}{}_1 \circ (x \circ x^{-1}{}_2) = (x^{-1}{}_1 \circ x) \circ x^{-1}{}_2 = e \circ x^{-1}{}_2 = x^{-1}{}_2.$$

Využita byla jak asociativnost operace, tak neutrální prvek a výsledkem je $x^{-1}{}_1 = x^{-1}{}_2$, tím je věta dokázána.

Pokud se jedná o operaci násobení, prvek splňující definici výše se nazývá klasicky inverzním prvkem. Jestliže máme operaci sčítání, inverzní prvek nazýváme prvkem opačným a značíme ho $-x$.[58]

[55] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 130.
[56] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 70–71.
[57] TLUSTÝ, Pavel a Jihočeská univerzita. Lineární algebra a její aplikace. s. 27.
[58] BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). s. 20.

Příklad č. 16: Mějme binární operaci ○ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou, kde neutrální prvek je číslo 0.

Tabulka č. 6 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$.

$x + y$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

Pak inverzní (opačný) prvek k číslu 0 je 0, k číslu 1 to je 2 a k číslu 2 je to 1.

Příklad č. 17: Využijme zadání příkladu č. 13, kde jsme ověřili existenci neutrálního prvku, kdy $e = -4$. Mějme komutativní operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = x + y + 4$. Existenci inverzních prvků ověříme přímým dosazením do definice pro první část výrokové formy:

$$x \circ x^{-1} = e,$$
$$x + x^{-1} + 4 = -4,$$
$$x^{-1} = -8 - x,$$

a pro druhou část výrokové formy:

$$x^{-1} \circ x = e,$$
$$x^{-1} + \mathrm{x} + 4 = -4,$$
$$x^{-1} = -8 - x.$$

Ke každému prvku z množiny $\mathbb{Z}$ existuje inverzní prvek, pro který platí výše uvedená rovnost.

Pozn. Lze si všimnout, že pokud je operace ○ komutativní, pak stačí dokazovat pouze pro jednu část výrokové formy.

2.7 BINÁRNÍ OPERACE S KRÁCENÍM

Definice č. 13: Nechť máme binární operaci $\circ$ na množině *A*, pak tuto operaci nazýváme s levým krácením, pokud platí $\forall\, x, y, z \in A\colon x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z$. Předpis $\forall\, x, y, z \in A\colon y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z$ definuje binární operaci s pravým krácením. Jestliže existuje binární operace s pravým a zároveň s levým krácením, pak se jedná o binární operaci s krácením.[59]

Věta č. 4: Mějme binární operace $\circ$ na množině *A*, která je asociativní a zároveň ke každému prvku $x \in A$ existuje inverzní prvek, pak je tato operace s krácením.[60]

Důkaz č. 4: Předpokládejme, že máme prvky $x, y, z \in A$, pro která platí $x \cdot y = x \cdot z$ a $y \cdot x = z \cdot x$. Z první rovnosti si y vyjádřím následujícím způsobem:

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot (x \cdot z) = (x^{-1} \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z.$$

Poté si vyjádříme *y* z druhé rovnosti:

$$y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x^{-1} = (z \cdot x) \cdot x^{-1} = z \cdot (x \cdot x^{-1}) = z \cdot 1 = z.$$

Využita byla jak asociativita, tak existence neutrálního prvku, z obou rovností je patrné, že $y = z$. Tím je věta dokázána.

Příklad č. 18: Mějme komutativní operaci $\circ$ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = 5 \cdot x + 5 \cdot y$. To, zda se jedná o operaci s krácením ověříme přímým dosazením do definice. Nejprve dosadíme do předpisu pro levé krácení:

$$x \circ y = x \circ z \;\Rightarrow\; 5 \cdot x + 5 \cdot y = 5 \cdot x + 5 \cdot z \;\Rightarrow\; 5 \cdot y = 5 \cdot z \;\Rightarrow\; y = z,$$

poté pro krácení zprava:

$$y \circ x = z \circ x \;\Rightarrow\; 5 \cdot y + 5 \cdot x = 5 \cdot z + 5 \cdot x \;\Rightarrow\; 5 \cdot y = 5 \cdot z \;\Rightarrow\; y = z.$$

Ověřili jsme, že pro operaci $\circ$ platí jak levé krácení, tak i pravé krácení. Z definice tudíž víme, že se jedná o operaci s krácením.

Pozn. Lze si všimnout, že pokud je operace komutativní stačí dokazovat pouze pro levé, popř. pravé krácení, vždy se totiž bude jednat o operaci s krácením.

2.8 IDEMPOTENTNÍ PRVEK

Definice č. 14: Nechť máme binární operaci $\circ$ na množině *A*, pak libovolný prvek $x \in A$ nazveme idempotentní, nebo zkráceně idempotent, pokud pro něj platí $x \circ x = x$.[61]

[59] BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). s. 20.
[60] BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). s. 20.
[61] PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. s. 32.

Příklad č. 19: Mějme binární operaci ○ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 7 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$.

$x + y$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

Pak idempotentní prvek bude číslo 0, protože 0 + 0 = 0.

Pozn. Lze si všimnout, že idempotentní prvek v Cayleyho tabulce poznáme tak, že v určitém poli bude prvek shodný s jeho sloupcovým i řádkovým záhlavím.

Příklad č. 20: Mějme operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = \frac{x+y}{2}$. Pak existenci idempotentního prvku ověříme přímým dosazením do definice:

$$x \circ x = x,$$

$$\frac{x+x}{2} = x,$$

$$x = x.$$

Výsledkem rovnice je $x = x$, což znamená, že každý prvek v operaci ○ je idempotentní a tudíž i celá operace je idempotentní.

2.9 BINÁRNÍ OPERACE S DĚLENÍM

Definice č. 15: Nechť máme binární operaci ○ na množině A, pak lze tvrdit, že se jedná o binární operaci s dělením právě tehdy, když platí $\forall\, x, y \in A\ \exists\, z \in A$: $x \circ z = y \wedge z \circ x = y$. Tato operace má tedy vlastnost řešitelnosti základních rovnic.[62] Pokud bychom tento předpis upravily $\forall\, x, y \in A\ \exists!\, z \in A$: $x \circ z = y \wedge z \circ x = y$, potom mluvíme o binární operaci s jednoznačným dělením.[63]

Je-li operace komutativní, pak je možné z definice vynechat jednu z výrokových forem. V Cayleyho tabulce lze vlastnost poznat tak, že každý sloupec i řádek obsahuje všechny prvky z dané množiny A.[64]

[62] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 102.
[63] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1, s. 72.
[64] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 102.

Příklad č. 21: Mějme komutativní binární operaci ○ na množině $\mathbb{Z}_3$ zadanou tabulkou.

Tabulka č. 8 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$.

x + y	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zdroj – vlastní tvorba.

Pak se jedná o operaci s jednoznačným dělením, jelikož každý sloupec i řádek obsahuje všechny prvky z množiny $\mathbb{Z}_3$.

Příklad č. 22: Mějme komutativní operaci ○ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = x + y - 2$. Zda se jedná o binární operaci s dělením ověříme přímým dosazením do definice:

$$x \circ z = y,$$

$$x + z - 2 = y,$$

$$z = y - x + 2.$$

Jelikož je operace komutativní stačilo dokazovat pouze pro první část výrokové formy. Výsledná rovnice má jednoznačné řešení, takže se jedná o operaci s jednoznačným dělením.

2.10 DISTRIBUTIVNOST BINÁRNÍ OPERACE

Definice č. 16: Nechť máme množinu A se dvěma binárními operacemi ○ a ∗. Pak lze tvrdit, že operace ∗ je distributivní vzhledem k operaci ○ na množině A právě tehdy, když platí $\forall\, x, y, z \in A$: $(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) \wedge z * (x \circ y) = (z * x) \circ (z * y)$. Platí-li pouze první část výrokové formule, mluvíme o distributivnosti zprava operace ∗ vzhledem k operaci ○, pokud platí druhá část, jedná se o distributivnost zleva.[65]

Je-li operace komutativní a zleva distributivní, pak musí být zároveň i zprava distributivní a naopak. Pokud je však operace zprava i zleva distributivní zároveň, tak nemusí být komutativní.[66]

Jestliže jsou operace ○ a ∗ zadány Cayleyho tabulkou, ověření distributivnosti je poměrně zdlouhavé, stejně jako tomu bylo u asociativnosti operace.[67]

[65] DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. s. 109.
[66] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 19.

Mějme na množině $\mathbb{R}$ definovány operace + (sčítání) a · (násobení), pak násobení je distributivní vzhledem ke sčítání, ale sčítání není distributivní vzhledem k násobení a také ani jedna z těchto operací není distributivní sama k sobě. Oproti tomu množinové operace $\cup$ a $\cap$ jsou distributivní vzhledem k sobě i vzhledem k druhé operaci.[68]

Příklad č. 23: Mějme dvě komutativní binární operace $\circ$ a $*$ na množině $\mathbb{Z}$ zadané předpisem $x \circ y = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ a $x * y = x \cdot y$. Distributivnost operace $*$ vzhledem k operaci $\circ$ ověříme přímým dosazením do definice:

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z),$$
$$(2 \cdot x + 2 \cdot y) * z = (x \cdot z) \circ (y \cdot z),$$
$$(2 \cdot x + 2 \cdot y) \cdot z = 2 \cdot (x \cdot z) + 2 \cdot (y \cdot z),$$
$$2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z = 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z.$$

Jelikož se jedná o komutativní operace, není potřeba dosazovat do druhé části výrokové formule. Rovnost platí, tudíž je distributivnost operace $*$ vzhledem k operaci $\circ$ dokázána.

2.11 KOMUTATIVNOST VS ASOCIATIVNOST

Poslední část této kapitoly je věnována problému mezi asociativností a komutativností. Jedná se o to, že většina známých matematických operací jsou zároveň komutativní a asociativní, nebo nejsou ani komutativní a ani asociativní. To způsobuje, že jsou tyto dvě vlastnosti občas mylně implikovány. Tedy když je operace komutativní, musí být zároveň asociativní a opačně, což samozřejmě neplatí.[69]

Zde bude uvedeno několik příkladů, které splňují vždy pouze jednu z těchto vlastností.

Nekomutativní asociativní binární operace:

- Mějme binární operaci $\circ$ na množině $A = \{x, y\}$, která libovolné uspořádané dvojici přiřazuje vždy druhou složku.
    - Nekomutativnost: $x \circ y = y \neq y \circ x = x$
    - Asociativnost: $(x \circ y) \circ z = y \circ z = z$
      $x \circ (y \circ z) = x \circ z = z$

[67] KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy. s. 131
[68] VYŠÍN, Jan. Metodika řešení matematických úloh. s. 186.
[69] HADAR, N. a HADASS, R. Between associativity and commutativity. s. 535.

- Mějme binární operaci $\circ$ na množině $A = \{x, y\}$, kde symbol xy označuje číslo, které vznikne tím, že se y postaví za x.
  - Nekomutativnost: $x \circ y = xy \neq y \circ x = yx$
  - Asociativnost: $(x \circ y) \circ z = xy \circ z = xyz$
    $x \circ (y \circ z) = x \circ yz = xyz$ [70]

Komutativní neasociativní binární operace:

- Mějme binární operaci $\circ$ na množině $\mathbb{R}$-{0} zadanou předpisem $x \circ y = \frac{1}{x \cdot y}$.
  - Komutativnost: $x \circ y = \frac{1}{x \cdot y} = y \circ x = \frac{1}{y \cdot x}$
  - Neasociativnost: $(x \circ y) \circ z = \frac{1}{x \cdot y} \circ z = \frac{1}{\frac{1}{x \cdot y} \cdot z} = \frac{x \cdot y}{z}$
    $x \circ (y \circ z) = x \circ \frac{1}{y \cdot z} = \frac{1}{x \cdot \frac{1}{y \cdot z}} = \frac{y \cdot z}{x}$
- Mějme binární operaci $\circ$ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou předpisem $x \circ y = |x - y|$. Pro důkaz neasociativnosti stačí jediný příklad, proto $x = 10$, $y = 2$, $z = 5$.
  - Komutativnost: $x \circ y = |x - y| = y \circ x = |y - x|$
  - Neasociativnost: $(x \circ y) \circ z = |x - y| \circ z = ||x - y| - z| = |8 - 5| = 3$
    $x \circ (y \circ z) = x \circ |y - z| = |x - |y - z|| = |10 - 3| = 7$ [71]

Na tento problém poukazuje i studie s názvem *Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation*. Tato studie byla součástí většího výzkumu, která se zabývala tím, jakými způsoby učitelé matematiky a studenti učitelství vytváří tzv. protipříklady.

Účastníci výzkumu měli za úkol vymyslet příklady operací, které jsou komutativní, ale nejsou asociativní. Odpovědi byly klasifikovány dle čtyř kritérií: správnost, produktivita (počet správných i chybných příkladů), matematický obsah a základní obtíže. Z výzkumu vyplývá, že žádný příklad nedokázalo vytvořit 44 % učitelů a 69 % studentů. Nejméně jeden kompletně správný příklad zformulovalo 33 % učitelů a pouhá 4 % studentů.[72]

---

[70] HADAR, N. a HADASS, R. Between associativity and commutativity. s. 536.
[71] HADAR, N. a HADASS, R. Between associativity and commutativity. s. 538–539.
[72] ZASLAVSKY, Orit a PELED, Irit. Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation. s. 67–70.

Za jednu z možných příčin těchto obtíží je považován způsob výuky binárních operací na školách. Toto téma bude podrobněji rozebráno v kapitole č. 3.

3 BINÁRNÍ OPERACE NA ŠKOLÁCH

Téma binární operace na množině jako takové je náplní až vysokoškolské matematiky, přesto se s určitými typy binárních operací učí pracovat děti již od 1. třídy základní školy. V této kapitole bude rozebrána výuka binárních operací na základních, středních a vysokých školách. Dále autorka upozorní na možné chyby při výuce binárních operací.

3.1 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Jak již bylo řečeno, s určitou podobou binárních operací se žáci setkávají již v 1. třídě, kdy se učí sčítat a odčítat na množině od 0 do 20. Ve druhé třídě jsou operace sčítání a odčítání posunuty na množinu vyšších dvojciferných nezáporných čísel. Dále se probírá násobení a dělení přirozených čísel. Tyto operace se vyučují po zbytek 1. stupně, pouze se rozšiřují množiny, na kterých jsou počítány. Náplní 6. třídy je výpočet nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou čísel a aritmetického průměru dvou čísel.[73] Převážně na 1. stupni žáci počítají pouze v konečných číselných množinách, např. od 0 do 20, od 0 do 100 atd. Problémem operací na těchto množinách je, že nesplňují zásadní vlastnost, a to uzavřenost.

V průběhu výuky na 2. stupni se děti mohou setkat dokonce i s unární a ternární operací. Za unární operaci lze považovat např. určení opačného čísla, ternární operaci pak představuje aritmetický průměr tří čísel nebo nejmenší společný násobek a největší společný dělitel tří čísel.[74]

Žáci se také setkávají s vlastnostmi a významnými prvky binárních operací. Již ve 4. třídě umí používat komutativnost a asociativnost operace sčítání, v 6. třídě tyto vlastnosti využívají pro násobení.[75] Často se také využívá distributivnosti, např. při násobení jednociferného čísla dvojciferným, kdy je možné rozdělit dvojciferné číslo na dvě menší čísla, se kterými je počítání snazší. Co se týče významných prvků, tak nula při sčítání a jednotka při násobení představují neutrální prvek, nula při násobení je agresivním prvkem. Žáci se setkávají i s inverzními prvky, např. opačné číslo na ose nebo převrácené číslo ke zlomku.

[73] Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. s. 3–12.
[74] Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. s. 13.; Operace v množině, vlastnosti binárních operací. PF UJEP, Katedra matematiky.
[75] Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. s. 6–12.

Cayleyho tabulku, a tedy i binární operace, lze využít i při řešení lehkých, na první pohled, nematematických úloh. Příkladem je provádění povelů „Vpravo v bok“, „Vlevo v bok“, „Čelem vzad“ a „Na místě stůj“ a popsání jejich vzájemných kombinací. Každý žák si výsledek dokáže ověřit vlastním cvičením, či simulací pomocí nějakého předmětu. Potom je snadné zjistit, jaká je konečná pozice po dvou provedených povelech, např. výsledkem povelů „Vpravo v bok“ a „Čelem vzad“ bude povel „Vlevo v bok“. Na základě toho, pak žák dokáže sestavit a vyplnit tabulku, která znázorňuje výsledky operace složení dvou povelů.[76] Lze tvrdit, že se tedy jedná o Cayleyho tabulku s operací skládání na množině čtyř povelů.

Takových úloh by se jistě dalo vymyslet nespočet. Tímto způsobem je možné i žáky, kteří nejsou v matematice nejzkušenější, seznámit s principem strukturálního pojetí matematiky, jehož podstatou je vytvořit souhrny objektů, popsat jejich vztahy a provádět operace mezi nimi.

3.2 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA GYMNÁZIÍCH

S binárními operacemi se studenti setkávají i na středních školách, převážně tedy gymnáziích. Již v 1. ročníku se probírá výroková logika, kam patří konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.[77] Jedná se tedy o operace na dvouprvkové množině, nejčastěji jde o množinu $\{0, 1\}$. Studenti se k těmto operacím učí tzv. pravdivostní tabulku hodnot, která znázorňuje výsledky po operaci mezi dvěma prvky dané množiny. Přestože se nejedná o přesnou podobu Cayleyho tabulky, snadno by se do této podoby dala přepsat. Všechny operace výrokové logiky jsou již operace uzavřené.

Další náplní učiva jsou operace s množinami, kdy právě průnik a sjednocení představují opět binární operaci.[78]

3.3 VÝUKA BINÁRNÍCH OPERACÍ NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH

Téma binární operace na množině a vyšetřování jejich vlastností a významných prvků je součástí vysokoškolské matematiky. Přesto se ale, jak bylo uvedeno výše, studenti s určitou podobou binárních operací setkávají mnohem dříve, aniž by o tom věděli.

[76] ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. s. 13–14.
[77] Matematika. Školní vzdělávací plán Gymnázia Jana Keplera. s. 4.
[78] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze. s. 23.

Právě na základě předchozích zkušeností s binárními operacemi vyučuje své studenty algebry autor článku s názvem *Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra*. Hlavní důraz klade na to, aby studenti většinu vlastností a významných prvků dokázali popsat sami na základě motivačních příkladů a samostatné práce bez nutnosti jasně daných axiomů a definic, jejichž smysl velké části studentů uniká. Spojení předchozích vědomostí s tím, co se právě student učí, podporuje celkovou orientaci v matematice, navíc využití konkrétního příkladu pak napomáhá i průměrným studentům matematiky porozumět formálním definicím a axiomům. Tento přístup by měl poté usnadnit i budoucím středoškolským učitelům jejich výuku na školách.[79]

Jedním z motivačních příkladů je řešení lineární rovnice $4 + x = 10$, bez možnosti odčítání. Posléze, co studenti vytvoří postup řešení, mají za úkol popsat vlastnosti sčítání celých čísel, které využili při řešení této rovnice. Tedy možnost přeskupování při sčítání tří nebo více čísel, existence čísla nula jakožto neutrálního prvku a existence opačného celého čísla jehož výsledek po sčítání s daným celým číslem je nula. Za domácí úkol mají studenti dokázat, že libovolný konečný součet celých čísel dá opět celé číslo, tím budou určeny základní vlastnosti pro existenci binárních operací; operace musí být definována pro všechny uspořádané dvojice v dané množině, každý výsledek musí být jednoznačně určen a zároveň patřit do dané množiny. V poslední řadě je důležité pomocí diskuse studenty přivést k myšlence, že tato rovnice představuje binární operaci sčítání na množině celých čísel a že binární operace na množině Z je vlastně funkce $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.[80]

Mezi další motivační příklady, které byly využity, patří řešení lineární rovnice $5x = 12$, řešení rovnic s maticemi a skládání funkcí. Právě u posledních dvou příkladů byla studentům představena důležitá skutečnost, a to že operace je asociativní, ale není komutativní.[81]

[79] CULLINANE, Michael J. Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra course. s. 339–340.
[80] CULLINANE, Michael J. Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra course. s. 341–343.
[81] CULLINANE, Michael J. Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra course. s. 343–346.

3.4 CHYBY PŘI VÝUCE BINÁRNÍCH OPERACÍ

Jak již bylo uvedeno výše, asi největší problémem při výuce binárních operací, je nesprávný úsudek, že asociativita vyplývá z komutativity a opačně. Tato skutečnost má zárodky již ve výuce na základních školách. Žákům je komutativita i asociativita představena jako určitý druh změny pořadí, přičemž asociativita zahrnuje změnu pořadí, v němž je operace prováděna a komutativita se týká změny pořadí dvou prvků. Nutnost rozlišování těchto vlastností je ještě zmírněna tím, že ve většině příkladů jsou používány současně, bez toho, aniž by bylo uvedeno, kdy se má jaká vlastnost využít. [82]

Na základě výzkumu učitelů a studentů učitelství, který byl představen v kapitole 2.11, byly stanoveny čtyři hlavní kategorie obtíží neschopnosti rozlišení těchto vlastností a vytvoření asociativního nekomutativního příkladu. První dvě se týkaly celkově špatné znalosti jedné z vlastností a neschopnosti ji správně dokázat. Dále respondenti vytvořili místo binární operace operaci unární. Poslední kategorie upozorňuje na nesprávné ověřování vlastností jedním konkrétním příkladem.[83]

Proto, aby studenti dokázali vytvářet komutativní neasociativní příklady a nekomutativní asociativní příklady, by měl učitel dodržovat určité zásady. Zaprvé by měla být operace vždy dobře definována, kdy je především důležité dodržovat uzavřenost operace. Zadruhé by se měl klást důraz na to, aby studenti dokázali rozlišovat mezi logikou prokázání pravidla a logikou vyvrácení pravidla. Tedy vlastnost, kterou vyvracíme, stačí ukázat na jednom příkladu, oproti tomu vlastnost, kterou chceme dokázat, musíme ověřit pro všechny prvky z dané množiny. [84]

[82] ZASLAVSKY, Orit a PELED, Irit. Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation. s. 67–69.
[83] ZASLAVSKY, Orit a PELED, Irit. Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation. s. 73.
[84] HADAR, N. a HADASS, R. Between associativity and commutativity. s. 539.

4 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

V této kapitole se autorka zabývá algebraickými strukturami. Nejdříve tento pojem definuje a dále rozebere základní typy algebraických struktur s jednou a se dvěma binárními operacemi.

Definice č. 17: Nechť máme množinu *A* a systém *n*-árních operací definovaných na množině *A*. Pak tento systém nazýváme algebraickou strukturou na množině *A*.[85]

4.1 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY S JEDNOU BINÁRNÍ OPERACÍ

Algebraické struktury s jednou binární operací budou označovány jako uspořádané dvojice (*A*, ○), kde *A* představuje neprázdnou množinu a ○ je binární operace definována na této množině. Dle vlastností binární operace ○ lze rozlišit několik typů algebraických struktur s jednou binární operací.

4.1.1 GRUPOID

Definice č. 18: Nechť máme operaci ○ definovanou na množině *A*, pak tuto algebraickou strukturu (*A*, ○) nazýváme grupoid. Je-li navíc operace ○ komutativní, pak se jedná o komutativní grupoid.[86]

Abychom tuto uspořádanou dvojici mohli nazývat grupoidem, musí splňovat dvě zásadní vlastnosti, a to, že množina *A* musí být neprázdná a operace ○ na množině *A* musí být uzavřená.[87]

4.1.2 POLOGRUPA

Definice č. 19: Nechť máme grupoid (*A*, ○), kde binární operace ○ je asociativní, pak tento grupoid nazýváme pologrupou. Je-li navíc operace ○ komutativní, pak se jedná o komutativní pologrupu nebo také Abelovskou pologrupu.[88]

4.1.3 MONOID

Definice č. 20: Nechť máme grupoid (*A*, ○), kde binární operace ○ je asociativní a ke každému prvku z množiny *A* existuje prvek neutrální, pak tento grupoid nazýváme monoidem. Je-li navíc operace ○ komutativní, pak se jedná o komutativní monoid. [89]

---

[85] NAGY, Jozef. Vybrané partie z moderní matematiky. s. 54.
[86] HORT, Daniel, Jiří RACHŮNEK a Univerzita Palackého. Algebra I. s. 34.
[87] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 41.
[88] HORT, Daniel, Jiří RACHŮNEK a Univerzita Palackého. Algebra I. s. 34.

Z definice je patrné, že monoid je speciálním případem pologrupy. Jedná se tedy o pologrupu, která má neutrální prvek.

4.1.4 GRUPA

Definice č. 21: Nechť máme grupoid (A, ○), kde binární operace ○ je asociativní, ke každému prvku z množiny A existuje neutrální prvek a ke každému neutrálnímu prvku existuje prvek inverzní, pak tento grupoid nazýváme grupou. Někdy se také grupa definuje jako algebraická struktura s jednoznačným dělením. Je-li navíc operace ○ komutativní, pak se jedná o komutativní grupu nebo také Abelovskou grupu.[90]

Z definice je patrné, že grupa je speciálním případem pologrupy a také monoidu. Jedná se tedy o pologrupu s neutrálním a inverzním prvkem a o monoid s inverzním prvkem.

4.1.5 PŘEHLED ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR S JEDNOU BINÁRNÍ OPERACÍ

V této části je vytvořena tabulka pro jednoduší orientaci v algebraických strukturách s jednou binární operací. Ve svislém záhlaví jsou vypsány typy algebraických struktur s jednou binární operací, ve vodorovném pak jejich vlastnosti, kterých mohou operace nabývat. Zelený symbol označuje, že daná struktura má určitou vlastnost, pokud je použit červený symbol, tato vlastnost se v dané struktuře neobjevuje.

[89] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 46.
[90] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 2, s. 10.

Tabulka č. 9 – Přehled algebraických struktur s jednou binární operací.

Algebr. str.	**Vlastnosti operace ○ na množině *A***				
(*A*, ○)	Uzavřenost	Asociativnost	Komutativnost	Neutrální p.	Inverzní p.
Grupoid	✓	✗	✗	✗	✗
Pologrupa	✓	✓	✗	✗	✗
K. pologrupa	✓	✓	✓	✗	✗
Monoid	✓	✓	✗	✓	✗
K. monoid	✓	✓	✓	✓	✗
Grupa	✓	✓	✗	✓	✓
K. grupa	✓	✓	✓	✓	✓

Zdroj – vlastní tvorba.

Pozn. Algebraická struktura je v tabulce zapsána jako *algebr. str.*, komutativnost je označena písmenem *k.* a prvek písmenem *p.*

4.2 ALGEBRAICKÉ STRUKTURY SE DVĚMA BINÁRNÍMI OPERACEMI

Algebraické struktury se dvěma binárními operacemi budou označovány jako uspořádané trojice $(A, \circ, *)$, kde A představuje neprázdnou množinu a $\circ$ a $*$ jsou binární operace definované na této množině. Dle vlastností binárních operací $\circ$ a $*$, nebo dle rozložení na dvě struktury s jednou binární operací a určení jejich typů, lze rozlišit několik typů algebraických struktur se dvěma binárními operacemi. Pro definování následujících struktur bude využita druhá možnost.

4.2.1 POLOOKRUH

Definice č. 22: Nechť máme uspořádanou trojici $(A, \circ, *)$, kde grupoid $(A, \circ)$ je komutativní pologrupa, grupoid $(A, *)$ představuje pologrupu a operace $*$ je distributivní vzhledem k operaci $\circ$, pak tuto algebraickou strukturu nazýváme polookruhem. Pokud by grupoid $(A, *)$ byl komutativní pologrupa, pak mluvíme o komutativním polookruhu.[91]

[91] BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. sv. 1 s. 190.

4.2.2 OKRUH

Definice č. 23: Nechť máme uspořádanou trojici (A, $\circ$, $*$), kde grupoid (A, $\circ$) je komutativní grupa, grupoid (A, $*$) představuje pologrupu a operace $*$ je distributivní vzhledem k operaci $\circ$, pak tuto algebraickou strukturu nazýváme okruhem. Pokud by grupoid (A, $*$) byl komutativní pologrupa, pak mluvíme o komutativním okruhu.[92]

4.2.3 OBOR INTEGRITY

Definice č. 24: Nechť máme uspořádanou trojici (A, $\circ$, $*$), která představuje komutativní okruh s jednotkovým prvkem vzhledem k násobení a kde neexistují netriviální dělitelé nuly, pak se tato algebraická struktura nazývá obor integrity.[93]

4.2.4 TĚLESO

Definice č. 25: Nechť máme uspořádanou trojici (A, $\circ$, $*$), kde grupoid (A, $\circ$) je komutativní grupa, grupoid ($A \setminus 0$, $*$) představuje grupu a operace $*$ je distributivní vzhledem k operaci $\circ$, pak tuto algebraickou strukturu nazýváme tělesem. Pokud by grupoid ($A \setminus 0$, $*$) byl komutativní grupa, pak mluvíme o komutativním tělese.[94]

4.2.5 PŘEHLED ALGEBRAICKÝCH STRUKTUR SE DVĚMA BINÁRNÍMI OPERACEMI

V této části je vytvořena tabulka pro jednoduší orientaci v algebraických strukturách se dvěma binárními operacemi. Jak již bylo uvedeno výše, struktury se dvěma binárními operacemi se dají popsat buď vlastnostmi operací, nebo pomocí rozložení na dvě struktury s jednou binární operací a určení jejich typu. Zde je využit druhý způsob.

Ve svislém záhlaví jsou vypsány typy algebraických struktur se dvěma binárními operacemi. Ve druhém a třetím sloupci se nachází struktury s jednou binární operací, ze kterých je daná struktura se dvěma binárními operacemi složena. Všechny níže vypsané typy struktur musí splňovat distributivnost jedné operace vůči druhé, tato vlastnost je vyznačena v posledním sloupci tabulky.

[92] HORT, Daniel, Jiří RACHŮNEK a Univerzita Palackého. Algebra I. s. 36.
[93] HORT, Daniel, Jiří RACHŮNEK a Univerzita Palackého. Algebra I. s. 38.
[94] TLUSTÝ, Pavel a Jihočeská univerzita. Lineární algebra a její aplikace. s. 30.

Tabulka č. 10 – Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi.

Algebr. str. **(A, $\circ$, $*$)**	**Algebraické struktury s jednou bin. op.**		**Distributivnost**
	(A, $\circ$)	**(A, $*$)**	
Polookruh	K. pologrupa	Pologrupa	✓
Komutativní polookruh	K. pologrupa	K. pologrupa	✓
Okruh	K. grupa	Pologrupa	✓
Komutativní okruh	K. grupa	K. pologrupa	✓
Obor Integrity	K. grupa	K. pologrupa, bez dělitelů nuly	✓
Těleso	K. grupa	($A \setminus 0$, $*$) – grupa	✓
Komutativní těleso	K. grupa	($A \setminus 0$, $*$) – k. grupa	✓

Zdroj – vlastní tvorba.

Pozn. Algebraická struktura je v tabulce zapsána jako *algebr. str.*, binární operace jako *bin. op.* a komutativnost je označena písmenem *k*.

5 PRAKTICKÁ ČÁST

Poslední část bakalářské práce je zaměřena na vyšetřování vlastností a významných prvků binárních operací. Autorka zde podrobně rozebírá pětici úloh. Dvě zadání jsou převzata ze skript s názvem *Algebra* (Petr Kovář), další dvě jsou autorčina vlastní tvorba. Poslední úloha je převzata z knihy *Rozpracovaná řešení úloh z vyšší algebry* (Jiří Weil), kde jsou podrobně rozebrány a osvětleny všechny kroky pro její vyřešení.
Pozn. V úloze č. 1 se objevuje symbol $=^?$ (rovná se s otazníkem), který je použit v těch případech, kdy je určitá vlastnost vyšetřována a nelze zatím jasně určit, zda daná rovnost platí či nikoliv.

5.1 ÚLOHA Č. 1

Zadání úlohy č. 1: Vyšetřete vlastnosti a významné prvky binární operace zadané předpisem $x \circ y = e^{x+y}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení úlohy č. 1:

Uzavřenost:

Pokud dosadíme za x, y jakékoliv reálné číslo, výsledek bude vždy reálné číslo. Operace **je** tedy **uzavřená** neboli je neomezeně definována na množině $\mathbb{R}$.

Komutativnost:

$$x \circ y = y \circ x$$
$$e^{x+y} = e^{y+x}$$

Sčítání je obecně komutativní, proto **je** tato binární operace také **komutativní**.

Asociativnost:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$
$$e^{x+y} \circ z =^? x \circ e^{y+z}$$
$$e^{e^{x+y}+z} =^? e^{x+e^{y+z}}$$
$$e^{x+y} + z =^? x + e^{y+z}$$

Do získaného předpisu můžeme dosadit vhodně vybraná reálná čísla, např. $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$. Abychom ověřili neplatnost určité vlastnosti, stačí najít jediný příklad, kde tato vlastnost neplatí.

$$e^{1+2} + 0 \neq 1 + e^{2+0}$$
$$e^{3} \neq 1 + e^{2} \quad \Rightarrow \quad e^{x+y} + z \neq x + e^{y+z}$$

Operace tedy **není asociativní**.

Existence neutrálního prvku:

Písmeno e zde představuje Eulerovo číslo, neutrální prvek tedy bude označen písmenem n.

$$x \circ n = x$$

$$e^{x+n} = x$$

$$x + n = \ln x$$

$$n = \ln x - x$$

Jelikož je operace komutativní, stačí ověřovat pouze pro jednu část výrokové formy. Z výsledné rovnosti je patrné, že prvek n není jednoznačně určen, proto **neutrální prvek neexistuje**.

Existence agresivního prvku:

$$x \circ g = x$$

$$e^{x+g} = g$$

$$x + g = \ln g$$

Jelikož je operace komutativní, stačí ověřovat pouze pro jednu část výrokové formy. Z výsledné rovnosti je patrné, že prvek g nelze jednoznačně určit, proto **agresivní prvek neexistuje**.

Existence inverzních prvků:

Binární operace nemá neutrální prvek, proto je zbytečné vyšetřovat existenci inverzních prvků. **Inverzní prvky** tedy **neexistují**.

Existence idempotentního prvku:

$$x \circ x = x$$

$$e^{x+x} \stackrel{?}{=} x$$

$$e^{2x} \neq x$$

V množině reálných čísel neexistuje žádné x, pro které by tato rovnost platila. V této operaci tedy **neexistuje** žádný **idempotentní prvek**.

Jednoznačnost dělení:

$$x \circ z = y$$

$$e^{x+z} = y$$

$$x + z = \ln y$$

$$z = \ln y - x$$

Jelikož je operace komutativní, stačí ověřovat pouze pro jednu část výrokové formy. Výsledná rovnice má jednoznačné řešení, proto se **jedná** o **binární operaci s jednoznačným dělením**.

Krácení:

$$x \circ y = x \circ z \;\Rightarrow\; e^{x+y} = e^{x+z} \;\Rightarrow\; y = z$$

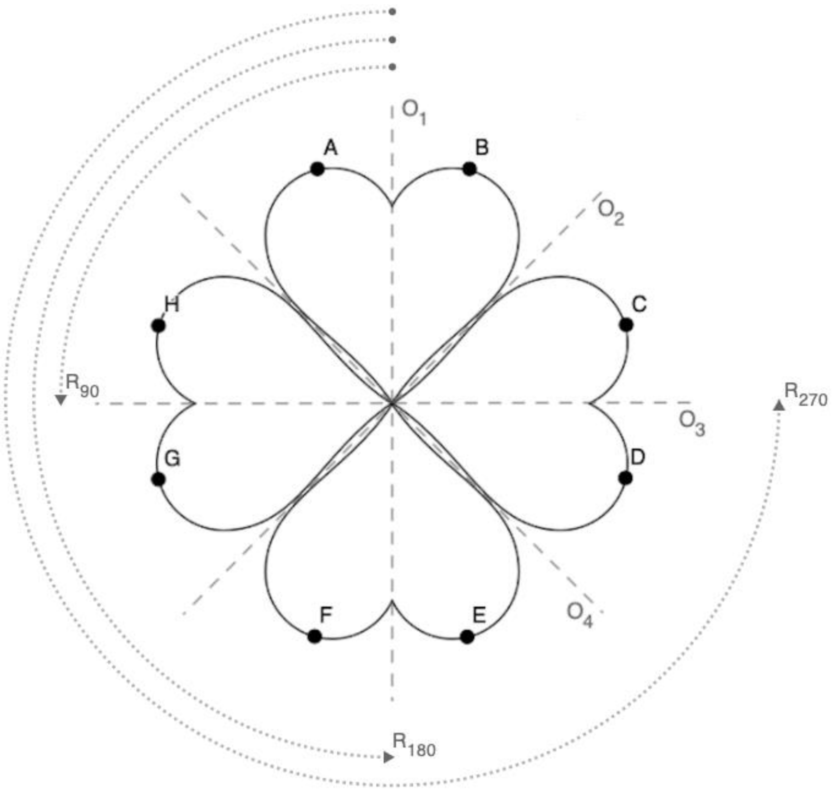
Jelikož je operace komutativní, stačí ověřit pouze krácení zleva, které platí. **Jedná** se tedy o **binární operaci s krácením**.

5.2 ÚLOHA Č. 2

Zadání úlohy č. 2: Určete všechny symetrie symbolu čtyřlístku a vyšetřete vlastnosti a významné prvky binární operace skládání symetrií.

Řešení úlohy č. 2:

Obrázek č. 6 – Symetrie symbolu čtyřlístku.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

Jak lze vyčíst z obrázku, symbol má osm symetrií, a to identitu I, čtyři osové souměrnosti O_1, O_2, O_3, O_4, otočení o 90° R_{90}, otočení o 180° R_{180} a otočení o 270° R_{270}. Tyto symetrie je pak možné zapsat pomocí bijektivních zobrazení bodů $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \to \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ neboli permutací.

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{pmatrix} \qquad O_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ B & A & H & G & F & E & D & C \end{pmatrix}$$

$$R_{90} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ G & H & A & B & C & D & E & F \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ D & C & B & A & H & G & F & E \end{pmatrix}$$

$$R_{180} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ E & F & G & H & A & B & C & D \end{pmatrix} \qquad O_3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ F & E & D & C & B & A & H & G \end{pmatrix}$$

$$R_{270} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ C & D & E & F & G & H & A & B \end{pmatrix} \qquad O_4 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ H & G & F & E & D & C & B & A \end{pmatrix}$$

Při tvorbě Cayleyho tabulky je důležité si připomenou, že operace skládání zobrazení se obvykle čte zprava doleva, což bude platit i u úlohy č. 3 a 4.

Tabulka č. 11 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií symbolu čtyřlístku.

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{O_1}$	$\boldsymbol{O_2}$	$\boldsymbol{O_3}$	$\boldsymbol{O_4}$	$\boldsymbol{R_{90}}$	$\boldsymbol{R_{180}}$	$\boldsymbol{R_{270}}$
$\boldsymbol{I}$	I	O_1	O_2	O_3	O_4	R_{90}	R_{180}	R_{270}
$\boldsymbol{O_1}$	O_1	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}	O_4	O_3	O_2
$\boldsymbol{O_2}$	O_2	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}	O_1	O_4	O_3
$\boldsymbol{O_3}$	O_3	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}	O_2	O_1	O_4
$\boldsymbol{O_4}$	O_4	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I	O_3	O_2	O_1
$\boldsymbol{R_{90}}$	R_{90}	O_2	O_3	O_4	O_1	R_{180}	R_{270}	I
$\boldsymbol{R_{180}}$	R_{180}	O_3	O_4	O_1	O_2	R_{270}	I	R_{90}
$\boldsymbol{R_{270}}$	R_{270}	O_4	O_1	O_2	O_3	I	R_{90}	R_{180}

Zdroj – vlastní tvorba.

Uzavřenost:

V tabulce jsou vyplněna všechna pole, operace **je** tedy **uzavřená** neboli neomezeně definována na množině.

Komutativnost:

Tabulka není symetrická podle hlavní diagonály, operace tudíž **není komutativní**.

Asociativnost:

Jak bylo uvedeno výše, asociativnost nelze z Cayelyho tabulky vyčíst. Obecně však platí, že skládání zobrazení má asociativní vlastnost,[95] tudíž i tato operace **je asociativní**.

Existence neutrálního prvku:

První sloupec a řádek tabulky jsou totožné se záhlavími tabulky. Operace tedy **má neutrální prvek**, a to identitu.

Existence agresivního prvku:

V žádném řádku ani sloupci se nenachází pouze jediný prvek. V této operaci tedy **neexistuje agresivní prvek**.

[95] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 13.

Existence inverzních prvků:

Jelikož má operace neutrální prvek, **mohou** tedy **existovat inverzní prvky** k některým prvkům. Z tabulky lze vyčíst, že inverzní prvek pro identitu je identita (symbolicky $I^{-1} = I$), dále $O_1^{-1} = O_1$, $O_2^{-1} = O_2$, $O_3^{-1} = O_3$, $R_{90}^{-1} = R_{270}$, $R_{180}^{-1} = R_{180}$, $R_{270}^{-1} = R_{90}$

Existence idempotentního prvku:

V této operaci **existuje** jeden **idempotentní prvek**, a to identita, pro niž platí $I \circ I = I$.

Jednoznačnost dělení:

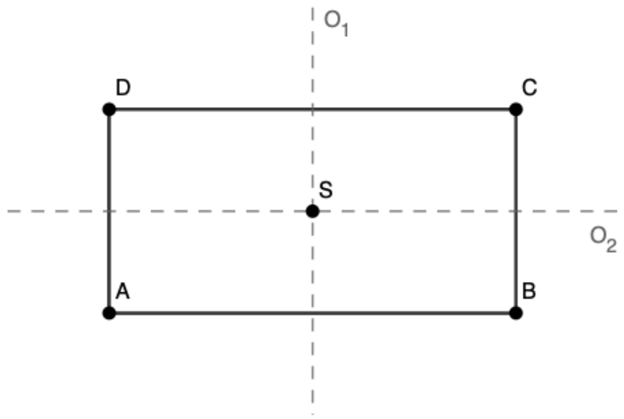
V každém řádku i sloupci tabulky se každý prvek vyskytuje právě jedenkrát, **jde** tedy o **operaci s jednoznačným dělením**.

5.3 ÚLOHA Č. 3

Zadání úlohy č. 3: Určete všechny symetrie obdélníku a kvádru o stranách a < b < c. Vyšetřete vlastnosti a významné prvky binárních operací skládání symetrií a porovnejte je.[96]

Řešení úlohy č. 3:

Obrázek č. 7 – Symetrie obdélníku v rovině.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

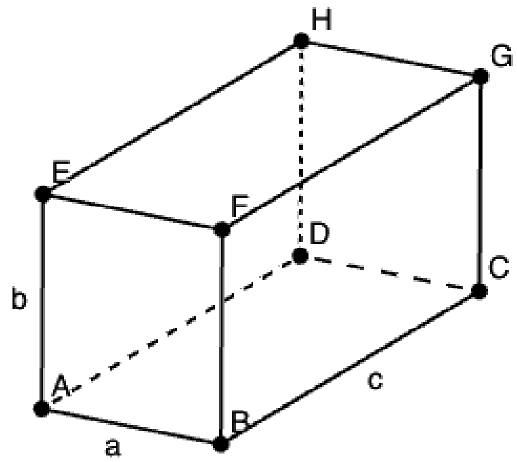
Jak lze vyčíst z obrázku, obdélník má čtyři symetrie, a to identitu *I*, osovou souměrnost podle svislé osy O_1 a podle vodorovné osy O_2 a středovou souměrnost *S*, která je shodná s rotací o 180°. Symetrie pak opět lze zapsat pomocí permutací.

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \qquad O_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

[96] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 39.

Obrázek č. 8 – Kvádr v prostoru.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

V tomto případě již na obrázku nejsou vyznačeny symetrie, jelikož by se stal velmi nepřehledným. Oproti obdélníku má kvádr symetrií osm, a to identitu I, tři rotace o 180° R_a, R_b a R_c, kdy osa rotace vždy prochází středem dané stěny a je rovnoběžná s příslušnou stranou. Dále se jedná o tři rovinné souměrnosti podle rovin O_a, O_b a O_c, které jsou kolmé na dané strany. Poslední symetrií je středová souměrnost S se středem v těžišti kvádru. Všechny symetrie budou opět zapsány pomocí permutací.

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{pmatrix} \qquad O_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ B & A & D & C & F & E & H & G \end{pmatrix}$$

$$R_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ H & G & F & E & D & C & B & A \end{pmatrix} \qquad O_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ E & F & G & H & A & B & C & D \end{pmatrix}$$

$$R_b = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ C & D & A & B & G & H & E & F \end{pmatrix} \qquad O_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ D & C & B & A & H & G & F & E \end{pmatrix}$$

$$R_c = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ F & E & H & G & B & A & D & C \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ G & H & E & F & D & C & B & A \end{pmatrix}$$

Nyní budou opět vytvořeny Cayleyho tabulky, nejdříve pro skládání symetrií obdélníku a poté pro skládání symetrií kvádru, na jejichž základě autorka vyšetří vlastnosti a významné prvky vzniklých operací.

Tabulka č. 12 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií obdélníka.

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{O_1}$	$\boldsymbol{O_2}$	$\boldsymbol{S}$
$\boldsymbol{I}$	I	O_1	O_2	S
$\boldsymbol{O_1}$	O_1	I	S	O_2
$\boldsymbol{O_2}$	O_2	S	I	O_1
$\boldsymbol{S}$	S	O_2	O_1	I

Zdroj – vlastní tvorba.

Tabulka č. 13 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií kvádru.

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{R_a}$	$\boldsymbol{R_b}$	$\boldsymbol{R_c}$	$\boldsymbol{O_a}$	$\boldsymbol{O_b}$	$\boldsymbol{O_c}$	$\boldsymbol{S}$
$\boldsymbol{I}$	I	R_a	R_b	R_c	O_a	O_b	O_c	S
$\boldsymbol{R_a}$	R_a	I	R_c	R_b	S	O_c	O_b	O_a
$\boldsymbol{R_b}$	R_b	R_c	I	R_a	O_c	S	O_a	O_b
$\boldsymbol{R_c}$	R_c	R_b	R_a	I	O_b	O_a	S	O_c
$\boldsymbol{O_a}$	O_a	S	O_c	O_b	I	R_c	R_b	R_a
$\boldsymbol{O_b}$	O_b	O_c	S	O_a	R_c	I	R_a	R_b
$\boldsymbol{O_c}$	O_c	O_b	O_a	S	R_b	R_a	I	R_c
$\boldsymbol{S}$	S	O_a	O_b	O_c	R_a	R_b	R_c	I

Zdroj – vlastní tvorba.

Uzavřenost:

Obě tabulky jsou zcela vyplněné, tudíž jak operace skládání symetrií obdélníka, tak operace skládání symetrií kvádru **jsou uzavřené** neboli neomezeně definované na množině.

Komutativnost:

Tabulka č. 12 i tabulka č. 13 jsou symetrické podle hlavní diagonály, obě operace **jsou** tedy **komutativní**.

Asociativnost:

Jak bylo uvedeno v předchozím příkladě, skládání zobrazení je obecně asociativní, proto i obě tyto operace **jsou asociativní**.

Existence neutrálního prvku:

Jak u tabulky pro skládání symetrií obdélníka, tak u tabulky pro skládání symetrií kvádru se sloupce i řádky patřící prvku *I* shodují se svým záhlavím. Právě identita tedy **představuje neutrální prvek** obou operací.

Existence agresivního prvku:

Ani u jedné tabulky se v žádném řádku ani sloupci nenachází pouze jeden prvek. Operace tedy **nemají agresivní prvek**.

Existence inverzních prvků:

U obou operací existuje neutrální prvek, tudíž **mohou existovat inverzní prvky** k některým prvkům. Z Cayeleho tabulek pro skládání symetrií obdélníka a kvádru lze vyčíst, že každý prvek je inverzní sám k sobě.

Existence idempotentního prvku:

Jak u operace skládání symetrií obdélníka, tak u operace skládání symetrií kvádru **existuje** jeden **idempotentní prvek**, a to identita, pro niž platí $I \circ I = I$.

Jednoznačnost dělení:

V každém řádku i sloupci obou tabulek se každý prvek vyskytuje právě jedenkrát, **jde** tedy o **operace s jednoznačným dělením**.

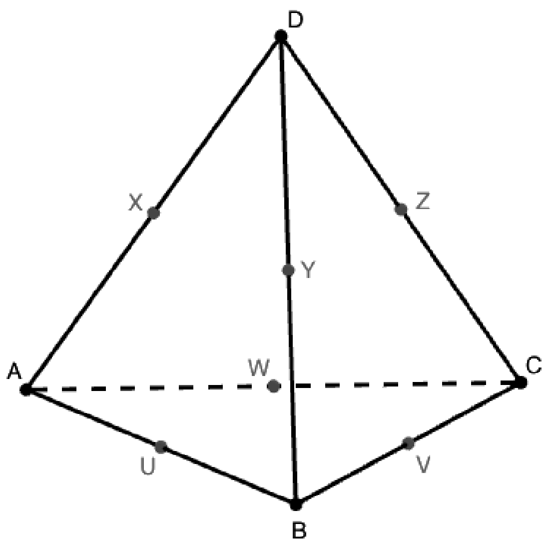
5.4 ÚLOHA Č. 4

Zadání úlohy č. 4: Určete všechny přímé symetrie čtyřstěnu a vyšetřete vlastnosti a významné prvky binární operace skládání symetrií.[97]

Pozn.: Přímou symetrií rozumíme takové zobrazení, které nemění orientaci stran. Příkladem přímých symetrií je identita a rotace, do nepřímých symetrií pak patří osová, popř. rovinná souměrnost.[98]

Řešení úlohy č. 4:

Obrázek č. 9 – Pravidelný čtyřstěn v prostoru.



Zdroj – vlastní tvorba v programu geogebra.org.

Z důvodu přehlednosti nejsou na obrázku vyznačeny symetrie ale pouze pomocné body, které poslouží k lepší představě ohledně vzniklých symetrií. Body *U*, *V*, *W*, *X*, *Y* a *Z* představují středy daných stran. Pravidelný čtyřstěn má tedy celkem dvanáct přímých symetrií, z nichž je jedna identita *I* a jedenáct různých rotací. Nechť vede přímka z vrcholu *D* do těžiště protější strany, pak tato přímka bude osa rotace kolem bodu *D*, kterou lze otočit o 120° a o 240°, označme R_{D1}, R_{D2}. To samé lze provést i s ostatními vrcholy, kdy vzniknou rotace R_{A1}, R_{A2}, R_{B1}, R_{B2}, R_{C1} a R_{C2}. Dále úsečky *XV*, *YW* a *UZ* představují osy rotace o 180°, označme R_{XV}, R_{YW}, R_{UZ}. Vzniklé symetrie budou popsané pomocí permutací, z nichž autorka vytvoří Cayleyho tabulku pro skládání symetrií, která umožní vyšetření vlastností a významných prvků.

[97] KOVÁŘ, Petr. Algebra. s. 39.
[98] HRUŠA, Karel. Přehled elementární matematiky. s. 270.

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \qquad R_{A2} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix} \qquad R_{C2} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix}$$

$$R_{D1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix} \qquad R_{B1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix} \qquad R_{XV} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

$$R_{D2} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \qquad R_{B2} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix} \qquad R_{YW} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

$$R_{A1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix} \qquad R_{C1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix} \qquad R_{ZU} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

Tabulka č. 14 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií čtyřstěnu.

$\circ$	I	R_{D1}	R_{D2}	R_{A1}	R_{A2}	R_{B1}	R_{B2}	R_{C1}	R_{C2}	R_{XV}	R_{YW}	R_{ZU}
I	I	R_{D1}	R_{D2}	R_{A1}	R_{A2}	R_{B1}	R_{B2}	R_{C1}	R_{C2}	R_{XV}	R_{YW}	R_{ZU}
R_{D1}	R_{D1}	R_{D2}	I	R_{YW}	R_{B2}	R_{C1}	R_{ZU}	R_{XV}	R_{A1}	R_{B1}	R_{C2}	R_{A2}
R_{D2}	R_{D2}	I	R_{D1}	R_{C2}	R_{ZU}	R_{XV}	R_{A2}	R_{B1}	R_{YW}	R_{C1}	R_{A1}	R_{B2}
R_{A1}	R_{A1}	R_{ZU}	R_{B1}	R_{A2}	I	R_{YW}	R_{C2}	R_{D1}	R_{XV}	R_{B2}	R_{D2}	R_{C1}
R_{A2}	R_{A2}	R_{C1}	R_{YW}	I	R_{A1}	R_{D2}	R_{XV}	R_{ZU}	R_{B2}	R_{C2}	R_{B1}	R_{D1}
R_{B1}	R_{B1}	R_{A1}	R_{ZU}	R_{XV}	R_{C1}	R_{B2}	I	R_{YW}	R_{D2}	R_{D1}	R_{A2}	R_{C2}
R_{B2}	R_{B2}	R_{XV}	R_{C2}	R_{D1}	R_{YW}	I	R_{B1}	R_{A2}	R_{ZU}	R_{A1}	R_{C1}	R_{D2}
R_{C1}	R_{C1}	R_{YW}	R_{A2}	R_{B1}	R_{XV}	R_{ZU}	R_{D1}	R_{C2}	I	R_{D2}	R_{B2}	R_{A1}
R_{C2}	R_{C2}	R_{B2}	R_{XV}	R_{ZU}	R_{D2}	R_{A1}	R_{YW}	I	R_{C1}	R_{A2}	R_{D1}	R_{B1}
R_{XV}	R_{XV}	R_{C2}	R_{B2}	R_{C1}	R_{B1}	R_{A2}	R_{D2}	R_{A1}	R_{D1}	I	R_{ZU}	R_{YW}
R_{YW}	R_{YW}	R_{A2}	R_{C1}	R_{B2}	R_{D1}	R_{C2}	R_{A1}	R_{D2}	R_{B1}	R_{ZU}	I	R_{XV}
R_{ZU}	R_{ZU}	R_{B1}	R_{A1}	R_{D2}	R_{C2}	R_{D1}	R_{C1}	R_{B2}	R_{A2}	R_{YW}	R_{XV}	I

Zdroj – vlastní tvorba.

Uzavřenost:

V tabulce jsou vyplněna všechna pole, operace **je** tedy **uzavřená** neboli neomezeně definována na množině.

Komutativnost:

Tabulka není symetrická podle hlavní diagonály, operace tudíž **není komutativní**.

Asociativnost:

Skládání zobrazení je obecně asociativní, tato operace tedy **bude** také **asociativní**.

Existence neutrálního prvku:

První sloupec a řádek tabulky jsou totožné se záhlavími tabulky. Operace tedy **má neutrální prvek**, a to identitu.

Existence agresivního prvku:

V žádném řádku ani sloupci se nenachází pouze jediný prvek. V této operaci tedy **neexistuje agresivní prvek**.

Existence inverzních prvků:

Jelikož má operace neutrální prvek, **mohou existovat inverzní prvky** k některým prvkům. Z tabulky lze vyčíst, že inverzní prvek pro identitu je identita (symbolicky $I^{-1} = I$), dále $R_{D1}^{-1} = R_{D2}$, $R_{D2}^{-1} = R_{D1}$, $R_{A1}^{-1} = R_{A2}$, $R_{A2}^{-1} = R_{A1}$, $R_{B1}^{-1} = R_{B2}$, $R_{B2}^{-1} = R_{B1}$, $R_{C1}^{-1} = R_{C2}$, $R_{C2}^{-1} = R_{C1}$, $R_{XV}^{-1} = R_{XV}$, $R_{YW}^{-1} = R_{YW}$ a $R_{ZU}^{-1} = R_{ZU}$.

Existence idempotentního prvku:

V této operaci **existuje** jeden **idempotentní prvek**, a to identita, pro niž platí $I \circ I = I$.

Jednoznačnost dělení:

V každém řádku i sloupci tabulky se každý prvek vyskytuje právě jedenkrát, **jde** tedy o **operaci s jednoznačným dělením**.

5.5 ÚLOHA Č. 5

Zadání úlohy č. 5: Mějme symetrickou diferenci $S \Delta T$ dvou podmnožin $S, T \subset U$, která je definovaná předpisem $S \Delta T = (S \cap T') \cup (S' \cap T)$. Dokažte, že je tato binární operace komutativní a asociativní a že operace $\cap$ je distributivní vzhledem k operaci Δ.[99]

Řešení úlohy č. 5:

Komutativnost:

$$S \Delta T = T \Delta S$$

$$(S \cap T') \cup (S' \cap T) = (T \cap S') \cup (T' \cap S)$$

$$\Rightarrow \qquad (S \cap T') = (T' \cap S) = A$$

$$(S' \cap T) = (T \cap S') = B$$

$$\Rightarrow \qquad A \cup B = B \cup A \qquad \square$$

Asociativnost:

Definici asociativity autorka rozdělí na dvě části. Nejdříve bude dokázána červená část, poté modrá, na konci důkazu by se měly obě části sobě rovnat. Jelikož by byl výpočet velice zdlouhavý a pravděpodobně nepřehledný, bude od výpočtu oddělena zeleně, popř. žlutě vyznačená část, kterou autorka vyřeší ve vedlejším výpočtu, a poté rovnou dosadí výsledek.

$$(S \Delta T) \Delta R = S \Delta (T \Delta R)$$

$(S \Delta T) \Delta R = [(S \cap T') \cup (S' \cap T)] \Delta R = \{[(S \cap T') \cup (S' \cap T)] \cap R'\} \cup \{[(S \cap T') \cup (S' \cap T)]' \cap R\} = [(S \cap T' \cap R') \cup (S' \cap T \cap R')] \cup \{[(S' \cup T) \cap (S \cup T')] \cap R\} = [(S \cap T' \cap R') \cup (S' \cap T \cap R')] \cup \{[(S' \cap T') \cup (T \cap S)] \cap R\} = [(S \cap T' \cap R') \cup (S' \cap T \cap R')] \cup [(S' \cap T' \cap R) \cup (T \cap S \cap R)] = (S \cap T' \cap R') \cup (S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R) \cup (T \cap S \cap R)$

$(S' \cup T) \cap (S \cup T') = [S' \cap (S \cup T')] \cup [T \cap (S \cup T')] = [(S' \cap S) \cup (S' \cap T')] \cup [(T \cap S) \cup (T \cap T')] = (S' \cap S) \cup (S' \cap T') \cup (T \cap S) \cup (T \cap T') = \varnothing \cup (S' \cap T') \cup (T \cap S) \cup \varnothing = (S' \cap T') \cup (T \cap S)$

[99] WEIL, Jiří a J. WEIL. Rozpracovaná řešení úloh z vyšší algebry. s. 37.

$S \,\Delta\, (T \,\Delta\, R) = S \,\Delta\, [(T \cap R') \cup (T' \cap R)] = \{S \cap [(T \cap R') \cup (T' \cap R)]'\} \cup \{S' \cap [(T \cap R') \cup (T' \cap R)]\} = \{S \cap [(T' \cup R) \cap (T \cup R')]\} \cup [(S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R)] = \{S \cap [(T' \cap R') \cup (R \cap T)]\} \cup [(S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R)] = [(S \cap T' \cap R') \cup (S \cap R \cap T)] \cup [(S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R)] = (S \cap T' \cap R') \cup (S \cap R \cap T) \cup (S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R)$

$(T' \cup R) \cap (T \cup R') = [T' \cap (T \cup R')] \cup [R \cap (T \cup R')] = [(T' \cap T) \cup (T' \cap R')] \cup [(R \cap T) \cup (R \cap R')] = (T' \cap T) \cup (T' \cap R') \cup (R \cap T) \cup (R \cap R') = \emptyset \cup (T' \cap R') \cup (R \cap T) \cup \emptyset = (T' \cap R') \cup (R \cap T)$

$(S \cap T' \cap R') \cup (S \cap R \cap T) \cup (S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R) =$
$(S \cap T' \cap R') \cup (S' \cap T \cap R') \cup (S' \cap T' \cap R) \cup (T \cap S \cap R)$

□

Distributivnost:

Distributivnost operace $\cap$ vzhledem k operaci Δ bude dokazována tak, že na základě rozepsání první části výrokové formule by měla vzniknout druhá část výrokové formule. Autorka si u třetího, respektive čtvrtého kroku pomůže přidáním dvou prázdných množin, díky kterým pak bude možné provést vytýkání. Tento postup bude opět vyznačen pomocí barev.

$$R \cap (S \,\Delta\, T) = (R \cap S) \,\Delta\, (R \cap T)$$

$R \cap (S \,\Delta\, T) = R \cap [(S \cap T') \cup (S' \cap T)] = (R \cap S \cap T') \cup (R \cap S' \cap T) = (R \cap S \cap T') \cup (R \cap S' \cap T) \cup \emptyset \cup \emptyset = (R \cap S \cap T') \cup (R \cap S' \cap T) \cup (R \cap R' \cap S) \cup (R \cap R' \cap T) = [(R \cap S) \cap (T' \cup R')] \cup [(R \cap T) \cap (S' \cup R')] = [(R \cap S) \cap (T \cap R)'] \cup [(R \cap T) \cap (S \cap R)'] = (R \cap S) \,\Delta\, (R \cap T)$

□

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce je zkompletovat poznatky o tématu vyšetřování vlastností a významných prvků binárních operací a seznámit čtenáře se základními pojmy a definicemi potřebnými k jeho pochopení.

Nejdříve byly vysvětleny pojmy, jako kartézský součin, relace, zobrazení či operace, což umožnilo definovat pojem binární operace. Dále se autorka věnovala vlastnostem a významným prvkům binárních operací, které byly vždy uvedeny na vhodných příkladech. Součástí práce je i kapitola zabývající se binárními operacemi na určitých stupních vzdělávání a chybami spojenými právě s výukou binárních operací. S pojmem binární operace úzce souvisí i pojem algebraická struktura, jemuž je v této práci také věnována jedna kapitola, konkrétněji algebraickým strukturám s jednou a se dvěma binárními operacemi.

Poslední kapitola práce je čistě praktická, autorka v ní vyřešila několik ne příliš obvyklých úloh, které mohou později posloužit například při výuce binárních operací na vysokých školách.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce je zaměřena na vyšetřování vlastností a významných prvků binárních operací. Hlavní část práce je čistě teoretická, konec je pak praktický. V teoretické části jsou definovány pojmy, jako kartézský součin, relace, zobrazení či operace, na jejichž základě je možné zavést pojem binární operace a dále se zabývat jejich vlastnostmi a významnými prvky. Každá vlastnost či významný prvek je pak uveden na vhodných příkladech. V teoretické části je také popsáno několik případů, kdy se žáci setkávají s binárními operacemi dříve než na vysokých školách, dále je upozorněno na několik chyb při výuce binárních operací. S pojmem binární operace úzce souvisí i algebraické struktury, kterým je věnován závěr teoretické části. V praktické části je podrobně vyřešeno pět složitějších úloh.

RESUMÉ

This bachelor thesis is focused on examination of properties and important elements of binary operations. The main part of the thesis is entirely theoretical, and the end is practical. In the theoretical part, terms like cartesian product, relation and mapping are defined, thanks to which it is possible to delineate the concept of binary operation and further deal with their examination and important elements. Every examination and important element are presented with an appropriate examples. The theoretical part also describes some cases where students encounter binary operations earlier than in universities and draws attention to several mistakes during teaching of binary operation. Algebraic structures are also closely related to the concept of binary operations, to which the conclusion of the theoretical part deals. In the practical part, five complex problems are solved in detail.

SEZNAM LITERATURY

- BĚLÍK, Miroslav. Sbírka úloh z elementární aritmetiky s pokyny k řešení: Určeno pro stud. pedag. fakult. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta, 1990. ISBN 80-7044-018-X. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:d144cb70-7a17-11e3-a80c-005056825209.
- BICAN, Ladislav. Algebra (pro učitelské studium). Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0860-8. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:2fa77ae0-4bad-11e7-9277-005056825209.
- BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. sv. 1. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:1c0f60d0-31e1-11e4-8c14-5ef3fc9bb22f.
- BLAŽEK, Jaroslav. Algebra a teoretická aritmetika. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. sv. 2. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:6ecefa80-d044-11e5-9c26-5ef3fc9bb22f.
- CULLINANE, Michael J. Motivating the notions of binary operation and group in an abstract algebra course. Online. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 2005, roč. 15, č. 4, s. 339-348. Dostupné z: https://doi.org/10.1080/10511970508984127. [cit. 2023-12-08].
- Doporučené učební osnovy předmětů ČJL, AJ a M pro základní školu. Příklad zpracování učebních osnov. Matematika. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Online. 2011. Dostupné z: http://www.vuppraha.rvp.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf. [cit. 2024-03-22].
- DRÁBEK, Jaroslav. Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: Celost. vysokošk. učebnice. Praha: SPN, 1985. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:edcde5c0-3e99-45f2-955e-16609ab6d219.
- HADAR, N. a HADASS, R. Between associativity and commutativity. Online. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1981, roč. 12, č. 5, s. 535-539. Dostupné z: https://doi.org/10.1080/0020739810120504. [cit. 2023-12-08].

- HORT, Daniel, Jiří RACHŮNEK a Univerzita Palackého. Algebra I. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0631-4. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:55a0e420-d9e2-11e2-a0b3-5ef3fc9bb22f.
- HRUŠA, Karel. Přehled elementární matematiky. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1962. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:3669d120-a863-11e3-9d7d-005056827e51.
- KOLÁŘ, Josef, Olga ŠTĚPÁNKOVÁ a Michal CHYTIL. Logika, algebry a grafy: celostátní vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:2959cebd-5b6a-45cf-a233-5a0734e2f00c.
- KOSMÁK, Ladislav a Masarykova univerzita. Množinová algebra. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1082-7. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:3abbf804-3dba-46c1-9f92-c5be44c8c3a1.
- KOVÁŘ, Petr. Algebra. Online. 2023. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~kov16/files/skriptum_algebra.pdf. [cit. 2024-03-22].
- KUROŠ, Aleksandr Gennad'jevič. Kapitoly z obecné algebry. Praha: Academia, 1968. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:c449bce0-288f-11e6-a344-5ef3fc9ae867.
- Matematika. Školní vzdělávací plán Gymnázia Jana Keplera. Online. Dostupně z: https://sites.google.com/a/gjk.cz/svp/5-osnovy/osnovy-4leteho-gymnazia/matematika. [cit. 2024-03-22].
- NAGY, Jozef. Vybrané partie z moderní matematiky. Praha: SNTL, 1976. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:6640cb10-73d8-11e4-9605-005056825209.
- Operace v množině, vlastnosti binárních operací. PF UJEP, Katedra matematiky. Online. *Aritmetika s didaktikou I.* Dostupné z: https://www.pf.ujep.cz/wp-content/uploads/2018/09/KPR_opora_MA_aritmetika_studium_aritmetika03.pdf. [cit. 2024-03-22].
- PONDĚLÍČEK, Bedřich. Algebraické struktury s binárními operacemi. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1977. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:27619790-b634-11e5-82dc-5ef3fc9bb22f.

- Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze. Online. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/. [cit. 2024-03-22].
- ŠEDIVÝ, Jaroslav. O modernizaci školské matematiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:f78a2120-9324-11e7-a9a4-005056827e51.
- TLUSTÝ, Pavel a Jihočeská univerzita. Lineární algebra a její aplikace. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7040-650-X. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:c9b5d6b0-15b8-11e3-84ec-5ef3fc9bb22f.
- VYŠÍN, Jan. Metodika řešení matematických úloh. Praha: SPN, 1972. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:f1edf640-557b-11e4-90c9-005056825209.
- WEIL, Jiří a J. WEIL. Rozpracovaná řešení úloh z vyšší algebry: celostátní vysokoškolská příručka pro studenty matematicko-fyzikálních a přírodovědeckých fakult studijního oboru 11-04-8 "Matematická analýza". Praha: Academia, 1987. Dostupné také z: https://ndk.cz/uuid/uuid:5447ef30-9caa-11e2-bc29-005056825209.
- ZASLAVSKY, Orit a PELED, Irit. Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation. Online. Journal for Research in Mathematics Education. 1996, roč. 27, s. 67-78. Dostupné z: National Council of Teachers of Mathematics, https://www.jstor.org/stable/749198. [cit. 2023-12-08].

SEZNAM TABULEK

Tabulka č. 1 – Cayleyho tabulka pro implikaci. 13

Tabulka č. 2 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině A. 17

Tabulka č. 3 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$. 17

Tabulka č. 4 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$. 19

Tabulka č. 5 – Cayleyho tabulka pro násobení na množině $\mathbb{Z}_3$. 21

Tabulka č. 6 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$. 23

Tabulka č. 7 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$. 25

Tabulka č. 8 – Cayleyho tabulka pro sčítání na množině $\mathbb{Z}_3$. 26

Tabulka č. 9 – Přehled algebraických struktur s jednou binární operací. 36

Tabulka č. 10 – Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi. 38

Tabulka č. 11 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií symbolu čtyřlístku. 43

Tabulka č. 12 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií obdélníka. 47

Tabulka č. 13 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií kvádru. 47

Tabulka č. 14 – Cayleyho tabulka pro skládání symetrií čtyřstěnu. 50

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1 – Kartézský graf. 6

Obrázek č. 2 – Šachovnicový graf. 6

Obrázek č. 3 – Uzlový graf. 7

Obrázek č. 4 – Hierarchie mezi pojmy. 11

Obrázek č. 5 – Spojnicový nomogram. 14

Obrázek č. 6 – Symetrie symbolu čtyřlístku. 42

Obrázek č. 7 – Symetrie obdélníku v rovině. 45

Obrázek č. 8 – Kvádr v prostoru. 46

Obrázek č. 9 – Pravidelný čtyřstěn v prostoru. 49