Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Časové struktury v teorii her

Plzeň 2013 Lucie Štejrová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 28. května 2013

Lucie Štejrová

Abstrakt

Cílem této práce je sestavit srozumitelné shrnutí role časování v teorii her. Hlavní pozornost je upřena na hry, které ve své statické formě mají více rovnováh. Konkrétně se věnuje dvěma scénářům Válka pohlaví a Jestřábi a holubice. V práci je ukázáno, jak časování mění počet a zejména jednoznačnost rovnováh. Práce se věnuje časovým strukturám v běžně známých dynamických hrách, ale i ve speciálních typech dynamických her, kde je časování náhodné.

Klíčová slova: Teorie her, Válka pohlaví, Jestřábi a holubice, statické hry, dynamické hry, dynamické hry s náhodným časováním tahů

Abstract

The aim of this work is to make clear summary of timing structures in the game theory. The main attention is given to situations, which have multiple Nash equilibria in the form of static game. Namely it is The Battle of Sexes scenario and The Game of Chicken scenario. In the work we show how timing can cause change of number of equilibria and especially uniqueness of equalibria. This work pursues commonly known dynamic games but also gives attention to special types of dynamic games with stochastic timing of moves.

Key words: Game theory, Battle of Sexes, Game of Chicken, static games, dynamic games, dynamic games with stochastic timing of moves

Obsah

1 Úvod

Cílem této práce je představit roli časování v teorii her s ohledem hlavně na kooperační hry a situace s násobnými rovnováhami, kde časováním můžeme dosáhnout změny počtu a jednoznačnosti rovnováh. Zabýváme se klasickými dynamickými hrami, ale i situacemi, kde je časování tahů náhodné. Hlavním námětem pro tuto práci byl článek Libich a Stehlík [3].

V začátku práce čtenáře seznámíme se základními pojmy teorie her, které dále používáme. Představíme také základní předpoklady teorie her. Velká část této kapitoly je věnována statickým hrám a dvěma scénářům s násobnými rovnováhami: Válka pohlaví a Jestřábi a holubice.

V další kapitole zkoumáme dynamické hry. Ukážeme jak převedením statických her, s výše uvedenými scénáři, na dynamickou hru můžeme vyřešit problém nejednoznačnosti rovnováhy.

Následně se věnujeme dynamickým hrám se speciálním časováním tahů, které je náhodné, zadané nějakým pravděpodobnostním rozdělením. Popíšeme tento typ hry a snažíme se opět vyřešit nejednoznačnost rovnováhy. Pro ilustraci nalezeného řešení uvedeme příklady. Nakonec zkoumáme závislost řešení na obsažených parametrech.

2 Základní pojmy teorie her

Tato kapitola slouží jako stručný úvod do problematiky teorie her. Jsou zde vysvětlené základní pojmy a myšlenky této disciplíny. Většina definic a vět je přejata z literatury Webb [1] a Fudenberg [2]. Dále zde představíme a popíšeme statické hry a ukážeme dva základní scénáře.

2.1 Úvod do teorie her

Teorie her je matematická disciplína, která aplikuje matematické poznatky při rozhodovacích a konfliktních situacích, které mohou běžně nastat. Situace rozhodování racionálních hráčů jsou převáděny na matematické modely. Z tohoto modelu se potom pomocí výpočtů snaží nalézt nejlepší strategii pro všechny hráče. Zde se nachází hlavní rozdíl mezi teorií her a optimalizací. Při optimalizaci hledáme nejlepší alternativu pro jednoho hráče, který zanedbává okolí, zatímco v teorii her hledáme nejlepší strategii pro hráče za předpokladu vlivu naprosto racionálního okolí (dalších hráčů).

Teorie her má mnoho aplikací v sociálních, politických a počítačových vědách, stejně jako v biologii. Ze sociálních věd je to především ekonomie. Pro biologii jsou důležité evoluční hry, které mohou modelovat chování různých živočišných druhů.

2.2 Hra, hráč, strategie, užitek

Jako *hra* je v teorii her označována jakákoliv rozhodovací situace, kde vystupují alespoň dva *hráči*. Pro takové hry uvažujeme obecné předpoklady teorie her.

Předpoklad 1. (i) Hráči jsou racionální. (ii) Všichni účastníci znají pravidla a ta se v průběhu jedné hry nemění. (iii) Hráči znají své vlastní užitky a zároveň mají přehled o užitcích ostatních hráčů.

Jako *hráče* uvažujeme jedince, který má možnost učinit rozhodnutí, tj. vybrat jednu z množiny možných *strategií*. Jedno určité rozhodnutí je tedy označováno jako *strategie*. Každý hráč má dané *užitky* pro kombinaci svých strategií postupně se všemi strategiemi protihráčů.

2.2.1 Typy her

Hry můžeme dělit dle různých kritérií. Za základní dělení považujeme dva typy, a to hry statické (v normálním tvaru) a hry dynamické (v explicitním tvaru). Těmto typům her budou věnovány samostatné kapitoly v průběhu této práce.

Další dělení můžeme provádět dle počtu hráčů, nejčastěji se však setkáme s typem her, kde se vyskytují pouze dva hráči. Není potom vyloučené, že jeden hráč zastupuje celou skupinu jedinců se stejnými zájmy.

Hry můžeme rozdělit i podle počtu strategií na hry s konečným počtem strategií a hry s nekonečným počtem strategií. Nekonečný počet strategií může nastat tehdy, pokud hráč vybírá například reálné číslo ze spojitého intervalu.

2.3 Statické hry

Statická hra je jednotahová hra dvou nebo více hráčů se dvěma nebo více strategiemi. Tento typ hry se někdy nazývá simultánní hra, protože hráči uskutečňují své rozhodnutí ve stejný okamžik a neznají předem volbu ostatních. Matematické vyjádření této hry je popsáno následující definicí.

Definice 1. *Statická hra* je matematická struktura skládající se ze tří množin:

1. Množina hráčů $i \in \{1, 2, ..., N\}$,
2. množina jejich strategií S_i,
3. užitky $\pi_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ pro každou možnou kombinaci čistých strategií všech hráčů, kde $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, ..., $s_n \in S_n$.

Dále, pro účely této práce, budeme uvažovat pouze hru dvou hráčů se dvěma strategiemi. Statickou hru zapisujeme v normálním tvaru, kde se vyskytují data ze všech tří nadefinovaných množin. Hra může vypadat následovně:

		H2	
		C	D
H1	A	a,w	b,x
	B	c,y	d,z

Zápis hry pomocí tabulky se nazývá *normální tvar* statické hry. Máme tedy množinu dvou hráčů $\{H1, H2\}$. Jejich strategie jsou $S_1 = \{A, B\}$ a $S_2 = \{C, D\}$. Užitky prvního hráče jsou $\{a, b, c, d\}$, kde například užitek a můžeme zapsat jako $\pi_1(A, C)$. Užitky druhého hráče jsou $\{w, x, y, z\}$. Strategie $\{A, B\}$ a $\{C, D\}$ uvedené v tabulce jsou *čisté strategie*, jejich kombinací získáme *smíšené strategie.*

Definice 2. *Smíšená strategie* i-tého hráče je vektor pravděpodobnostního rozdělení $\sigma_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_N})$ čistých strategií, kde každá složka p_{i_j} udává pravděpodobnost s jakou bude i-tý hráč hrát strategii s_j. Množiny všech možných smíšených strategií označíme Σ_i.

Řešením hry je dvojice strategií, které by racionální hráči použili. Tuto dvojici budeme nazývat *rovnováha* nebo *rovnovážný stav* hry a budeme ji zapisovat ve tvaru (s_1, s_2). Speciální typ rovnováhy je *Nashova rovnováha*, kde ani jeden z hráčů nemůže získat lepší užitek použitím jiné strategie.

Definice 3. *Nashova rovnováha* (pro dva hráče) je dvojice strategií $(\sigma_1^*; \sigma_2^*)$ takových, že platí

$$\pi_1(\sigma_1^*; \sigma_2^*) \geq \pi_1(\sigma_1; \sigma_2^*) \qquad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1, \tag{2.1}$$

$$\pi_2(\sigma_1^*; \sigma_2^*) \geq \pi_2(\sigma_1^*; \sigma_2) \qquad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2. \tag{2.2}$$

Poznámka 1. V případě, že strategie σ_1^* a σ_2^* jsou čisté strategie, dostaneme *čistou Nashovu rovnováhu.* Jinak budeme uvažovat *smíšenou Nashovu rovnováhu.*

Poznámka 2. V případě, že se v rovnici (2.1) nebo (2.2) vyskytne neostrá nerovnost, každá malá změna v hodnotách užitků vytvoří nové rovnováhy nebo vyruší stávající rovnováhy. Takové hře budeme říkat *negenrická hra.*

Není vyloučené, naopak je spíš běžné, že hra má větší počet rovnováh. Pro nalezení čistých Nashových rovnováh můžeme využít řešení pomocí dominovaných strategií, které je uvedeno například ve Webb [1] a pro nalezení všech Nashových rovnováh (čisté i smíšené) je opět ve Webb [1] popsán koncept nejlepší odpovědi.

Problém existence Nashovy rovnováhy ve statických hrách řeší následující věta, jejíž důkaz může čtenář najít ve Fudenberg [2].

Věta 1 (Nashova věta)**.** *Každá statická hra s konečným počtem hráčů a konečným počtem strategií má alespoň jednu Nashovu rovnováhu.*

Další problém je jednoznačnost rovnováhy. Pro tuto otázku neexituje jednoduchá odpověď'. Jsou pouze určité postačující podmínky, které obsáhnou jen malou množinu her. Ale velká třída her má více než jednu rovnováhu a zde nastává právě problém výběru optimální rovnováhy. Můžeme použít více způsobů pro výběr rovnováhy. Nejjednodušší je výběr dle tradice nebo společenských konvencí (Na silnici mohou jezdit vozidla obou směrů vlevo nebo vpravo. Pokud budou jezdit oba vlevo, je to rovnováha, ale pokud budou jezdit oba vpravo, je to také rovnováha. Potom záleží například na zemi, ve které se vozidla nachází, protože ve Velké Británii by byla optimální rovnováha jiná než v České Republice). Další možností je použití evoluční dynamiky, kde hráči představují populace jedinců (více např. ve Webb [1]). Posledním řešením je využití časování tahů, čímž se budeme zabývat ve zbytku práce.

2.4 Scénáře s nejednoznačnými rovnováhami

Uvažujeme hru dvou hráčů M a F. Každý z hráčů má na výběr ze dvou strategií, pro hráče M je to R a S a pro hráče F je to r a s. Užitky jsou následující:

		F	
		r	s
M	R	a,w	b,x
	S	c,y	d,z

Podle hodnot užitků můžeme odlišit různé scénáře hry. Pro tuto práci budou důležité scénáře, které mají více Nashových rovnováh a nastává v nich konflikt. To znamená, že kažý hráč preferuje jinou rovnováhu.

2.4.1 Válka pohlaví

Prvním takovým scénářem je Válka pohlaví. Užitky splňují nerovnice

$$a > d > b \geq c$$

pro hráče M a

$$z > w > x \geq y$$

pro hráče F. Existují v něm dvě čisté Nashovy rovnováhy (R, r) a (S, s). Hráči se tedy chtějí zkoordinovat, ale každý z nich preferuje jinou rovnováhu. Hráč M preferuje (R, r), zatímco hráč F dává přednost rovnováze (S, s). V tomto scénáři pozorujeme oba problémy, jak koordinační, tak konfliktní. Pro představu uvedeme základní příklad hry s tímto scénářem.

Příklad 1. Hřáč M je muž, hráč F je žena. Plánují strávit společný večer a rozhodují se, kam půjdou. Oba mají na výběr stejné strategie: $\{Hokej, Opera\}$. Muž preferuje $Hokej$, žena $Operu$. Užitky mohou být například následující:

		Žena	
		Hokej	Opera
Muž	Hokej	2,1	0,0
	Opera	0,0	1,2

Z užitků vyplývá, že je důležité, aby šli společně (koordinační problém). Hru vyřešíme pomocí reakční funkce (podrobněji ve Webb [1]). Reakční funkci sestrojíme tak, že budeme předpokládat smíšené strategie $\sigma_1 = (p, 1-p)$ hráče M a $\sigma_2 = (q, 1-q)$ hráče F. Tento zápis můžeme interpretovat tak, že hráč M bude hrát strategii $Hokej$ s pravděpodobností p a strategii $Opera$ s pravděpodobností $(1-p)$, obdobně to platí pro soupeře. Nyní spočteme užitek prvního hráče z těchto smíšených strategií v závislosti na hodnotách p a q.

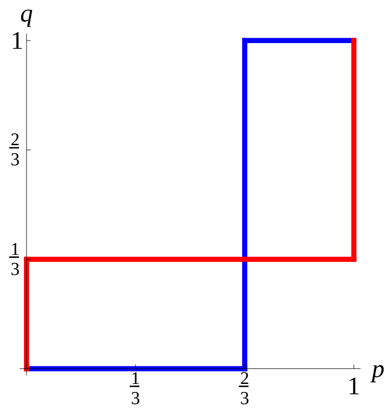
$$\begin{aligned}\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) &= 2pq + (1-p)(1-q) \\ &= 2pq + pq - p - q + 1 \\ &= 3pq - p - q + 1 \\ &= p(3q-1) - q + 1\end{aligned} \tag{2.3}$$

Provedeme diskusi posledního řádku rovnice (2.3). Když bude $q < \frac{1}{3}$, nejlepší reakcí bude hrát $p = 0$. V případě, že $q > \frac{1}{3}$, nejlepší odezvou je zahrát $p = 1$. Pokud bude $q = \frac{1}{3}$, na hodnotě p nezáleží, protože výraz $(3q - 1)$ bude nulový. Tuto funkci nám znázorňuje modrá křivka na Obrázku 2.1. Stejným postupem spočteme užitek hráče F ze smíšených strategií (rovnice 2.4) a po provedení diskuse získáme červenou křivku vyobrazenou na Obrázku 2.1.

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma_1, \sigma_2) &= pq + 2(1-p)(1-q) \\ &= pq + 2pq - 2p - 2q + 2 \\ &= 3pq - 2q - 2p + 2 \\ &= q(3p-2) - 2p + 2\end{aligned} \tag{2.4}$$

V místě protnutí obou křivek se nachází Nashova rovnováha. V tomto příkladu existují tři Nashovy rovnováhy: $(0, 0)$, $(1, 1)$ a $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. První dvě rovnováhy jsou čisté, protože hráč vybírá pouze jednu strategii s pravděpodobností 1 a v tomto příkladu reprezentují $(Hokej, Hokej)$ a $(Opera, Opera)$. Poslední rovnováha je smíšená, kde první hráč bude hrát strategii $Hokej$ s pravděpodobností $p = \frac{2}{3}$ a strategii $Opera$ s pravděpodobností $(1 - p) = \frac{1}{3}$. Pro druhého hráče platí analogicky. Dále se budeme zabývat pouze čistými Nashovými rovnováhami.

Tím máme vyřešený koordinační problém. Nastává problém výběru optimální rovnováhy (konflikt), který můžeme vyřešit právě časováním, jak bude uvedeno v dalších kapitolách.



Obrázek 2.1: Reakční funkce pro Válku pohlaví

2.4.2 Jestřábi a holubice

Druhý vyhovující scénář jsou Jestřábi a holubice. Užitky pro tento scénář musí splňovat nerovnice

$$b > c > d \geq a$$

pro hráče M a

$$y > x > z \geq w$$

pro hráče F. V této hře opět existují dvě čisté Nashovy rovnováhy (R, s) a (S, r). Z rovnováh je zřejmé, že hráči chtějí mít rozdílné strategie a opět každý preferuje jinou rovnováhu. Pro hráče M je užitkově výhodnější rovnováha (R, s), zatímco pro hráče F je to rovnováha (S, r). Tento scénář obsahuje antikoordinační problém i konflikt.

Příklad 2. Oba hráči představují řidiče, kteří jedou proti sobě na silnici. Mají na výběr strategie $\{Nevyhnout, Vyhnout\}$. Hráč, který se vyhne je označen jako "chicken"(anglický název hry je Game of Chicken), tedy zbabělec. Nejlepší užitek dostane hráč v situaci, kdy se nevyhne, ale jeho soupeř ano. Nejhorší užitek mají oba hráči, pokud se ani jeden nevyhne (auta do sebe nabourají). Hra může vypadat například takto:

		Řidič 2	
		Nevyhnout	Vyhnout
Řidič 1	Nevyhnout	-10,-10	10,1
	Vyhnout	1,10	0,0

Pro nalezení všech rovnováh hry použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu. Budeme uvažovat smíšené strategie $\sigma_1 = (p, 1-p)$ a $\sigma_2 = (q, 1-q)$. Nalezneme užitky hráče M pro tyto smíšené strategie a sestrojíme reakční funkci, která je znázorněná modrou křivkou na Obrázku 2.2.

$$\begin{aligned}\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) &= -10pq + 10p(1-q) + (1-p)q \\ &= -10pq + 10p - 10pq + q - pq \\ &= -21pq + 10p + q \\ &= p(-21q + 10) + q\end{aligned}$$

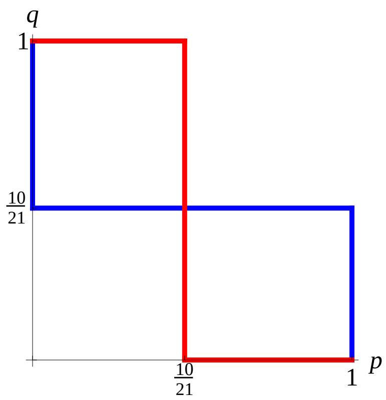
Dále vypočteme užitky hráče F pro smíšené strategie σ_1 a σ_2. Červenou křivkou je vyznačena reakční funkce hráče F.

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma_1, \sigma_2) &= -10pq + p(1-q) + 10(1-p)q \\ &= -10pq + p - pq + 10q - 10pq \\ &= -21pq + p + 10q \\ &= q(-21p + 10) + p\end{aligned}$$

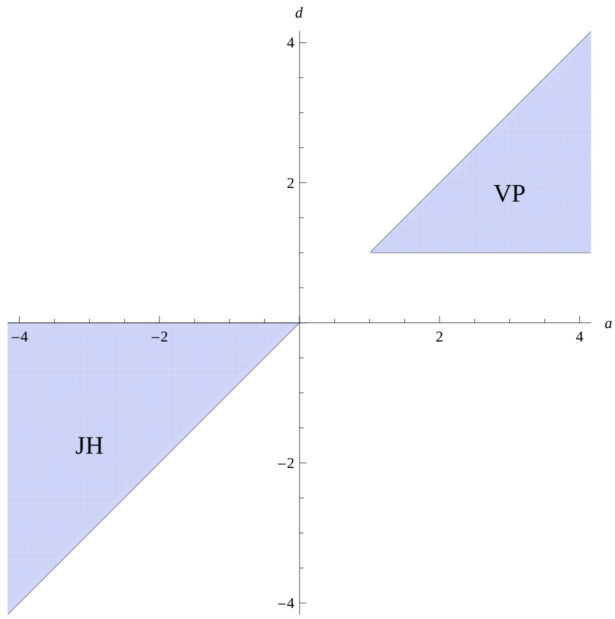
Nashovy rovnováhy jsou opět průsečíky obou křivek. Dvě čisté Nashovy rovnováhy $(1, 0)$ a $(0, 1)$ znamenají $(Nevyhnout, Vyhnout)$, $(Vyhnout, Nevyhnout)$. Smíšená Nashova rovnováha je v bodě $(\frac{10}{21}, \frac{10}{21})$. Opět zde nastává konflikt, který můžeme vyřešit časováním.

2.4.3 Grafické znázornění užitků

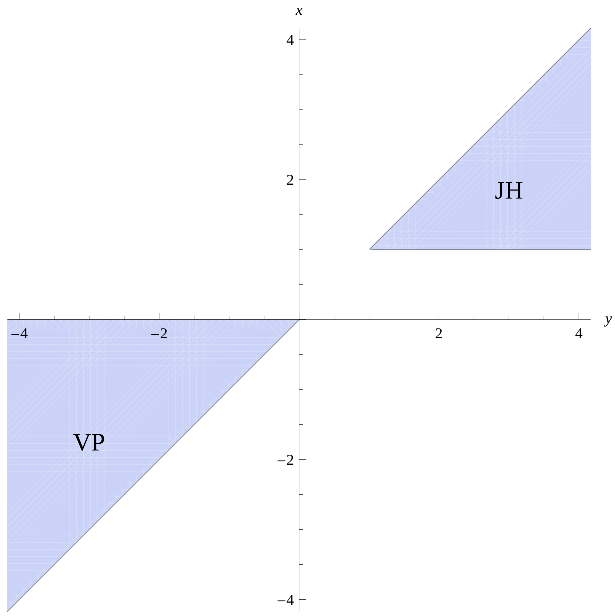
Pro představu můžeme hodnoty užitků obou hráčů ve výše zmíněných scénářích vyjádřit graficky. Hráč má čtyři užitky, každý jako výsledek kombinace dvou strategií. Dvěma užitkům přiřadíme fixní hodnotu a budeme zkoumat



Obrázek 2.2: Reakční funkce pro Jestřáby a holubice



Obrázek 2.3: Grafické znázornění užitků a a d hráče M pro oba scénáře při volbě $b = 1$ a $c = 0$



Obrázek 2.4: Grafické znázornění užitků x a y hráče F pro oba scénáře při volbě $z = 1$ a $w = 0$

přípustné oblasti pro zbylé hodnoty užitků. Grafy jsme rozdělili podle hráčů na graf užitků hráče M a graf užitků hráče F.

Na Obrázku 2.3 jsou vyznačené dvě oblasti. Oblast VP vymezuje možnou volbu užitků a a d pro scénář Válka pohlaví, za předpokladu, že zbývající užitky mají zafixované hodnoty, a to $b = 1$ a $c = 0$. Oblast JH znázornňuje také možnou volbu užitků a a d při stejně zafixovaných užitcích b a c, ale pro scénář Jestřábi a holubice.

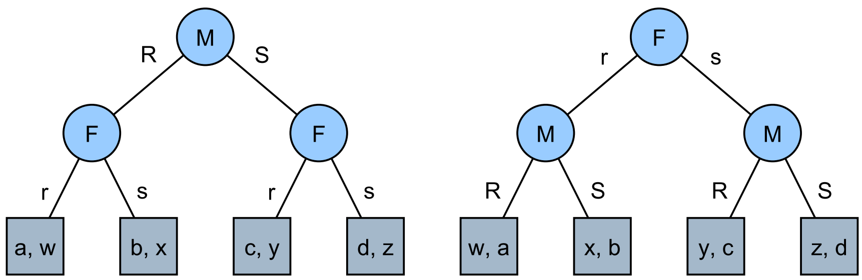
Na dalším Obrázku 2.4 jsou vyznačené možné volby užitků x a y, pokud $w = 0$ a $z = 1$. Oblast VP opět značí možnosti pro scénář Válka pohlaví a JH pro scénář Jestřábi a holubice.

3 Dynamické hry

V této kapitole představíme třídu dynamických her. V tomto typu her nenastávají tahy hráčů současně, ale postupně. Hry jsou tedy minimálně dvoutahové (v první tahu hraje jeden hráč, ve druhém tahu hraje druhý hráč). Pokud by byla dynamická hra jednotahová, jednalo by se pouze o optimalizaci. Hlavní odlišnost od statických her je fakt, že hráč zná výsledek předchozího tahu a má možnost na něj reagovat.

3.1 Zobrazení dynamické hry

Dynamické hry se zobrazují v explicitním tvaru pomocí stromů. Na Obrázku 3.1 je znázorněna hra Válka pohlaví jako dynamická hra. V prvním případě má možnost prvního tahu hráč M a vybírá opět ze dvou strategií $\{R, S\}$. Až po ukončení tahu prvního hráče začíná tah druhého hráče, který už zná výsledek předchozího tahu. Hráč F má na výběr strategie {r,s}, ale nemůže už nijak ovlivnit tah prvního hráče. V druhém případě probíhá hra stejným způsobem, pouze je vyměněné pořadí hráčů.



Obrázek 3.1: Dynamická hra - Válka pohlaví

3.2 Řešení dynamické hry

Pro nalezení rovnováhy dynamické hry používáme zpětnou indukci. Procházíme hru od konce a využíváme znalostí o předchozích tazích. Pokud tuto metodu použijeme na hru z Obrázku 3.1 (možnost, kde hráč M hraje jako první), budeme postupovat následovně: Hráč F má v každé větvi dvě možnosti, a to r nebo s. Pokud by hráč M zahrál R, hráč F vybere také r, protože z této strategie má lepší užitek, ve druhé větvi dopadne výběr analogicky. Nyní se přesuneme na tah hráče M. Hráč M už ví, že pokud zahraje R, F zahraje taky r a pokud zahraje S, hráč F zahraje taky s. Stačí pouze vybrat strategii, ze které má lepčí užitek, tedy R. Tímto postupem dostaneme rovnováhu (R, r).

Pro dynamické hry můžeme také definovat Nashovu rovnováhu, která vychází z konstrukce zpětné indukce. Nejprve ale potřebujeme zavést pojem dynamická podhra.

Definice 4. *Dynamická podhra* je podstrom, který musí splňovat následující podmínky:

1. Začátek se nachází v libovolném uzlu stromu (vyjma konečných uzlů s užitky).
2. Hráč zná všechna rozhodnutí provedená do tohoto času (ve kterém se nachází počáteční uzel).
3. Podhra obsahuje všechny uzly, které následují počáteční uzel.

Definice 5. *Nashova rovnováha vzhledem k podhrám* je rovnováha dynamické hry, která je Nashovou rovnováhou v každé podhře této dynamické hry.

Problém existence takové rovnováhy je vyřešen následující větou, jejíž důkaz je uveden ve Webb [1].

Věta 2. *Každá konečná dynamická hra má alespoň jednu Nashovu rovnováhu vzhledem k podhrám.*

Otázka jednoznačnosti rovnováhy je u dynmaických her snažší než u statických her.

Věta 3. *Pokud je hra generická, tj. nenastává rovnost užitků, pak existuje právě jedna Nashova rovnováha vzhledem k podhrám.*

Důkaz. Vyplývá z konstrukce zpětné indukce. □

3.3 Výhoda pořadí

Z Věty 3 vyplývá, že dynamická verze hry Válka pohlaví má právě jednu Nashovu rovnováhu vzhledem k podhrám, stejně jako dynamická verze hry Jestřábi a holubice. Pro nalezení jednoznačné rovnováhy těchto statických her je stačí pouze převést na dynamickou hru. Je zřejmé (kvůli jednoznačnosti rovnováhy), že výsledná rovnováha je výhodnější pouze pro jednoho hráče. Zavedeme pojem výhra hráče.

Definice 6. Budeme říkat, že hráč, jehož preferovaná rovnováha je Nashova rovnáha vzhledem k podhrám, vyhrál.

Následující věty uvádějí podmínky výhry hráčů.

Lemma 1. *Uvažujeme scénář Válka pohlaví. Hru vyhraje hráč, který má možnost prvního tahu.*

Důkaz. Důkaz provedeme tak, že vyřešíme hru zpětnou indukcí pro obě dvě varianty začínajícího hráče. Tím bude věta dokázaná pro oba dva hráče, protože ukážeme, že hráč M vyhraje, když bude začínat a zároveň nevyhraje, když bude začínat hráč F. Varianta hry, kde začíná hráč M je už vyřešená v kapitole 3.2. Nashova rovnováha je v tomto případě (R, r), což je výsledek preferovaný hráčem M. Pokud začíná hru hráč F, zpětná indukce bude vypadat takto: Hráč M vybírá lepší strategii v obou větvích. Ve větvi stromu, kde ví, že F zahrál strategii r vybere strategii R, ve druhé větvi vybere S. Hráč F ví, jaké strategie bude hrát M v závislosti na jeho volbě, vybere tedy výhodnější strategii, kterou je S. Nashova rovnováha he tedy (s, S), výsledek preferovaný hráčem F. (V rovnováze u dynamických her píšeme nejprve strategii začínajícího hráče, z toho důvodu jsou strategie v opačném pořadí.) □

Lemma 2. *Uvažujeme scénář Jestřábi a holubice. Hru vyhraje hráč, který má možnost prvního tahu.*

Důkaz. Důkaz provedeme stejně jako u předchozí věty. Zpětná indukce pro případ, kdy začíná hráč M: Hráč F vybírá lepší strategii v obou větvích stromu. Ve větvi, kde ví, že hráč M zahrál strategii R, zahraje strategii s, ve druhé větvi vybere strategii r. Hráč M zná strategie, které bude hrát hráč F v závislosti na jeho volbě v prvním kole. Vybere tedy výhodnější strategii R a vznikne Nashova rovnováha (R, s). Zpětná indukce pro hru, když začíná hráč F: Hráč M opět vybere nejvýhodnější strategii v obou větvích. Ve větvi, kde hráč F vybral r, vybere S, ve druhé větvi zvolí R. Hráč F zná reakce hráče M, vybere tedy výhodnější strategii r a vznikne Nashova rovnováha (r, S). Každá rovnováha je opět preferovaný výsledek začínajícího hráče. □

Hráč, který má výhodu prvního tahu se nazývá Stackelbergův leader. Problém nejednoznačnosti rovnováhy ve statické hře je možné vyřešit převedením na dynamickou hru. Preferovanou rovnováhu potom získá hráč, který má možnost prvního tahu, tedy Stackelbergův leader.

4 Dynamické hry s náhodným časováním tahů

Tato kapitola popisuje také dynamické hry, ale se speciálním časováním tahů. Budeme uvažovat časování náhodné, zadané nějakým pravděpodobnostním rozdělením. Tato myšlenka má své kořeny především v článcích Libich a Stehlík [3], Cho a Matsui [4], Lagunoff a Matsui [5] a Kamada a Kandori [6]. Ve článku Libich a Stehlík [3] autoři uvažovali náhodné časování tahů pouze pro jednoho hráče. Druhý hráč měl možnost pouze simultánního tahu. V této kapitole se budeme zabývat situací, kde se náhodné časování tahů týká obou hráčů, ale pravděpodobnostní rozdělení tohoto časování tahů jednotlivých hráčů se navzájem nepřekrývá.

4.1 Popis hry

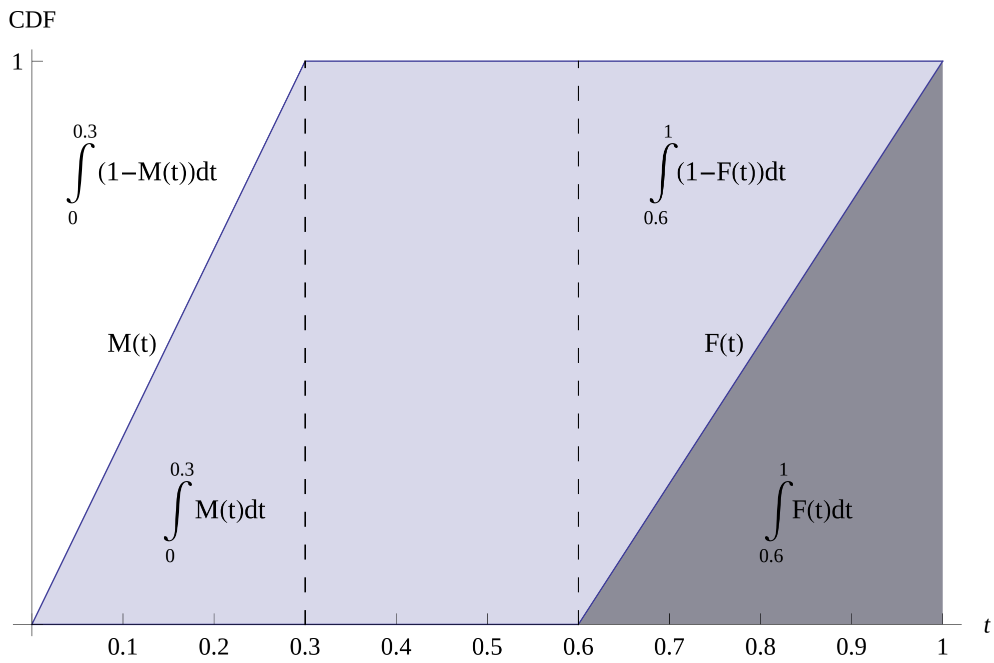
Hra probíhá v časovém intervalu od 0 do 1. V čase 0 zahrají oba hráči simultánní tah, tedy ani jeden neví, jakou strategii zahrál soupeř. Dále předpokládáme, že hráč M má možnost opakování tahů v časovém intervalu $[0, K]$, kde $0 < K < 1$. Hráč F má možnost opakování tahů v časovém intervalu $[L, 1]$, kde $K \leq L < 1$.

Definice 7. Tahy, které následují po simultánním tahu, budeme nazývat *revize*. První provedenou revizi každého hráče označíme jako *Revize* (s velkým písmenem).

Pro oba hráče je důležitá pouze první Revize. Tímto tahem mohou poprvé reagovat na simultánní tah (v případě prvního hráče) nebo reagovat na Revizi prvního hráče (v případě druhého hráče). Všechny ostatní revize jsou zanedbatelné, protože jsou prováděny za stejných podmínek jako Revize a nemají už žádný vliv na průběh hry.

4.2 Časování revizí

Hráči mají možnost revizí omezenou na určitý podinterval ($[0, K]$ pro hráče M a $[L, 1]$ pro hráče F) celkového herního času [0,1] a zároveň je časování revizí



Obrázek 4.1: Revizní funkce

určeno pravděpodobnostním rozdělením na tomto podintervalu.

Definice 8. Pravděpodobnostní rozdělení náhodného časování revizí je popsáno pravděpodobnostní funkcí nebo funkcí hustoty daného pravděpodobnostního rozdělení. Pro hráče M označíme funkci *m(t)*, pro hráče F ji označíme *f(t)*.

Pro účely naší práce bude důležitější distribuční funkce tohoto pravděpodobnostního rozdělení.

Definice 9. Distribuční funkce pravděpodobnostního rozdělení

$$M(t) : [0,1] \to [0,1], M(0) = 0, M(K) = 1,$$

$$F(t) : [0,1] \to [0,1], F(L) = 0, F(1) = 1,$$

nazveme *Revizní funkce*.

Příklady Revizních funkcí máme na Obrázku 4.1. Rozdělení náhodných tahů je pro jednoduchost rovnoměrné a hodnoty parametrů jsou $K = 0,3$ a $L = 0,6$. Plochy pod funkcemi $M(t)$ a $F(t)$ jsou určeny integrály $\int_0^K M(t)\mathrm{d}t$

a $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$. Tyto plochy udávají rychlost reakcí hráčů, zatímco integrály $\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t$ a $\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t$, tedy plochy nad funkcemi $M(t)$ a $F(t)$, udávají rigiditu hráčů (věrnost původnímu rozhodnutí). Z Obrázku 4.1 je zřejmé, že pro hráče M bude platit

$$K = \int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t + \int_0^K M(t)\mathrm{d}t$$

a pro hráče F bude platit

$$1-L = \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + \int_L^1 F(t)\mathrm{d}t.$$

4.3 Výběr optimální rovnováhy

Zkoumáme takovýto typ hry pro dva uvedené scénáře: Válka pohlaví a Jestřábi a holubice. V těchto hrách ve statické formě existují dvě čisté Nashovy rovnováhy, ale dochází ke střetu zájmů hráčů. Každý hráč preferuje jinou rovnováhu. Stejně jako klasickou dynamickou hrou, můžeme i tímto způsobem vyřešit problém výběru optimální rovnováhy. Nejprve definujeme pojem výhra.

Definice 10. Pokud hráčova preferovaná rovnováha bude Nashovou rovnováhou v celém průběhu hry, potom řekneme, že *hráč vyhrává hru.*

Následující věty udávají podmínky výhry hráče M pro oba zmíněné scénáře. Postup nalezení těchto podmínek bude demonstrován v důkazu.

Věta 4. *Uvažujeme scénář Válka pohlaví. Hráč M vyhraje hru (tj. rovnováha* (R, r) *bude Nashova rovnováha v celém průběhu hry), pokud budou splněné podmínky*

$$\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t} < \frac{a-d}{d-b}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t} > \frac{z-y}{w-x}. \tag{4.2}$$

Poznámka 3. Levou stranu nerovnice (4.1) označíme U_M^1, pravou stranu V_{VP}^1. Levá strana nerovnice (4.2) bude mít označení U_M^2 a pravá strana V_{VP}^2.

Důkaz. Při důkazu Věty 4 budeme postupovat od konce hry, tzv. zpětnou indukcí. Pro výhru hráče M, je nutné, aby oba hráči ve všech svých tazích volili strategie R (v případě hráče M) a r (v případě hráče F). Začneme tedy Revizí hráče F. Tento tah je hráčův poslední, což znamená, že musí volit strategii, ze které mu plyne největší užitek. Tento užitek pak pro něj přetrvává pouze do konce hry, tedy čas daný výrazem $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$. Mohou nastat dvě situace v závislosti na strategii, kterou zvolí hráč M ve své Revizi:

(I) Hráč M zvolí v Revizi strategii R.

(II) Hráč M zvolí v Revizi strategii S.

V prvním případě (I) je pro hráče F nejlepší reakce strategie r a v druhém případě (II) strategie s. Z obou těchto voleb má největší možný užitek. Víme tedy, že hráč F se svojí Revizí přizpůsobí Revizi hráče M.

Nyní nalezneme podmínku pro Revizi hráče M. Potřebujeme, aby hráč M volil ve své Revizi strategii R. Opět můžeme rozdělit na dva případy v závislosti na simultánním tahu hráče F:

(I) Hráč F zvolí v simultánním tahu strategii r.

(II) Hráč F zvolí v simultánním tahu strategii s.

Pokud nastane situace (I), nejlepší reakce hráče M je zahrát strategii R a to z toho důvodu, že F v Revizi zahraje také r. Tím je zajištěno, že hráč M bude mít až do konce hry užitek a, který je podle nerovnice (2.4.1) z kapitoly 2.4.1 vždy větší než jakýkoliv jiný. V případě že nastane situace (II), musí být splněna následující nerovnice, aby se hráči M vyplatilo zahrát strategii R, tj. celkový součet užitků, které hráč má ze strategie R, násobených časem, ve kterém přetrvávají, musí být větší, než celkový součet užitků násobených časem, ve kterém přetrvávají, jež hráči plynou ze strategie S.

$$\begin{aligned} & b\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + b(L-K) + b\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + a\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t > \\ & d\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + d(L-K) + d\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + d\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.3}$$

Jednotlivé členy nerovnice (4.3) znamenají vždy nějaký časový úsek hry. Integrál $\int_0^K M(t)\mathrm{d}t$ udává čas po Revizi hráče M, $L-K$ je doba od času K do času L, $\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t$ je doba od času L do času, kdy hráč F provede Revizi. Nakonec intergrál $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$ udává čas po Revizi hráče F. V těchto časech potom přetrvávají užitky ze zvolených strategií obou hráčů. Například v čase $\int_0^K M(t)\mathrm{d}t$ přetrvává pro hráče M užitek b, který odpovídá tomu, že hráč F zvolil v simultánním tahu strategii s a hráč M zahrál v Revizi strategii R.

Nerovnici (4.3) můžeme dále upravit.

$$(b-d)\left(\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + (L-K) + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t\right) > (d-a)\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

Vydělíme nerovnici (4.4) členy $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$ a $(b-d)$. Protože $(b-d)$ je záporný, musíme zároveň zaměnit znaménko nerovnosti.

$$\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t} < \frac{d-a}{b-d} \tag{4.5}$$

Pokud už jen rozšíříme zlomek na pravé straně nerovice (4.5) hodnotou -1, dostáváme tvar (4.1) uvedený v dokazované větě, který je názornější, protože na jedné straně obsahuje pouze hodnoty závislé na parametrech K a L a na straně druhé zase jen hodnoty užitků a, b a d.

Nakonec musíme zajistit, aby oba hráči volili v simultánním tahu strategii R, popřípadě r. Nejprve vyšetříme simultánní tah hráče F. Znovu se nám tato situace rozpadne na dvě části:

(I) Hráč M zvolí v simultánním tahu strategii R.

(II) Hráč M zvolí v simultánním tahu strategii S.

V prvním případě (I) je pro hráče F vždy nejlepší zvolit strategii r, neboť získá po celou dobu do své Revize užitek w, který je dle nerovnic (2.4.1) větší než x. Pokud nastane situace (II), musí být splněna následující nerovnice, aby hráč F zahrál strategii r.

$$y\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t + w\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + w(L-K) + w\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t > \\ z\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t + x\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + x(L-K) + x\int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

Čas po Revizi hráče F daný integrálem $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$ už neuvažujeme, protože člen obsahující tento integrál by byl na obou stranách nerovnice (4.6) stejný. Tuto nerovnici (4.6) můžeme stejnými algebraickými úpravami dostat do požadovaného tvaru (4.2), který je uvedený v dokazované větě.

Stejným způsobem zjistíme podmínku pro to, aby hráč M volil v simultánním tahu strategii R. Tentokrát nás bude ale zajímat jen čas do Revize hráče M, který je daný integrálem $\int_0^K (1-M((t))\mathrm{d}t$. Pokud budeme předpokládat, že hráč F v simultánním tahu zahraje strategii r, stačí pouze porovnat jaký bude mít ve zmíněném čase hráč M užitek ze zvolení strategie R, což je užitek a, a ze zvolení strategie S, což je užitek c. Dle nerovnic (2.4.1) je zřejmé, že $a > c$, hráč M tedy bude volit strategii R v simultánním tahu pokud bude splněná podmínka pro simultánní tah hráče F označená (4.2).

□

Věta 5. *Uvažujeme scénář Jestřábi a holubice. Hráč M vyhraje hru (tj. rovnováha (R, s) bude Nashova rovnováha v celém průběhu hry), pokud budou splněné podmínky*

$$\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t} < \frac{b-c}{c-a}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t} > \frac{y-z}{x-w}. \tag{4.8}$$

Poznámka 4. Levou stranu nerovnice (4.7) označíme U_M^1, pravou stranu V_{JH}^1. Levá strana nerovnice (4.8) bude mít označení U_M^2 a pravá strana V_{JH}^2.

Důkaz. Důkaz bude provedený stejným způsobem jako pro Větu 4. □

4.3.1 Jiný způsob vyjádření podmínky výhry

V některých případech mohou být Revizní funkce složité, těžko integrovatelné nebo je neznáme přesně. Z toho důvodu jsme našli jiný ekvivalentní tvar podmínky výhry hráče M, který využívá pouze znalosti parametrů K a L a středních hodnot pravděpodobnostních rozdělení náhodného časování tahů. Následující lemma je běžně známý statistický výsledek, vysvětlený například v Kallenberg [7], z toho důvodu je zde uváděna bez důkazu.

Lemma 3. *Uvažujeme funkci $M(t)$ z Definice 9. Potom platí*

$$\int_0^K (1 - M(t))\mathrm{d}t = \mu_M. \tag{4.9}$$

Stejně tak uvažujeme funkci $F(t)$ z Definice 9. Potom platí

$$\int_L^1 (1 - F(t))\mathrm{d}t = \mu_F - L. \tag{4.10}$$

Věta 6. *Předpokládejme, že μ_M a μ_F jsou střední hodnoty pravděpodobnostních rozdělení náhodného časování tahů hráčů M a F. Potom budou podmínky výhry hráče M ve tvaru*

$$\frac{\mu_F - \mu_M}{1 - \mu_F} < V_i^1 \qquad i = \{VP, JH\}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\mu_F - \mu_M}{\mu_M} > V_i^2 \qquad i = \{VP, JH\}. \tag{4.12}$$

Důkaz. Abychom mohli aplikovat předchozí Lemma 3 na výraz U_M^1 a U_M^2, je nutné upravit integrály $\int_0^K M(t)\mathrm{d}t$ a $\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t$ použitím vzorců pro linearitu a aditivitu určitých integrálů.

$$\int_0^K M(t)\mathrm{d}t = \int_0^K (M(t) + 1 - 1)\mathrm{d}t = \int_0^K 1\mathrm{d}t - \int_0^K (1 - M(t))\mathrm{d}t,$$

$$\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t = \int_L^1 (F(t) + 1 - 1)\mathrm{d}t = \int_L^1 1\mathrm{d}t - \int_L^1 (1 - F(t))\mathrm{d}t.$$

Užitím Lemmatu 3 dostáváme

$$\int_0^K M(t)\mathrm{d}t = K - \mu_M,$$

$$\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t = 1 - \mu_F.$$

Po dosazení za integrály do podmínek výhry hráče M máme

$$\frac{K - \mu_M + \mu_F - L + L - K}{1 - \mu_F} = \frac{\mu_F - \mu_M}{1 - \mu_F} < V_i^1 \qquad i = \{VP, JH\},$$

$$\frac{K - \mu_M + \mu_F - L + l - K}{\mu_M} = \frac{\mu_F - \mu_M}{\mu_M} > V_i^2 \qquad i = \{VP, JH\},$$

což jsou přesně dokazované nerovnice (4.11) a (4.12). □

4.3.2 Výměna pořadí hráčů

Doposud jsme předpokládali, že hráč M má možnost opakovat tah dříve než hráč F. Nyní budeme předpokládat opačné pořadí hráčů.

Poznámka 5. Můžeme také uvažovat, že hráč F bude mít možnost provést Revizi jako první. Revizní funkce jsou v tomto případě

$$F(t) : [0,1] \to [0,1], F(0) = 0, F(K) = 1,$$
$$M(t) : [0,1] \to [0,1], M(L) = 0, M(1) = 1.$$

Podmínky výhry hráče F jsou ve stejném tvaru, pouze jsou použity příslušné Revizní funkce a užitky. Hráč F vyhraje, tj. jeho preferovaná rovnováha bude Nashovou rovnováhou v celém průběhu hry, pokud bude splněno, že

$$\frac{\int_0^K F(t)\mathrm{d}t + (L - K) + \int_L^1 (1 - M(t))\mathrm{d}t}{\int_L^1 M(t)\mathrm{d}t} < W_i^1 \qquad i = \{VP, JH\}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\int_0^K F(t)\mathrm{d}t + (L-K) + \int_L^1 (1-M(t))\mathrm{d}t}{\int_0^K (1-F(t))\mathrm{d}t} > W_i^2 \qquad i = \{VP, JH\}. \quad (4.14)$$

Levou stranu nerovnice (4.13) označíme jako U_F^1 a levou stranu nerovnice (4.14) jako U_F^2. Podmínku výhry můžeme vyjádřit i ve tvaru s využitím středních hodnot pravděpodobnostních rozdělení náhodného časování tahů.

$$\frac{\mu_M - \mu_F}{1-\mu_M} < W_i^1 \qquad i = \{VP, JH\},$$
$$\frac{\mu_M - \mu_F}{\mu_F} > W_i^2 \qquad i = \{VP, JH\}.$$

Pro scénář Válka pohlaví je

$$W_{VP}^1 = \frac{z-w}{w-x}, \qquad W_{VP}^2 = \frac{a-c}{d-b}.$$

Pro scénář Jestřábi a holubice je

$$W_{JH}^1 = \frac{y-x}{x-w}, \qquad W_{JH}^2 = \frac{b-d}{c-a}.$$

5 Příklady, závislosti na parametrech a užitcích

V této kapitole uvedeme příklady pro ilustraci výše uvedených Vět 4 a 6, které udávají podmínku výhry hráče M ve scénářích Válka pohlaví a Jestřábi a holubice. Dále prozkoumáme, jak jsou tyto podmínky výher závislé na změnách parametrů (K, L) a užitků (a, b, c, d, w, x, y, z).

5.1 Ilustrační příklady

Uvedeme zde dva příklady. V prvním příkladu využijeme pro výpočet Větu 4, ve druhém použijeme zjednodušsené tvary těchto podmínek z Věty 6.

Příklad 3. Uvažujeme scénář Válka pohlaví a užitky zvolíme následovně:

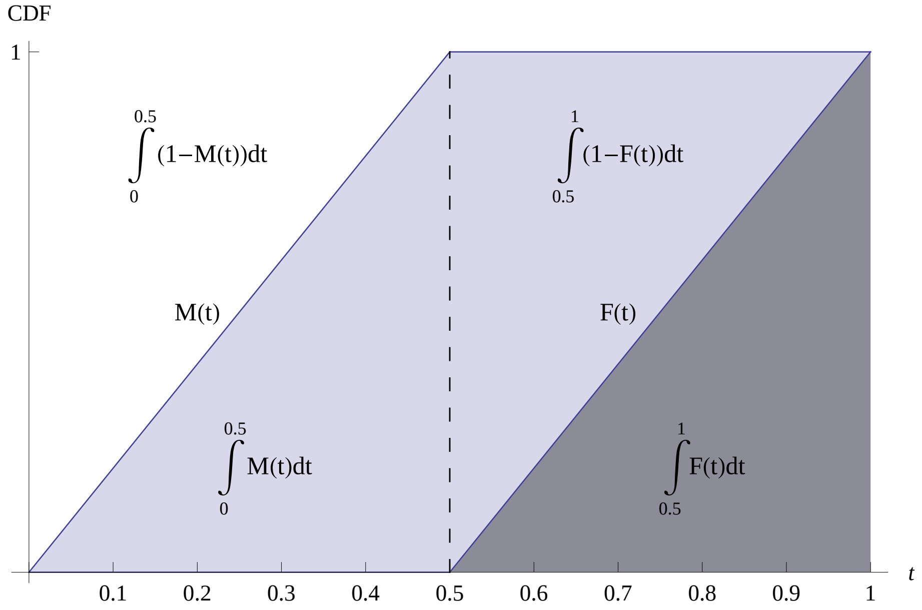
		F	
		a	b
M	A	2,1	0,0
	B	0,0	1,2

Parametry K a L zvolíme tak, že $K = L = 0,5$. Revizní funkce jsou distribuční funkce rovnoměrného rozdělení znázorněné na Obrázku 5.1:

$$M(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } t \leq 0 \\ 2t & \text{když } t \in (0; 0,5) \\ 1 & \text{když } t \geq 0,5 \end{cases},$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } t \leq 0,5 \\ 2t - 1 & \text{když } t \in (0,5; 1) \\ 1 & \text{když } t \geq 1 \end{cases}.$$

Aby hráč M vyhrál, musí být splněné obě dvě podmínky, (4.1) i (4.2), které udává Věta 4. Vypočteme tedy hodnoty výrazů U_M^1, U_M^2, V_{VP}^1 a V_{VP}^2 a porovnáme.



Obrázek 5.1: Revizní funkce použité v příkladu 3

$$U_M^1 = \frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t} = \frac{0,25+0,25+0}{0,25} = 2$$

$$V_{VP} = \frac{a-d}{d-b} = \frac{2-1}{1-0} = 1$$

V tomto případě je $U_M^1 > V_{VP}^1$, tudíž není splněná už první podmínka výhry (4.1) z Věty 4, která zajišťuje, aby hráč M ve své Revizi zvolil strategii R. Hráč M nevyhrává tuto hru.

Obdobný příklad můžeme ukázat také pro druhý zpracovávaný scénář.

Příklad 4. Uvažujeme scénář Jestřábi a holubice a užitky zvolíme následovně:

		F	
		a	b
M	A	0,0	5,1
	B	1,5	0,0

Zvolíme $K = 0,4$ a $L = 0,6$. Revizní funkce v tomto případě neznáme. Známe pouze střední hodnoty pravděpodobnostních rozdělení Revizí, a to $\mu_M = 0,1$ a $\mu_F = 0,7$.

Vypočteme zjednodušené U_M^1 a V_{JH}^1 a zjistíme, zda je splněná podmínka (4.11), kterou udává Věta 6.

$$U_M^1 = \frac{\mu_F - \mu_M}{1 - \mu_F} = \frac{0,7 - 0,1}{1 - 0,7} = 2$$

$$V_{JH}^1 = \frac{b - c}{c - a} = \frac{5 - 1}{1 - 0} = 4$$

Máme $U_M^1 < V_{JH}^1$, podmínka pro revizi hráče M je splněná. Nyní zjistíme, zda je splněná i druhá podmínka (4.8) z Věty 6.

$$U_M^2 = \frac{\mu_F - \mu_M}{\mu_M} = \frac{0,7 - 0,1}{0,1} = 6$$

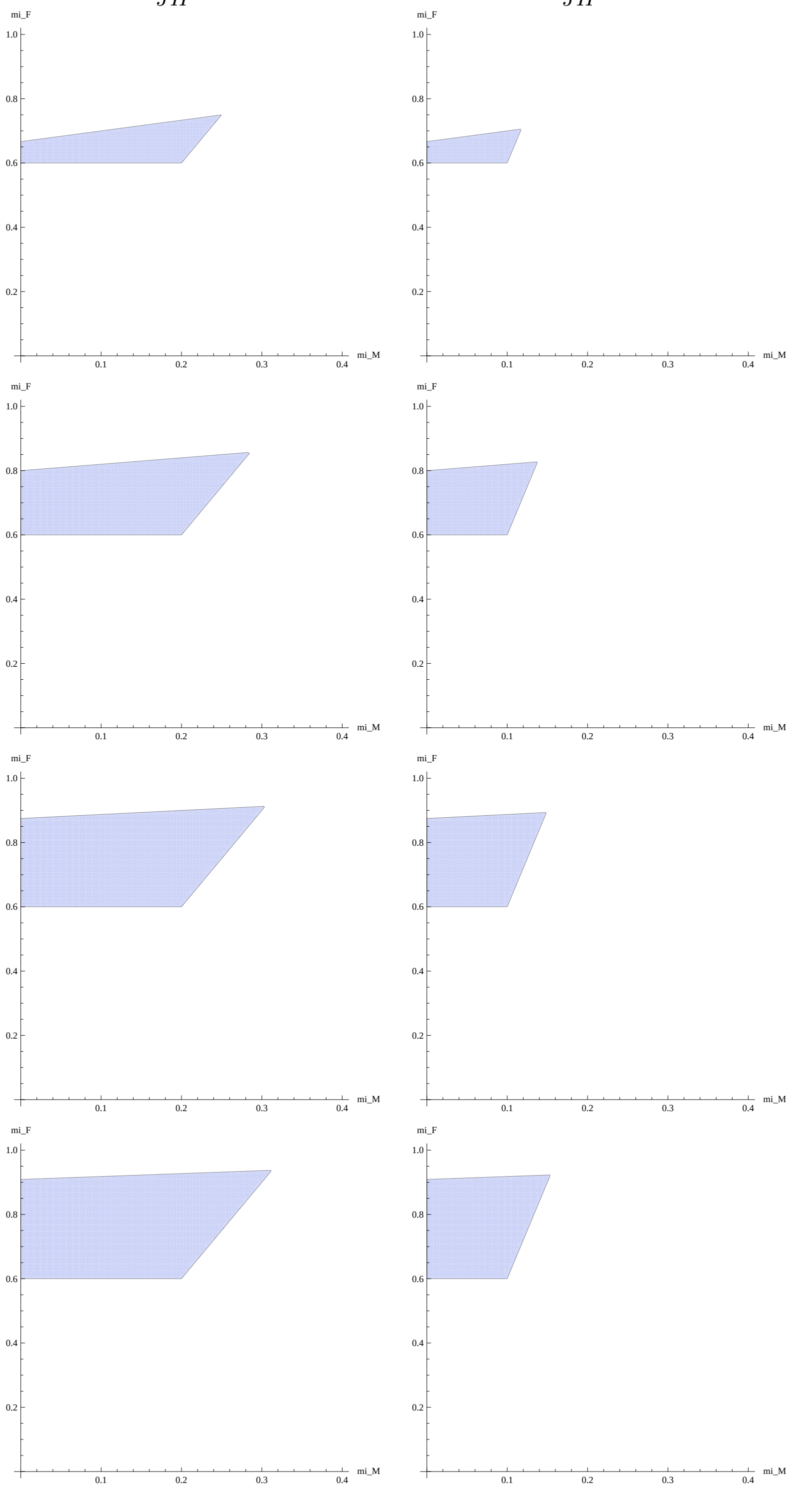
$$V_{JH}^2 = \frac{y - z}{x - w} = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5$$

Druhá podmínka výhry je v tomto příkladě také splněná, můžeme říct, ře hráč vyhrává hru. Jeho preferovaná rovnováha (R, s) bude Nashovou rovnováhou v celém průběhu hry.

V Tabulce 4 je udělaný malý přehled závislosti střední hodnoty μ_F na střední hodnotě μ_M při některých hodnotách pravých stran podmínek výhry V_{JH}^1 a V_{JH}^2. Vyznačená oblast obsahuje hodnoty μ_M a μ_F, při kterých budou podmínky výhry hráče, které jsou zavedené ve Větě 6. Obrázek v řádce $V_{JH}^1 = 4$ a sloupci $V_{JH}^2 = 5$ se vztahuje přímo k Příkladu 4.

V Příkladu 3 není splněná první podmínka výhry (4.1) z Věty 4. Tento fakt můžeme ovlivnit změnou jednotlivých parametrů a užitků, což je náplň další podkapitoly.

$V^2_{JH} = 2$ $V^2_{JH} = 5$



$V^1_{JH} = 2$

$V^1_{JH} = 4$

$V^1_{JH} = 7$

$V^1_{JH} = 10$

Tabulka 5.1: Oblast výběru μ_M a μ_F, aby zůstaly splněné obě podmínky výhry za daných hodnot pravých stran V^1_{JH} a V^2_{JH}

5.2 Závislost podmínek výhry

V podmínkách výhry hráče figuruje více užitků (a, b, c, d, w, x, y, z) a parametrů (K, L), jejichž zvětšováním nebo zmenšováním můžeme ovlivňovat výsledek hry. V této části práce popíšeme jak můžeme šanci hráče na výhru zvýšit změnou hodnoty vždy pouze jednoho užitku nebo parametru.

Nejprve vyřešíme první podmínku, tj. podmínka pro Revizi prvního hráče (4.1), (4.8) a (4.13). Levé strany těchto nerovnic označené U_M^1 a U_F^1 jsou vždy pro oba scénáře stejné. Rozdíl pro hráče je pouze ve výměně příslušných Revizních funkcí.

Lemma 4. *Výraz U_M^1, popřípadě U_F^1, se zmenšuje s klesajícím* L.

Důkaz. Provedeme důkaz pouze pro výraz U_M^1. Důkaz pro U_F^1 by byl prováděný stejným způsobem, pouze se zaměněnými Revizními funkcemi. Výraz U_M^1 musíme zderivovat podle parametru L.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}\left(\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1 - F(t))\mathrm{d}t + (L - K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t}\right) = \frac{1 - L + F(L)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t}$$

A protože z Definice 9 víme, že $F(L) = 0$, můžeme derivaci výrazu U_M dále upravit na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}\left(\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1 - F(t))\mathrm{d}t + (L - K)}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t}\right) = \frac{1 - L}{\int_L^1 F(t)\mathrm{d}t}.$$

Derivace U_M^1 podle L je vždy kladná, protože máme zavedeno, že $L < 1$. Výraz U_M^1 se tedy zmenšuje s klesajícím L. □

Poznámka 6. O tom, jak se výrazy U_M^1 a U_F^1 chovají v závislosti na K nemůžeme obecně rozhodnout. Derivace obou výrazů podle K se rovná 0.

Pravé strany nerovnic (4.1), (4.7), (4.13), jsou postupně označeny V_{VP}^1, V_{JH}^1, W_{VP}^1 a W_{JH}^1. Při snaze o zvýšení šance na výhru je nutné tyto zlomky zvětšit. Následující lemma demonstruje, jaký vliv mají užitky vystupující v jednotlivých zlomcích na první podmínku výhry.

Lemma 5. *(a)* V^1_{VP} *je rostoucí v* a, b, *klesající v* d.

(b) V^1_{JH} *je rostoucí v* b, a, *klesající v* c.

(c) W^1_{VP} *je rostoucí v* z, x, *klesající v* w.

(d) W^1_{JH} *je rostoucí v* y, w, *klesající v* x.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro část (a), pro ostatní části stačí v důkazu pouze zaměnit odpovídající si užitky. Abychom dokázali monotónnost výrazu V^1_{VP} je nutné tento výraz zderivovat postupně podle všech obsažených užitků.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{a-d}{d-b}\right) = \frac{1}{d-b}$$

Derivace V^1_{VP} podle proměnné a je vždy kladná ($d > b$), tudíž výraz V^1_{VP} je rostoucí v a.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\frac{a-d}{d-b}\right) = \frac{a-d}{(d-b)^2}$$

Derivace výrazu podle b je také vždy kladná ($a > d > b$), V^1_{VP} je rostoucí v b.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(\frac{a-d}{d-b}\right) = -\frac{a-b}{(d-b)^2}$$

Derivace výrazu V^1_{VP} podle proměnné d je vždy záporná ($a > d > b$), proto je V^1_{VP} klesající v d. □

Nyní se dostáváme ke druhé podmínce výhry, tj. podmínka pro simultánní tah hráče F. Rozbor provedeme stejným způsobem jako pro první podmínku. Jediný rozdíl je v tom, že nyní chceme, aby levé strany nerovnic (4.2), (4.8) a (4.14) označené U^2_M a U^2_F byly co největší a naopak pravé strany těchto nerovnic V^2_{VP}, V^2_{JH}, W^2_{VP} a W^2_{JH} zase co nejmenší.

Lemma 6. *Výraz* U^2_M*, popřípadě* U^2_F*, se zvětšuje s rostoucím* K *i* L*.*

Důkaz. Důkaz opět provedem jen pro U_M^2, pro důkaz druhého výrazu stačí zaměnit Revizní funkce.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K}\left(\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t}\right) = \frac{(M(K)-1)\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t}{(\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t)^2} +$$
$$+\frac{-(\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K))(K-M(K))}{(\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t)^2}$$

Pokud dosadíme za $M(K) = 1$ (Definice 9), můžeme derivaci ještě zjednodušit.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K}\left(\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t}\right) =$$
$$\frac{-(\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K))(K-1)}{(\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t)^2}$$

Máme zavedené, že $K < 1$ a $L \geq K$, takže derivace výrazu U_M^2 podle K je vždy kladná. U_M^2 je rostoucí v K.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}\left(\frac{\int_0^K M(t)\mathrm{d}t + \int_L^1 (1-F(t))\mathrm{d}t + (L-K)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t}\right) = \frac{1-L+F(L)}{\int_0^K (1-M(t))\mathrm{d}t}$$

Za $F(L)$ dosadíme 0 dle Definice 9 a víme, že $L < 1$, potom je derivace U_M^2 podle L vždy kladná a tento výraz je rostoucí v L. □

Lemma 7. *(a)* V_{VP}^2 *je rostoucí v* z, x, *klesající v* y, w.

(b) V_{JH}^2 *je rostoucí v* y, w, *klesající v* z, x.

(c) W_{VP}^2 *je rostoucí v* a, b, *klesající v* c, d.

(d) W_{JH}^2 *je rostoucí v* b, a, *klesající v* d, c.

Důkaz. Provedeme důkaz pouze pro část (a), pro ostatní části by byl analogický. Abychom zjistili, jak se bude měnit výraz V_{VP}^2 v závislosti na změnách užitků, musíme ho postupně zderivovat podle všech užitků, které se v něm nacházejí.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z-y}{w-x}\right) = \frac{1}{w-x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z-y}{w-x}\right) = \frac{z-y}{(w-x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{z-y}{w-x}\right) = \frac{-1}{w-x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(\frac{z-y}{w-x}\right) = -\frac{z-y}{(w-x)^2}$$

Z nerovnic pro užitky (2.4.1) vyplývá, že derivace podle z i podle x je vždy kladná. Výraz V_{VP}^2 je rostoucí v z a x. Zatímco derivace podle y a w je vždy záporná, proto je v_{VP}^2 klesající v y a w.

□

5.2.1 Shrnutí

Následně ve dvou tabulkách přehledně shrneme výsledky z Lemma 4, 5, 6 a 7. Části tabulek pro první podmínku říkají, co je třeba udělat, abychom zmenšili rozdíl $U_M^1 - V_i^1$ v případě, kdy Revizi provádí první hráč M. Pro opačný případ zmenšujeme rozdíl $U_F^1 - W_i^1$. Rozdíly v uvedených tvarech vychází z první podmínky výhry, která je ve tvaru $U_M^1 < V_i^1$, respektive $U_F^1 < W_i^1$, kde $i = \{VP, JH\}$. Části tabulek pro druhou podmínku zase dávají návod, jak zvětšit rozdíl $U_i^2 - V_i^2$ (v případě, že první provádí Revizi hráč M), respektive $U_F^2 - W_i^2$ (v případě, že první provádí Revizi hráč F). Rozdíly opět vychází z podmínky výhry, druhá podmínka je ve tvaru $U_M^2 > V_i^2$, případně $U_F^2 > W_i^2$, kde opět $i = \{VP, JH\}$.

Scénář	Válka pohlaví		Jestřábi a holubice	
Podmínka	1. podmínka	2. podmínka	1. podmínka	2. podmínka
a	$\uparrow$	$\times$	$\uparrow$	$\times$
b	$\uparrow$	$\times$	$\uparrow$	$\times$
c	nemá vliv	$\times$	$\downarrow$	$\times$
a	$\downarrow$	$\times$	nemá vliv	$\times$
w	$\times$	$\uparrow$	$\times$	$\downarrow$
x	$\times$	$\downarrow$	$\times$	$\uparrow$
y	$\times$	$\uparrow$	$\times$	$\downarrow$
z	$\times$	$\downarrow$	$\times$	$\uparrow$
K	nelze ob. určit	$\uparrow$	nelze ob. určit	$\uparrow$
L	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Tabulka 5.2: Závislost podmínek výhry hráče M na užitcích a parametrech

Scénář	Válka pohlaví		Jestřábi a holubice	
Podmínka	1. podmínka	2. podmínka	1. podmínka	2. podmínka
a	$\times$	$\downarrow$	$\times$	$\downarrow$
b	$\times$	$\uparrow$	$\times$	$\downarrow$
c	$\times$	$\uparrow$	$\times$	$\uparrow$
d	$\times$	$\uparrow$	$\times$	$\uparrow$
w	$\downarrow$	$\times$	$\uparrow$	$\times$
x	$\uparrow$	$\times$	$\downarrow$	$\times$
y	nemá vliv	$\times$	$\uparrow$	$\times$
z	$\uparrow$	$\times$	nemá vliv	$\times$
K	nelze ob. určit	$\uparrow$	nelze ob. určit	$\uparrow$
L	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Tabulka 5.3: Závislost podmínek výhry hráče F na užitcích a parametrech

Vysvětlivky pro Tabulky 5.2 a 5.3:
$\uparrow$ - je třeba zvýšit hodnotu parametru nebo užitku,
$\downarrow$ - je třeba snížit hodnotu parametru nebo užitku,
$\times$ - parametr nebo užitek se v podmínce nevyskytuje.

6 Závěr

V počátku práce jsme vytvořili teoretické zázemí a zavedli všechny důležité pojmy jako jsou statická hra, užitek, rovnováha a Nashova rovnováha. Uvedli jsme základní předpoklady teorie her a zmínili jsme Nashovu větu, která nám zaručuje existenci rovnováhy. Zaměřili jsme se výhradně na scénáře Válka pohlaví a Jestřábi a holubice, protože v obou scénářích nalézáme problém výběru jednoznačné rovnováhy. Oba tyto scénáře jsme důkladně popsali a ukázali jejich konkrétní příklady.

Uvedli jsme teoretický základ ke klasickým dynamickým hrám, definovali jsme zde Nashovu rovnováhu vzhledem k podhrám a zmínili jsme věty existence a jednoznačnosti Nashových rovnováh. Definovali jsem výhru hráče v dynamické hře tak, že preferovaná rovnováha hráče musí být Nashovou rovnováhou vzhledem k podhrám. Následně jsme ukázali, že zde platí výhoda pořadí. Začínající hráč vždy získává preferovanou rovnováhu. Tímto jsme získali pouze jedinou Nashovu rovnováhu jako řešení hry, která je optimální pro začínajícího hráče.

V další části práce jsme se věnovali dynamickým hrám s náhodným časováním tahů, které je zadané pravděpodobnostním rozdělením. Uvažovali jsme pouze případ, kdy se pravděpodobnostní rozdělení pro jednotlivé hráče nepřekrývá. První opakování tahu jsme označili jako Revizi. Distribuční funkce pravděpodobnostních rozdělení náhodného časování Revizí jsme definovali jako Revizní funkce. Opět jsme hledali podmínku výhry hráče za předpokladu, že hráč vyhrává, pokud je jeho preferovaná rovnováha Nashovou rovnováhou v celém průběhu hry. Tyto podmínky jsme našli využitím metody zpětné indukce a určili jsme je pro oba scénáře, ale i pro obě možnosti začínajícího hráče z pohledu Revizí (jako první provádí Revizi hráč M nebo naopak F). Podmínky výhry v základním tvaru obsahují určité integrály z Revizních funkcí, a proto jsme našli jednodušší zápis podmínek, kde se vyskytují pouze střední hodnoty pravděpodobnostních rozdělení Revizí. Pro ilustraci uvedených podmínek výhry jsme uvedli příklady, kde jeden demonstruje původní podmínky výhry a druhý ty upravené. V poslední řadě jsme prozkoumali závislost podmínek výhry na jednotlivých parametrech hry (K, L) a užitcích (a, b, c, d, w, x, y, z). Řešili jsme tyto závislosti za předpokladu, že se mění vždy pouze jeden parametr nebo užitek a ostatní zůstávají stejné. Nakonec je uvedeno shrnutí těchto závislostí v tabulkách pro oba scénáře.

V práci jsme tedy nastínili roli časování v teorii her, kdy převedením statické hry, která má více rovnováh, na dynamickou hru dosáhneme jednoznačnosti rovnováhy. Dále jsme našli podmínky výher jednotlivých hráčů v obou zkoumaných scénářích ve dvou typech dynamických her, klasické dynamické hře a dynamické hře s náhodným časováním tahů. Tato práce by mohla být rozšířena o další typy dynamických her s náhodným časováním tahů, například vícekolové hry (proběhne více kol revizí) nebo hry s překrávajícím se pravděpodobnostním rozdělením revizí.

Literatura

[1] *J. N. Webb*, **Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution**, Springer, 2007.

[2] *D. Fudenberg, J, Tirole*, **Game Theory**, The MIT Press, 1991.

[3] *J. Libich, P. Stehlík*, **Monetary Policy Facing Fiscal Indiscipline under Generalized Timing of Actions**, Journal of Institutional and Theoretical Economics, 168(3), 393-431, 2012.

[4] *I. Cho, A. Matsui*, **Time Consistency in Alternating Move Policy Games**, The Japanese Economic Review, 56(3), 273-294, 2005.

[5] *R. Lagunoff, A. Matsui*, **Asynchronous Choice in Repeated Coordination Games**, Econometrica, 65, 1467-1477, 1977.

[6] *Y. Kamada, M. Kandori*, **Revision Games**, Harvard University, 2008.

[7] *O. Kallenberg*, **Foundations of Modern Probability Series: Probability and Its Applications**, Springer, New York, 2002.