

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY



Spektrální vlastnosti grafů

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Kristýna VELKOVÁ**
Osobní číslo: **A21B0072P**
Studijní program: **B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce: **Spektrální vlastnosti grafů**
Zadávající katedra: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s problematikou spektrálních vlastností matic, teorií nezáporných matic a spektrálních vlastností grafů.
2. Proveďte rešerši známých výsledků z oblasti spektrální teorie grafů a vlastností speciálních tříd grafů.
3. Přehledně zpracujte problematiku spektrálních vlastností neorientovaných grafů.
4. Studujte spektrální vlastnosti vybraných tříd grafů.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

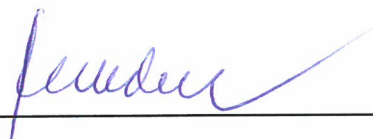
- R. Horn, Ch.R. Johnson: Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2012.
- F.R.K Chung: Spectral Graph Theory, AMS 1996.
- Y. Hong, Bounds of eigenvalues of graphs, Discrete Math. 123 (1993) 65-74.
- B. Mohar, Laplace eigenvalues of graphs – a survey, Discrete Math. 109 (1992) 171-183.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v příloženém seznamu literatury. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Plzni, dne 22. května 2024

.....
Kristýna Velková

Abstrakt

Tato práce se zabývá spektrálními vlastnostmi grafů, klíčovým aspektem teorie grafů, který nachází široké uplatnění v mnoha odvětvích vědy a techniky. Práce poskytuje přehled základních i pokročilých konceptů spektrální teorie matic a grafů, s důrazem na jejich aplikace v oblastech jako je algebraická souvislost a tuhost grafů. Speciální pozornost je věnována spektru Laplaceovy matice a jeho vlivu na vlastnosti grafu a to zejména na jeho tuhost.

Klíčová slova

Spektrální vlastnosti grafů, spektrální teorie matic, algebraická souvislost, tuhost, Chvátalova hypotéza

Abstract

This thesis addresses the spectral properties of graphs, a key aspect of graph theory that finds broad applications across various fields of science and technology. The work provides an overview of both fundamental and advanced concepts of spectral matrix and graph theory, with an emphasis on their applications in areas such as algebraic connectivity and toughness of graphs. Special attention is given to the spectrum of the Laplacian matrix and its impact on graph properties, particularly its toughness.

Keywords

Spectral properties of graph, spectral matrix theory, algebraic connectivity, toughness, Chvátal's conjecture

Poděkování

Děkuji panu doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za cenné rady, ochotu a trpělivost během konzultací a za odborné vedení mé bakalářské práce.

Obsah

Úvod	1
1 Spektrální teorie matic	2
1.1 Základní pojmy	2
1.2 Spektrální vlastnosti matic	3
2 Grafové matice	7
2.1 Matice sousednosti	8
2.2 Laplaceova matice	8
2.3 Beznaménková Laplaceova matice	12
3 Vlastnosti grafů a vybrané grafové třídy	13
3.1 Vybrané vlastnosti grafů	13
3.1.1 Souvislost grafu	13
3.1.2 Hamiltonovské vlastnosti grafu	15
3.1.3 Tuhost	16
3.2 Vybrané třídy grafů	22
3.2.1 Úplné grafy	22
3.2.2 Multipartitní a bipartitní grafy	23
3.2.3 Split grafy	24
4 Propojení spektra a grafových parametrů	25
4.1 Algebraická souvislost	25
4.2 Tuhost a spektrum	27
4.3 Hranová tuhost a spektrum	36
Závěr	39
Literatura	40

Úvod

Spektrální teorie matic a grafů hraje klíčovou roli v mnoha oblastech a to včetně matematiky, informatiky, ale také biologie a chemie. Tento obor umožňuje získat hlubší náhled na strukturu a dynamiku matic a grafů, což je klíčové pro řešení široké škály problémů, od analýzy obrazu po studium molekulárních struktur.

Cílem této práce je shrnutí známých výsledků v oblasti spektrální teorie matic a grafů a prohloubit pochopení vztahů mezi vlastnostmi grafů a jejich spektrálními charakteristikami. Konkrétně se zaměříme na to, jak spektrální vlastnosti ovlivňují schopnost grafů odolávat strukturálním změnám, což má aplikace v oblastech, kde je důležitá robustnost a stabilita struktury, jako jsou např. komunikační sítě.

První dvě kapitoly této práce poskytují souhrnný přehled v oblasti spektrální teorie matic a grafů. Nejprve představíme základní nástroje, které nám jsou nápomocné při určení vlastních čísel matic a grafů. Následně se zaměříme na některé maticové reprezentace grafu, přičemž se zaměříme na Laplaceovu matici, její vlastnosti a spektrum.

Poslední dvě kapitoly se věnují podrobné analýze grafových parametrů a speciálních tříd grafů. Prozkoumáme jejich vztahy k spektrálním vlastnostem, s důrazem na algebraickou souvislost a spektrální odhady hodnoty tuhosti grafu.

Kapitola 1

Spektrální teorie matic

Pro účely této práce zavedeme některé základní pojmy a značení z oblasti spektrální teorie matic. Většina těchto pojmů byla převzata z literatury [1] a [2].

Dále, budeme v této kapitole prezentovat základní poznatky o spektrálních vlastnostech matic.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1.1. Mějme $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem matice** \mathbf{M} , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ takový, že platí

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{v}.$$

Vektor \mathbf{v} pak nazveme **vlastním vektorem** příslušícím vlastnímu číslu λ .

Vlastní čísla můžeme nalézt jako kořeny *charakteristického polynomu*

$$ch(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}).$$

Algebraickou násobností vlastního čísla rozumíme jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu. Soubor všech vlastních čísel matice \mathbf{M} nazýváme *spektrém* matice \mathbf{M} , dále budeme v této práci pro spektrum používat značení $\sigma(\mathbf{M})$.

Definice 1.1.2. Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Vlastní číslo matice \mathbf{M} , které nabývá nejvyšší hodnoty v absolutní hodnotě (modulu)

$$\rho(\mathbf{M}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{M})\}$$

nazýváme **spektrálním poloměrem** matice M .

1.2 Spektrální vlastnosti matic

Zaměříme se na spektrální vlastnosti speciálních typů matic, konkrétně na hermitovské a symetrické reálné matice a následně na klasné a nezáporné matice. Představíme definice a výsledky, které poskytují důležité informace o vlastnostech těchto matic. Pro úplnost začneme definicí *hermitovské transpozice*.

Definice 1.2.1. Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Zobrazení $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^*$, kde

$$\mathbf{M}^* = (\overline{\mathbf{M}})^T, \quad (1.1)$$

nazveme **hermitovská transpozice**.

Horn a Johnson ve své knize [2] uvádí několik různých tříd matic, které jsou definovány pomocí zobrazení *transpozice* a *hermitovské transpozice*. Pro nás jsou zejména důležité *symetrické* a *hermitovské* matice.

Definice 1.2.2. Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tato matice je symetrická, pokud platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T.$$

Definice 1.2.3. Mějme matici $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tato matice je **hermitovská**, pokud

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^*. \quad (1.2)$$

Z vlastností reálných čísel, a to konkrétně $\forall z \in \mathbb{R} : z = \bar{z}$, plyne, že *reálné symetrické matice* jsou speciálním případem hermitovských matic. Pro reálné symetrické matice tedy platí i následující vlastnosti.

Věta 1.2.1 (Spektrální věta). [2] *Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je hermitovská matice, potom*

- (a) *vlastní čísla matice \mathbf{M} jsou reálná čísla,*
- (b) *vlastní vektory příslušící různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Protože spektrum hermitovské matice obsahuje výhradně reálná vlastní čísla, pro jednoduchost zavedeme následující řazení

$$\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{max}.$$

Toto značení založené na řazení vlastních čísel do neklesající posloupnosti budeme v naší práci používat nadále.

Analýza spektra matic je klíčovým prvkem mnoha matematických disciplín, včetně lineární algebry, numerické analýzy a teorie grafů.

Existuje řada významných výsledků, které nám pomáhají porozumět vlastnostem a chování vlastních čísel matic. Tyto výsledky nekladou přílišné požadavky na vlastnosti matic a přesto nám poskytují cenné informace o jejich spektrální struktuře.

Jedním z těchto nástrojů pro analýzu spektra matic je Rayleighova věta. Tato věta nám přináší nový pohled, na problém hledání vlastních čísel a to tím, že ho formuluje jako optimalizační problém, což umožňuje aplikaci technik z oblastí optimalizace a numerické matematiky.

Věta 1.2.2 (Rayleighova věta). [2] [2] *Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je čtvercová hermitovská matice. Mějme dána celá čísla $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k \leq n$ a ortonormální vektory $\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}$, pro které platí: $\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, $\forall i = i_1, \dots, i_k$ a nechť S je lineárním obalem $S = \text{span}\{\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}\}$. Potom platí*

(a)

$$\begin{aligned} \lambda_{min} &= \min_{\{\mathbf{x} \in S: \mathbf{x} \neq 0\}} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \min_{\{\mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\|_2=1\}} \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x} \\ &\leq \max_{\{\mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\|_2=1\}} \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x} = \max_{\{\mathbf{x} \in S: \mathbf{x} \neq 0\}} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \lambda_{max} \end{aligned}$$

(b) *Pro každý vektor $\mathbf{x} \in S$ takový, že $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ platí,*

$$\lambda_1 \leq \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \lambda_n,$$

přičemž rovnost na pravé (resp. levé) straně nerovnosti nastává právě tehdy, když $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda_{max}\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda_{min}\mathbf{x}$)

(c) *Pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ platí,*

$$\lambda_{min} \leq \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \lambda_{max},$$

přičemž rovnost na pravé (resp. levé) straně nerovnosti nastává právě tehdy, když $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda_{max}\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda_{min}\mathbf{x}$), navíc platí:

$$\lambda_{max} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \quad a \quad \lambda_{min} = \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}$$

Dalším takovým nástrojem je Geršgorinova věta, pro jejíž formulaci nejdříve definujeme termín *Geršgorinův disk*.

Definice 1.2.4. Mějme matici $\mathbf{M} = [m_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Označme

$$R'_i(\mathbf{M}) = \sum_{j \neq i} |m_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

řádkový součet i -té řádky matice \mathbf{M} , potom množiny

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{M}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - m_{ii}| \leq R'_i(\mathbf{M})\}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

nazveme **Geršgorinovými disky**.

Věta 1.2.3 (Geršgorinova věta). 2 *Vlastní čísla matice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ leží v sjednocení Geršgorinových disků*

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - m_{ii}| \leq R'_i(\mathbf{M})\}$$

Navíc, pokud je sjednocení k Geršgorinových disků $\mathcal{G}_k(\mathbf{M}) \subset \mathcal{G}(\mathbf{M})$, která je disjunkt ní od zbylých $n - k$ Geršgorinových disků, pak $\mathcal{G}_k(\mathbf{M})$ obsahuje právě k vlastních čísel matice \mathbf{M} , počítané podle jejich algebraické násobnosti.

Kromě toho, že nám Geršgorinova věta umožňuje omezit jednotlivé hodnoty vlastních čísel, často jí můžeme využít i k rozhodnutí o některých vlastnostech této matice, jako je např. singularita a definitnost. Toto využití Geršgorinovy věty naznačíme v důkazu věty 2.2.1.

Kladné a nezáporné matice

Hermitovské matice nejsou jedinou třídou matic, jejichž spektrální vlastnosti byly více prozkoumány. Dalšími takovými třídami jsou *kladné* a *nezáporné matice*.

Definice 1.2.5. Matici $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ nazveme **kladnou maticí**, pokud platí

$$m_{i,j} > 0, \quad \text{pro všechna } i, j.$$

V případě, že

$$m_{i,j} \geq 0, \quad \text{pro všechna } i, j$$

je matice \mathbf{M} **nezáporná**. Kladné matice značíme $\mathbf{M} > 0$, analogicky značíme nezáporné matice $\mathbf{M} \geq 0$.

Jednou z nejznámějších vět týkající se kladných matic je Perronova věta. Tato věta shrnuje nejdůležitější poznatky o spektrálních vlastnostech těchto matic.

Věta 1.2.4 (Perron). [3] *Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je kladná matice, $\rho(\mathbf{M})$ její spektrální poloměr a λ_i její vlastní čísla. Potom platí*

- (i) $\rho(\mathbf{M})$ je vlastním číslem matice \mathbf{M} .
- (ii) K vlastnímu číslu $\rho(\mathbf{M})$ existuje kladný vlastní vektor.
- (iii) Algebraická násobnost vlastního čísla $\rho(\mathbf{M})$ je rovna jedné.
- (iv) $\rho(\mathbf{M})$ je dominantní vlastní číslo, tj. je-li

$$\lambda_n = \rho(\mathbf{M}), \text{ pak } |\lambda_i| < \rho(\mathbf{M}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Poznatky, které poskytuje Perronova věta nelze převést na problematiku nezáporných matic přímo, i přes to jsme schopni tyto výsledky aplikovat na menší speciální podtřídu těchto matic.

Definice 1.2.6. Matici $\mathbf{M}^{n \times n}$, kde $n \geq 2$, nazveme **rozložitelnou**, právě tehdy když existuje permutační matice \mathbf{P} taková, že platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ 0 & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{P},$$

kde bloku \mathbf{B}_{11} a \mathbf{B}_{22} jsou čtvercové. Není-li matice \mathbf{M} rozložitelná, říkáme, že je nerozložitelná.

Díky definici *nerozložitelných matic* můžeme převést výsledky Perronovy věty na širší skupinu matic než jsou pouze kladné matice.

Věta 1.2.5 (Perron-Frobenius). [3] *Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je nezáporná nerozložitelná matice. Potom platí*

- (i) $\rho(\mathbf{M})$ je vlastním číslem matice \mathbf{M} .
- (ii) K vlastnímu číslu $\rho(\mathbf{M})$ existuje kladný vlastní vektor.
- (iii) Algebraická násobnost vlastního čísla $\rho(\mathbf{M})$ je rovna jedné.

Věta 1.2.6. [3] *Pokud je matice \mathbf{M} nezáporná nerozložitelná a navíc primitivní, potom platí*

- (iv) $\rho(\mathbf{M})$ je dominantní vlastní číslo.

O matici \mathbf{M} řekneme, že je *primitivní*, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathbf{M}^k > 0$.

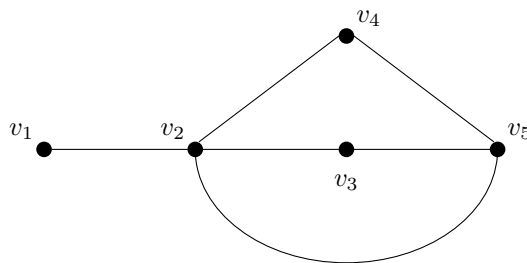
Kapitola 2

Grafové matice

Dále se budeme zabývat využitím poznatků ze spektrální teorie matic v oblasti teorie grafů. Začneme definicí pojmu *neorientovaný graf*.

Definice 2.0.1. [4] Necht V je konečná množina. **Neorientovaným grafem** nazveme dvojici $G = (V, E)$, kde $E \subseteq \binom{V}{2}$, tj. prvky množiny E jsou dvouprvkové podmnožiny množiny V .

V rámci této práce se termín *graf* vždy vztahuje na *neorientovaný prostý graf*, tj. neorientovaný graf bez násobných hran a smyček.



Obrázek 2.1: Neorientovaný graf na pěti vrcholech

Prvky množiny V nazýváme *vrcholy* grafu G , prvky množiny E nazýváme *hranami*. *Řádem* grafu G rozumíme počet vrcholů tohoto grafu a budeme jej značit n .

O dvou vrcholech $u, v \in V$ řekneme, že jsou *sousední*, pokud existuje hrana $\{u, v\} \in E$. Vrchol $v \in V$ nazveme *incidentní* s hranou $e \in E$, pokud $e = \{u, v\}$, tj. v je jedním z koncových vrcholů hrany e .

Stupeň vrcholu $v \in V$ je počet hran incidentních s tímto vrcholem. Stupeň vrcholu budeme značit $d_G(v)$, *minimální stupeň* grafu $\delta_G = \min_{v \in V} d_G(v)$ a *maximální stupeň* grafu $\Delta_G = \max_{v \in V} d_G(v)$. Pokud má graf G všechny stupně vrcholů stejné, tj. $\forall v \in V : d_G(v) = d$ řekneme, že graf G je *d-regulární*.

Podgraf grafu G je graf $H = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ a pro každou hranu $\{u, v\} \in E'$ platí $u, v \in V'$. Podgraf grafu G , který obsahuje všechny jeho vrcholy nazveme *faktorem*, pokud je navíc tento podgraf k -regulární, jedná se o k -faktor.

Graf indukovaný množinou vrcholů $S \subseteq V$ je podgraf $G[S]$ grafu G , který obsahuje všechny vrcholy z S a všechny hrany z E , které v grafu G spojují vrcholy z množiny S . Jinými slovy $G[S] = (S, E_S)$, kde $E_S = \{\{u, v\} \in E : u, v \in S\}$.

Pro reprezentaci grafu je často vhodné zvolit jednu z grafových matic. V této kapitole si některé z těchto matic představíme reprezentace grafů a uvedeme jejich základní vlastnosti.

2.1 Matice sousednosti

V teorii grafů je základním nástrojem pro reprezentaci vztahů mezi vrcholy grafu matice sousednosti. *Matice sousednosti* je nejenom základem pro mnohé algoritmy v teorii grafů, ale také slouží jako výchozí bod pro další matematické konstrukce, jako je například Laplaceova matice, kterou lze z matice sousednosti odvodit.

Definice 2.1.1. [1] Necht' $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, potom **matice sousednosti** je čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.2 Laplaceova matice

Definice 2.2.1. [1] Necht' $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, potom **Laplaceova matice** je čtvercová matice $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{M}_n$

$$l_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{pokud } i = j, \\ -1 & \text{pokud } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 2.2.1. [1] Necht' $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, \mathbf{A} je matice sousednosti grafu G a \mathbf{D} je čtvercová matice řádu n , $\mathbf{D} = \text{diag}(d_G(v_1), \dots, d_G(v_n))$, potom platí

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$$

Následující tvrzení a věty se mohou zdát triviální, nicméně se jedná o základní poznatky, které budou využity i dále v této práci, a tak pro ně uvádíme i důkazy.

Věta 2.2.1. [5] Necht $G = (V, E)$ je graf. Laplaceova matice $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ je

- a) symetrická,
- b) singulární,
- c) pozitivně semidefinitní.

Důkaz. Tyto vlastnosti Laplaceovy matice \mathbf{L} dokážeme postupně.

- a) Graf G je neorientovaný, což znamená, že pokud je mezi vrcholy v_i a v_j hrana, platí, že existuje i hrana mezi v_j a v_i . To znamená, že matice \mathbf{L} je symetrická.
- b) Snadno nahlédneme, že pro každý vrchol $v_i \in V$, kde $i = 1, \dots, n$ platí

$$\sum_{j=1; j \neq i}^n l_{ij} = -d_G(v_i), \quad (2.1)$$

a tedy platí

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} = l_{ii} + \sum_{j=1; j \neq i}^n l_{ij} = d_G(v) - d_G(v) = 0.$$

Protože je každý řádkový součet matice \mathbf{L} roven 0, existuje netriviální lineární kombinace sloupců, která je rovna nulovému vektoru \mathbf{o} . Matice \mathbf{L} je singulární.

- c) V předchozí části jsme dokázali, že Laplaceova matice je singulární. Protože je matice singulární, alespoň jedním z vlastních čísel je $\mu = 0$.

Pozitivní definitnost Laplaceovy matice můžeme dokázat aplikací Geršgorinovy věty (1.2.3). Geršgorinův disk přísluší i -tému řádku matice \mathbf{M} můžeme zapsat jako množinu

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{L}) = \{x \in \mathbb{C} : |d(v_i) - x| \leq d(v_i)\}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Na první pohled je patrné, že hranice tohoto kruhu prochází počátkem souřadného systému v Gaussově rovině. Sjednocením všech Geršgorinových disků získáme množinu

$$\mathcal{G}(\mathbf{L}) = \{x \in \mathbb{C} : |\Delta_G - x| \leq \Delta_G\} \quad (2.2)$$

Tato množina obsahuje všechna vlastní čísla Laplaceovy matice.

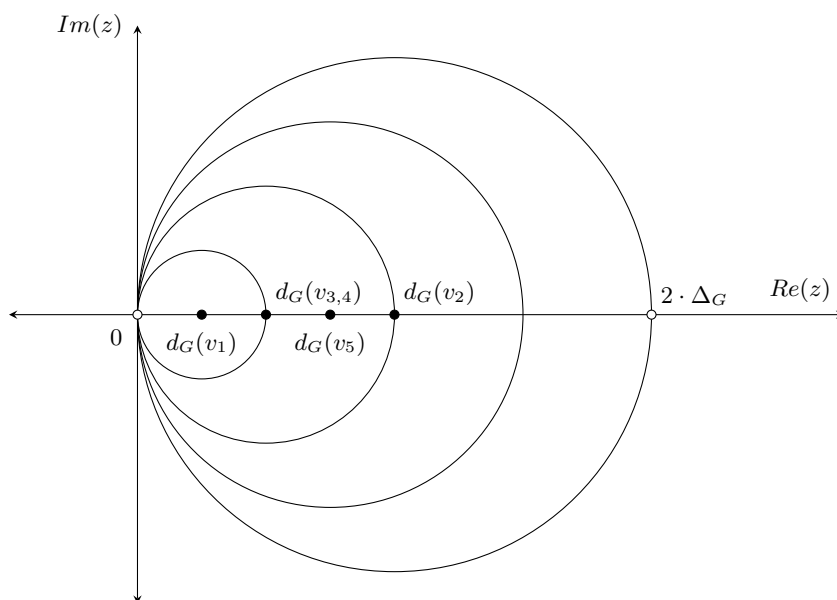
Uvědomme si, že Laplaceova matice je navíc reálná symetrická matice a vlastní čísla Laplaceovy matice jsou tedy reálná (viz věta 1.2.1). Z (2.2) získáme meze pro hodnotu vlastních čísel matice \mathbf{L} .

$$0 \leq \mu \leq 2 \cdot \Delta_G$$

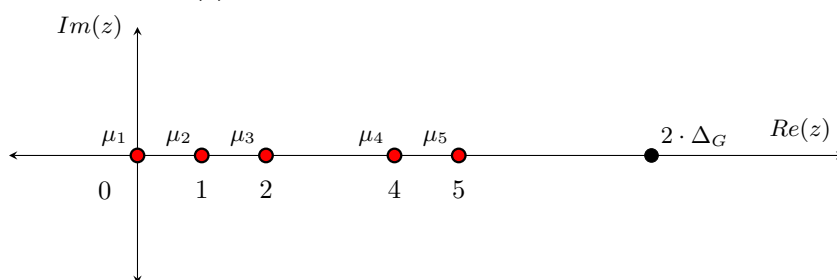
Protože je každé vlastní číslo Laplaceovy matice nezáporné, Laplaceova matice je pozitivně semidefinitní.

□

Tento přístup nám kromě důkazu pozitivní semidefinitnosti Laplaceovy matice navíc poskytuje horní odhad pro hodnotu vlastních čísel.



(a) Geršgorinovy disky Laplaceovy matice grafu G



(b) Grafické znázornění spektra Laplaceovy matice grafu G a jeho horního odhadu $2 \cdot \Delta_G$

Obrázek 2.2: Ilustrace aplikace Geršgorinovy věty pro Laplaceovu matici grafu G z obrázku [2.1](#)

Následující závěry zasazují do kontextu vztah mezi souvislostí grafu G a spektrem Laplaceovy matice. Protože je souvislost, v kontextu této práce, důležitou vlastností grafů, formální definici zavedeme v kapitole 3

Graf G se nazývá *souvislý*, pokud existuje cesta mezi každou dvojicí vrcholů, což znamená, že je možné se z libovolného vrcholu grafu dostat do jakéhokoli jiného vrcholu pomocí „sledu“ hran.

Tvrzení 2.2.2. [6] Nechť G je souvislý graf, násobnost vlastního čísla Laplaceovy matice $\mu = 0$ je 1.

Pokud je graf G nesouvislý, jeho maximální souvislé podgrafy nazveme *komponentami*.

Věta 2.2.2. [6] Nechť G je neorientovaný graf s k komponentami a \mathbf{L} k němu příslušná Laplaceova matice. Platí, že algebraická násobnost vlastního čísla 0 Laplaceovy matice je k .

Důkaz. Předpokládejme, že $G = (V, E)$ je graf s $k \geq 2$ komponentami. Označme postupně vrcholy jednotlivých komponent

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$$

Protože neexistuje hrana, která by spojovala vrcholy z dvou různých komponent, Laplaceova matice je v tomto případě blokově diagonální s k bloky.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & L_k \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla matice \mathbf{L} můžeme určit jako kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Jak matice \mathbf{L} , tak jednotková matice \mathbf{I} jsou diagonální. Matice $(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})$ je tedy opět blokově diagonální, a proto platí

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{L}_1 - \lambda \mathbf{I}) \cdot \dots \cdot \det(\mathbf{L}_k - \lambda \mathbf{I}) \quad (2.3)$$

Na jednotlivé komponenty se můžeme také dívat jako na nepropojené souvislé grafy a bloky matice \mathbf{L} , pak můžeme chápat, jako Laplaceovy matice jednotlivých komponent.

Z předchozího tvrzení víme, že Laplaceova matice souvislého grafu má vlastní číslo $\mu = 0$, jehož algebraická násobnost je rovna 1. Díky tomuto tvrzení a vztahu (2.3) plyne, že algebraická násobnost vlastního čísla $\mu = 0$ matice \mathbf{L} je právě k . \square

2.3 Beznaménková Laplaceova matice

Beznaménková Laplaceova matice je variací na klasickou Laplaceovu matici, která se využívá při aplikaci teorie grafů v oblastech, kde jsou záporné hodnoty vyjadřující spojení mezi sousedními vrcholy nežádoucí.

Definice 2.3.1. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, potom **beznaménková Laplaceova matice** je čtvercová matice $\mathbf{L} \in \mathbf{M}_n$

$$l_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{pokud } i = j, \\ 1 & \text{pokud } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kapitola 3

Vlastnosti grafů a vybrané grafové třídy

Tato kapitola se věnuje vybraným vlastnostem grafů, které jsou fundamentální pro pochopení jejich struktury a chování. V první části kapitoly definujeme klíčové grafové vlastnosti, které jsou důležité pro teoretické i praktické aplikace v diskrétní matematice a souvisejících oborech. Zvláštní pozornost je věnována tuhosti grafu.

Druhá část kapitoly se zaměří na speciální třídy grafů, které se odlišují specifickými charakteristikami a mají zásadní význam jak pro řešení konkrétních matematických problémů, tak pro tuto práci.

Celkově následující text nabízí hluboký pohled na důležité aspekty teorie grafů, poskytující čtenáři komplexní pochopení jak základních, tak i speciálních grafových vlastností a tříd.

3.1 Vybrané vlastnosti grafů

Při zkoumání základních vlastností grafů, jsme se opírali zejména o práci [7].

3.1.1 Souvislost grafu

Souvislost grafu je základním pojmem, který odráží jeho strukturální charakter. Pro její pochopení je nejdříve nutné definovat, co přesně rozumíme pod pojmem *cesta*.

Definice 3.1.1. Nechtě $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. **Cestou z vrcholu v_0 do vrcholu v_k** nazveme posloupnost vrcholů a hran

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k,$$

kde každá hrana $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $\forall i = 1, \dots, k$ a žádný vrchol ani hrana se v posloupnosti neopakují.

Tuto definici cesty použijeme k vysvětlení pojmu *souvislý graf*.

Definice 3.1.2. Necht G je neorientovaný graf. Graf G nazveme **souvislým**, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.

Pro praktické účely je důležité nejen určit, zda je graf souvislý, ale také posoudit, jak „silná“ tato souvislost je. To nás vede k pojmu *řezu v grafu*.

Definice 3.1.3. Necht $G = (V, E)$ je neorientovaný neúplný graf. **Vrcholovým řezem** rozumíme množinu $\emptyset \neq S \subset V$, po jejichž odstranění vznikne graf $G - S$ s více komponentami, než měl původní graf G . **Hranovým řezem** rozumíme množinu $\emptyset \neq S' \subset E$, po jejímž odstranění má výsledný graf $G - S'$ větší počet komponent než měl graf G .

Tyto pojmy nám umožní definovat míry souvislosti grafu, v závislosti na velikosti nejmenšího možného řezu.

Definice 3.1.4. Necht G je souvislý a neúplný graf. **Vrcholový stupeň souvislosti grafu** $\kappa(G)$ je definován jako velikost minimálního vrcholového řezu. Je konvencí, že pro úplné grafy je stupeň souvislosti definován jako $n - 1$. Graf nazýváme *k-souvislým*, pokud je vrcholový stupeň souvislosti alespoň k .

Analogicky můžeme definovat *hranový stupeň souvislosti grafu*.

Definice 3.1.5. Necht G je souvislý graf a necht $n \geq 2$. **Hranový stupeň souvislosti grafu** $\kappa'(G)$ je definován jako velikost minimálního hranového řezu. Pro grafy s jedním vrcholem platí $\kappa'(G) = 0$.

Nakonec se zaměříme na známý vztah mezi těmito mírami souvislosti, který je formalizován ve Whitneyho nerovnosti.

Věta 3.1.1. [8] *Mějme graf $G = (V, E)$, potom platí*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

Důkaz. Mějme souvislý graf G . Jednotlivé nerovnosti dokážeme postupně.

(i) Důkaz nerovnosti

$$\kappa'(G) \leq \delta(G)$$

je triviální. Označme v vrchol grafu G jehož stupně $d_G(v) = \delta(G)$. Odstraněním $\delta(G)$ hran incidentních s vrcholem v se graf G rozpadne na alespoň dvě komponenty ($G - v$ a izolovaný vrchol v).

(ii) Protože graf G je $\kappa'(G)$ -hranově souvislý, v grafu G existuje množina $\kappa'(G)$ hran, po jejichž odebrání se graf G rozpadne alespoň na dvě komponenty. Označme tuto množinu hran H .

Vyberme libovolně jednu hranu z množiny H a označme koncové vrcholy této hrany x, y . Pokud z grafu G odstraníme všechny hrany množiny H až na námi zvolenou hranu $\{x, y\}$, získáme graf G_1 , ve kterém je hrana $\{x, y\}$ mostem.

Obecně nazveme *mostem* hranu grafu G , která není obsažená v žádné kružnici. A protože most není obsažen v žádné kružnici, po jeho odebrání se graf G rozpadne na dvě komponenty.

Dále definujeme množinu vrcholů A tak, že z každé hrany množiny H vybereme jeden koncový vrchol různý od x, y . Jistě platí

$$|A| \leq \kappa'(G) - 1.$$

Odstraněním všech vrcholů množiny A určitě odstraníme všechny hrany z množiny H až na hranu $\{x, y\}$. Pro graf $G - A$ mohou nastat následující situace

- (a) Pokud je $G - A$ nesouvislý, znamená to, že množina A je vrcholovým řezem grafu G , a platí

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G).$$

- (b) Pokud je graf $G - A$ souvislý, hrana $\{x, y\}$ je v tomto grafu opět mostem, tj. hranou, po jejímž odebrání se graf rozpadne na několik komponent. Odebereme-li vrchol x a všech hran s ním incidentní, graf $G - \{A \cup \{x\}\}$ buď není souvislý, protože jsme odebrali všechny hrany množiny H tj.

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G),$$

nebo obsahuje pouze jeden vrchol (y) a graf G je úplný.

□

3.1.2 Hamiltonovské vlastnosti grafu

V teorii grafů, hrají pojmy jako cesty, cykly a souvislost klíčovou roli pro pochopení vlastností grafů a jejich struktur. V této části se zaměříme na hamiltonovské vlastnosti grafů, které jsou úzce spojeny s problémem obchodního cestujícího [\[1\]](#).

Definice následujících pojmů poskytují teoretický základ pro řešení problému obchodního cestujícího, ale mají také důležité aplikace v různých odvětvích, kde je potřeba optimalizace tras.

Definice 3.1.6. Nechť G je graf. **Hamiltonovská cesta** je taková cesta v grafu G , která obsahuje všechny jeho vrcholy.

Definice 3.1.7. Nechť G je graf. **Hamiltonovská kružnice** je kružnice procházející přes všechny vrcholy.

Definice 3.1.8. Nechť G je graf. Graf G je **hamiltonovský**, pokud obsahuje hamiltonovskou kružnici jako podgraf.

¹Problém obchodního cestujícího je známým kombinatorickým problémem, který spočívá v nalezení nejkratší cesty, která navštíví každé město v určitém seznamu právě jednou a nakonec se vrátí do výchozího města.

Hamiltonovské grafy jsou klíčové pro praktické aplikace, jako je návrh efektivních komunikačních sítí a logistických tras. Proto se hamiltonovskosti grafů budeme věnovat i v následujících částech této práce, a to zejména ve spojení s jinými vlastnostmi grafů a ukážeme jak mohou tyto vztahy mezi jednotlivými vlastnostmi zjednodušit rozhodnutí o hamiltonovskosti grafu.

3.1.3 Tuhost

Parametr tuhosti grafu představuje míru odolnosti grafu vůči rozpadu na jednotlivé komponenty po odstranění množiny jeho vrcholů. Jednoduše řečeno, graf s vysokou tuhostí vyžaduje odstranění většího počtu vrcholů, aby se rozpadl na izolované části. Tento parametr je důležitý pro pochopení, jak „pevně“ jsou vrcholy v grafu spojeny.

Pojem tuhosti grafu byl poprvé představen českým matematikem Václavem Chvátalem v [9].

Definice 3.1.9. Necht G je graf a S je vrcholovým řezem grafu G . **Tuhost grafu** definujeme jako

$$\tau(G) = \min_{S \subset V(G)} \left\{ \frac{|S|}{c(G-S)} \right\},$$

kde $c(G-S)$ vyjadřuje počet komponent grafu $G-S$. O grafu G řekneme, že je *t-tuhý*, pokud platí $t \leq \tau(G)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

V současné době známe hodnotu tuhosti pro relativně malé grafy s jednoduchou strukturou a některé speciální třídy grafů (např. neúplné *claw-free*² grafy).

Věta 3.1.2. [4] *Pokud je G neúplný claw-free graf, potom platí*

$$\tau(G) = \frac{\kappa(G)}{2}$$

Určení tuhosti představuje optimalizační problém, jehož řešení je, kvůli optimalizaci přes všechny možné vrcholové řezy daného grafu náročné.

Dalším z grafů, pro které známe přesnou hodnotu tuhosti je Petersenův graf.

Tento graf je oblíbeným grafem díky svým vlastnostem, jako je vysoká symetričnost, regularita a nehamiltonovskost. Kromě toho, význam Petersenova grafu spočívá v jeho využití, jako protipříkladu při vyvracení teorií a hypotéz z oblasti teorie grafů.

Jako ukázkou můžeme prezentovat následující větu.

²*Claw-free* grafy jsou takové grafy, které neobsahují indukovaný úplný bipartitní podgraf $K_{1,3}$ (*claw*). [10]

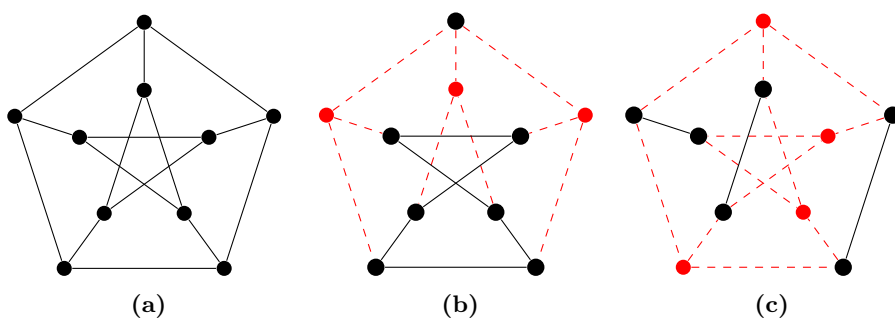
Věta 3.1.3. [4] Pokud je graf G hamiltonovský, pak musí nutně platit

$$c(G - S) \leq |S|$$

pro každou množinu $\emptyset \neq S \subset V(G)$.

Důsledek. Každý hamiltonovský graf je 1-tuhý.

Petersenův graf demonstruje, že ne všechny 1-tuhé grafy musí být hamiltonovské. Brouwer [11] ve svém článku uvádí, že tuhost Petersenova grafu je $\tau(G) = \frac{4}{3}$. Na následujícím obrázku ilustrujeme vhodný vrcholový řez pro získání minima výrazu $|S|/c(G - S)$.



Obrázek 3.1: (a) Petersenův graf, (b) Vrcholový řez S_1 Petersenova grafu, (c) Vrcholový řez S_2 Petersenova grafu realizující tuhost

Chvátalova hypotéza

Chvátalova hypotéza naznačuje, že by všechny dostatečně tuhé grafy měly obsahovat hamiltonovskou kružnici.

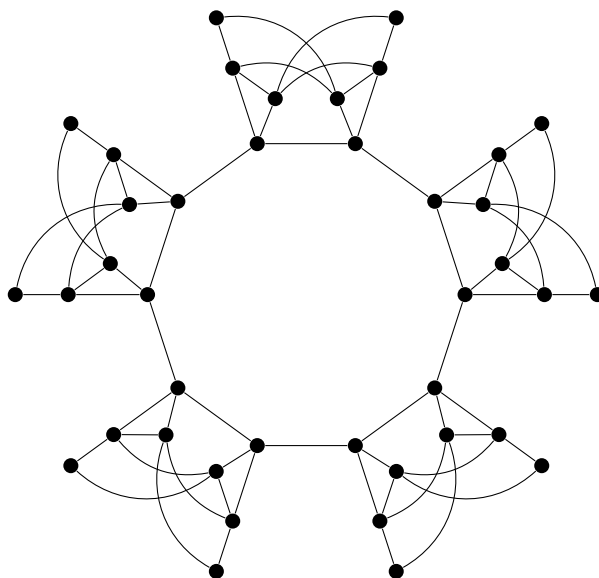
Hypotéza 3.1.1 (Chvátal). [9] Existuje t_0 takové, že každý t_0 -tuhý graf je hamiltonovský.

Tato hypotéza je stále otevřená, a to i přes to že v tomto směru došlo k pokroku. Enomoto [12] dokázal, že pokud takové t_0 existuje, musí platit, že $t_0 \geq 2$. Toto je přímým důsledkem následující věty.

Věta 3.1.4. [12] Mějme $k \geq 1$. Pro libovolně velké $\epsilon > 0$ existuje $(k - \epsilon)$ -tuhý graf G řádu $n \geq k + 1$, kde součin $k \cdot n$ je sudé číslo, který nemá k -faktor.

Pro $k = 2$, věta [3.1.4] ilustruje, existenci $(2 - \epsilon)$ -tuhého grafu, který nemá 2-faktor, a tedy není hamiltonovský.

O několik let později, po zveřejnění Enomotových závěrů, se Bauerovi, Broersmovi a Veldmanovi podařilo zkonstruovat 2-tuhý graf (viz [3.2]), který není hamiltonovský, a co víc, podařilo se jim formulovat posloupnost $\{G_k\}$ nehamiltonovských grafů, pro které $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(G_k) = 9/4$. Zjednodušeně řečeno, výsledky publikované těmito autory v [13] naznačují, že pokud existuje t_0 , pro které by byla Chvátalova hypotéza splněna, potom takové t_0 musí být větší než $9/4$.



Obrázek 3.2: Bauer-Broesma-Veldmanův graf

Hranová tuhost

Pokusy o dokázání, resp. vyvrácení Chvátalovy hypotézy, ilustrují značnou náročnost rozhodování o hamiltonovskosti grafů. Tato problematika nás často vede k alternativním přístupům, které umožňují transformaci na mnohdy jednodušší problémy jako např. výše zmíněný důkaz neexistence 2-faktoru grafu G .

Dalším možným alternativním postupem pro důkaz nehamiltonovskosti je důkaz toho, že graf není *path-tuhý*. Graf G je *path-tuhý*, pokud pro každou neprázdnou podmnožinu $S \subset V$ lze graf $G - S$ pokrýt nejvýše $|S|$ vrcholově disjunktivními cestami. Tato varianta by se mohla zdát neefektivní, a to zejména proto, že neexistuje obecný postup, jak tento důkaz provést. Avšak právě při prozkoumávání tohoto postupu se Katonovi [15] podařilo definovat nový parametr, který je úzce provázaný s „klasickou“ tuhostí.

Rozhodnutí o tom, zda je graf hamiltonovský, představuje speciální případ problému nalezení *\mathcal{A} -cyklu*. Tento problém spočívá v určení, zda existuje v grafu G kružnice obsahující všechny vrcholy z množiny $\mathcal{A} \subseteq V(G)$.

Definice 3.1.10. Mějme graf G a množinu $\mathcal{A} \subseteq V(G)$. O dvojici (X, Y)

$$X \subseteq V(G - \mathcal{A}), Y \subseteq E(G - \mathcal{A} - X)$$

řekneme, že **separuje** množinu \mathcal{A} , pokud v grafu $G - X - Y$ neexistuje žádná cesta spojující dva vrcholy z množiny \mathcal{A} .

Označme K_1, \dots, K_c komponenty grafu $G(Y)$ indukovaného množinou hran Y .

Definice 3.1.11. Mějme graf G a podmnožinu $Y \subseteq E$. **Grafem indukovaným množinou hran Y** rozumíme $G(Y) \subseteq G$, jehož množinou vrcholů jsou všechny vrcholy $v \in V(G)$, které jsou incidentní s hranou z množiny Y a množinu hran tvoří všechny hrany, jejichž oba koncové vrcholy $u, v \in V(G(Y))$.

Je zřejmé, že ne všechny hrany grafu $G(Y)$ musejí nutně být prvky množiny Y .

Dále definujeme některé pojmy, které nám pomohou lépe porozumět struktuře komponent K_i v rámci grafu $G - X$. Tyto pojmy jsou obecně známé v oblasti teorie množin.

Definice 3.1.12. Nechť $G = (V, E)$ je graf a $H \subset G$ jeho podgraf. **Hranicí podgrafu H** nazveme množinu

$$bd_G(H) = \{v \in V(H) : v \text{ má souseda } u \notin V(H)\},$$

Pokud je vrchol prvkem hranice $bd_G(H)$ nezmene jej **hraničním vrcholem**. **Vnitřek podgrafu H** definujeme jako

$$in_G(H) = V(H) - bd_G(H).$$

Pokud je vrchol v prvkem $in_G(H)$, potom jej nazýváme **vnitřním vrcholem**.

Zavedení těchto termínů nám umožňuje definovat \mathcal{A} -*separátor*.

Definice 3.1.13. Nechť G je neorientovaný graf. Mějme množinu $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ a dvojici (X, Y) separující množinu \mathcal{A} . Dvojici (X, Y) nazveme **\mathcal{A} -separátorem**, pokud platí

$$|\mathcal{A}| > s(X, Y; G) := |X| + \sum_{i=1}^c \left\lfloor \frac{1}{2} |bd_{G-X}(K_i)| \right\rfloor \quad (3.1)$$

Existence separátoru množiny $\mathcal{A} \subseteq V(G)$ nám říká několik věcí o samotném grafu G . Tyto vlastnosti detailně zkoumali Kelmans a Lomonosov ve svých článcích [16, 17], na které se můžeme odkázat pro hlubší pochopení.

Tvrzení 3.1.1. [15] Nechť G je neorientovaný graf. Pokud existuje separátor (X, Y) množiny $\mathcal{A} \subseteq V(G)$, potom platí, že

- (i) v grafu G neexistuje kružnice, která by obsahovala všechny vrcholy množiny \mathcal{A} ,
- (ii) graf G není path-tuhý,
- (iii) graf G není hamiltonovský.

Tento nový přístup, který zahrnuje prezentaci \mathcal{A} -separátoru v grafu G , pomáhá dokázat, že v grafu neexistují hamiltonovské kružnice. Při tomto přístupu není potřeba explicitně definovat množinu \mathcal{A} , což inspirovalo Katonu [15] k definování nového parametru grafu.

Definice 3.1.14. [15] Mějme souvislý graf $G = (V, E)$ a množiny $X \subseteq V$ a $Y \subseteq E(G - X)$, které splňují $c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^n in_{G-X}(K_i)) > 1$. **Hranovou tuhost grafu** definujeme jako

$$\tau'(G) = \min \left\{ \frac{s(X, Y; G)}{c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^n in_{G-X}(K_i))} \right\}.$$

Tvrzení 3.1.2. [15] Pokud je G t -hranově tuhý graf, potom je také t -tuhý.

Tvrzení 3.1.3. [15] Pokud je G hamiltonovským grafem, pak je 1-hranově-tuhý.

Celý důkaz tohoto tvrzení je poměrně jednoduchý a podrobně rozebraný právě Katonou, proto ho nevedeme v této práci. Zaměříme se pouze na jednu jeho část.

Stěžejním krokem tohoto důkazu je prokázat, že se v každé komponentě grafu $G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i)$ nachází alespoň jeden vrchol, který je disjunktní s hranicí této komponenty. Předpokládejme, že takový vrchol v žádné z komponent neexistuje. Snadno nahlédneme, že neexistuje žádná hrana, která by spojovala vrcholy z dvou různých komponent grafu $G(Y)$.

Zvolme libovolně vrchol jedné z komponent grafu $G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i)$, a označme jej v . Tento vrchol musí být prvkem $bd_{G-X}(K)$ nějaké komponenty K grafu $G(Y)$, tj. musí mít souseda mimo komponentu K . Tento předpoklad vede ke sporu.

Protože vrchol v musí mít souseda mimo K , ale tímto sousedem nesmí být prvek jakékoliv hranice $bd_{G-X}(K_j)$, musí být disjunktní s každou hranicí komponent K_i , $i = 1, \dots, c$.

Vztah mezi tuhostí a hranovou tuhostí

Z definic tuhosti a hranové tuhosti vyplývá, že jsou tyto dva koncepty úzce propojené. V následujících odstavcích jejich vztah prozkoumáme.

Věta 3.1.5. [15] Pokud je graf G $2t$ -tuhý, pak je také t -hranově tuhý.

Důkaz. Mějme souvislý $2t$ -tuhý graf G . Pro každou dvojici $X \subseteq V(G)$ a $Y \subseteq E(G - X)$ splňující

$$c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i)) > 1,$$

vyberme libovolně $2 \lfloor |bd_{G-X}(K_i)|/2 \rfloor$ hraničních vrcholů z komponenty K_i , $\forall i = 1, \dots, c$. Sjednocení takto vybraných vrcholů se všemi vrcholy množiny X označme S . Platí

$$|S| = |X| + 2 \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{|bd_{G-X}(K_i)|}{2} \right\rfloor = 2 \cdot s(X, Y; G) - |X|.$$

Nejdříve dokažme, že platí

$$c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i)) \leq c(G - S).$$

Zvolme libovolně jeden vrchol $v \notin \bigcup_{i=1}^c bd_{G-X}(K_i)$ z každé komponenty grafu $G - X - Y - \bigcup in_{G-X}(K_i)$. Již dříve jsme dokázali, že takové vrcholy existují. Označme množinu námi vybraných vrcholů \mathcal{A} .

Dokážeme, že vrcholy množiny \mathcal{A} náležejí různým komponentám grafu $G - S$. Víme, že dvojice (X, Y) separuje množinu \mathcal{A} , pokud by tedy mezi dvěma vrcholy množiny \mathcal{A} existovala cesta p , potom by musela obsahovat hranu $y \in Y$ nebo vrchol $x \in X$.

Dále víme, že $\mathcal{A} \subseteq G - S$, proto musí cesta mezi dvojicí vrcholů množiny \mathcal{A} obsahovat alespoň jednu hranu $y \in Y$.

Protože jsme prvky množiny \mathcal{A} vybrali z jednotlivých komponent grafu $G - X - Y - \bigcup in_{G-X}(K_i)$, žádný vrchol množiny \mathcal{A} nemůže být incidentní s hranou z množiny Y .

Z toho vyplývá, že první a poslední hrana této cesty musí být incidentní s dvěma různými vrcholy hranice $bd_{G-X}(K_p)$. Díky naší konstrukci množiny S , graf $G - S$ obsahuje nanejvýše jeden z těchto hraničních vrcholů, proto neexistuje žádná cesta mezi vrcholy $a_i, a_j \in \mathcal{A}$.

Protože je graf G 2-tuhý, platí

$$\begin{aligned} c\left(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i)\right) &\leq c(G - S) \leq \frac{|S|}{2t} = \\ &= \frac{2s(X, Y; G) - |X|}{2t} \leq \frac{s(X, Y; G)}{t}. \end{aligned}$$

□

Protože je možné, že odhad v důkazu této věty je ostrý, Katona formuloval tuto hypotézu.

Hypotéza 3.1.2 (Katona). [15] Pro každé $\epsilon > 0$ existuje $(2t - \epsilon)$ -tuhý graf, který není t -hranově-tuhý.

Další z řady hypotéz, které Katona pro tuto problematiku stanovil navazuje na Chvátalovu hypotézu (viz [3.1.1]).

Hypotéza 3.1.3 (Katona). Existuje t_1 takové, že každý t_1 -hranově-tuhý graf je hamiltonovský.

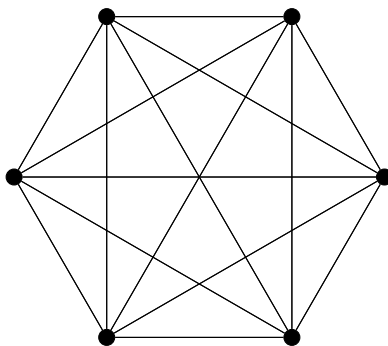
Dalo by se říci, že jsou Katonova a Chvátalova ekvivalentní. Pokud existuje t_1 tak, aby byla splněna Katonova hypotéza, potom by podle věty [3.1.5] existuje $t_0 = 2t_1$, pro které je každý t_0 -tuhý graf hamiltonovský, a Chvátalova hypotéza je splněna. Na druhou stranu, pokud by platila Chvátalova hypotéza, potom je díky tvrzení [3.1.2] splněna i Katonova hypotéza.

3.2 Vybrané třídy grafů

V této části uvádíme některé třídy grafu, které jsou důležité pro tuto práci, nebo jsou zajímavé svými vlastnostmi.

3.2.1 Úplné grafy

Úplný graf K_n je graf na n vrcholech, jehož každé dva různé vrcholy spojuje hrana.



Obrázek 3.3: K_6 - úplný graf na šesti vrcholech

Úplné grafy jsou oblíbenou grafovou třídou, a tak známe mnoho jejich vlastností. Snadno určíme velikost úplného grafu. Pokud máme neorientovaný úplný graf, jeho množinu hran tvoří všechny možné dvouprvkové podmnožiny množiny $V(K_n)$.

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Úplné grafy jsou známé pro svou perfektní symetrii a maximální hustotu hran, díky čemuž jsou zejména důležité pro aplikace, kde je důležitá maximální propojenost, jako např. v teorii her, kde poskytují modely pro situace, kde každý účastník má možnost interakce s každým dalším účastníkem ³.

Každý úplný graf je nejen souvislý, ale také $(n-1)$ -regulární. Kromě toho jsou všechny úplné grafy také hamiltonovské, což znamená, že obsahují hamiltonovskou kružnici.

³Této konkrétní oblasti aplikací se často říká „Turnaje“ jako model jsou v této problematice využívány orientace úplných grafů [\[18\]](#).

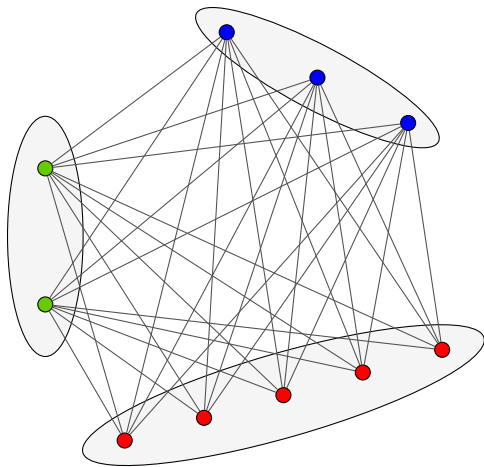
3.2.2 Multipartitní a bipartitní grafy

Multipartitní grafy, známé také jako k -partitní grafy, jsou třída grafů, kde vrcholy můžeme rozdělit do k disjunktních množin tak, že vrcholy ve stejné množině nejsou spojeny hranami. Takové množiny vrcholů grafu G nazveme *nezávislými množinami*.

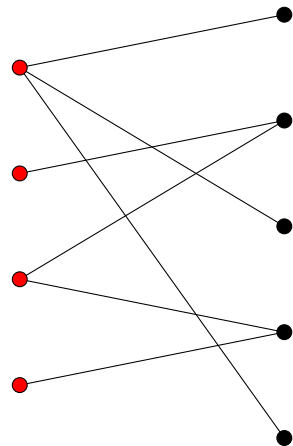
Definice 3.2.1. *Nezávislá množina* v grafu je množina vrcholů, mezi kterými neexistuje žádná hrana.

Tato struktura umožňuje, aby grafy byly používány v aplikacích, kde je třeba modelovat vztahy mezi nezávislými skupinami objektů.

Bipartitní graf $G = (V, E)$ je speciálním případem multipartitního grafu, kde $k = 2$. Vrcholy grafu G jsou rozděleny do dvou disjunktních množin V_1 a V_2 tak, že každá hrana spojuje vrchol z V_1 s vrcholy z V_2 . Neexistují žádné hrany mezi vrcholy stejné množiny. Bipartitní grafy jsou často reprezentovány jako $G = (V_1 \cup V_2, E)$.



(a) Úplný multipartitní graf
 $K_{5,2,3}$

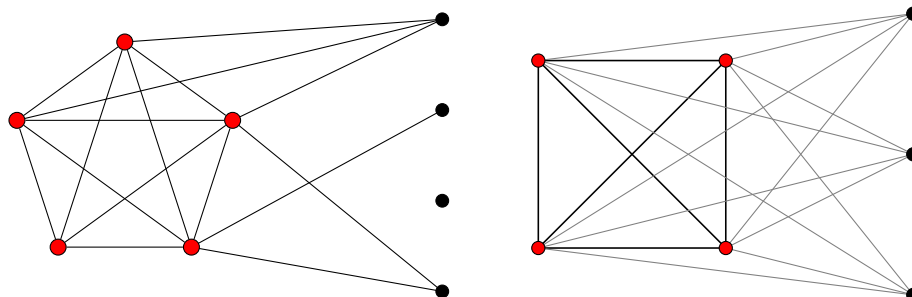


(b) Bipartitní graf

Úplný multipartitní graf K_{n_1, \dots, n_m} je dalším speciálním případem multipartitního grafu. V tomto případě jsou každé dva vrcholy z různých partit (nezávislých množin, do kterých jsou rozděleny vrcholy grafy G) jsou spojeny hranou a žádné dva vrcholy ve stejné partitě nejsou spojeny hranou.

3.2.3 Split grafy

Split graf je takový graf $G = (V, E)$, který je možné rozdělit na dva disjunktí podgrafy – kliku K_s (tj. úplný podgraf) a podgraf N_t jehož vrcholy tvoří nezávislou množinu.



(a) Split graf

(b) Úplný split graf

Úplným split grafem rozumíme split graf, kde jsou vrcholy indukující nezávislé množinu spojeny hranou s každým vrcholem kliky.

Úplné split grafy jsou jednou z mnoha tříd grafů, kterou můžeme definovat pomocí speciální grafové operace. Pro úplné split grafy je touto operací *spojení grafů*.

Spojením grafů G_1 a G_2 , je graf $G = (V, E)$, který obsahuje všechny vrcholy a hrany z původních grafů, doplněné o všechny možné hrany mezi vrcholy grafů G_1 a G_2 . Dále tuto operaci budeme značit $G_1 \vee G_2$.

Pro souhrnný přehled dalších grafových operací doporučujeme [20].

Kapitola 4

Propojení spektra a grafových parametrů

Hlavním cílem této kapitoly je prozkoumat vztahy mezi grafovými parametry a spektrem grafu. Tato analýza poskytuje hlubší porozumění toho, jak lze strukturální vlastnosti grafů odhalit zkoumáním jejich spektra.

4.1 Algebraická souvislost

Jak jsme ukázali v kapitole [2](#), Laplaceova matice a její spektrální vlastnosti mají klíčový význam pro pochopení struktury grafu.

V té samé kapitole jsme také prezentovali důkaz vztahu mezi algebraickou násobností vlastního čísla $\mu = 0$ a počtem komponent příslušného grafu. Tato věta [2.2.2](#) má jednoduchý důsledek.

Důsledek. Pro každý graf G platí, že pokud je G nesouvislý, jeho druhé nejmenší vlastní číslo μ_2 je rovno nule.

Tento důsledek pravděpodobně inspiroval československého matematika Miroslava Fiedlera k zavedení pojmu *algebraická souvislost*.

Definice 4.1.1. Necht G graf. Druhé nejmenší vlastní číslo Laplaceovy matice

$$\mu_2 \quad \text{nebo také} \quad \mu_2^G$$

nazveme **algebraickou souvislostí**.

Fiedler poprvé představil tento pojem společně s několika zajímavými vlastnostmi ve svém článku [\[21\]](#). Než ale přejdeme k první z těchto vlastností, definujme nový pojem.

Definice 4.1.2. Mějme grafy G_1, G_2 . Tyto nazveme **hranově disjunktní** právě tehdy, když platí

$$E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$$

Algebraickou souvislost můžeme chápat také jako funkci $\mu_2(G)$. Fiedler prezentoval, že součet algebraické souvislosti dvou hranově disjunktních grafů na stejné množině vrcholů se dá odhadnout shora hodnotou algebraické souvislosti sjednocení těchto grafů.

Věta 4.1.1. [21] *Nechť jsou G_1, G_2 hranově disjunktní grafy na stejné množině vrcholů, tj. $V(G_1) = V(G_2)$, potom platí:*

$$\mu_2^{G_1} + \mu_2^{G_2} \leq \mu_2^G,$$

kde $G = G_1 \cup G_2$.

Avšak důležitější než samotná věta je její důsledek.

Důsledek. Pro grafy G na stejné množině vrcholů je funkce $\mu_2(G)$ neklesající, tj. $G_1 \subseteq G_2$, a navíc $V(G_1) = V(G_2)$ potom, $\mu_2^{G_1} \leq \mu_2^{G_2}$.

Tento důsledek lze interpretovat tak, že přidáním hran do grafu G buď dojde ke zvýšení algebraické souvislosti, nebo v nejhorším případě zůstane algebraická souvislost stejná stejná. Přidávání hran do grafu není jedinou operací, která může změnit hodnotu algebraické souvislosti.

Věta 4.1.2. [21] *Nechť G je graf, $G_1 \subseteq G$ je jeho podgraf, který vznikne z grafu G odstraněním k vrcholů a všech hran, které jsou s těmito k vrcholy incidentní. Potom platí*

$$\mu_2^{G_1} \geq \mu_2^G - k$$

Zatím jsme ale prezentovali pouze vlastnost algebraické posloupnosti, za podmínky, že mají dané grafy stejnou množinu vrcholů. Pokud se ale snažíme odhadnout hodnotu algebraické souvislosti, jsme schopni použít jakéhokoliv rozkladu vrcholové množiny.

Definice 4.1.3. Nechť G je graf. **Rozklad** množiny vrcholů $V(G)$ je taková kolekce disjunktních podmnožin $V_1, V_2, \dots, V_k \subset V(G)$, že každý vrchol $v \in V(G)$ náleží do právě jedné podmnožiny.

Díky tomuto rozkladu pak můžeme formulovat horní odhad pro $\mu_2(G)$

Věta 4.1.3. [21] *Nechť $G = (V, E)$, a nechť $V = V_1 \cup V_2$ je dekompozice množiny V a nechť G_i ($i = 1, 2$) je podgraf indukovaný množinou V_i , potom*

$$\mu_2^G \leq \min\{ \mu_2^{G_1} + |V_2|, \mu_2^{G_2} + |V_1| \}$$

V této práci jsme se seznámili již s několika grafovými parametry, které reflektují souvislost grafu nebo přímo znázorňují míru souvislosti grafu a vztahy mezi nimi. Fiedlerovy se podařilo dokázat vztah mezi algebraickou souvislostí a stupněm vrcholové souvislosti a tak dále rozšířit (3.1.1).

Věta 4.1.4. [21] Mějme graf $G = (V, E)$, potom platí

$$\mu_2^G \leq \kappa(G) \quad (4.1)$$

Důkaz. Mějme graf G a označme minimální vrcholový řez grafu G jako V_1 . Protože je V_1 vrcholovým řezem, graf generovaný množinou $V_2 = V - V_1 \neq \emptyset$ není souvislý.

V_1 a V_2 nám poskytují dekompozici množiny $V = V_1 \cup V_2$. Z věty 4.1.3 plyne

$$\mu_2^G \leq \min\{\mu_2^{G_1} + |V_2|, \kappa\}.$$

Nerovnost $\mu_2^G \leq \kappa(G)$ je splněna. \square

4.2 Tuhost a spektrum

Navzdory zdánlivé jednoduchosti konceptu se identifikace tuhosti ukazuje jako komplexní problém (třída NP-těžkých úloh), vyžadující sofistikované matematické a algoritmické postupy. V této práci se dále zaměříme na odhady tuhosti, využívající spektrum Laplaceovy matice.

Nalezení dolního odhadu tuhosti se stalo předmětem výzkumu mnoha autorů. Alonovi a Browerovi se nezávisle na sobě podařilo dokázat dva různé odhady. Alon [22] dokázal, že pro souvislé d -regulární grafy platí

$$t(G) > \frac{1}{3} \left(\frac{d^2}{d\lambda + \lambda^2} - 1 \right),$$

kde $\lambda = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$ je druhé největší vlastní číslo matice sousednosti. Brouwer poté dokázal, že pro d regulární grafy platí $t(G) > \frac{d}{\lambda} - 2$. Brouwer dále formuloval hypotézu

$$t(G) > \frac{d}{\lambda} - 1,$$

která byla potvrzena Haemersem.

Všechny tyto odhady pracují pouze se spektrem matice sousednosti. Haemersovi se podařilo formulovat odhad pomocí Laplaceovského spektra.

Hypotéza 4.2.1 (Haemers).

$$\tau(G) \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \delta_G} \quad (4.2)$$

Tato hypotéza je podpořena souborem nerovností, které úspěšně dokázali Gu a Haemers v jejich článku [23]. Předtím, než přistoupíme k detailní prezentaci těchto nerovností, je nezbytné nejprve se seznámit se s nástroji v podobě matematických tvrzení, které jsou klíčové k jejich důkazu.

Tvrzení 4.2.1. [23] Mějme graf G a disjunktní množiny $X, Y \subset V$ takové, že mezi těmito množinami neexistuje hrana. Platí

$$\frac{|X||Y|}{(n - |X|)(n - |Y|)} \leq \left(\frac{\mu_n - \mu_2}{\mu_n + \mu_2} \right)^2$$

Důkaz. Mějme graf $G = (V, E)$ a k němu příslušící Laplaceovu matici L

Pro účely tohoto důkazu označme $\Theta = -\frac{1}{2}(\mu_n - \mu_2)$. Dále definujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L} + \Theta \mathbf{I} \\ \mathbf{L} + \Theta \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože je matice A blokově diagonální s bloky na vedlejší diagonále, charakteristický polynom této matice můžeme zapsat ve tvaru

$$ch(\mathbf{A}) = \det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{L} + \Theta \mathbf{I})) \cdot \det(\lambda \mathbf{I} + (\mathbf{L} + \Theta \mathbf{I})) = 0 \quad (4.3)$$

Nejdříve určíme vlastní čísla matice $\mathbf{L} + \Theta \mathbf{I}$. Dosazením do definice vlastního čísla získáme

$$(\mathbf{L} + \Theta \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{v} + \Theta \mathbf{I}\mathbf{v} = \mu_i \mathbf{v} + \Theta \mathbf{v} = (\mu_i + \Theta)\mathbf{v}.$$

Jistě není překvapením, že hodnota vlastních čísel matice $\mathbf{L} + \Theta \mathbf{I}$ závisí na hodnotě vlastních čísel Laplaceovy matice \mathbf{L} . Přímým dosazením do charakteristického polynomu (4.3) pak můžeme určit spektrum matice \mathbf{A}

$$\sigma(\mathbf{A}) = \left\{ -(\mu_n + \Theta), \dots, -(\mu_1 + \Theta), \mu_1 + \Theta, \dots, \mu_n + \Theta \right\}$$

Množiny X a Y dávají vznik dělení matice A s podílovou (kvocientní) maticí

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta - \Theta \frac{|X|}{n-|Y|} & \Theta \frac{|X|}{n-|Y|} \\ \Theta \frac{|Y|}{n-|X|} & \Theta - \Theta \frac{|Y|}{n-|X|} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice \mathbf{B} určíme jako kořeny charakteristického polynomu $ch(B)$

$$\xi_1 = \lambda_1 = -\Theta$$

$$\xi_2 = -\Theta \left(\frac{|X||Y|}{(n-|X|)(n-|y|)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi_3 = \Theta \left(\frac{|X||Y|}{(n-|X|)(n-|y|)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi_4 = \lambda_{2n} = \Theta$$

Využijeme vlastnosti proplétání vlastních (viz [24]) čísel matic \mathbf{A} a \mathbf{B} k získání horního odhadu

$$\Theta^2 \left(\frac{|X||Y|}{(n-|X|)(n-|y|)} \right) = -\xi_2 \xi_3 \leq -\lambda_2 \lambda_{2n-1} = \left(\frac{1}{2} (\mu_n - \mu_2) \right)$$

Tento vztah potvrzuje platnost našeho tvrzení. □

Dalším důležitým tvrzením, které budeme potřebovat v řadě důkazů v této sekci, je spektrální odhad pro velikost nezávislé množiny.

Tvrzení 4.2.2. [23] Necht' U je nezávislou množinou grafu G , potom platí

$$|U| \leq \frac{\mu_n - \delta}{\mu_n} \cdot n$$

Podobně, jako lze odhadnout velikost nezávislé množiny, můžeme za splnění všech předpokladů formulovat horní odhad pro velikost vrcholového řezu.

Tvrzení 4.2.3. [23] Necht' $S \subset V$ je vrcholový řez grafu G . Necht' jsou X a Y disjunktí podmnožiny $V - S$ takové, že $X \cup Y = V - S$ a $|X| \leq |Y|$, potom platí

$$|X| \leq \frac{\mu_n - \mu_2}{2\mu_n} \cdot n \quad (4.4)$$

a zároveň

$$|S| \geq \frac{2\mu_2}{\mu_n - \mu_2} \cdot |X|. \quad (4.5)$$

Pro oba tyto vztahy nastává rovnost pouze pokud $|X| = |Y|$.

Toto je poslední z řady tvrzení potřebných k důkazu správnosti odhadů, které formulovali a dokázali Gu a Haemers ve svém článku [23], a které, jak již bylo zmíněno podporují platnost Haemersovi hypotézy, protože jeho hypotéza implikuje následující vztahy.

Věta 4.2.1. [23]

$$\tau(G) \geq \frac{\mu_n \mu_2}{n(\mu_n - \delta)}, \quad (4.6)$$

a navíc

$$\tau(G) \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2}. \quad (4.7)$$

Jelikož je každý z těchto odhadů založen na jiném principu, představíme jejich důkazy odděleně. Nejprve se zaměříme na důkaz odhadu (4.6).

Důkaz. Mějme graf G a označme S vrcholový řez realizující tuhost $\tau(G)$.

Pro důkaz první nerovnosti (4.6) budeme vycházet přímo z definice tuhosti 3.1.9. V této definici pracujeme z počtem komponent $c(G - S)$ grafu $G - S$ po odebrání vrcholového řezu S .

Zvolíme-li libovolně z každé komponenty grafu $G - S$ jeden vrchol, získáme nezávislou množinu o velikosti $c(G - S)$. Podle tvrzení 4.2.2 máme k dispozici odhad velikosti nezávislé množiny, který lze přímo aplikovat na definici tuhosti grafu.

$$c(G - S) \leq \frac{\mu_n - \delta}{\mu_n} \cdot n$$

Připomeňme vztah mezi algebraickou souvislostí a vrcholovým stupněm souvislosti (4.1) dokázaný Fiedlerem. Protože je vrcholový stupeň souvislosti roven velikosti nejmenší vrcholového řezu grafu G , jistě platí

$$\mu_2 \leq \kappa(G) \leq |S|$$

Díky těmto vztahům je důkaz nerovnosti (4.6) triviální

$$\tau(G) = \frac{S}{c(G - S)} \geq \frac{\mu_n \mu_2}{n(\mu_n - \delta)}.$$

□

Dále budeme pokračovat důkazem platnosti odhadu (4.7).

Důkaz. Označme K_1, \dots, K_c jednotlivé komponenty grafu $G - S$ tak, aby platilo $|K_1| \leq |K_2| \leq \dots \leq |K_c|$.

V případě, že každá komponenta obsahuje právě jeden vrchol, Haemers a Gu dokázali platnost Haemersovy hypotézy. Protože Haemersova hypotéza implikuje odhad (4.7), je dokázána i platnost tohoto odhadu.

Předpokládejme že alespoň jedna komponenta obsahuje více než jeden vrchol, tj. že $n - |S| \geq c(G - S) + 1$.

V následující části důkazu ukážeme, že komponenty K_1, \dots, K_c lze rozdělit do dvou množin X a Y tak, aby platilo $|Y| \geq |X| \geq c/2$.

Pokud je c sudé, pak množiny X a Y můžeme definovat jako

$$X = \bigcup_{i=1}^{\lfloor c/2 \rfloor} K_i, \quad Y = (V - S) - X$$

Pokud je c liché, musíme uvažovat tyto případy:

(i) $|K_{(c-1)/2}| \geq 2$, množiny X a Y můžeme definovat jako pak

$$X = \bigcup_{i=1}^{(c-1)/2} K_i, \quad Y = (V - S) - X$$

(ii) $|K_1| = \dots = |K_{(c-1)/2}| = 1$. V tomto případě můžeme množiny X a Y definovat jako

$$X = \bigcup_{i=1}^{(c+1)/2} K_i, \quad Y = (V - S) - X,$$

je ale potřeba dokázat, že je zachován náš požadavek na velikost množin $|Y| \geq |X| \geq c/2$.

Pokud by $|K_{(c+1)/2}| = 1$, pak by to znamenalo, že

$$|X| = \frac{c-1}{2} \quad \text{a} \quad |Y| = n - |S| - |X| \geq \frac{c+1}{2}.$$

V opačném případě, tj. pokud $|K_{(c+1)/2}| \geq 2$, pro velikost množiny X platí

$$|X| = \frac{c-1}{2} + |K_{(c+1)/2}| \geq \frac{c-1}{2} + 2 > \frac{c}{2}.$$

Díky tomu, že známe počet komponent a že máme informace o jejich velikosti jsme schopni určit také velikost množiny Y

$$|Y| = \sum_{i > (c+1)/2}^c |K_i| \geq 2 \cdot \frac{c-1}{2} = c-1 \geq c/2.$$

A bez újmy na obecnosti můžeme změnit značení těchto množin tak, aby $|Y| \geq |X|$.

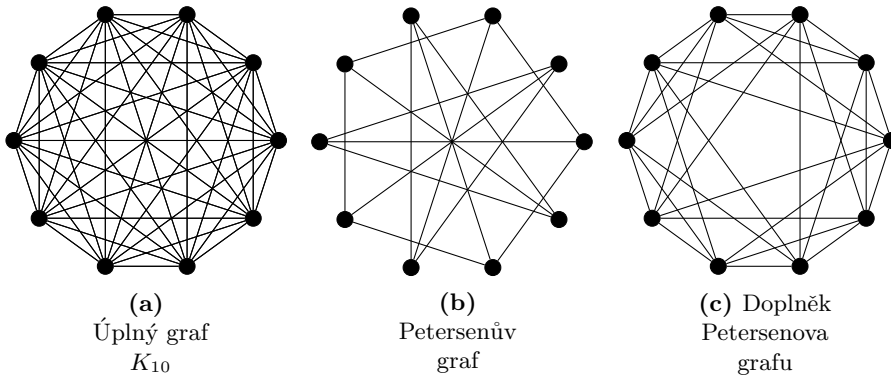
Tím jsme dokázali, že pro takové rozdělení komponent na množiny X a Y existuje. Zjevně $c \leq 2|X|$ a podle (4.5) platí

$$\tau(G) = \frac{|S|}{c} \geq \frac{2\mu_2}{\mu_n - \mu_2} \cdot \frac{|X|}{c} \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2}$$

□

Odhady (4.6) a (4.7) jsou neporovnatelné. Tuto skutečnost můžeme ilustrovat např. pomocí Petersenova grafu a jeho doplňku.

Definice 4.2.1. [4] Mějme graf G . **Doplňěk** (nebo také komplement) **grafu** G je graf $\bar{G} = (V(G), \bar{E})$. Hrana $\{u, v\}$, $u, v \in V(G)$ je prvkem množiny \bar{E} , pokud tato hrana neexistuje v grafu G , tj. $\{u, v\} \notin E(G)$.



Jak pro Petersenův graf (G), tak jeho doplňěk (\bar{G}) známe přesnou hodnotu tuhosti a dokážeme určit hodnoty všech parametrů potřebných k rozhodnutí o

tom, který z odhadů (4.6) a (4.7) je nejbližší ke skutečné hodnotě tuhosti těchto grafů.

V případě Petersenova grafu ($\mu_2 = 2$, $\mu_n = 5$, $\delta = 3$, $n = 10$) můžeme odhady uspořádat

$$\frac{\mu_n \mu_2}{n(\mu_n - \delta)} < \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2} < \tau(G) = \frac{4}{3},$$

zatímco pro jeho doplněk ($\mu_2 = 5$, $\mu_n = 8$, $\delta = 6$, $n = 10$) platí

$$\frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2} < \frac{\mu_n \mu_2}{n(\mu_n - \delta)} < \tau(\overline{G}) = 3.$$

I přes to, že tyto odhady obecně nabývají různých hodnot, existují grafy, pro které jsou tyto odhady shodné, a navíc se shodují s odhadem, který nám poskytuje Haemersova hypotéza.

Gu a Haemers ukázali, že pro úplné multipartitní grafy K_{n_1, \dots, n_m} , kde $1 < m < n$ a $n_1 \geq \dots \geq n_m$ jsou odhady (4.2), (4.6) a (4.7) shodné a navíc přesné, neboť $\mu_2 = \delta = n - n_1$ a $\mu_n = n$. Tuhost pro tento typ grafů můžeme tedy zapsat jako $\tau(G) = (n - n_1)/n_1$.

Na tuto práci následně navázali Huang, Das a Zhu [25], kterým se podařilo jednoduše charakterizovat všechny grafy, pro které jsou odhady (4.6) a (4.7) přesné. Předtím, než se podrobněji zaměříme na jejich závěry, je důležité představit klíčová tvrzení potřebná pro porozumění jejich důkazu.

Tvrzení 4.2.4. [25] Nechť je G neúplný souvislý graf na n vrcholech. Pokud $\mu_2^G = \kappa(G)$, pak pro každý vrcholový řez S velikosti $\kappa(G)$ je $G = G[S] \vee (G - S)$ a $\mu_2^{G[S]} \geq 2\kappa(G) - n$.

Navíc, pokud je G graf tvaru $G = G_1 \vee G_2$, kde G_1 je graf na $\kappa(G)$ vrcholech s $\mu_{\kappa-1}^{G_1} \geq 2\kappa(G) - n$ a G_2 je nesouvislý graf na $n - \kappa$ vrcholech, potom platí $\mu_2^G = \kappa(G)$.

Toto tvrzení zřetelně ukazuje, jak struktura grafu ovlivňuje jeho spektrální vlastnosti. Pro další tvrzení musíme nejprve definovat termín úzce spjatý se strukturou grafů.

Definice 4.2.2. Nezávislost α_G je počet prvků největší nezávislé množiny grafu G .

Další klíčové tvrzení poskytuje hranice pro velikost nezávislé množiny v grafu.

Tvrzení 4.2.5. [25] Nechť je G graf na n vrcholech s alespoň jednou hranou a nechť je δ_G jeho minimální stupeň. Potom platí

$$\alpha_G \leq \frac{n(\mu_n - \delta)}{\mu_n}. \quad (4.8)$$

Navíc, pokud je I nezávislá množina grafu G taková, že v horním odhadu pro nezávislé číslo (4.8) nastává rovnost, potom bipartitní podgraf $G_1 \subset G$

indukovaný hranami mezi I a $V(G) - I$ je $(\delta, \mu_n^G - \delta)$ -semiregulární, tj. každý vrchol množiny I má stupeň δ , zatímco každý vrchol množiny $V(G) - I$ má stupeň $\mu_n^G - \delta$ v grafu G_1 .

Následující tvrzení nám umožňuje získat hodnoty spektra sjednocení dvou grafů na základě znalosti jejich řádů a jejich individuálních spekter.

Tvrzení 4.2.6. [25] Nechť je G graf na n vrcholech a H graf řádu \tilde{n} . Vlastní čísla Laplaceovy matice grafu $G \vee H$ jsou

$$n + \tilde{n}, \mu_n^G + \tilde{n}, \dots, \mu_2^G + \tilde{n}, n + \mu_{\tilde{n}}^H, \dots, n + \mu_2^H, 0.$$

Díky těmto tvrzením můžeme přejít k důkazu věty, která byla představena v [25], a která nám poskytuje následující charakterizaci grafů, pro něž odhady (4.6) a (4.7) nabývají svých extrémů.

Věta 4.2.2. [25] Nechť G je souvislý graf. Potom rovnost v (4.6) a (4.7) platí právě tehdy, když

$$G \cong H \vee (n - \delta_G)K_1,$$

kde $1 \leq \delta_G \leq n - 2$ a H je libovolný graf řádu δ_G s $\mu_{\delta_G-1}^H \geq 2\delta_G - n$.

Protože dokazujeme platnost této ekvivalence pro dva dolní odhady tuhosti $\tau(G)$, rozdělíme tento důkaz na dvě dílčí části. Začneme důkazem rovnosti pro dolní odhad (4.6).

Důkaz. Nechť je G graf a S jeho vrcholový řez, pro který platí $\tau(G) = |S|/c(G - S)$. Dále pro přehlednost tohoto důkazu označme $\kappa = \kappa(G)$, $\delta = \delta_G$ a $c = c(G - S)$.

Předpokládejme, že pro daný graf G nabývá odhad (4.6) extrému. Z důkazu věty 4.2.1 plyne, že pro takový graf G platí

$$|S| = \kappa = \mu_2^G \quad \text{a} \quad c(G - S) = \alpha(G) = n \frac{\mu_n^G - \delta}{\mu_n^G}.$$

Protože předpokládáme, že $\mu_2^G = \kappa$, podle tvrzení 4.2.4 víme, že graf G musí mít tvar $G[S] \vee (G - S)$ a díky tomu dále můžeme určit $\mu_n^G = n$ (viz tvrzení 4.2.6).

Navíc víme, že vybereme-li libovolně jeden vrchol z každé komponenty grafu $G - S$, získáme nezávislou množinu I velikosti $c = \alpha(G) = n(\mu_n^G - \delta)/\mu_n^G = n - \delta$. Podle tvrzení 4.2.5 hrany mezi takto zvolenou nezávislou množinou I a množinou $V - I$ indukují $(\delta, n - \delta)$ -semiregulární bipartitní graf. Vezmeme-li v úvahu, že $S \subset (G - I)$, můžeme pozorovat, že všechny komponenty grafu $G - S$ obsahují právě jeden vrchol a navíc $|S| = \delta = \kappa = n - c$.

Proto můžeme graf G zapsat jako $G = H \vee (n - \delta)K_1$, kde graf $H = G[S]$ je řádu δ ($1 \leq \delta \leq n - 2$).

Abychom dokázali implikaci v opačném směru, předpokládejme, že máme graf $G = H \vee (n - \delta)K_1$, kde H je graf řádu δ ($1 \leq \delta \leq n - 2$) s $\mu_{\delta-1}^H \geq 2\delta - n$. Snadno dokážeme díky tvrzením 4.2.5 a 4.2.6

$$\tau(G) = \frac{\delta}{n - \delta} = \frac{\mu_n^G \mu_2^G}{n(\mu_n^G - \delta)}$$

□

Dále dokažme platnost této ekvivalence pro druhý dolní odhad (4.7).

Důkaz. Předpokládejme, že odhad (4.7) nabývá svého extrému pro graf G . Skutečnost, že všechny komponenty grafu $G - S$ obsahují právě jeden vrchol, a tedy platí $n - |S| = c$, můžeme dokázat sporem.

Pokud by totiž platilo $n - |S| \geq c + 1$, podle důkazu věty 4.2.1 bychom byli schopni komponenty grafu $G - S$ rozdělit do dvou množin X a Y tak, že $|Y| \geq |X| \geq c/2$. Protože ale předpokládáme rovnost v odhadu (4.7), musí platit $|X| = c/2$, a navíc musí nastat v odhadu pro velikost vrcholového řezu (4.5) rovnost, tj.

$$|S| = 2\mu_2^G / (\mu_n^G - \mu_2^G) \cdot |X|.$$

Tato rovnost podle tvrzení 4.2.3 nastane, pokud platí $|X| = |Y|$, a tedy $n - S = |X| + |Y| = 2|X| = c$, což je spor.

Proto můžeme předpokládanou rovnost v odhadu (4.7) rozepsat jako

$$\tau(G) = \frac{\mu_2^G}{\mu_n^G - \mu_2^G} = \frac{|S|}{c} = \frac{n - c}{c}.$$

Z tohoto vztahu můžeme dále vyjádřit počet komponent grafu $G - S$ jako

$$c = \frac{n(\mu_n^G - \mu_2^G)}{\mu_n}. \quad (4.9)$$

Podle tvrzení 4.2.5 platí $\mu_2^G = \delta = \kappa$ a $\mu_n^G = n$, a tedy platí i

$$c \leq \alpha_G \leq \frac{n(\mu_n^G - \delta)}{\mu_n} \quad (4.10)$$

Kombinací vztahů 4.9 a 4.10 získáme nerovnost $\mu_2^G \geq \delta \geq \kappa$ a díky tomu, že víme $\mu_2^G \leq \kappa$ a tedy $\mu_2^G = \delta = \kappa$.

Podle tvrzení 4.2.4 musí být graf G spojením dvou grafů. Dále také platí, že μ_n^G a $|S| = n - c = \kappa = \delta$. A proto může díky tvrzení 4.2.4 říci, že tento graf G je tvaru $G = H \vee (n - \delta)K_1$, kde $H = G[S]$ je graf řádu *delta* ($1 \leq \delta \leq n - 2$) a $\mu_{\delta-1}^H \geq 2\delta - n$.

Pro důkaz implikace v opačném směru předpokládejme, že máme graf $G \cong H \vee (n - \delta)K_1$, kde H je graf řádu δ ($1 \leq \delta \leq n - 2$) s $\mu_{\delta-1}^H \geq 2\delta - n$. Potom víme, že $\mu_2^G = \delta\kappa$, $\mu_n^G = n$ a tedy důkaz rovnosti

$$\tau(G) = \frac{\delta}{n - \delta} = \frac{\mu_2^G}{\mu_n^G - \mu_2^G}$$

je triviální. □

Gu a Haemers dále na základě výsledků své práce představili zobecnění některých známých vět a dále prezentovali aplikace svých výsledků.

V článku [26] autoři dokázali, že pokud pro Laplaceova čísla grafu G platí $\mu_2/\mu_n \geq 2/3$, pak je graf G 2-tuhý. Toto je jedna z vět, které se povedlo zobecnit pomocí výše dokázaných odhadů.

Věta 4.2.3. [23] *Pokud $\frac{\mu_2}{\mu_n} \geq \frac{r}{r+1}$, potom je graf G r -tuhý.*

V této práci jsme několikrát zmínili využití existence k -faktoru, pro dokázání jiné vlastnosti grafu. Nyní, ukážeme jednu z možných aplikací výše dokázaných odhadů, a to jako prostředek k stanovení spektrálních odhadů pro existenci k -faktoru.

Nejdříve se ale zaměříme na existenci $[a, b]$ -faktoru. Graf H je $[a, b]$ -faktorem grafu G pokud je H faktor a pro všechny jeho vrcholy platí $a \leq d_H(v) \leq b$.

Věta 4.2.4. *Mějme graf G a dále mějme dána čísla $a, b \in \mathbb{N} : a \leq b$ taková, že $a < b$, nebo $b \cdot n$ je sudé. Pokud platí*

$$\frac{\mu_2}{\mu_n} \geq 1 - \frac{b}{a(b+1)},$$

potom graf G obsahuje $[a, b]$ -faktor.

Důsledek. *Nechť je dáno číslo k takové, že $n \leq k+1$ a $k \cdot n$ je sudé. Pokud*

$$\frac{\mu_2}{\mu_n} \geq \frac{k}{k+1},$$

pak graf G obsahuje k -faktor.

Tento důsledek předchází větu je zároveň zobecněním věty, která byla prezentována v článku [27].

Tyto věty tvoří pouze malou ukázkou aplikací spektrálních odhadů, které ilustrují využití spektrálních vlastností grafů pro jeho další charakterizaci.

4.3 Hranová tuhost a spektrum

Hranová tuhost představuje relativně nový koncept, jehož studium je náročné zejména proto, že namísto optimálního vrcholového řezu, který hledáme u „klasické“ tuhosti, hledáme vhodnou množinu hran a vrcholů. V této části bychom rádi představili naše vlastní výsledky a navázali tak na výsledky prezentované v těchto článcích [15], [23].

Již dříve jsme ukázali, že každá komponenta grafu

$$G' = G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c \text{in}_{G-X}(K_i)$$

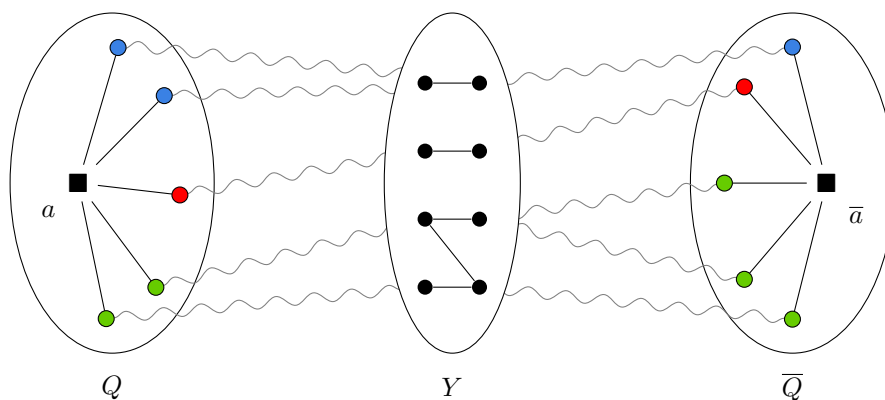
obsahuje alespoň jeden vrchol, který není prvkem množiny $\bigcup_{i=1}^c \text{bd}_{G-X}(K_i)$. Množinu všech těchto vrcholů jsme označili $-A$.

Dále připomeňme, že každá cesta v grafu G , která spojuje dva vrcholy z množiny A obsahuje vrchol z množiny X nebo hranu z množiny Y .

Dokážeme, že existuje vrcholový řez S grafu G , kterým lze nahradit dvojicí (X, Y) a ukážeme důsledek tohoto tvrzení.

Odstraňme všechny vrcholy množiny X . Pokud existují nějaké AA -cesty, tj. cesty spojující dva různé vrcholy množiny A , potom jistě obsahují nějakou hranu množiny Y . Tyto cesty mají navíc jednu důležitou charakteristiku, co se týče jejich krajních hran. Tyto krajní hrany jsou vždy určeny jedním vrcholem z množiny A a vrcholem, který patří do hranice některé z komponent grafy $G(Y)$.

Určíme maximální možný počet *vnitřně disjunktích* AA -cest.



Obrázek 4.2: Ilustrace grafu $G - X$ doplňující důkaz tvrzení 4.3.1. ($G' = Q \cup \bar{Q}$, $A = \{a, \bar{a}\}$)

Dvě AA -cesty jsou *vnitřně disjunktí*, pokud nemají společný žádný vnitřní vrchol, neuvažujeme tedy krajní vrcholy, které jsou prvky množiny A .

Protože tyto cesty musejí projít přes dva různé vrcholy jedné hranice $bd_{G-X}(K_j)$ ležící v různých komponentách grafu G' , maximální počet vnitřně disjunktčních AA -cest spojující komponenty grafu G' je $\sum_{i=1}^c \lfloor bd_{G-X}(K_i)/2 \rfloor$. Znalost počtu takto disjunktčních cest nám umožňuje aplikovat Mengerovu větu.

Věta 4.3.1 (Mengerova věta). [28] *Nechť G je graf a $A, B \subseteq V(G)$. Minimální počet vrcholů, které separují množinu A od B je roven maximálnímu počtu (vnitřně) disjunktčních $A - B$ cest v grafu G .*

Díky tomu, že jsme dokázali určit počet vnitřně disjunktčních AA -cest a následně tak ukázat velikost vrcholového řezu, který by graf $G - X$ rozdělil na komponenty grafu G' , můžeme formulovat následující tvrzení.

Tvrzení 4.3.1. Nechť G je souvislý graf a necht' $X \subseteq V(G)$ a $Y \subset (G - X)$ jsou takové množiny, že

$$\tau'(G) = \frac{s(X, Y; G)}{c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i))}.$$

Potom existuje vrcholový řez S velikosti $|S| = |X| + \sum_{i=1}^c \lfloor bd_{G-X}(Q_i)/2 \rfloor$

Toto tvrzení nám umožňuje rozšířit horní odhady (4.6) a (4.7) na hodnoty hranové tuhosti.

Tvrzení 4.3.2.

$$\tau(G) \geq \tau'(G) \geq \frac{\mu_2 \mu_n}{n(\mu_n - \delta)}, \quad (4.11)$$

a zároveň

$$\tau(G) \geq \tau'(G) \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2}. \quad (4.12)$$

Důkaz. Důkaz platnosti odhadu (4.11) vyplývá z definice hranové tuhosti a z některých skutečností, které jsme zmínili dříve. Dokázali jsme, že existuje vrcholový řez

$$|S| = |X| + \sum_{i=1}^c \left\lfloor \frac{bd_{G-X}(K_i)}{2} \right\rfloor = s(X, Y; G).$$

Stejně jako u klasické tuhosti tedy platí

$$s(X, Y; G) \geq \kappa \geq \mu_2,$$

a stále můžeme aplikovat odhad pro počet komponent z tvrzení (4.2.2). Dostaneme tedy

$$\tau'(G) \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2}$$

□

Dokažme také platnost odhadu (4.12).

Důkaz. Mějme graf G a množinu vrcholů $X \subset V$ a množinu hran $Y \subset G - X$ takové, že

$$\tau'(G) = \frac{s(X, Y; G)}{c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i))}.$$

Stejně jako v předchozím důkazu, využijeme toho, že jsem dokázali existenci vrcholového řezu

$$|S| = |X| + \sum_{i=1}^c \left\lfloor \frac{bd_{G-X}(Q_i)}{2} \right\rfloor = s(X, Y; G).$$

Pro komponenty grafu $G - S$ zavedeme značení Q_1, \dots, Q_k tak, aby bylo splněno $|Q_1| \leq \dots \leq |Q_k|$. Snadno dokážeme, že existuje komponenta v grafu $G - S$, která obsahuje alespoň dva vrcholy. Protože z každé hranice $bd_{G-X}(K_i)$, $i = 1, \dots, c$ odstraníme maximálně polovinu vrcholů a každý hraniční vrchol komponenty K_i grafy $G(Y)$ musí mít souseda, který není prvkem komponenty K_i , platí $n - |S| \geq c(G - S) + 1$.

Stejně jako v důkazu platnosti nerovnosti (4.7) jsme schopni najít disjunktní rozklad množiny $V - S$ na množiny X_1 a X_2 tak, že $|X_2| \geq |X_1| \geq c(G - S)/2$.

Díky tomu můžeme použít vztah (4.5) abychom získali následující odhad.

$$\begin{aligned} \tau'(G) &= \frac{|S|}{c(G - X - Y - \bigcup_{i=1}^c in_{G-X}(K_i))} \geq \frac{2\mu_2}{\mu_n - \mu_2} \cdot \frac{|X_1|}{c(G - S)} \\ &\geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \mu_2} \end{aligned}$$

□

Platnost těchto odhadů nás vede k zobecnění Haemersovy hypotézy.

Hypotéza 4.3.1 (Zobecnění Haemersovy hypotézy).

$$\tau(G) \geq \tau'(G) \geq \frac{\mu_2}{\mu_n - \delta_G}$$

Závěr

V této práci jsme se věnovali spektrálním vlastnostem grafů, klíčovému aspektu teorie grafů, který nachází široké uplatnění v mnoha vědeckých a technických oborech. Hlavním cílem bylo poskytnout shrnutí známých výsledků z oblasti spektrální teorie matic a grafů a zároveň nabídnout hluboký náhled na vztahy mezi spektrálními charakteristikami a strukturálními vlastnostmi grafů.

Důležitým výsledkem této práce je důkaz toho, že spektrální odhady prezentované Gu a Haemersem [23] jsou aplikovatelné i na hranovou souvislost grafů.

Pro budoucí výzkum by bylo zajímavé dále rozvíjet analýzu extrémálních případů těchto spektrálních odhadů a jejich aplikacím.

Literatura

- [1] R. B. Bapat. *Graphs and Matrices*. Springer, 2010.
- [2] Charles R. Horn Roger A. & Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 2013.
- [3] Jiří Holenda. *O maticích*. Vydavatelský servis, 2007.
- [4] Gary Chartrand, Linda Lesniak a Ping Zhang. *Graphs & digraphs*. Sv. 39. CRC press, 2010.
- [5] Nair Maria Maia De Abreu. „Old and new results on algebraic connectivity of graphs“. In: *Linear algebra and its applications* 423.1 (2007), s. 53–73.
- [6] Anne Marsden. „Eigenvalues of the laplacian and their relationship to the connectedness of a graph“. In: *University of Chicago, REU* (2013).
- [7] Jiří Demel. *Grafy a jejich aplikace*. Academia, 2002.
- [8] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. English. 1. vyd. New York, NY: Springer, 2002.
- [9] V. Chvátal. „Tough graphs and hamiltonian circuits“. In: *Discrete Mathematics* 5.3 (1973), s. 215–228. ISSN: 0012-365X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(73\)90138-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90138-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X73901386>.
- [10] Maria Chudnovsky a Paul D Seymour. „The structure of claw-free graphs.“ In: *BCC*. 2005, s. 153–171.
- [11] AE Brouwer. „Toughness and spectrum of a graph“. In: *Linear algebra and its applications* 226.228 (1995), s. 267–271.
- [12] Hikoe Enomoto et al. „Toughness and the existence of k-factors“. In: *Journal of Graph Theory* 9.1 (1985), s. 87–95.
- [13] D. Bauer, H.J. Broersma a H.J. Veldman. „Not every 2-tough graph is Hamiltonian“. In: *Discrete Applied Mathematics* 99.1 (2000), s. 317–321. ISSN: 0166-218X. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(99\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00141-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X99001419>.

- [14] Peter Dankelmann, Thomas Niessen a Ingo Schiermeyer. „On Path-Tough Graphs“. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7.4 (1994), s. 571–584. DOI: [10.1137/S0895480192242766](https://doi.org/10.1137/S0895480192242766), eprint: <https://doi.org/10.1137/S0895480192242766>, URL: <https://doi.org/10.1137/S0895480192242766>.
- [15] Gyula Y Katona. „Toughness and edge-toughness“. In: *Discrete Mathematics* 164.1-3 (1997), s. 187–196.
- [16] A.K. Kelmans a M.V. Lomonosov. „When m vertices in a k -connected graph cannot be walked round along a simple cycle“. In: *Discrete Mathematics* 38.2 (1982), s. 317–322. ISSN: 0012-365X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(82\)90299-0](https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90299-0), URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X82902990>.
- [17] Alexander K Kelmans a MV Lomonosov. „On cycles through prescribed vertices in weakly separable graphs“. In: *Discrete Mathematics* 46.2 (1983), s. 183–189.
- [18] JW Moon. „Topic on Tournaments, Holt, Rinehart and Winston“. In: *Inc., New York* (1968).
- [19] Russell Merris. „Split graphs“. In: *European Journal of Combinatorics* 24.4 (2003), s. 413–430. ISSN: 0195-6698. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(03\)00030-1](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00030-1), URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669803000301>.
- [20] S. Barik et al. In: *Special Matrices* 6.1 (2018), s. 323–342. DOI: [doi:10.1515/spma-2018-0027](https://doi.org/10.1515/spma-2018-0027), URL: <https://doi.org/10.1515/spma-2018-0027>.
- [21] Miroslav Fiedler. „Algebraic connectivity of graphs“. In: *Czechoslovak Mathematical Journal* (1973).
- [22] Noga Alon. In: *J. Algebraic Combin.* 4.3 (1995), s. 189–195.
- [23] Xiaofeng Gu a Willem H Haemers. „Graph toughness from Laplacian eigenvalues“. In: *Algebraic Combinatorics* 5.1 (2022), s. 53–61.
- [24] Willem H. Haemers. „Interlacing eigenvalues and graphs“. In: *Linear Algebra and its Applications* 226-228 (1995). Honoring J.J.Seidel, s. 593–616. ISSN: 0024-3795. DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00199-2](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00199-2), URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379595001992>.
- [25] Xueyi Huang, Kinkar Chandra Das a Shunlai Zhu. „Toughness and normalized Laplacian eigenvalues of graphs“. In: *Applied Mathematics and Computation* 425 (2022), s. 127075. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127075>, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009630032200159X>.
- [26] Bolian Liu a Siyuan Chen. „Algebraic conditions for t -tough graphs“. In: *Czechoslovak mathematical journal* 60.4 (2010), s. 1079–1089.

- [27] Andries E Brouwer a Willem H Haemers. „Eigenvalues and perfect matchings“. en. In: *Linear Algebra Appl.* 395 (2005), s. 155–162.
- [28] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2000.
- [29] Michelle Rittenhouse. *Properties and recent applications in spectral graph theory*. 2008.