

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stochastické modely úrokových sazeb

Plzeň, 2013

Tomáš Le Van

Místo tohoto listu bude vloženo zadání.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 20. 5. 2013

.....
Tomáš Le Van

Poděkování

Velmi rád bych zde poděkoval vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Blance Šedivé, Ph.D., za její odborné rady, vstřícný přístup a čas věnovaný při konzultacích během vedení této práce.

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je představení a použití stochastických modelů úrokových sazeb. V práci jsou uvedeny vybrané statistické a pravděpodobnostní pojmy, které se využívají ve finančním kalkulu a pomáhají porozumět významu těchto modelů. Dále jsou charakterizovány čtyři základní modely okamžitých spotových úrokových sazeb, pro které jsou uvedeny odhady jejich parametrů. Praktická část práce je zaměřena na aplikaci těchto modelů na reálná data. Aplikace modelů spočívá v použití modelů pro měsíční predikci mezibankovních úrokových sazeb PRIBOR a EURIBOR. Pro spočtené bodové predikce jsou zobrazeny pásy spolehlivosti. Kvalita těchto predikcí je měřena vybranými kritérii.

Klíčová slova: stochastické modely úrokových sazeb, spotová úroková sazba, Wienerův proces, PRIBOR, EURIBOR, Mertonův model, Vašíčkův model, Cox-Ingersoll-Rossův model, Dothanův model

Abstract

The theme of this bachelor thesis is to introduce principles and usage of stochastic models of interest rates. The thesis presents selected statistical and probabilistic concepts used in the financial calculus to understand the meaning of these models. In addition, four basic models of instantaneous spot interest rates are characterized and the estimations of their parameters are calculated. The practical part is focused on the application of these models to real data. Application of these models lie in the use of models for monthly predictions of interbank interest rates PRIBOR and EURIBOR. Confidence belts are displayed for the calculated point predictions and the quality of these predictions is measured by selected criteria.

Keywords: stochastic models of interest rates, spot interest rate, Wiener process, PRIBOR, EURIBOR, Merton model, Vasicek model, Cox-Ingersoll-Ross model, Dothan model

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 1 |
| 1 Teoretická část | 2 |
| 1.1 Základní pravděpodobnostní pojmy | 2 |
| 1.2 Vztahy mezi úrokovými sazbami a bondy | 5 |
| 1.3 Obecný jedno-faktorový model | 7 |
| 2 Představení modelů | 9 |
| 2.1 Mertonův model | 9 |
| 2.2 Vašíčkův model | 11 |
| 2.3 Cox-Ingersoll-Rossův model (CIR) | 13 |
| 2.4 Dothanův model | 14 |
| 2.5 Vlastnosti představených modelů | 16 |
| 3 Praktická část | 17 |
| 3.1 Představení dat | 17 |
| 3.1.1 PRIBOR | 17 |
| 3.1.2 EURIBOR | 18 |
| 3.2 Kalibrace modelů | 19 |
| 3.2.1 Kalibrace modelu Merton | 20 |
| 3.2.2 Kalibrace modelu Vašíček | 21 |
| 3.2.3 Kalibrace modelu CIR | 22 |
| 3.2.4 Kalibrace modelu Dothan | 23 |
| 3.2.5 Testování odhadů | 23 |
| 3.3 Kritéria kvality modelů | 25 |
| 3.4 Model konstantní hodnoty | 25 |
| 3.5 Výsledky modelování | 25 |
| 3.5.1 Měsíční predikce PRIBOR | 25 |
| 3.5.2 Měsíční predikce EURIBOR | 29 |
| 3.5.3 Shrnutí výsledků | 31 |
| Závěr | 33 |
| Literatura a zdroje | 34 |
| A Přílohy | i |
| A.1 Grafy predikcí PRIBOR 2012 | i |
| A.2 Grafy predikcí EURIBOR 2012 | ii |

Seznam obrázků

| | |
|---|-----|
| 1.1.1 Realizace Wienerova procesu a detail jeho trajektorie. | 4 |
| 2.1.1 Ukázka simulace úrokových sazeb Mertonovým modelem s pevně zadanými parametry | 10 |
| 2.2.1 Ukázka simulace úrokových sazeb Vašíčkovým modelem s pevně zadanými parametry | 12 |
| 2.3.1 Ukázka simulace úrokových sazeb CIR modelem s pevně zadanými parametry | 14 |
| 2.4.1 Ukázka simulace úrokových sazeb Dothanovým modelem s pevně zadanými parametry | 15 |
| 2.5.1 Ukázka histogramů pro simulačně generované scénáře proložené hustotou daného rozdělení (<i>Merton–normální, Vašíček–normální, CIR–chí-kvadrát, Dothan–lognormální</i>) | 16 |
| 3.1.1 Historie vybraných úrokových měř PRIBOR 2000-2012 | 18 |
| 3.1.2 Historie vybraných úrokových měř EURIBOR 2000-2012 | 19 |
| 3.2.1 Ukázka vývoje odhadu parametrů u jednotlivých modelů na simulačních datech | 24 |
| 3.5.1 <i>PRIBOR3m</i> : závislost kritérií na počtu měsíců k , kde pro názvy modelů jsou použity zkratky <i>M</i> -Merton, <i>V</i> -Vašíček, <i>C</i> -CIR, <i>D</i> -Dothan a <i>N</i> -Naivní | 27 |
| 3.5.2 Ukázka predikce <i>PRIBOR3m</i> 2012 Dothanovým modelem | 28 |
| 3.5.3 <i>EURIBOR6m</i> : závislost kritérií na počtu měsíců k , kde pro názvy modelů jsou použity zkratky <i>M</i> -Merton, <i>V</i> -Vašíček, <i>C</i> -CIR, <i>D</i> -Dothan a <i>N</i> -Naivní | 30 |
| 3.5.4 Ukázka predikce <i>EURIBOR6m</i> 2012 Dothanovým modelem | 31 |
| A.1.1 Graf měsíčních predikcí modelem CIR pro data <i>PRIBOR1d</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | i |
| A.1.2 Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data <i>PRIBOR14d</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | i |
| A.1.3 Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data <i>PRIBOR3m</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | ii |
| A.2.1 Graf měsíčních predikcí modelem Vašíček pro data <i>EURIBOR1d</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | ii |
| A.2.2 Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data <i>EURIBOR6m</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | iii |
| A.2.3 Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data <i>PRIBOR1r</i> 2012, která v době predikce nejsou známa. | iii |

Seznam tabulek

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1.1 | Hodnoty parametrů pro simulaci Mertonovým modelem | 10 |
| 2.2.1 | Hodnoty parametrů pro simulaci Vašíčkovým modelem | 12 |
| 2.3.1 | Hodnoty parametrů pro simulaci modelem CIR | 13 |
| 2.4.1 | Hodnoty parametrů pro simulaci Dothanovým modelem | 15 |
| 2.5.1 | Souhrn vlastností představených modelů | 16 |
| 3.2.1 | Výsledek programu pro odhadování parametrů ze simulovaných dat pro $t = 200000$ | 23 |
| 3.2.2 | Vzorce pro odhad parametru sigma u jednotlivých modelů, kde funkce s značí výběrovou směrodatnou odchylku | 24 |
| 3.5.1 | Součet průměrných chyb ze všech 1440 simulací. Měřeno na datech 2007-2011 pro měsíční předpovědi a různé volby k | 26 |
| 3.5.2 | Nejoptimálnější volba modelu vzhledem k MSE, kde k značí počet měsíců hist. dat pro kalibraci modelu a pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan | 27 |
| 3.5.3 | Výsledky simulací na datech PRIBOR 2012, kde skóre značí počty lepších predikcí pro naivní model a vybraný stochastický model. \sum daného kritéria značí součet chyb ve všech 12 predikcích. | 28 |
| 3.5.4 | Součet průměrných chyb z 1440 simulací. Měřeno na datech 2007-2011 Euribor. | 29 |
| 3.5.5 | Nejoptimálnější volba ve smyslu MSE, kde k značí počet měsíců hist. dat pro kalibraci modelu a pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan | 30 |
| 3.5.6 | Výsledky simulací na datech EURIBOR 2012, kde skóre značí počty lepších predikcí pro naivní model a vybraný stochastický model. \sum daného kritéria značí součet chyb ve všech 12 predikcích. | 31 |

Úvod

V reálném světě je potřeba vše hodnotit, měřit nebo oceňovat. Úroková sazba je jedním z nástrojů, jak měřit hodnotu peněz v závislosti na čase. Běžně se veřejnost dostává do styku s úrokovými sazbami u půjček a úvěrů. V této práci se pracuje převážně s referenčními hodnotami úrokových sazeb na mezibankovním trhu (např. PRIBOR - Prague InterBank Offered Rate). Tyto úrokové sazby však nejsou obchodovány přímo, ale jsou odvozeny od cen bondů obchodovaných na trhu mezibankovních depozit. Předpovídání těchto sazeb je součástí praktické části této práce.

Celá tato práce je členěna do tří stěžejních kapitol, a sice teoretické části, kapitoly představení vybraných modelů a praktické části.

První kapitola je věnována obecné teorii, která je podkladem pro praktickou část. Součástí této teoretické kapitoly jsou základní pravděpodobnostní pojmy, vybrané pojmy finanční matematiky, které pomáhají porozumět úrokovým sazbám v širších souvislostech, a v závěru je nastíněna souvislost mezi bezkupónovými dluhopisy (z angl. zero-coupon bond), úrokovými sazbami a jejich stochastickými modely. Uvedena je pouze nezbytná teorie k porozumění těmto stochastickým modelům.

Druhá hlavní kapitola této práce je věnována samotným stochastickým modelům. V této kapitole jsou představeny modely Merton, Vašíček, CIR a Dothan. Tyto modely jsou popsány a jsou uvedeny jejich základní vlastnosti a ukázkové simulace.

Praktická část se věnuje aplikaci uvedených modelů na reálná data, kdy po odhadu parametrů jsou modely použity k predikci úrokových sazeb. Cílem je porovnat vlastnosti vybraných modelů při měsíční predikci úrokových sazeb. Na závěr jsou porovnány dosažené výsledky a zmíněny výhody a nevýhody vybraných modelů. V závěru jsou dále uvedeny náměty a možnosti pokračování v této problematice.

Pro zpracování praktické části byl zvolen výpočetní software MATLAB společnosti MathWorks, který se zdá být vhodnou volbou při numerických simulacích a jehož uživatelské rozhraní je při práci přívětivé, především při psaní delších skriptů. Alternativními programovacími jazyky by mohl být program R, který je volně dostupný zdarma, nebo Mathematica společnosti Wolfram Research.

1 Teoretická část

Cílem této kapitoly je představit používané pojmy a zavést značení, které bude dále použito v praktické části při modelování úrokových sazeb. Kapitola je dle obsahu rozčleněna do tří menších celků. Nejprve jsou vybrány definice a vztahy z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, které jsou využívány při oceňování derivátů cenných papírů. Právě tato teorie je blíže představena ve druhé části této kapitoly. Následné propojení těchto oblastí matematickými formulami vytváří základ moderních matematických postupů pro oceňování finančních derivátů v teorii známé pod pojmem finanční kalkul (z angl. financial calculus), jehož součástí je obecný jedno-faktorový model, který je představen v části třetí.

1.1 Základní pravděpodobnostní pojmy

Pro zpracování této části bylo čerpáno z několika učebních textů a skript, jmenovitě z [4], [5], [6] a [8]. Tyto definice představují úvod pro zavedení pojmů, které se dále využívají ve finanční části této kapitoly.

Definice 1.1.1 *Uvažujme neprázdnou množinu Ω , potom σ -algebra \mathcal{F} se nazývá neprázdný systém podmnožin množiny Ω , který splňuje*

$$(i) A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F},$$

$$(ii) A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}. \quad \square$$

Z definice plyne, že se jedná o neprázdnou část systému všech podmnožin množiny Ω , který je navíc uzavřen vůči spočetným množinovým operacím.

Definice 1.1.2 *Dvojice (Ω, \mathcal{F}) , kde \mathcal{F} je σ -algebra podmnožin množiny Ω , se nazývá **měřitelný prostor**. \square*

Předpokládejme, že (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor. Prvky množiny Ω budeme nazývat *elementární jevy* a značit ω ; prvky σ -algebry \mathcal{F} budeme nazývat *jevy* a značit velkými písmeny ze začátku abecedy.

Definice 1.1.3 *Pravděpodobnost P je definována jako míra na \mathcal{F} , tj. P je množinová funkce na \mathcal{F} s vlastnostmi:*

$$(i) P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F};$$

$$(ii) P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0;$$

$$(iii) P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \text{ je-li } \{A_n\} \text{ posloupnost po dvou disjunktních jevů.}$$

*Trojice (Ω, \mathcal{F}, P) se nazývá **pravděpodobnostní prostor**. \square*

Z definice pravděpodobnosti vyplývá mnoho základních vlastností pravděpodobnosti, nalézt je lze ve většině učebních textů pravděpodobnosti a statistiky (např. [4] strana 8).

Definice 1.1.4 *Filtrace* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_T\}$ je systém σ -algeber takový že,

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}, \quad \text{pro každé } t \in \{0, 1, \dots, T-1\}. \quad \square$$

Filtrace \mathbb{F} je při oceňování finančních derivátů používána jako model toku informací. S rostoucím časem se tedy zvětšuje množství informací, které jsou investorovi známy. V případě finančního trhu lze tedy \mathbb{F} chápat jako vývoj dostupnosti informací o cenách finančních produktů. V našem případě lze také filtraci \mathbb{F} chápat jako rodinu $\{\mathcal{F}_t\}$ rostoucích σ -algeber na (Ω, \mathcal{F}) , $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Vlastnost, že filtrace je rostoucí, koresponduje s faktem, že informace nejsou „zapomenuty“.

Definice 1.1.5 *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a *nechť* $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se nazývá **náhodný (stochastický) proces**. □

V případě, že T je diskrétní (standardně $T = \mathbb{Z}$, nebo $T = \mathbb{N}_0$), mluvíme o procesu s diskrétním časem, nebo o časové řadě. Pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, mluvíme o procesu se spojitým časem [6].

V této práci budeme pracovat s oběma variantami, většinou při odvozování budeme předpokládat spojitě modely. Při konkrétních simulacích pak budeme pracovat s diskrétními aproximacemi.

Pro modely úrokových měr je důležitá skupina náhodných procesů, které se nazývají martingaly. Přesnou definici martingalu a jeho vlastnosti lze nalézt v [8]. Zde pouze stručně uvedeme, že *martingal* je náhodný proces X_t , pro který platí

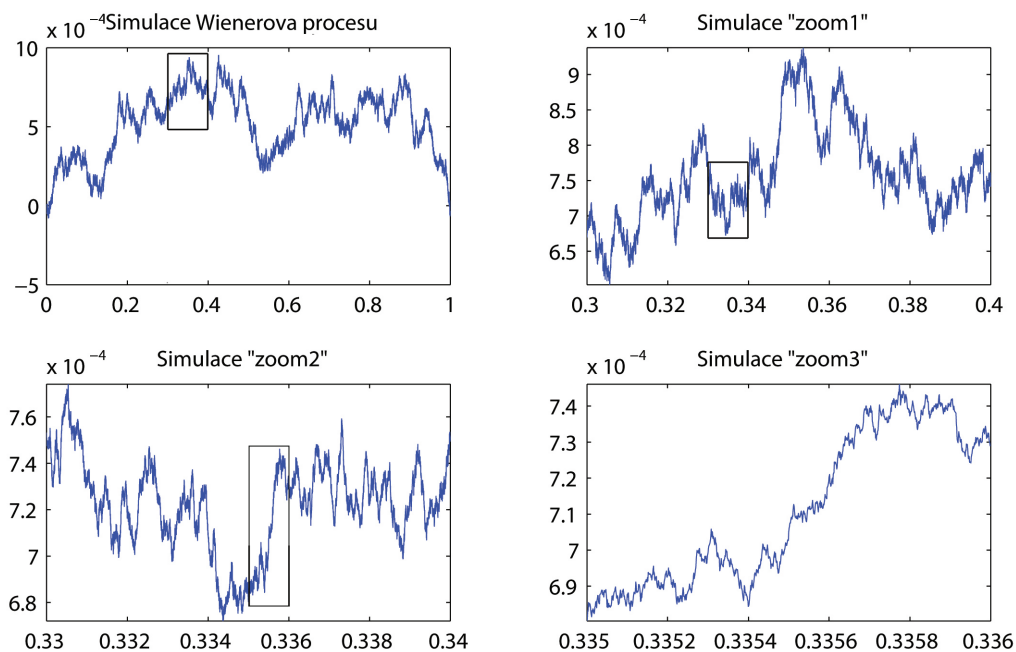
$$E \{X_{t+1} | \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t\} = X_t, \quad \forall t. \quad (1.1.1)$$

Martingal tedy reprezentuje takový náhodný proces, jehož střední hodnota podmíněná filtrací \mathcal{F}_t je rovna jeho poslední známé hodnotě, tedy hodnotě v čase t . Hrubě řečeno, martingal je takový proces, který říká, že očekávaná hodnota tohoto procesu v čase $t+1$ je rovna hodnotě v čase t , pokud nám tato hodnota je známa a je to poslední známá hodnota.

Velmi důležitým příkladem martingalu je *Wienerův proces* (někdy nazýván Brownův pohyb), jehož definice byla přejata z [8].

Definice 1.1.6 *Wienerův proces* $\{W(t), t \geq 0\}$ je *stochastický proces* pro který platí:

- (i) $(W(t) - W(s))$ je náhodná veličina $\sim N(0, t - s)$, $t, s \geq 0$,
- (ii) $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$, jsou nezávislé náhodné veličiny pro $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < \infty$,
- (iii) W má všechny trajektorie spojitě, $W(0) = 0$. □



Obrázek 1.1.1: Realizace Wienerova procesu a detail jeho trajektorie.

Z definice Wienerova procesu je zřejmé, že se jedná o všude spojitý proces, ale navzdory tomu není nikde diferencovatelný a vytváří fraktálovou strukturu (ilustrováno na obrázku 1.1.1). Wienerův proces nabude s pravděpodobností 1 všech reálných hodnot nekonečně mnohokrát [1].

Fakt, že trajektorie Wienerova procesu je všude spojitá a není nikde diferencovatelná, působí problémy při počítání s diferenciály. Tyto problémy řeší velmi propracovaná teorie stochastického počtu (z angl. stochastic calculus) a nebudeme ji zde detailně uvádět, podrobně ji lze nalézt například v [5].

Stochastické modely, které jsou předmětem této práce, jsou popisovány stochastickými diferenciálními rovnicemi. Pouze okrajově zde uvedeme základní definici stochastické diferenciální rovnice, jak ji uvádí [5].

Definice 1.1.7 *Nechť $W(t)$ je Wienerův proces, potom rovnice tvaru*

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t),$$

*kde funkce $\mu(X(t), t)$ a $\sigma(x(t), t)$ jsou dány a $X(t)$ je neznámý proces, se nazývá **Stochastická diferenciální rovnice (SDE)** odvozená od Wienerova procesu.* □

Funkce $\mu(X(t), t)$ a $\sigma(x(t), t)$ jsou v tomto pořadí nazývány *drift* a *šum*. Drift i šum mohou být konstantní, nebo závislé na čase, musí být však integrovatelné.

Pro simulace úrokových sazeb v této práci nebude většinou potřeba znát analytické řešení stochastických diferenciálních rovnic. Určité typy stochastických diferenciálních rovnic lze řešit pomocí Itôova aparátu, který je podrobně popsán ve většině publikací, jež představují stochastické modely pro úrokové sazby (např. [1], [2], [5]).

1.2 Vztahy mezi úrokovými sazbami a bondy

Tato podkapitola teoretické části se zaměřuje na základní vztahy mezi úrokovými sazbami, bondy a bankovními (spořicími) účty na finančním trhu, které vytváří základ finančního kalkulu. Zásadním předpokladem, ze kterého se zde vychází, je absence arbitráže na finančním trhu. Tuto myšlenku představili ve svém článku autoři Black and Scholes (1973), jak se uvádí v [2]. Absence arbitráže, jednoduše řečeno, znamená nemožnost investovat nulu dnes a získat v budoucnu kladnou částku s kladnou pravděpodobností. Následující vztahy a úvahy jsou zpracovány dle knih [5], [2].

Definice 1.2.1 *Nechť $B(t)$ značí hodnotu **bankovního účtu** v čase $t \geq 0$. Předpokládejme dále, že $B(0) = 1$ a zůstatek na bankovním účtě se vyvíjí dle následující diferenciální rovnice:*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1,$$

kde $r(t)$ je kladná funkce času. □

Tato definice tedy říká, že investovaná jednotka v čase 0 přináší výnos v čase t daný vztahem

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}. \quad (1.2.1)$$

Funkce $r(t)$ v definici 1.2.1 a $r(s)$ v rovnici 1.2.1, která určuje růst zůstatku na bankovním účtu, bývá nazývána *okamžitá spotová úroková míra* nebo jen krátce dle anglického „short rate“. Ve speciálním případě, kdy r je v čase neměnná, získáváme základní rovnici pro spojitě úročení s *intenzitou úročení* r ve tvaru

$$B(t) = e^{rt}. \quad (1.2.2)$$

Bankovní účet je pro nás důležitý pro stanovení hodnoty peněz v různých časových okamžicích. Aby bylo možné určit hodnotu bankovního účtu v čase t , který garantuje jednotku v čase $T > t$, je třeba zadefinovat *diskontní faktor*.

Definice 1.2.2 ***Diskontní (stochastický) faktor** $D(t, T)$ mezi dvěma časovými okamžiky t a T je hodnota v čase t , která je „ekvivalentní“ jedné jednotce v čase T a je dána vztahem*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_t^T r(s)ds}. \quad \square$$

Takto nadefinovaný diskontní faktor úzce souvisí s obligacemi (dluhopisy) s nulovým kupónem, které budeme dále označovat jako „bezkupónové“ a jsou definovány následovně:

Definice 1.2.3 ***Bezkupónový dluhopis** se splatností v čase T je kontrakt, který garantuje držiteli výplatu jedné jednotky právě v čase T . Hodnotu tohoto kontraktu v čase $t < T$ označíme $P(t, T)$ a současně tedy platí, že $P(T, T) = 1$ pro všechna T . □*

Zatímco diskontní faktor $D(t, T)$ udává „ekvivalentní množství“, které odpovídá jednotce v čase T , tak bezkupónový dluhopis $P(t, T)$ je hodnota kontraktu. V případě, kdy míra r je deterministicky určená, platí mezi $D(t, T)$ a $P(t, T)$ rovnost. Rozdíl tedy nastává v případě, kdy sazba r je náhodná, potom $D(t, T)$ je náhodná veličina, která závisí na budoucích hodnotách r , zatímco $P(t, T)$ je hodnota kontraktu, která je pevně dána v čase t . Jak uvádí literatura [2], lze na $P(t, T)$ nahlížet jako na odhad náhodné proměnné $D(t, T)$.

Definice 1.2.4 *Spotová úroková míra* v čase t pro dluhopis s expirací v čase T , kterou označíme $R(t, T)$, je taková konstantní úroková míra, kterou se investice ve výši $P(t, T)$ jednotek v čase t spojitě úročí na výplatu jednotky v čase T . Pro spotovou úrokovou míru tedy platí

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}. \quad (1.2.3)$$

□

Z definice je zřejmé, že lze spotovou úrokovou míru považovat za výnos do splatnosti podkladového dluhopisu. Pro cenu tohoto dluhopisu potom tedy platí

$$e^{R(t, T) \cdot (T-t)} P(t, T) = 1, \quad (1.2.4)$$

z této rovnice lze vyjádřit cenu kontraktu v čase t ,

$$P(t, T) = e^{-R(t, T) \cdot (T-t)}. \quad (1.2.5)$$

Tento vztah tedy platí pro spotovou úrokovou míru $R(t, T)$ tak, jako by byla po celou dobu konstantní. Tuto spotovou sazbu lze také chápat jako intenzitu úročení.

Nyní uvažujme dobře fungující trh, kde nedochází k arbitráži a existuje stejné riziko při investování do dluhopisů a při spoření na bankovním účtu. Z těchto předpokladů nutně musí platit jistý vztah mezi bondy a okamžitou spotovou úrokovou mírou. S využitím vztahu 1.2.5 a definice 1.2.2 lze potom cenu bezkupónového bondu uvažovat ve tvaru

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}. \quad (1.2.6)$$

Investice množství $P(t, T)$ v čase t tedy přináší 1 jednotku v čase T . Pokud je sazba r náhodná, potom také $\int_t^T r(s) ds$ je náhodný a jelikož cena $P(t, T)$ je známá v čase t , pak, jak jsme zmínili u definice 1.2.2, tento vztah platí pouze „ve střední hodnotě“ (viz rovnice 1.2.8).

Pro propojení ekonomického konceptu oceňování finančních derivátů založeného na absenci arbitráže a existenci matematické pravděpodobnostní míry byl zaveden pojem *ekvivalentní martingalová míra*, jehož definici lze nalézt v [2]. Tato ekvivalentní pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} (ekvivalentní k \mathbb{P} - skutečná pravděpodobnost) nám, zjednodušeně řečeno, garantuje, že proces $P(t, T)/B(t)$ je na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ martingal ([5] s. 326-327).

Z vlastnosti martingalu 1.1.1 a plyne:

$$E \left\{ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} = E \left\{ \frac{P(T, T)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \frac{P(t, T)}{B(t)}, \quad (1.2.7)$$

kde \mathcal{F}_t označuje informaci o ceně bondu dostupnou do času t .

Jak bylo zmíněno výše, cenu bondu lze považovat za očekávanou (střední) hodnotu diskontního faktoru definovaného v definici 1.2.2. Pro cenu $P(t, T)$ potom tedy platí

$$P(t, T) = E \left\{ \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} = E \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \quad (1.2.8)$$

Tento vztah ukazuje, že na bondy lze nahlížet jako deriváty spotových úrokových sazeb, což je v této teoretické části klíčové.

Z rovnic 1.2.7 a 1.2.8 lze vyjádřit martingal, pro který platí

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = E \left\{ e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \quad (1.2.9)$$

Jak je uvedeno v [5] (s. 327), pro martingal 1.2.9 existuje proces $X(t) = \int_0^t \sigma(s, T) dW^*(s)$, kde $W^*(S)$ je Brownův pohyb nad mírou \mathbb{Q} a platí

$$d \left(\frac{P(t, T)}{B(t)} \right) = \left(\frac{P(t, T)}{B(t)} \right) dX(t) = \sigma(t, T) \left(\frac{P(t, T)}{B(t)} \right) dW^*(t), \quad (1.2.10)$$

a jelikož $dB(t)/B(t) = r(t)dt$, dostáváme vztah

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t)dt + \sigma(t, T)dW^*(t). \quad (1.2.11)$$

Toto je rovnice pro oceňování bondů a jejich opcí. Zpětnou změnou pravděpodobnostní míry, která je detailně popsána v [5], lze dospět k podobné rovnici, která již platí nad pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a splňuje tvar:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (r(t) - \sigma(t, T)q(t))dt + \sigma(t, T)dW(t), \quad (1.2.12)$$

kde $-q(t)$ je odměna za podstupování rizika nad bezrizikovou úrokovou mírou. Nejčastěji bývá $q(t) = q$ konstantní [2].

Poslední rovnice ukazuje na jednoznačný vztah mezi cenami dluhopisů a dynamikou úrokových sazeb.

1.3 Obecný jedno-faktorový model

Tato práce se zabývá jedno-faktorovými modely spotových úrokových sazeb (z angl. one-factor short-rate models), kde jedno-faktorový zde znamená, že cena bondu je dána pouze jednou úrokovou sazbou, v případě dvou (či více) úrokových sazeb nebo faktorů, ze kterých se úroková sazba skládá, mluvíme o více-faktorových modelech. O dvou-faktorových modelech podrobně pojednává [2].

Z předchozí kapitoly vychází stochastické modely úrokových sazeb, které jsou dány obecnými stochastickými diferenciálními rovnicemi. Předpokládejme tedy, že vybrané modely lze zapsat v následujícím tvaru:

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t), \quad (1.3.1)$$

kde $W(t)$ je Wienerův proces a $a(t)$ a $b(t)$ jsou předem známé funkce.

Pro jedno-faktorové modely potom platí, že $a(t) = a(r(t))$ a $b(t) = b(r(t))$ [3]. Přehled vybraných modelů s konkrétními funkcemi $a(r(t))$ a $b(r(t))$ je zobrazen na konci následující kapitoly v tabulce 2.5.1.

2 Představení modelů

V této kapitole jsou představeny některé základní jedno-faktorové modely spotových úrokových sazeb, které byly vybrány pro zpracování analytické části. Celá tato kapitola je zpracována především z [2], pokud není uvedeno jinak. Zejména v případě vztahů pro střední hodnoty a rozptyly daných modelů je čerpáno z této literatury.

2.1 Mertonův model

Model byl představen Robertem C. Mertonem (1973) a z vybraných modelů se jedná o nejstarší. Mertonův model je popsán následující stochastickou diferenciální rovnicí:

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (2.1.1)$$

kde $r(t)$ značí hodnotu úrokové sazby v čase $t \geq 0$, $W(t)$ je Wienerův proces v čase $t \geq 0$, $\sigma \geq 0$ a μ jsou konstantní parametry a r_0 je počáteční hodnota úrokové sazby. Řešení této diferenciální rovnice pro $r(t)$, jak je uvedeno v [5], je ve tvaru

$$r(t) = r_0 + \mu t + \sigma W(t). \quad (2.1.2)$$

Při zanedbání volatilní složky $\sigma dW(t)$ je řešením lineární funkce

$$r(t) = r_0 + \mu t. \quad (2.1.3)$$

Tento model tedy předpokládá, že ve střední hodnotě bude hodnota úrokové sazby růst (resp. klesat) od hodnoty r_0 lineárně s koeficientem μ . Tuto vlastnost sazby z dlouhodobého hlediska zjevně nesplňují, nicméně při předpovědích na období kratší než jeden rok mohou sazby vykazovat trendový růst, či pokles.

Z rovnice 2.1.3 pak zřejmě vyplývá vztah pro obecný tvar střední hodnoty. Vztah pro podmíněný rozptyl již plyne z rovnice 2.1.2. Pro $0 \leq s \leq t$ dostáváme tedy

$$E \{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s) + \mu(t - s), \quad (2.1.4)$$

$$Var \{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \sigma^2(t - s). \quad (2.1.5)$$

Pro simulování vývoje úrokových sazeb je potřeba spojitě rovnice převést na diskrétní tvar. Jelikož v některých případech neumíme řešit SDE obecně analyticky a naopak chceme získat předpis pro jednotlivé možné scénáře, je použito, podobně jako je tomu v [9], Eulerovské metody diskretizace SDE. Po této diskretizaci tedy z rovnice 2.1.1 získáváme

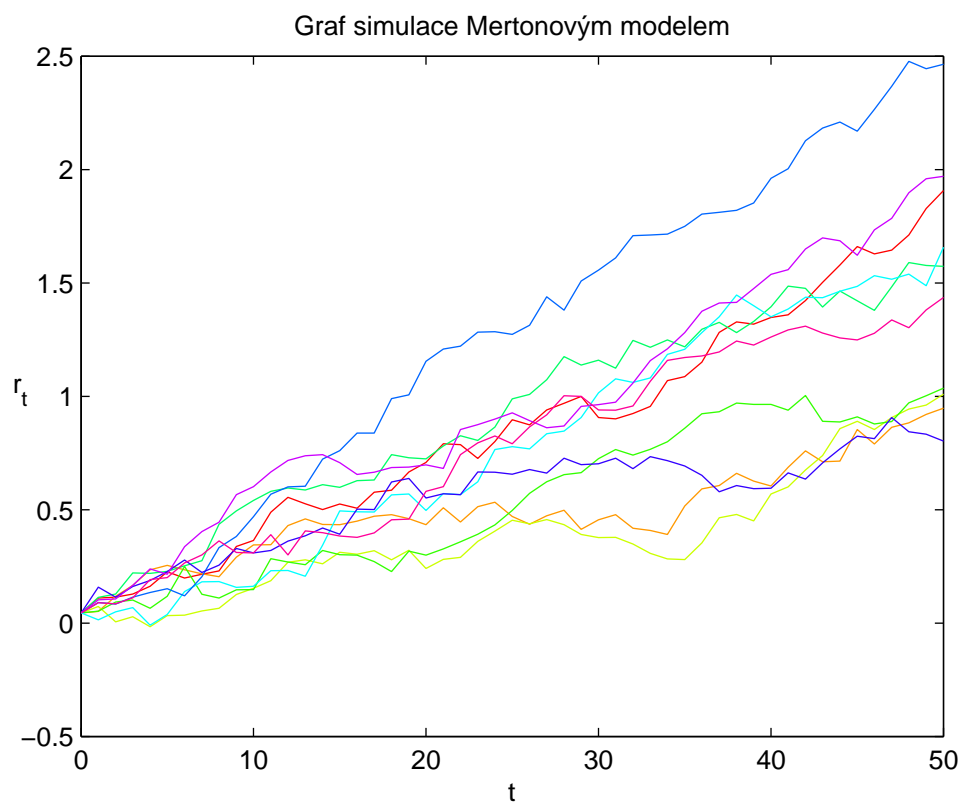
$$r_t = r_{t-\Delta} + \mu\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t, \quad (2.1.6)$$

kde Δ je délka simulačního kroku ($r_t - r_{t-\Delta}$), standardně 1 den a $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

Pro ukázkou bylo vygenerováno 10 simulací úrokových sazeb pomocí Mertonova modelu, viz obrázek 2.1.1. Simulace byly provedeny s parametry uvedenými v tabulce 2.1.1.

| Parametry pro simulaci | |
|------------------------|---------------------------|
| μ | 0.03 |
| r_0 | 0.045 |
| σ | 0.05 |
| Δ | 1 |
| t | $\in \{0, 1, \dots, 50\}$ |

Tabulka 2.1.1: Hodnoty parametrů pro simulaci Mertonovým modelem



Obrázek 2.1.1: Ukázka simulace úrokových sazeb Mertonovým modelem s pevně zadanými parametry

2.2 Vašíčkův model

Model Oldřicha Vašíčka z roku 1977 je v literatuře, která se zabývá dynamikou úrokových sazeb, velmi často představován a lze ho chápat jako jeden z nejzákladnějších modelů. Diferenciální rovnice, jež popisuje Vašíčkův model, má tvar

$$dr(t) = \theta(\mu - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (2.2.1)$$

kde r_0 je počáteční hodnota úrokové sazby a θ , μ a σ jsou kladné konstantní parametry. Při zanedbání volatilní složky $\sigma dW(t)$ lze pomocí separace proměnných diferenciální rovnici vyřešit

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dr(t)}{dt}}{\mu - r(t)} &= \theta \\ \int \frac{\frac{dr(t)}{dt}}{\mu - r(t)} dt &= \int \theta dt \\ -\ln[\mu - r(t)] &= \theta t + c_1 \\ r(t) &= \mu + c_2 e^{-\theta t} \\ r(0) &= r_0 \Rightarrow c_2 = r_0 - \mu \\ r(t) &= (r_0 - \mu)e^{-\theta t} + \mu. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Jak je uvedeno v [2], pro $0 \leq s \leq t$ platí

$$E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = e^{-\theta(t-s)}(r(s) - \mu) + \mu, \quad (2.2.3)$$

kde $E\{r(t)|\mathcal{F}_s\}$ značí podmíněnou střední hodnotu modelu. Jelikož model popisuje chování úrokové sazby jako náhodné veličiny, má také svůj vlastní zákon rozdělení. Jak uvádí výše zmíněný zdroj literatury, Vašíčkův model se řídí rozdělením normálním podmíněným znalostí \mathcal{F}_s se střední hodnotou 2.2.3 a rozptylem, který je dán vztahem

$$Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2\theta} [1 - e^{-2\theta(t-s)}]. \quad (2.2.4)$$

Důsledkem vztahu 2.2.3 je, že Vašíčkův model patří mezi *mean reverting* modely v tom smyslu, že očekávaná hodnota úrokové sazby se blíží konstantní hodnotě pro t jdoucí do nekonečna. θ je potom parametrem rychlosti návratu k této střední hodnotě μ .

Velkou nevýhodou Vašíčkova modelu je, že pro každé t může $r(t)$ nabýt záporné hodnoty s kladnou pravděpodobností. Záporné úrokové sazby se však v praxi standardně neuvažují, a tak mohou být výsledky Vašíčkova modelu z tohoto hlediska nevhodné. Naproti tomu se často používá díky jeho výhodným analytickým vlastnostem ($r(t)$ má normální rozdělení)[2].

Pro numerické simulace použijeme opět diskretizaci. Tentokrát tedy z rovnice 2.2.1 získáme

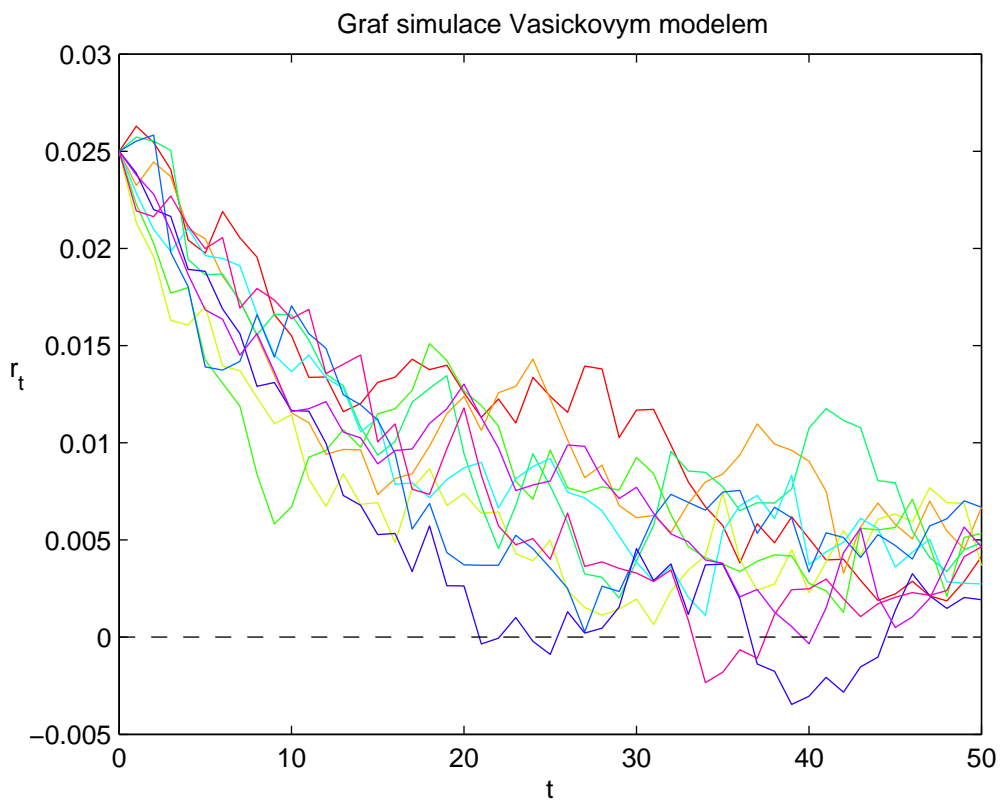
$$r_t = r_{t-\Delta} + \theta(\mu - r_{t-\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.2.5)$$

Do tohoto vzorce již lze po odhadu parametrů snadno dosadit.

Podobně jako u Mertonova modelu je podle parametrů v tabulce 2.2.1 na grafu 2.2.1 zobrazeno 10 realizací Vašíčkova modelu.

| Parametry pro simulaci | |
|------------------------|---------------------------|
| μ | 0.005 |
| θ | 0.08 |
| r_0 | 0.025 |
| σ | 0.0015 |
| Δ | 1 |
| t | $\in \{0, 1, \dots, 50\}$ |

Tabulka 2.2.1: Hodnoty parametrů pro simulaci Vašíčkovým modelem



Obrázek 2.2.1: Ukázka simulace úrokových sazeb Vašíčkovým modelem s pevně zadanými parametry

2.3 Cox-Ingersoll-Rossův model (CIR)

Je zřejmé, že zápornost úrokových sazeb u Vašíčkova modelu je významnou slabinou. Přestože v praktických simulacích může být pravděpodobnost nabytí záporné hodnoty malá (např. predikce na krátkou dobu nebo v případě malé volatility $r(t)$), navrhli Cox, Ingersoll and Ross v roce 1985 model s „odmocninou“ u náhodné složky ve Vašíčkově modelu. Tato modifikace Vašíčkova modelu zaručuje kladnost úrokových sazeb.

Diferenciální rovnice popisující CIR model je ve tvaru

$$dr(t) = \theta(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r_t}dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (2.3.1)$$

kde r_0 , θ , μ a σ jsou kladné konstanty. Aby $r(t)$ bylo vždy kladné, musí být navíc splněna podmínka

$$2\theta\mu > \sigma^2.$$

Jak uvádí literatura [2], úrokové sazby modelované modelem CIR nemají charakter normálního rozdělení, jak tomu bylo v předchozích případech, nýbrž necentrovaného χ^2 rozdělení. Jednotlivé histogramy generovaných hodnot lze nalézt na obrázku 2.5.1.

Střední hodnota a rozptyl podmíněné filtrací \mathcal{F}_s jsou dle [2] dány vztahy

$$E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s)e^{-\theta(t-s)} + \mu(1 - e^{-\theta(t-s)}), \quad (2.3.2)$$

$$Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s)\frac{\sigma^2}{\theta}(e^{-\theta(t-s)} - e^{-2\theta(t-s)}) + \mu\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-\theta(t-s)})^2. \quad (2.3.3)$$

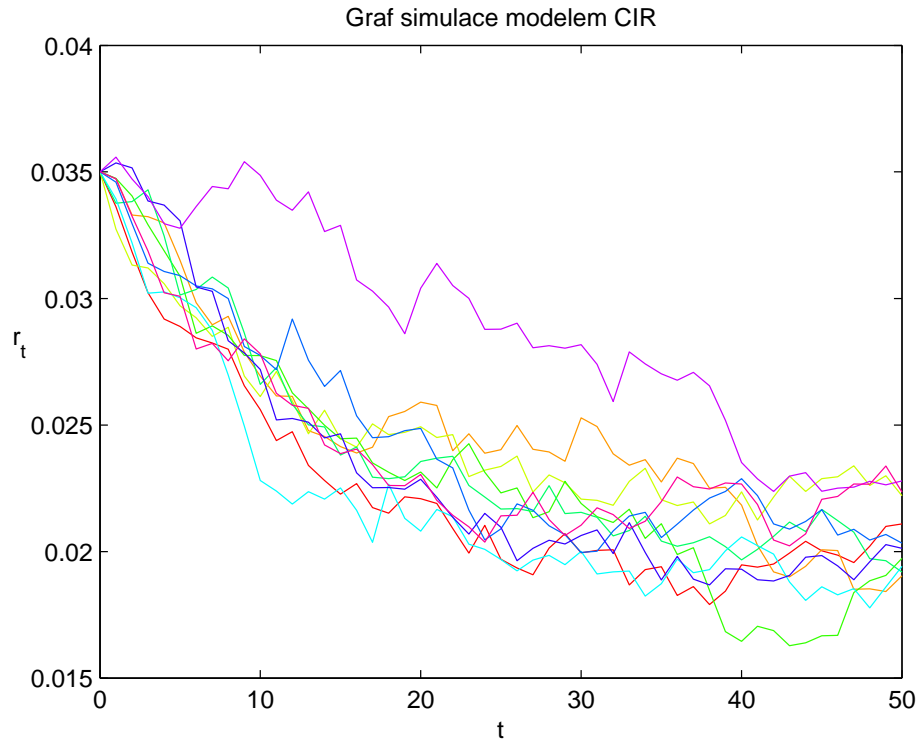
Snadno lze nahlédnout, že je tato střední hodnota shodná se střední hodnotou Vašíčkova modelu, to bude zřejmě mít za následek velmi podobné výsledky při praktických simulacích. Rozdílný rozptyl se však projevuje ve tvaru pásů spolehlivosti u numerických simulacích. Předpis pro diskrétní aproximaci CIR modelu je ve tvaru

$$r_t = r_{t-\Delta} + \theta(\mu - r_{t-\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta r_{t-\Delta}}\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.3.4)$$

Simulaci úrokových sazeb modelem CIR se zadanými parametry z tabulky 2.3.1 lze vidět na obrázku 2.3.1.

| Parametry pro simulaci | |
|------------------------|---------------------------|
| μ | 0.02 |
| θ | 0.075 |
| r_0 | 0.035 |
| σ | 0.005 |
| Δ | 1 |
| t | $\in \{0, 1, \dots, 50\}$ |

Tabulka 2.3.1: Hodnoty parametrů pro simulaci modelem CIR



Obrázek 2.3.1: Ukázka simulace úrokových sazeb CIR modelem s pevně zadanými parametry

2.4 Dothanův model

Dothanův model (1978) je, jak se uvádí v [2], jediným v literatuře uváděným modelem s logaritnicko-normálním rozdělením, který lze analyticky vyřešit do explicitních vzorců při oceňování bezkupónových dluhopisů. Předpis stochastické diferenciální rovnice pro Dothanův model je ve tvaru

$$dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (2.4.1)$$

kde μ je reálný konstantní parametr, σ je kladný konstantní parametr modelu a r_0 je opět počáteční hodnota úrokové sazby.

Řešením rovnice 2.4.1, jak uvádí [2], je

$$r(t) = r(s) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t-s) + \sigma (W(t) - W(s)) \right\}, \quad (2.4.2)$$

pro $s \leq t$, a proto má $r(t)$ podmíněné \mathcal{F}_s logaritnicko-normální rozdělení se střední hodnotou a rozptylem danými

$$E \{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s)e^{\mu(t-s)}, \quad (2.4.3)$$

$$Var \{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r^2(s)e^{2\mu(t-s)} \left(e^{\sigma^2(t-s)} - 1 \right). \quad (2.4.4)$$

Vlastnost, že $r(t)$ má lognormální rozdělení způsobuje, že úrokové sazby generované tímto předpisem jsou vždy kladné.

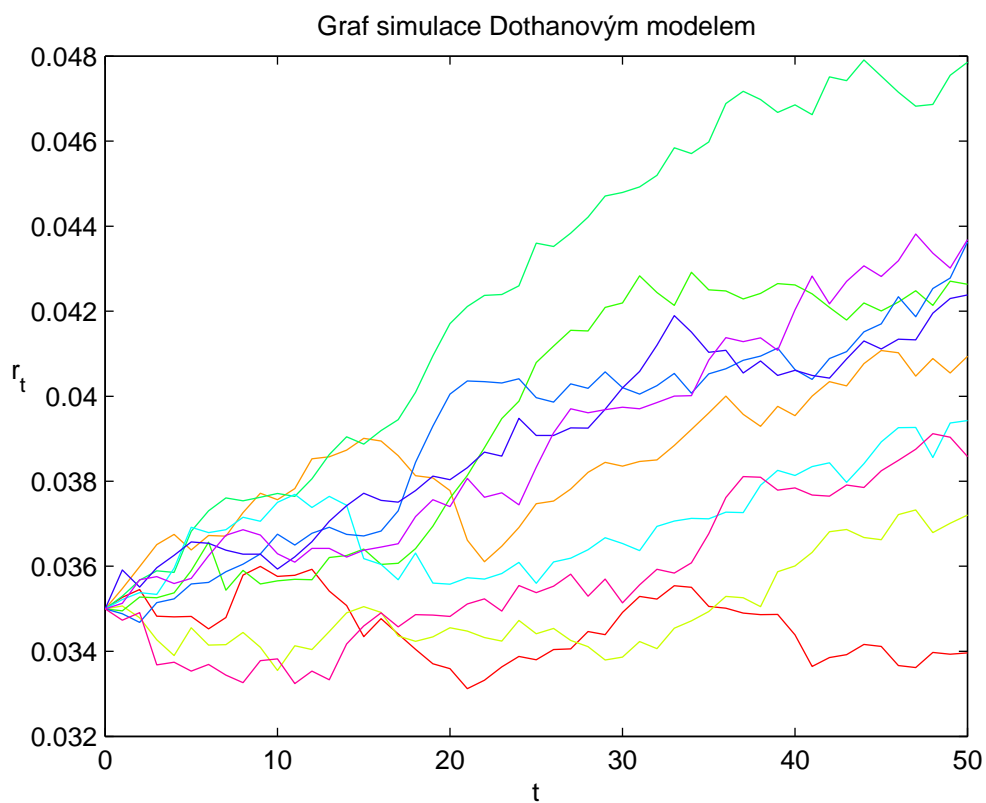
Pro simulace je použito následujícího diskrétního tvaru:

$$r_t = r_{t-\Delta} + \mu r_{t-\Delta} \Delta + \sigma r_{t-\Delta} \sqrt{\Delta} \epsilon_t. \quad (2.4.5)$$

Podobně jako u předchozích modelů je uvedena tabulka 2.4.1 s parametry a graf s ukázkovými simulacemi.

| Parametry pro simulaci | |
|------------------------|---------------------------|
| μ | 0.003 |
| r_0 | 0.035 |
| σ | 0.03 |
| Δ | 1 |
| t | $\in \{0, 1, \dots, 50\}$ |

Tabulka 2.4.1: Hodnoty parametrů pro simulaci Dothanovým modelem



Obrázek 2.4.1: Ukázka simulace úrokových sazeb Dothanovým modelem s pevně zadanými parametry

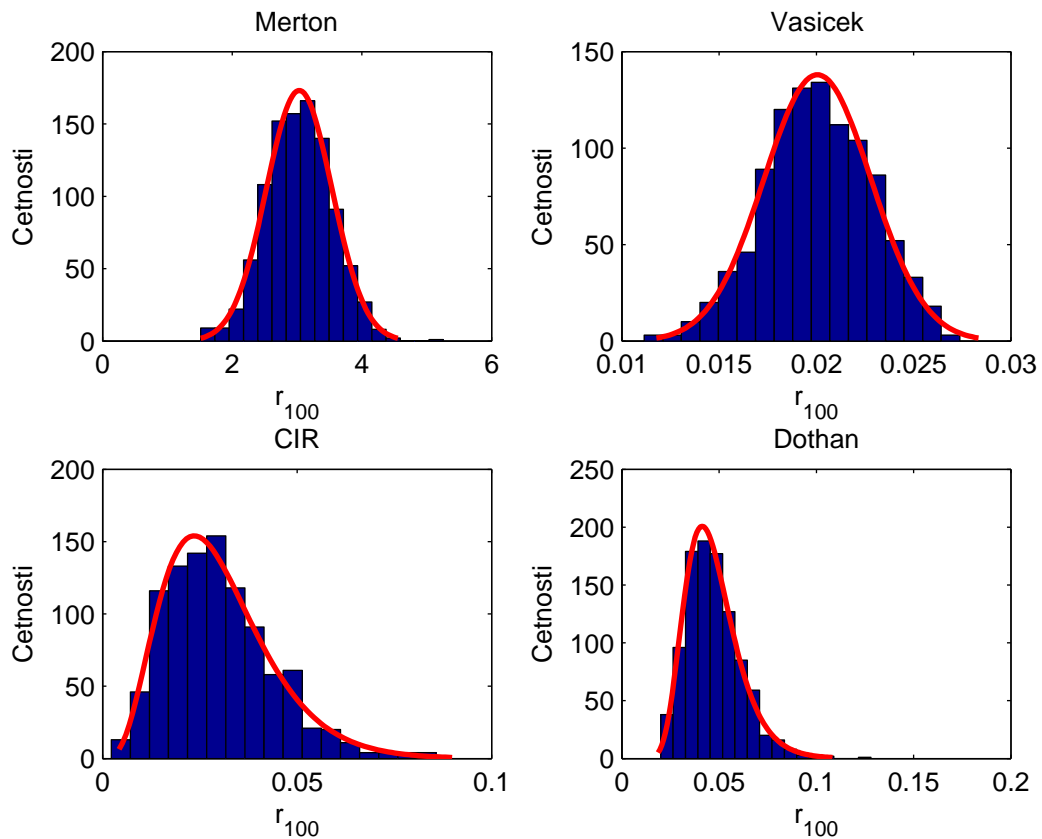
2.5 Vlastnosti představených modelů

V této podkapitole stručně shrneme základní vlastnosti představených modelů. Při tom se zaměříme především na kladnost generovaných sazeb, proces návratu ke střední hodnotě a pravděpodobnostní rozdělení generovaných úrokových sazeb. Všechny tyto vlastnosti shrnuje následující tabulka 2.5.1. Podobnou tabulku s dalšími modely lze nalézt v [3].

Na závěr je zobrazen obrázek s histogramy 2.5.1, které znázorňují rozdělení vygenerovaných úrokových sazeb v čase $t = 100$. Pro vytvoření histogramů bylo každým modelem vygenerováno 1000 různých scénářů. Následně je histogram proložen křivkou hustoty pravděpodobnosti dle daného rozdělení.

| Model | $a(r(t))$ | $b(r(t))$ | $r \sim$ | $r > 0$ | Mean-Reverting |
|--------------------|----------------------|---------------------|------------|---------|----------------|
| Merton (M) - 1973 | μ | σ | N | X | X |
| Vašíček (V) - 1977 | $\theta(\mu - r(t))$ | σ | N | X | ✓ |
| CIR (C) - 1985 | $\theta(\mu - r(t))$ | $\sigma\sqrt{r(t)}$ | $NC\chi^2$ | ✓ | ✓ |
| Dothan (D) - 1978 | $\mu r(t)$ | $\sigma r(t)$ | LN | ✓ | X |

Tabulka 2.5.1: Souhrn vlastností představených modelů



Obrázek 2.5.1: Ukázka histogramů pro simulačně generované scénáře proložené hustotou daného rozdělení (*Merton–normální, Vašíček–normální, CIR–chí-kvadrát, Dothan–lognormální*)

3 Praktická část

3.1 Představení dat

V této kapitole jsou představena reálná volně dostupná data, na kterých lze testovat vlastnosti vybraných modelů. Součástí praktické části práce je dále také použití modelů k predikci vybraných dat. Z volně dostupných časových řad úrokových sazeb byly pro praktickou část vybrány časové řady PRIBOR a EURIBOR. Veškerá data použitá v této kapitole jsou součástí přílohy.

3.1.1 PRIBOR

PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate) je referenční hodnota úrokových sazeb na trhu mezibankovních depozit, kterou počítá (fixuje) kalkulační agent pro Czech Forex Club z kotací referenčních bank pro prodej depozit (offer) podle algoritmu uvedeného v § 6 Pravidel.¹

Pro testování a predikce byla použita právě data PRIBOR, jejichž historie je volně přístupná online společně se sazbami PRIBID. Stručně lze říci, že se hodnoty těchto sazeb počítají z ceny, za kterou je referenční banka ochotna koupit - PRIBID (resp. prodat - PRIBOR) od jiné referenční banky mezibankovní depozitum. Vzhledem k „úrokovým maržím“ jsou sazby PRIBOR zpravidla vyšší než PRIBID. Přesná charakteristika sazeb je součástí dokumentu [13].

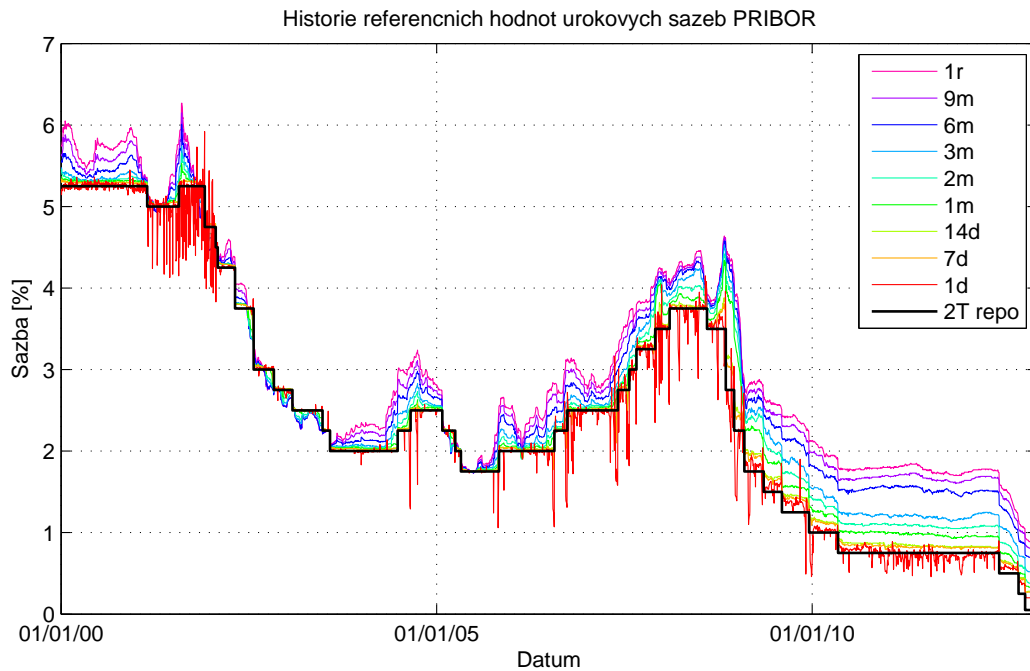
Data mají charakter časových řad s denními² intervaly. Každý den jsou zveřejňovány hodnoty úrokových měr pro různá data splatnosti. Sazby PRIBOR a PRIBID jsou počítány pro splatnosti: 1 den (O/N - OverNight), 1, 2 týdny, 1, 2, 3, 6, 9 měsíců a 1 rok.

Výše těchto úrokových sazeb však není důležitá pouze pro bankovní a finanční instituce. Fixing úrokových sazeb ovlivňuje také například úrokové sazby hypoték. V praxi jsou tak často úrokové míry variabilních hypoték přímo vázány na hodnoty sazeb PRIBOR (např. měsíčních).

Pro ověření vlastností modelů úrokových sazeb byla použita data za posledních 8 let, od roku 2005 do roku 2012 včetně. Pro ilustraci jsou na obrázku 3.1.1 zobrazena data od roku 2000.

¹Takto je vymezen pojem PRIBOR v úředním sdělení České národní banky o vydání třetí verze Pravidel pro referenční banky a výpočet (fixing) referenčních úrokových sazeb (PRIBID a PRIBOR) viz [13].

²Denním intervalem je myšlen 1 obchodní den, kalendářní rok je potom tvořen přibližně 250 obchodními dny.



Obrázek 3.1.1: Historie vybraných úrokových měr PRIBOR 2000-2012

CZEONIA

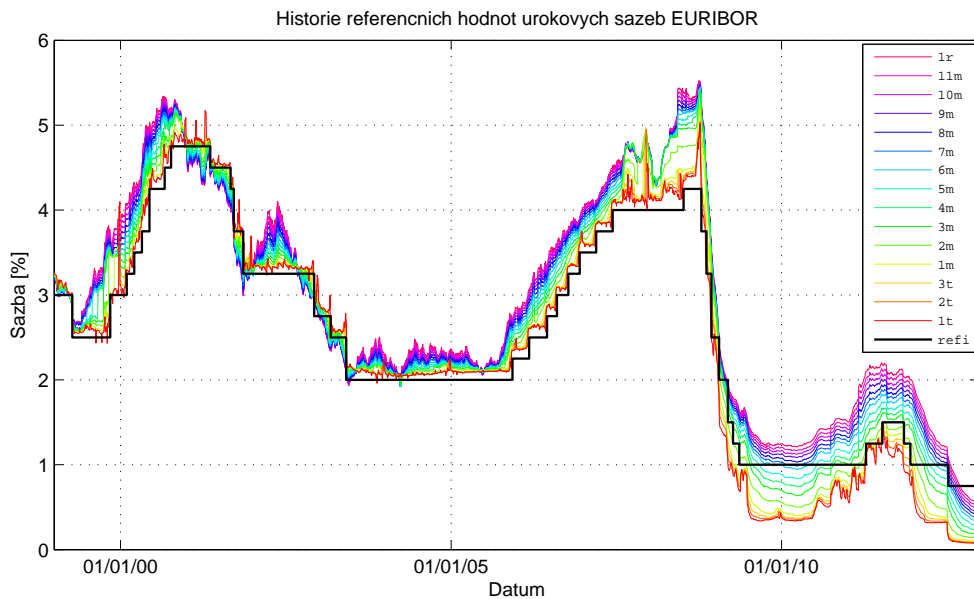
Pouze pro úplnost zmíníme, že další časovou řadou úrokových sazeb, jež vyhláší ČNB jsou sazby CZEONIA. Prakticky se jedná o jiný výpočet denních (O/N) sazeb na českém bankovním trhu. Jak se uvádí v [10], CZEONIA (CZEch OverNight Index Average) je vážený průměr úrokových sazeb všech nezajištěných O/N depozit uložených referenčními bankami na mezibankovním trhu. Váhami jsou potom objemy depozit uložených různými referenčními bankami. Seznam referenčních bank na českém trhu lze nalézt na [12].

Výše sazeb CZEONIA se obvykle pohybuje mezi sazbami PRIBOR a PRIBID pro jednodenní splatnost, z tohoto důvodu s těmito sazbami nebudeme dále pracovat.

3.1.2 EURIBOR

Zkratka je odvozena z anglického Euro Interbank Offered Rate. Obdobně, jako v předchozím případě, se jedná o referenční hodnoty úrokových sazeb vytvářených na trhu mezibankovních depozit. Mezi banky, které se podílejí na tvorbě sazeb EURIBOR, patří banky s největšími objemy obchodů v eurozóně. Seznam těchto bank lze nalézt na webu EURIBOR – European Banking Federation [16], kde lze také nalézt kompletní historii úrokových sazeb EURIBOR. Sazby EURIBOR jsou vyhlášovány každý obchodní den podobně jako PRIBOR, avšak ve splatnostech od 7 dní po 1 rok. Pro vzájemné srovnání českých a celoevropských denních sazeb by bylo potřeba využít sazeb *EONIA* (Euro OverNight Index Average), na straně evropské a již dříve zmíněných sazeb CZEONIA na straně české.

Podobně jako na českém trhu jsou i evropské sazby ovlivňovány dlouhodobými postoji centrálních bank k úrokové politice. Odkazuje-li se na evropské úrokové sazby, obvykle se odkazuje na tzv. „ECB refi rate“. Jedná se o klíčovou sazbu ECB (Main refinancing operations), kterou si lze představit jako ekvivalent české 2T repo sazby. Historický vývoj „refi“ sazby lze nalézt na webových stránkách ECB konkrétně [17]. Historie dat EURIBOR a EONIA je volně dostupná na webovém portálu Euribor-ebf [15]. Veškerá použitá data jsou součástí příloh. Na obrázku 3.1.2 jsou pro ilustraci zobrazena data od roku 1999.



Obrázek 3.1.2: Historie vybraných úrokových měr EURIBOR 2000-2012

Existuje celá řada dalších úrokových sazeb, na kterých by se vybrané modely mohly testovat. Vzhledem k velmi podobné dynamice časových řad bude testování provedeno pouze na uvedených „českých“ a „evropských“ sazbách, které mohou být pro českého investora nejměrodatnější. Mezi další významné úrokové sazby patří také sazby LIBOR (London InterBank Offered Rate), jež se vyhledávají celkem ve 150 různých variantách, a sice v 15 různých splatnostech pro 10 různých měn³.

3.2 Kalibrace modelů

Aby bylo možné aplikovat modely na reálná data, je potřeba odhadnout neznámé parametry tak, aby dynamika modelu „co nejpřesněji“ vystihovala dynamiku daných dat. Předpokládejme tedy, že máme k dispozici $n + 1$ ekvidistantních pozorování úrokových sazeb r_t , $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, a tedy $r_t - r_{t-\Delta} = \Delta = 1$. Tento předpoklad tedy není v rozporu s vybranými časovými řadami a krokem diskrétní simulace tak bude jeden obchodní den. Hodnocení kvality jednotlivých modelů proběhne vybranými extrapolačními kritérii, které jsou podrobněji popsány v kapitole 3.3.

³<http://www.bbalibor.com/>

Parametry lze odhadovat různými metodami. Mezi nejčastěji používané patří metoda maximální věrohodnosti, metoda nejmenších čtverců nebo metoda momentů. Pro kalibraci modelů v této práci je zvoleno kritérium ve smyslu metody nejmenších čtverců, tj. hledáme takové parametry daného modelu, se kterými se model dopustí nejmenší chyby měřené součtem kvadrátů odchylek. Vyjdeme-li z obecně definovaného modelu v diskretním tvaru

$$r_t - r_{t-\Delta} = \mu(r_{t-\Delta}, t - \Delta)\Delta t + \sigma(r_{t-\Delta}, t - \Delta)\sqrt{\Delta}\epsilon_t, \quad (3.2.1)$$

kde z úmluvy $\Delta = 1$. Funkci $\sigma(r_{t-\Delta}, t - \Delta)$ zde chápeme ve tvaru $\sigma(r_{t-\Delta}) \cdot \sigma(t - \Delta)$, přičemž $\sigma(t - \Delta) = \sigma(t - 1)$ je ve všech modelech konstantní. Minimalizovat chceme odchylky způsobené volatilní složkou, tedy

$$(\hat{\mu}) = \arg \min_{\mu} \sum_{t=1}^n \left(\underbrace{\frac{r_t - r_{t-1} - \mu(r_{t-1}, t - 1)}{\sigma(r_{t-1})}}_{r'_t} \right)^2 = \arg \min_{\mu} \sum_{t=1}^n (\sigma(t - 1)\epsilon_t)^2. \quad (3.2.2)$$

Parametr σ , který je ve všech představených modelech reálné číslo, budeme v praxi odhadovat jako výběrovou směrodatnou odchylku z vektoru $\mathbf{r} = (r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$. Konkrétní vzorce pro odhady parametrů σ jsou uvedeny v podkapitole „Testování odhadů“ 3.2.5.

3.2.1 Kalibrace modelu Merton

Pro numerickou práci s modelem se využívá diskretní rovnice 2.1.6:

$$r_t = r_{t-\Delta} + \mu\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t.$$

Dle úmluvy Δ volíme 1 a vyjádříme volatilní složku

$$r_t - r_{t-1} - \mu = \sigma\epsilon_t. \quad (3.2.3)$$

Pro minimalizaci čtverců odchylek využijeme symetrie $\epsilon_t \sim N(0,1)$, čímž dostáváme

$$(\hat{\mu}) = \arg \min_{\mu} \sum_{t=1}^n (r_t - r_{t-1} - \mu)^2. \quad (3.2.4)$$

Rovnici zderivujeme dle neznámého parametru μ

$$\frac{\partial(\hat{\mu})}{\partial\mu} = -2 \sum_{t=1}^n (r_t - r_{t-1} - \mu).$$

Položíme-li derivaci rovnu nule

$$0 = \sum_{t=1}^n (r_t - r_{t-1} - \mu),$$

snadno dostáváme odhad parametru μ

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^n r_t - \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n} = \frac{r_n - r_0}{n}. \quad (3.2.5)$$

3.2.2 Kalibrace modelu Vašíček

Při kalibraci modelu vyjdeme z diskrétní rovnice 2.2.5 Vašíčkova modelu:

$$r_t = r_{t-\Delta} + \theta(\mu - r_{t-\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_t.$$

Po úpravě dostáváme

$$r_t - (1 - \theta)r_{t-1} - \mu\theta = \sigma\epsilon_t. \quad (3.2.6)$$

Stejně jako v předchozím případě budeme minimalizovat čtverce odchylek, tedy hledáme takové parametry θ a μ , aby chyba byla co nejmenší

$$(\hat{\mu}, \hat{\theta}) = \arg \min_{\mu, \theta} \sum_{t=1}^n (r_t - (1 - \theta)r_{t-1} - \mu\theta)^2. \quad (3.2.7)$$

Pro zjednodušení provedeme v rovnici 3.2.7 jednoduchou substituci a získáme

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \min_{\alpha, \beta} \sum_{t=1}^n (r_t - \alpha r_{t-1} - \beta)^2. \quad (3.2.8)$$

Zderivujeme podle α a β a parciální derivace položíme rovny nule

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -2 \sum_{t=1}^n ((r_t - \alpha r_{t-1} - \beta)(r_{t-1})) = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -2 \sum_{t=1}^n (r_t - \alpha r_{t-1} - \beta) = 0. \quad (3.2.10)$$

Roznásobením argumentů obou sumací získáváme rovnice

$$\sum_{t=1}^n (r_t r_{t-1}) - \alpha \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \beta \sum_{t=1}^n r_{t-1} = 0, \quad (3.2.11)$$

$$\sum_{t=1}^n r_t - \alpha \sum_{t=1}^n r_{t-1} - n\beta = 0. \quad (3.2.12)$$

Několika jednoduchými úpravami, které zde přeskočíme, lze dopočítat odhady pro α a β ve tvaru

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{t=1}^n (r_t r_{t-1}) - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \cdot \sum_{t=1}^n r_t}{n \sum_{t=1}^n (r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^n r_{t-1})^2}, \quad (3.2.13)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n r_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n}. \quad (3.2.14)$$

Z těchto odhadů již lze snadno zpětnou substitucí, která byla provedena v rovnici 3.2.7, získat odhady původních parametrů μ a θ . Pouze pro přehlednost využijeme zápisu pomocí již odhadnutého α

$$\hat{\theta} = 1 - \hat{\alpha}, \quad (3.2.15)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\beta}{1 - \hat{\alpha}} = \frac{\sum_{t=1}^n r_t - \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n(1 - \hat{\alpha})}. \quad (3.2.16)$$

3.2.3 Kalibrace modelu CIR

Stejně jako v předchozích případech vycházíme z původní rovnice 2.3.4:

$$r_t = r_{t-\Delta} + \theta(\mu - r_{t-\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta r_{t-\Delta}}\epsilon_t.$$

Předchozí rovnici upravíme tak, abychom mohli minimalizovat kvadrát odchylek

$$\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{\mu\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} - \theta\sqrt{r_{t-1}} + \sigma\epsilon_t. \quad (3.2.17)$$

Minimalizovat budeme tedy výraz

$$(\hat{\mu}, \hat{\theta}) = \arg \min_{\mu, \theta} \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} - \frac{\mu\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + \theta\sqrt{r_{t-1}} \right)^2. \quad (3.2.18)$$

Parciální derivace položíme rovny nule

$$\sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} - \frac{\mu\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + \theta\sqrt{r_{t-1}} \right) \left(\frac{\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} \right) \right] = 0, \quad (3.2.19)$$

$$\sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} - \frac{\mu\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + \theta\sqrt{r_{t-1}} \right) \left(\sqrt{r_{t-1}} - \frac{\mu}{\sqrt{r_{t-1}}} \right) \right] = 0. \quad (3.2.20)$$

Argumenty obou sum roznásobíme a sčítance rozepíšeme na samostatné sumy, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} - \mu\theta \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}} + n\theta &= 0, \\ (r_n - r_0) - n\mu\theta + \theta \sum_{t=1}^n r_{t-1} - \mu \sum_{t=1}^n \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} + \mu^2\theta \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}} - n\mu\theta &= 0. \end{aligned}$$

Pokud z obou předchozích rovnic vyjádříme θ , dostáváme jednu rovnici pro neznámou μ ve tvaru

$$\theta = \frac{(r_n - r_0) - \mu \sum_{t=1}^n \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}}}{2\mu n - \sum_{t=1}^n r_{t-1} - \mu^2 \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}}} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}}}{\mu \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}} - n}. \quad (3.2.21)$$

Odhad $\hat{\mu}$ lze již získat základními úpravami, zde je uveden ve tvaru

$$\hat{\mu} = \frac{n \sum_{t=1}^n r_t - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \cdot \sum_{t=1}^n \frac{r_t}{r_{t-1}}}{n^2 - n \sum_{t=1}^n \frac{r_t}{r_{t-1}} + (r_n - r_0) \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}}}, \quad (3.2.22)$$

pokud tento vztah dosadíme za μ do pravé strany výrazu 3.2.21 lze získat odhad parametru θ a to ve tvaru

$$\hat{\theta} = \frac{n^2 - n \sum_{t=1}^n \frac{r_t}{r_{t-1}} + (r_n - r_0) \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}}}{n^2 - \sum_{t=1}^n \frac{1}{r_{t-1}} \cdot \sum_{t=1}^n r_{t-1}}. \quad (3.2.23)$$

3.2.4 Kalibrace modelu Dothan

Stejně jako v předchozích případech vyjdeme z diskrétní aproximace 2.4.5

$$r_t = r_{t-\Delta} + \mu r_{t-\Delta} \Delta + \sigma r_{t-\Delta} \sqrt{\Delta} \epsilon_t,$$

kteřou upravíme vyjádřením volatilní složky

$$\frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} - \mu = \sigma \epsilon_t. \quad (3.2.24)$$

Odhad neznámé μ získáme minimalizací výrazu

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} - \mu \right)^2. \quad (3.2.25)$$

Derivováním a jednoduchými úpravami dostáváme odhad parametru μ ve tvaru

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}}}{n} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{r_t}{r_{t-1}} - n}{n}. \quad (3.2.26)$$

3.2.5 Testování odhadů

Tato závěrečná podkapitola shrnuje především výstupy programů, jež empiricky testují odhadování parametrů vybraných modelů pomocí spočtených odhadů na simulačně generovaných datech. Pro každý model byla nasimulována jedna trajektorie pro $t = 100$, přičemž odhad parametru proběhl v každé iteraci a následně je zobrazen vývoj tohoto odhadu. Grafy, které zobrazují vývoj těchto odhadů, jsou zobrazeny na obrázku 3.2.1.

Součástí testování je odhad parametru z jedné trajektorie pro velmi velké t . Výsledek jedné realizace tohoto programu je zobrazen v tabulce 3.2.1.

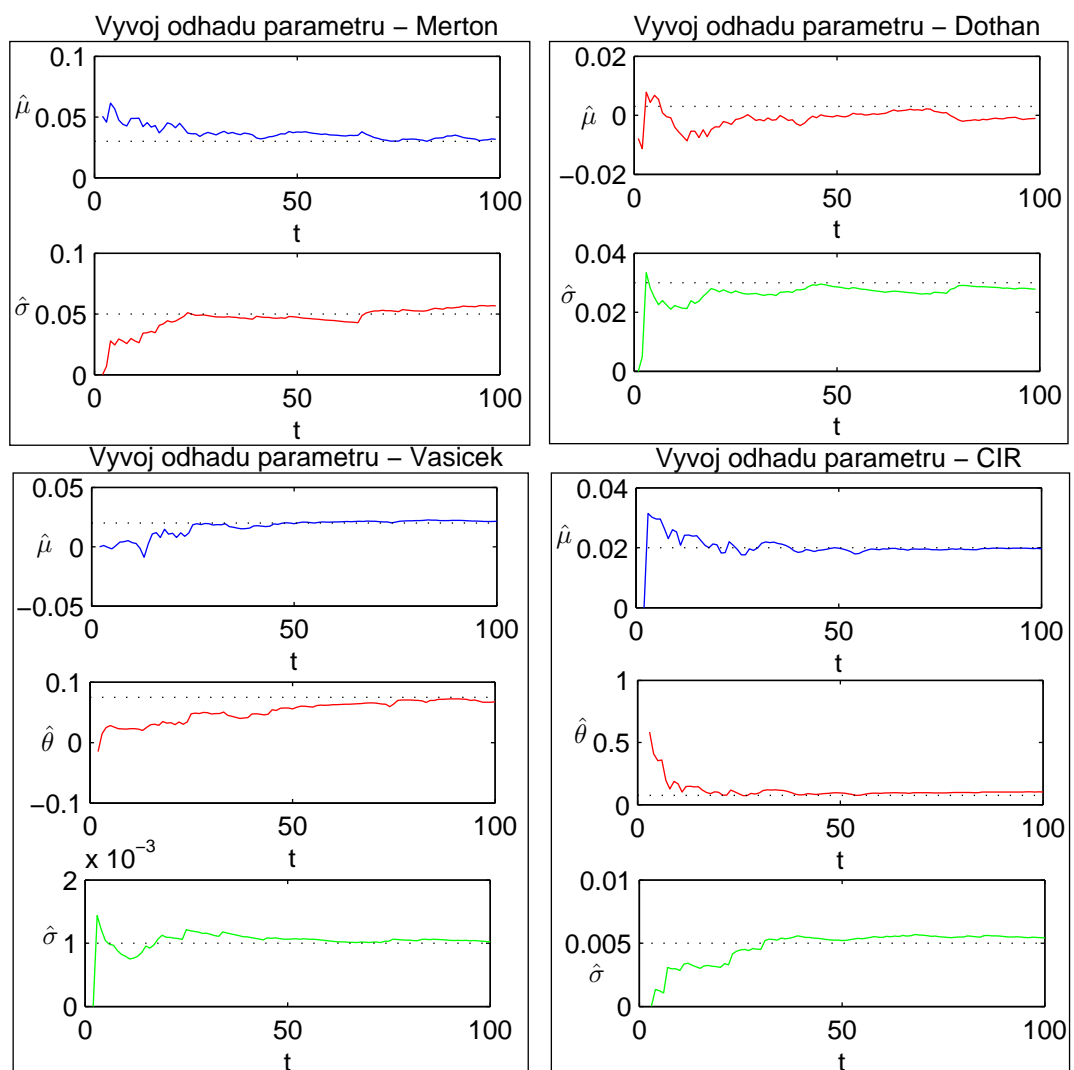
| Aplikace spočtených odhadů | | |
|----------------------------|-----------|-----------|
| Parametr | Simulační | Odhadnutý |
| Merton - μ | 0.000100 | 0.000118 |
| Merton - σ | 0.050000 | 0.050055 |
| Vašíček - μ | 0.020000 | 0.019968 |
| Vašíček - θ | 0.075000 | 0.075068 |
| Vašíček - σ | 0.001000 | 0.001024 |
| CIR - μ | 0.020000 | 0.020016 |
| CIR - θ | 0.075000 | 0.074509 |
| CIR - σ | 0.005000 | 0.004983 |
| Dothan - μ | 0.000050 | 0.000041 |
| Dothan - σ | 0.010000 | 0.009997 |

Tabulka 3.2.1: Výsledek programu pro odhadování parametrů ze simulovaných dat pro $t = 200000$

Jak bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, $\hat{\sigma}$ bude vždy počítán výběrovou směrodatnou odchylkou tak, aby byl tento odhad ekvivalentní s výběrovou směrodatnou odchylkou z vektoru $\sigma \epsilon_t$ pro všechna t . Odhady všech parametrů σ jsou uvedeny v tabulce 3.2.2.

| Model | Vzorec |
|---------|--|
| Merton | $\hat{\sigma} = s(r_t - r_{t-1} - \mu) = s(r_t - r_{t-1})$, pro $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ |
| Vašíček | $\hat{\sigma} = s(r_t - \hat{\alpha}r_{t-1} - \beta) = s(r_t - \hat{\alpha}r_{t-1})$, pro $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ |
| CIR | $\hat{\sigma} = s\left(\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} - \frac{\mu\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + \theta\sqrt{r_{t-1}}\right)$, pro $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ |
| Dothan | $\hat{\sigma} = s\left(\frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} - \mu\right) = s\left(\frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}}\right)$, pro $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ |

Tabulka 3.2.2: Vzorce pro odhad parametru sigma u jednotlivých modelů, kde funkce s značí výběrovou směrodatnou odchylku



Obrázek 3.2.1: Ukázka vývoje odhadu parametrů u jednotlivých modelů na simulačních datech

3.3 Kritéria kvality modelů

Jelikož cílem praktických simulací je predikovat referenční hodnoty úrokových sazeb, byla pro posuzování kvality modelu použita extrapolační kritéria, a sice průměrná kvadratická chyba MSE (Mean Squared Error) a průměrná absolutní chyba MAE (Mean Absolute Error). Další kritéria a podrobnější informace lze nalézt v [7].

Pro zmíněná kritéria potom platí

$$MSE = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (r_t - \hat{r}_t)^2, \quad MAE = \frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} |r_t - \hat{r}_t|, \quad (3.3.1)$$

kde pro kalibraci modelů použijeme data pro $t = 0, 1, 2, \dots, n$ a pro ověření predikčních schopností modelu použijeme data pro $t = n + 1, n + 2, \dots, n + h$.

3.4 Model konstantní hodnoty

Pro komparaci kvality použitých modelů slouží takzvané naivní modely. Existuje řada různých naivních modelů. S ohledem na to, že se úrokové sazby nevyznačují dlouhodobým růstem, či poklesem, byl zvolen model konstantní hodnoty. Tento model, jednoduše řečeno, vychází z předpokladu, že nejlepší odhad budoucích hodnot je stejný jako hodnota současná. Matematicky zapsáno tedy

$$r_t = r_{t-1} + \epsilon_t, \quad (3.4.1)$$

kde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

3.5 Výsledky modelování

Pro zpracování výsledků modelování slouží výstupy programů, které byly napsány v programovém prostředí MATLAB. Zdrojové kódy těchto programů jsou součástí příloh na CD. V této kapitole jsou představeny hlavní poznatky a závěry, které tyto programy přinesly.

3.5.1 Měsíční predikce PRIBOR

Jedním z možných využití stochastických modelů úrokových sazeb je jejich využití pro predikci těchto sazeb. V této subsekci jsou shrnuty výsledky empirických modelování měsíčních předpovědí na PRIBOR. Aby bylo možné predikovat úrokové sazby „co nejpřesněji“ ve smyslu námi zvolených kritérií, je potřeba zvolit časovou řadu k predikci, vybrat nejvhodnější model a k tomu odpovídající historii časové řady (tu budeme značit k – počet vybraných měsíců), na které bude model zkalibrován. K tomu poslouží právě programy napsané v prostředí MATLAB. Na základě odhadnutých parametrů pak budou nasimulovány měsíční predikce a spočtena chybová kritéria. Celkem bude provedeno 12 predikcí na datech z roku 2012, o kterých předpokládáme, že do okamžiku predikce nebyla známa.

Výběr časové řady PRIBOR

Nejprve je třeba zjistit obecnou chybovost modelů na jednotlivých časových řadách. Za tímto účelem byl napsán program `Program01.m`, jehož zjednodušený pseudokód lze zapsat následujícím algoritmem:

```

1: NactiDataPribor 2005-2011
2: for casovaRadaPribor(i) do
3:   counter=1;
4:   for dataProKalibraci(k) = 1m:1m:24m do
5:     for predpoved = 1:60 do
6:       PredikujVsemiModely();
7:       MAEModel(counter) = SpoctiMAE();   % Spočte chybu v dané předpovědi
8:       MSEModel(counter) = SpoctiMSE();
9:       counter=counter+1;   % Počítá do hodnoty 24*60 = 1440
10:    end for
11:  end for
12:  VypisSoucet(MAEModel);   % MAEModel uchovava chyby z kazde z 60*24 iteraci
13:  VypisSoucet(MSEModel);
14: end for

```

Výpisem tohoto programu jsou tedy chyby měřené oběma kritérii pro každý model a každou řadu. Výstup tohoto programu lze vidět v tabulce 3.5.1.

| Naměřené chyby pro časové řady | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|--------------|--------------|--------|-------|---------|-------|-------|-------|-------------|-------------|
| Řada | Naivní | | Merton | | Vašíček | | CIR | | Dothan | |
| PRIBOR | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE |
| 1 den | 289.0 | 168.1 | 324.7 | 196.2 | 391.1 | 230.8 | 406.3 | 239.2 | 378.8 | 238.4 |
| 7 dní | 79.6 | 24.4 | 101.2 | 25.6 | 87.7 | 25.0 | 86.4 | 25.0 | 97.2 | 25.3 |
| 14 dní | 74.6 | 22.2 | 95.3 | 22.7 | 83.4 | 23.1 | 81.5 | 23.0 | 91.1 | 22.5 |
| 1 měsíc | 83.2 | 20.0 | 98.3 | 20.3 | 89.3 | 21.1 | 87.6 | 21.2 | 92.9 | 19.9 |
| 2 měsíce | 86.5 | 20.9 | 96.1 | 20.9 | 90.4 | 21.6 | 89.3 | 21.6 | 91.0 | 20.5 |
| 3 měsíce | 93.7 | 21.2 | 96.0 | 21.3 | 95.5 | 21.9 | 94.8 | 21.9 | 91.6 | 21.1 |
| 6 měsíců | 87.5 | 19.9 | 93.9 | 20.6 | 90.5 | 20.5 | 89.3 | 20.4 | 90.7 | 20.4 |
| 9 měsíců | 89.3 | 21.1 | 98.0 | 22.2 | 93.3 | 22.0 | 92.2 | 21.8 | 95.0 | 22.0 |
| 1 rok | 89.7 | 21.6 | 101.0 | 23.0 | 94.6 | 22.3 | 93.5 | 22.1 | 98.0 | 22.8 |

Tabulka 3.5.1: Součet průměrných chyb ze všech 1440 simulací. Měřeno na datech 2007-2011 pro měsíční předpovědi a různé volby k

Z tabulky je patrné, že obecně největší chybovosti se všechny modely dopouští na časové řadě *PRIBOR1d*, která má patrně největší volatilitu (viz obrázek 3.1.1). Naopak nejnižší hodnoty chybových kritérií lze vidět u časových řad se splatností 7 a 14 dní. U zbylých řad nejsou z tohoto hlediska zřejmě velké rozdíly.

Přestože v tabulce nabývá nejnižších chyb převážně naivní model, lze predikovat vybranými stochastickými modely lépe ve smyslu optimalizačního kritéria MSE. Stochastické modely mají totiž chyby různé v závislosti na tom, na jaké historii dat byly parametry odhadnuty. Naivní model je vůči tomuto postupu nezávislý, protože predikuje vždy z poslední známé hodnoty. K výběru optimálního modelu a počtu měsíců k , které ke kalibraci využijeme, byl napsán program `Program02.m`.

S ohledem na výsledky v tabulce 3.5.1 budou závěrečné predikce provedeny na časových řadách *PRIBOR1d*, *PRIBOR14d*, jako zástupci časové řady s největší

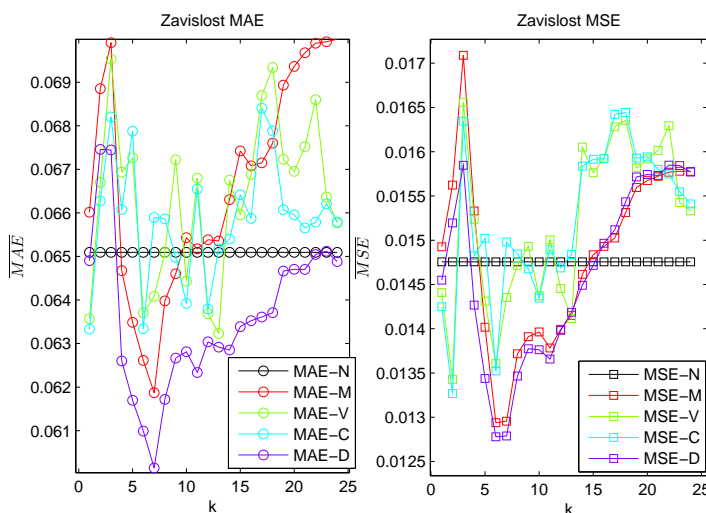
a nejnižší chybovostí a $PRIBOR3m$ jako časová řada, kde nejlepších výsledků dosahuje Dothanův model.

Volba optimálního modelu a k

Pomocí programu `Program02.m` byly pro predikce zobrazeny chyby v závislosti na počtu měsíců k historických dat, zvolených ke kalibraci modelu. Pro ilustraci viz obrázek 3.5.1. Tím lze pro každou řadu získat nejvhodnější model a optimální k dat časové řady pro kalibraci tohoto modelu na měsíční predikci. Protože modely byly kalibrovány ve smyslu minimalizace součtu kvadrátů odchylek, uvedeme dále tabulku s nejvhodnějším modelem a k (ve smyslu MSE) pro predikci dané časové řady.

| Nejvhodnější volba modelu a historie k dle programu - Program02 | | | | | | | | | |
|---|---------|-----|--------|--------|----------|---------|-----|--------|--------|
| Řada | Optimum | | MSE | | Řada | Optimum | | MSE | |
| PRIBOR | Model | k | Model | Naivní | PRIBOR | Model | k | Model | Naivní |
| 1 den | C | 4 | 0.0973 | 0.1167 | 7 dní | D | 7 | 0.0160 | 0.0169 |
| 14 dní | D | 7 | 0.0141 | 0.0154 | 1 měsíc | D | 7 | 0.0123 | 0.0139 |
| 2 měsíce | D | 7 | 0.0126 | 0.0145 | 3 měsíce | D | 6 | 0.0128 | 0.0148 |
| 6 měsíců | D | 7 | 0.0128 | 0.0136 | 9 měsíců | C | 8 | 0.0136 | 0.0147 |
| 1 rok | C | 8 | 0.0141 | 0.0150 | - | - | - | - | - |

Tabulka 3.5.2: Nejoptimálnější volba modelu vzhledem k MSE, kde k značí počet měsíců hist. dat pro kalibraci modelu a pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan



Obrázek 3.5.1: $PRIBOR3m$: závislost kritérií na počtu měsíců k , kde pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan a N -Naivní

Ve všech případech tedy vybíráme takový počet měsíců k , pro který průměrná chyba MSE nabývá nejnižší hodnoty. Po zhlédnutí výsledků v tabulce 3.5.2 lze soudit, že většinu časových řad úrokových sazeb nejlépe simuluje Dothanův model s kalibrací na 7 měsících historických pozorování. Pouze denní úrokové sazby predikuje nejlépe CIR model s historií $k = 4$. Dále se v tabulce vyskytuje ještě

dvakrát model CIR($k = 8$). Z výsledků také vyplývá, že každý model dosahuje pro určité k lepších výsledků nežli naivní model.

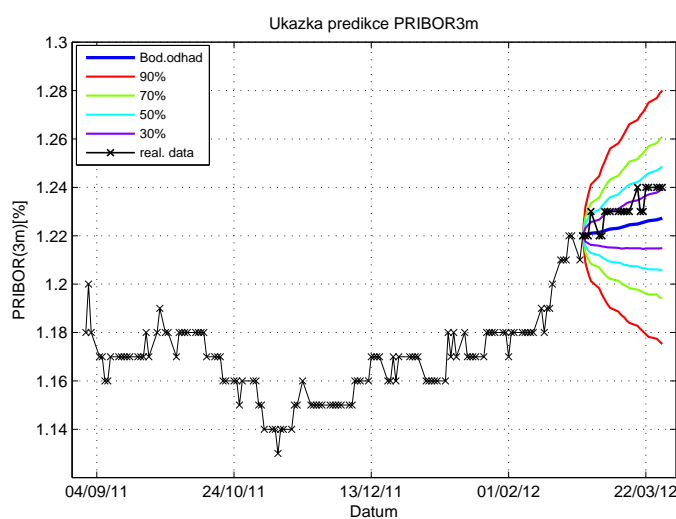
Výsledky predikcí

Jak bylo uvedeno výše, pro další práci vybereme jako zástupce časové řady *PRI-BOR1d*, *PRIBOR14d*, a *PRIBOR3m*, pro které provedeme podrobné simulace včetně pásů spolehlivosti na datech z roku 2012, která dosud nebyla použita. Pro tyto simulace vybereme právě modely z tabulky 3.5.2. Celkem bude tedy nasimulováno 36 detailních predikcí. Výsledky těchto predikcí jsou shrnuty v následující tabulce 3.5.3.

| Výsledky programu Program03.m | | | |
|-------------------------------|---------------------|-----------|--------------------|
| data | $\sum MSE_{naivni}$ | skóre MSE | $\sum MSE_{model}$ |
| 1d | 0.258 | 5:7 | 0.159 |
| 14d | 0.064 | 5:7 | 0.054 |
| 3m | 0.066 | 6:6 | 0.049 |
| data | $\sum MAE_{naivni}$ | skóre MAE | $\sum MAE_{model}$ |
| 1d | 1.264 | 5:7 | 1.061 |
| 14d | 0.479 | 7:5 | 0.443 |
| 3m | 0.572 | 6:6 | 0.505 |

Tabulka 3.5.3: Výsledky simulací na datech PRIBOR 2012, kde skóre značí počty lepších predikcí pro naivní model a vybraný stochastický model. \sum daného kritéria značí součet chyb ve všech 12 predikcích.

Grafy výsledků simulací úrokových sazeb vznikly pomocí programu Program03.m. Každá predikce vznikla vždy průběhem 10 000 simulací a následným vytvořením pásů spolehlivosti. Pásky spolehlivosti byly vytvořeny pro hodnoty 90 %, 70 %, 50 % a 30 %. Součástí grafu je také bodový odhad, jako průměr všech simulací v jednotlivých časech t . Všechny grafy jsou součástí přílohy. Pro ilustraci zde zobrazíme jednu konkrétní předpověď.



Obrázek 3.5.2: Ukázka predikce *PRIBOR3m* 2012 Dothanovým modelem

3.5.2 Měsíční predikce EURIBOR

Stejným způsobem jako v předchozí subsekcí se pokusíme vybrat vhodné modely pro časové řady úrokových sazeb. V tomto případě se jedná o časové řady EURIBOR. K dispozici máme 15 časových řad pro různé doby splatnosti. Více o těchto datech bylo uvedeno v sekci 3.1.

Výběr časové řady

Opět pomocí programu Program01.m spočteme chyby stejným způsobem jako u časových řad PRIBOR. Na základě těchto výsledků vybereme opět tři časové řady, se kterými budeme podrobněji pracovat.

| Naměřené chyby všech simulací $\sum_{i=1}^{1440} X_i$ | | | | | | | | | | |
|---|--------------|------|--------|------|---------|------|-------|------|--------------|-------------|
| Řada | Naivní | | Merton | | Vašíček | | CIR | | Dothan | |
| PRIBOR | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE | MAE | MSE |
| 1 týden | 138.4 | 47.5 | 156.9 | 47.4 | 148.5 | 49.3 | 142.8 | 48.0 | 144.7 | 45.5 |
| 2 týdny | 127.7 | 42.2 | 142.8 | 41.6 | 138.0 | 44.1 | 132.5 | 42.5 | 131.2 | 39.4 |
| 3 týdny | 123.4 | 41.1 | 137.4 | 40.1 | 131.8 | 42.0 | 127.4 | 41.3 | 125.5 | 37.6 |
| 1 měsíc | 116.0 | 38.2 | 133.1 | 39.6 | 123.6 | 38.7 | 119.2 | 37.9 | 119.5 | 37.0 |
| 2 měsíce | 108.1 | 33.1 | 119.6 | 32.2 | 111.9 | 33.6 | 108.2 | 33.2 | 104.7 | 29.3 |
| 3 měsíce | 111.4 | 35.4 | 120.6 | 34.4 | 112.6 | 35.2 | 109.9 | 35.3 | 107.0 | 31.4 |
| 4 měsíce | 108.7 | 34.4 | 117.5 | 33.4 | 109.1 | 34.1 | 106.5 | 34.2 | 104.2 | 30.4 |
| 5 měsíce | 108.7 | 33.9 | 117.6 | 32.9 | 109.7 | 33.8 | 106.4 | 33.5 | 104.5 | 30.0 |
| 6 měsíce | 108.9 | 33.7 | 117.5 | 32.8 | 110.2 | 33.8 | 107.0 | 33.4 | 104.8 | 30.0 |
| 7 měsíce | 108.9 | 33.6 | 118.4 | 32.7 | 111.1 | 33.8 | 107.8 | 33.5 | 105.8 | 29.9 |
| 8 měsíce | 109.5 | 33.6 | 119.5 | 32.8 | 112.2 | 33.9 | 109.5 | 33.8 | 107.0 | 30.0 |
| 9 měsíce | 110.7 | 34.0 | 121.2 | 33.2 | 113.7 | 34.3 | 110.6 | 34.0 | 108.8 | 30.5 |
| 10 měsíce | 112.3 | 34.2 | 123.4 | 33.5 | 115.9 | 34.7 | 113.3 | 34.6 | 111.1 | 30.9 |
| 11 měsíce | 113.3 | 34.6 | 125.0 | 34.0 | 117.6 | 35.1 | 115.0 | 35.0 | 113.1 | 31.4 |
| 1 rok | 115.1 | 35.1 | 126.9 | 34.7 | 119.2 | 35.6 | 116.7 | 35.6 | 115.3 | 32.1 |

Tabulka 3.5.4: Součet průměrných chyb z 1440 simulací. Měřeno na datech 2007-2011 Euribor.

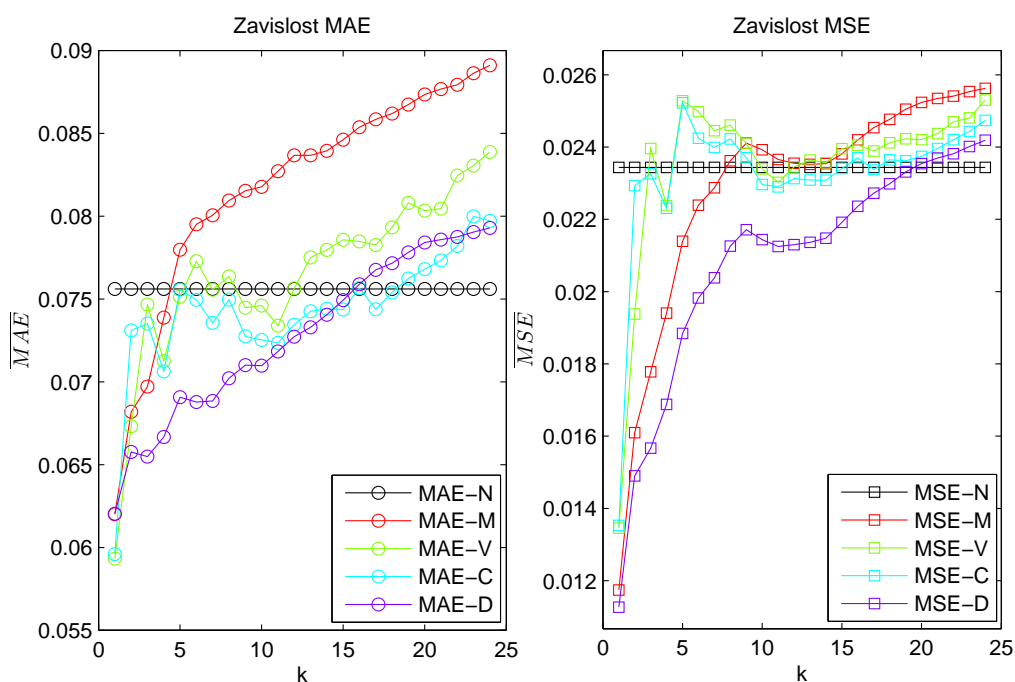
Z výsledků v tabulce lze soudit, že vybrané stochastické modely predikují data EURIBOR sice s větší chybou než data PRIBOR, ale mají mnohem lepší výsledky v porovnání s naivním modelem. Podobně jako v předchozím případě zde Dothanův model zjevně dosahuje nejlepších výsledků. Mírně vyšší hodnoty lze vidět u prvních tří časových řad se splatností 1-3 týdny a u poslední „roční“ časové řady. Zbylé časové řady se liší jen velmi málo. Pro podrobné simulace budou tedy vybrány časové řady *EURIBOR2t*, *EURIBOR6m* a *EURIBOR1r*.

Volba optimálního modelu a k

Pomocí výstupů programu Program02.m lze zobrazit výsledky do analogické tabulky jako u dat PRIBOR. Dva vybrané grafy závislosti chyb MSE a MAE lze vidět na obrázku 3.5.3. Podobné obrázky lze získat pro všechny časové řady a jsou velmi podobné, čemuž nasvědčují výsledky v tabulce 3.5.5.

| Nejvhodnější volba modelu a historie k dle programu - Program02 | | | | | | | | | |
|---|---------|-----|--------|--------|-----------|---------|-----|--------|--------|
| Řada | Optimum | | MSE | | Řada | Optimum | | MSE | |
| EURIBOR | Model | k | Model | Naivní | EURIBOR | Model | k | Model | Naivní |
| 1 týden | V | 1 | 0.0241 | 0.0330 | 2 týdny | V | 1 | 0.0206 | 0.0293 |
| 3 týdny | D | 3 | 0.0219 | 0.0285 | 1 měsíc | D | 3 | 0.0216 | 0.0266 |
| 2 měsíce | D | 1 | 0.0121 | 0.0230 | 3 měsíce | D | 1 | 0.0131 | 0.0246 |
| 4 měsíce | D | 1 | 0.0117 | 0.0239 | 5 měsíců | D | 1 | 0.0111 | 0.0235 |
| 6 měsíců | D | 1 | 0.0113 | 0.0234 | 7 měsíců | D | 1 | 0.0113 | 0.0234 |
| 8 měsíců | D | 1 | 0.0115 | 0.0233 | 9 měsíců | D | 1 | 0.0117 | 0.0236 |
| 10 měsíců | D | 1 | 0.0120 | 0.0238 | 11 měsíců | D | 1 | 0.0124 | 0.0240 |
| 1 rok | D | 1 | 0.0129 | 0.0244 | - | - | - | - | - |

Tabulka 3.5.5: Nejoptimálnější volba ve smyslu MSE, kde k značí počet měsíců hist. dat pro kalibraci modelu a pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan



Obrázek 3.5.3: *EURIBOR6m*: závislost kritérií na počtu měsíců k , kde pro názvy modelů jsou použity zkratky M -Merton, V -Vašíček, C -CIR, D -Dothan a N -Naivní

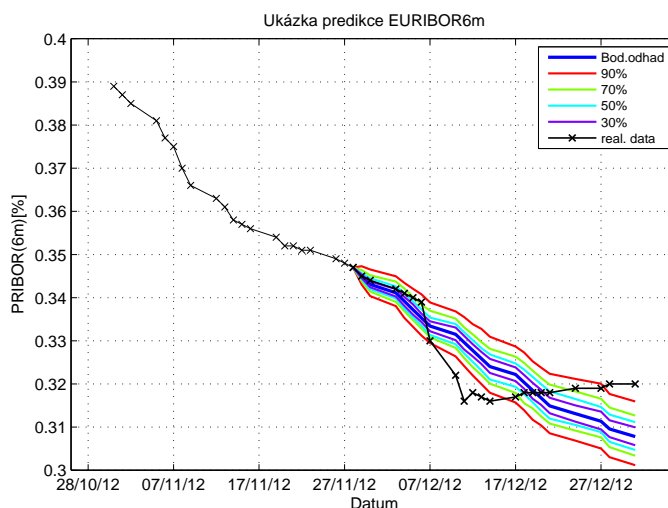
Výsledky predikcí

S ohledem na předchozí výsledky budou provedeny podrobné predikce, jak již bylo zmíněno, pro časové řady *EURIBOR2t*, *EURIBOR6m* a *EURIBOR1r*. Analogicky k sazbám PRIBOR byla vypracována tabulka s výsledky 3.5.6.

| Výsledky programu Program03.m | | | |
|-------------------------------|---------------------|-----------|--------------------|
| data | $\sum MSE_{naivni}$ | skóre MSE | $\sum MSE_{model}$ |
| 2t | 0.062 | 5:7 | 0.060 |
| 6m | 0.081 | 2:10 | 0.039 |
| 1r | 0.087 | 2:10 | 0.042 |
| data | $\sum MAE_{naivni}$ | skóre MAE | $\sum MAE_{model}$ |
| 2t | 0.410 | 5:7 | 0.401 |
| 6m | 0.704 | 2:10 | 0.391 |
| 1r | 0.756 | 3:9 | 0.399 |

Tabulka 3.5.6: Výsledky simulací na datech EURIBOR 2012, kde skóre značí počty lepších predikcí pro naivní model a vybraný stochastický model. \sum daného kritéria značí součet chyb ve všech 12 predikcích.

Ukázkový graf jedné konkrétní predikce lze vidět na obrázku



Obrázek 3.5.4: Ukázka predikce *EURIBOR6m* 2012 Dothanovým modelem

3.5.3 Shrnutí výsledků

Z výsledků modelování vyplývá, že vybrané modely mohou predikovat úrokové sazby PRIBOR a EURIBOR, přičemž příliš volatilní O/N sazby jako *PRIBOR1d* nejsou pro tyto predikce vhodné, neboť se u nich modely dopouští příliš velkých chyb a pásy spolehlivosti jsou již brzy velmi široké, to lze pozorovat na obrázku v příloze A.1.1. Dále z výsledků vyplývá, že z vybraných časových řad lze každou vybranými modely predikovat na období jednoho měsíce tak, aby výsledné predikce dosáhly lepších výsledků než naivní model. Lepším výsledkem je zde míněno, že model dosahuje nižší hodnoty kritéria MSE. Během těchto predikcí

bylo zkoušeno predikovat úrokové sazby „očistěné“ o skoky způsobené základními úrokovými sazbami, které vyhláší centrální banky, konkrétně diskontní sazba ČNB a analogicky *deposit facility* ECB. Tato transformace dat ovšem nevedla k lepším empirickým výsledkům.

Porovnáním hodnot v tabulkách 3.5.1 a 3.5.4 je zřejmé, že vybraná kritéria nabývají vyšších hodnot u dat EURIBOR. To znamená, že při predikci těchto dat, se modely dopouštěly obecně vyšší chybovosti a to včetně naivního modelu. Příčinou tohoto chování by mohla být vyšší volatilita „evropských“ sazeb v porovnání s ekvivalentními českými řadami.

Pomocí programu `Program02.m` lze zjistit, že zatímco vybrané modely překonávají naivní model z hlediska MSE (pro které byly kalibrovány) velmi často, jen zřídka překonávají naivní model ve smyslu průměrné absolutní odchylky (MAE). Tento jev lze vidět například také v tabulce 3.5.3, kdy stochastický model předpověděl lépe 7 z 12 predikcí řady *PRIBOR14d* ve smyslu MSE, ale jen 5 z 12 ve smyslu MAE. Toto lze chápat tak, že stochastický model překonává naivní model jen velmi slabě. Naproti tomu předpovědi pro časové řady EURIBOR zvládají stochastické modely výrazně lépe než naivní model, což lze pozorovat v tabulce 3.5.6, kde například predikce *EURIBOR6m* dopadla po všech stránkách velmi dobře.

Z hlediska dynamiky lze po zhlédnutí všech výsledků říci, že modely CIR a Vašíček dosahují velmi podobných výsledků a „zápornost“ Vašíčkova modelu není takovou nevýhodou, jak se dalo očekávat, neboť v praxi k tomuto jevu nedochází často. Nicméně pásy spolehlivosti jsou v tomto ohledu praktičtější právě u modelu CIR, kde nenabudou záporných hodnot. Na druhé straně stojí modely Dothan a Merton, které mají také podobné výsledky, avšak v tomto případě jsou výsledky Dothanova modelu téměř vždy lepší než v případě Mertonova modelu (viz např. tabulka 3.5.4 nebo obrázek 3.5.3).

Závěr

Cílem této práce bylo představit, charakterizovat a následně použít stochastické modely úrokových sazeb. Při zpracování byly vybrány čtyři modely, které lze po prostudování příslušné literatury považovat za základní. Jmenovitě se jedná o modely Merton, Vašíček, Cox-Ingersoll-Ross a Dothan. Všechny tyto modely spadají do kategorie jedno-faktorových short-rate modelů. Z ukázkových simulací jsou patrné některé základní vlastnosti modelů. Tyto simulace a souhrn vlastností jsou provedeny v kapitole 2.

Modely byly popsány ve své spojitě verzi tak, jak bývají běžně v literatuře představovány. V simulacích a praktické práci se pak tyto spojitě modely aproximovaly diskrétními aproximacemi. Parametry těchto modelů proto byly odhadovány přímo z diskrétních vzorců, a aby byla zajištěna shodnost postupů, byly všechny modely kalibrovány ve smyslu minimalizace součtu kvadrátů odchylek, tedy obdobou metody nejmenších čtverců.

Praktická část této práce se věnuje aplikaci zmíněných modelů na reálná data. Pro tuto část byla vybrána historická data úrokových sazeb PRIBOR a EURIBOR, která jsou v dostatečně dlouhé historii volně dostupná na webových stránkách. Aby bylo možné otestovat chování těchto modelů při aplikaci na reálná data, byla za důležitý cíl zvolena měsíční predikce těchto sazeb. Podrobné výsledky těchto predikcí jsou popsány v subsekcí 3.5.3 – Shrnutí výsledků.

Závěrem lze tedy konstatovat, že tyto základní stochastické modely úrokových sazeb se s dostatečnou výpočetní technikou dají v praxi použít k predikci spotových úrokových sazeb, avšak výsledky jsou přesvědčivé pouze v porovnání s náivním modelem konstantní hodnoty. Bylo by zajímavé, jak by tyto modely v tomto případě obstály oproti klasickým regresním modelům, nicméně dávají velmi realistické trajektorie, čehož lze využít při oceňování finančních derivátů a modelování cen bondů.

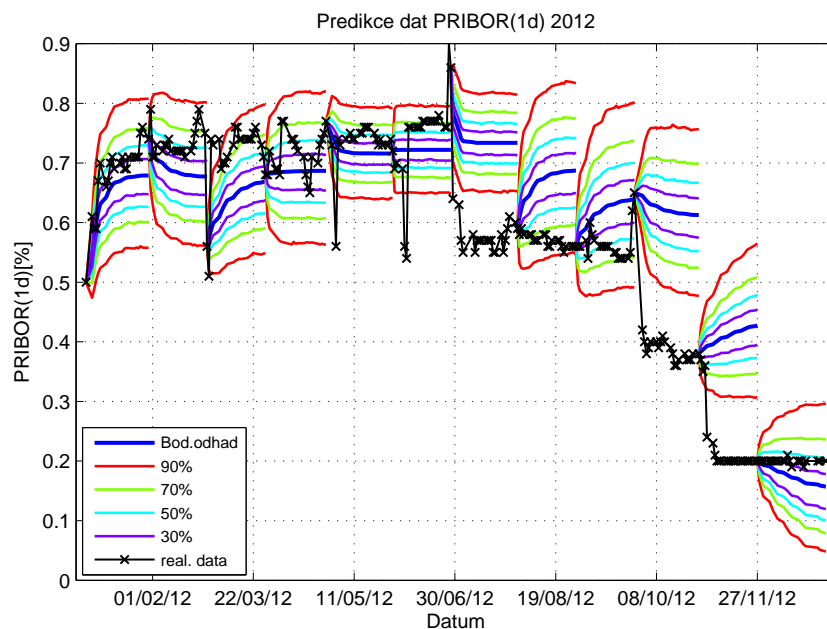
Literatura a zdroje

- [1] Baxter M., Rennie A.: *Financial Calculus: An introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003
- [2] Brigo D., Mrcurio F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer Finance, Berlin, 2006
- [3] Cairns, A.: *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press, New Jersey, 2004
- [4] Dupač V., Hušková M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, Praha, 2005
- [5] Klebaner F.: *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, London, 2012
- [6] Prášková Z., Lachout P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 2001
- [7] Šedivá B.: *Materiály k předmětu statistická analýza 2* [online], [cit. 28. 2. 2013]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~sediva/sa2/01_sa2.pdf
- [8] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987
- [9] Zmeškal Z. a kolektiv *Finanční modely*, Ekopress, Praha, 2004
- [10] Česká národní banka: *Dokument ČNB* [online], [cit. 1. 3. 2013]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/download/czeonia_pravidla.pdf
- [11] Česká národní banka: *Sazby PRIBOR - roční historie* [online], [cit. 1. 3. 2013]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/rok_form.jsp
- [12] Česká národní banka: *Seznam referenčních bank pro výpočet (fixing) referenčních sazeb PRIBID a PRIBOR* [online], [cit. 1. 3. 2013]. Dostupné z: http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/penezni_trh/pribor/seznam_refer_bank.html
- [13] Česká národní banka: *Věstník ČNB* [online], [cit. 1. 3. 2013] Dostupné z: http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2006/download/v_2006_03_20206610.pdf
- [14] BBA Libor: *Welcome to BBA Libor* [online], [cit. 13. 3. 2013]. Dostupné z: <http://www.bbalibor.com/>
- [15] Euribor-EBF: *Euribor Rates* [online], [cit. 13. 3. 2013]. Dostupné z: <http://www.euribor-ebf.eu/euribor-org/euribor-rates.html>

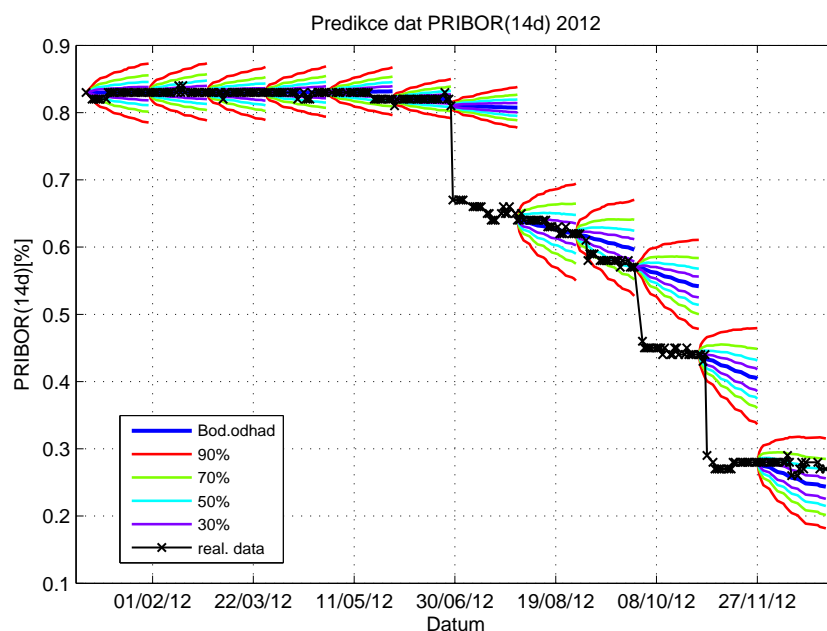
- [16] Euribor-EBF: *Panel Banks* [online], [cit. 13. 3. 2013]. Dostupné z: <http://www.euribor-ebf.eu/euribor-org/panel-banks.html>
- [17] European central bank: *Key ECB interest rates* [online], [cit. 13. 3. 2013]. Dostupné z: <https://www.ecb.int/stats/monetary/rates/html/index.en.html>

A Přílohy

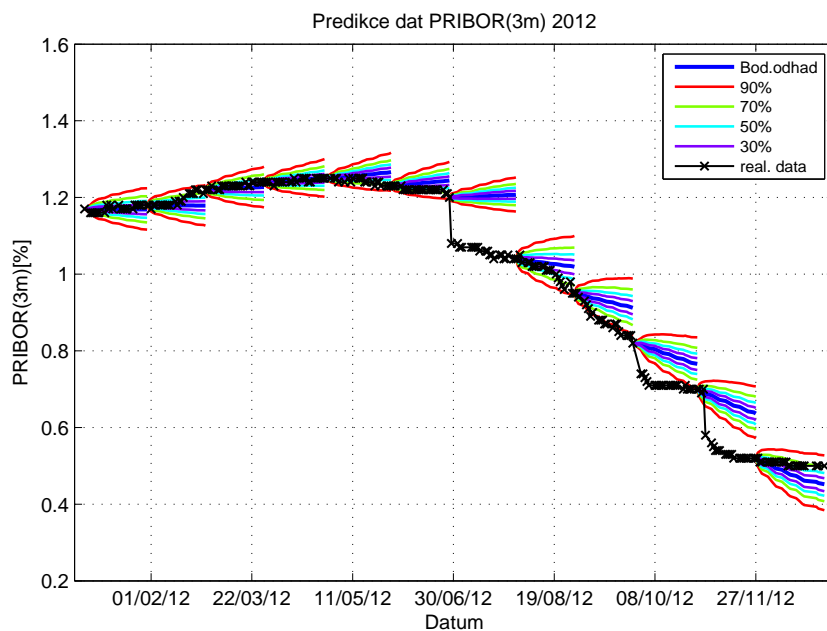
A.1 Grafy predikcí PRIBOR 2012



Obrázek A.1.1: Graf měsíčních predikcí modelem CIR pro data $PRIBOR1d$ 2012, která v době predikce nejsou známa.

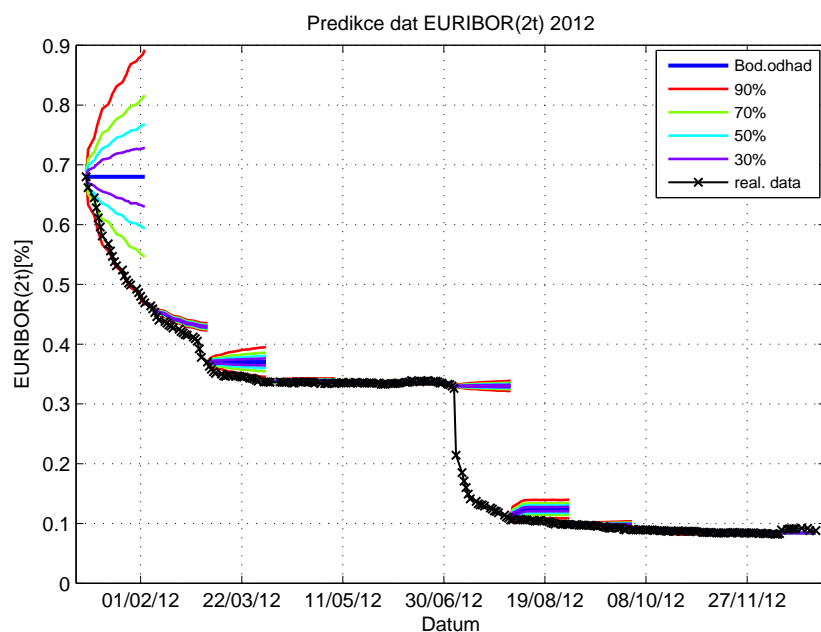


Obrázek A.1.2: Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data $PRIBOR14d$ 2012, která v době predikce nejsou známa.

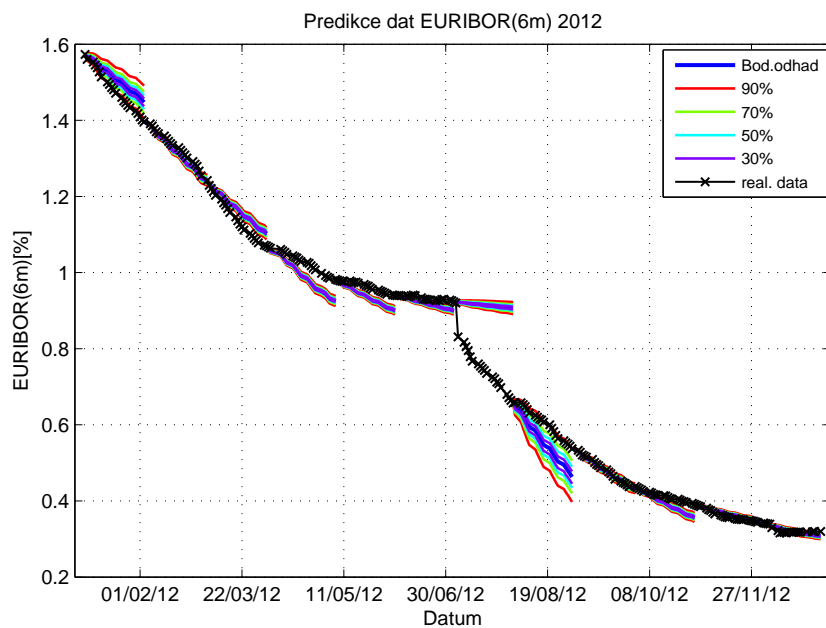


Obrázek A.1.3: Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data *PRIBOR3m* 2012, která v době predikce nejsou známa.

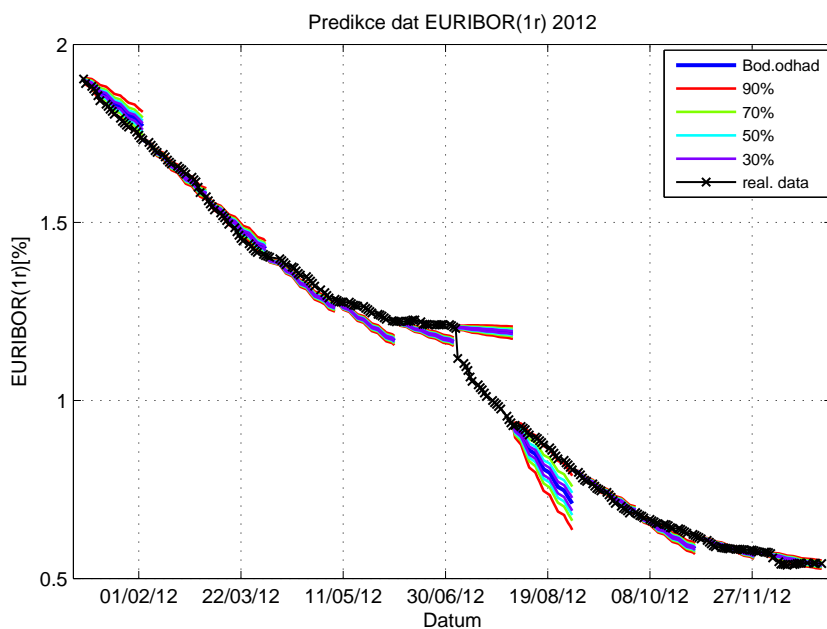
A.2 Grafy predikcí EURIBOR 2012



Obrázek A.2.1: Graf měsíčních predikcí modelem Vašíček pro data *EURIBOR1d* 2012, která v době predikce nejsou známa.



Obrázek A.2.2: Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data *EURIBOR_{6m}* 2012, která v době predikce nejsou známa.



Obrázek A.2.3: Graf měsíčních predikcí modelem Dothan pro data *PRIBOR_{1r}* 2012, která v době predikce nejsou známa.