

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Úvod do teorie náhodných matic a jejich aplikací

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce

RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D.

Vypracovala

Pavla Kříšťanová

květen 2013

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Úvod do teorie náhodných matic a jejich aplikací jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Plzni

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za poskytnutí odborných rad, věcné připomínky, ochotu a vstřícný přístup během zpracování této práce.

Velké poděkování také patří mé rodině za podporu, trpělivost a povzbuzování po dobu mého studia.

Abstrakt:

Hlavním tématem této bakalářské práce je zkoumání spektrálních vlastností náhodných matic. Budou zde především zkoumány dva zákony, které se týkají vlastních čísel náhodných matic s prvky s normovaným normálním rozdělením (říkáme jim gaussovské matice). Prvním z výše zmiňovaných zákonů je Girkův kruhový zákon, který nám říká, že normalizovaná vlastní čísla gaussovských matic jsou rovnoměrně rozptýlena v jednotkovém kruhu se středem v počátku komplexní roviny. Druhý zmiňovaný zákon se nazývá Wignerův polokruhový zákon. Název polokruhový je odvozen od tvaru hustoty pravděpodobnosti, který představuje rovnici polokružnice. Další zmiňovanou veličinou je vzdálenost vlastních čísel, jejíž hustota pravděpodobnosti je popsána pomocí Izrailevovy formule. V této práci jsme se dále zaměřili na zobecnění těchto zákonů pro matice s prvky s libovolným rozdělením. Simulace zmíněných zákonů jsme demonstrovali pomocí prostředí MATLAB a vypořizovali jsme některé zajímavé vlastnosti.

Abstract:

The main topic of this bachelor's thesis is to study the spectral properties of random matrices. Two laws concerning eigenvalues of random matrices with elements with standard normal distribution (we call them Gaussian matrix) were investigated. The first of the above-mentioned laws is Girk's circular law, which states that the normalized eigenvalues of Gaussian matrices are dispersed uniformly in the unit circle centered at the origin of the complex plane. The next law is called the Wigner semicircular law. This semi-circular shape is derived from the probability density function which corresponds to the equation of semicircle. Another mentioned quantity is the distance of eigenvalues, whose probability density function is described by the formula Izrailev. In this study, we have also focused on the generalization of these laws for the matrix with elements with an arbitrary distribution. Simulations of these laws were demonstrated using MATLAB and we have observed some interesting features.

Úvod

O teorii náhodných matic se poprvé objevují zmínky od roku 1928, avšak není jim věnována příliš velká pozornost. Hlavním důvodem je neexistence výkonných počítačů, umožňujících matice velkých řádů studovat. Tato teorie se intenzivněji začala vyvíjet v roce 1955, kdy se Eugen Wigner, jeden ze zakladatelů a průkopníků této teorie, snažil popsat energetické stavy vysoce excitovaných jader těžkých prvků. Pro popis energetických stavů se používá operátor energie, tzv. Hamiltonián. V roce 1955 bylo zjištěno, že vlastní hodnoty Hamiltoniánu mohou být aproximovány pomocí vlastních čísel náhodných matic.

Začátkem 60. let Wignerovi kolegové, Freeman Dyson, Madan Lal Mehta a další pokračovali ve vývoji teorie a našli její další využití. Když Bohigas, Giannoni a Schmit vyslovili předpoklad, že teorii je možné využít při zkoumání spekter libovolného chaotického systému, rychle vzrostl zájem o náhodné matice.

V současné době nachází teorie náhodných matic značné uplatnění při modelování procesů v biologii, fyzice, ekonomii, dopravě a mnoha dalších vědních oborech.

Obsah

1	Základní pojmy	7
1.1	Definice základních pojmů	7
1.1.1	Vlastní čísla a vlastní vektory	9
1.2	Náhodné veličiny	10
1.2.1	Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti	11
1.2.2	Střední hodnota a rozptyl	12
1.2.3	Gaussovo rozdělení	13
1.2.4	Spojité rovnoměrné rozdělení	14
1.2.5	Gama rozdělení	15
1.2.6	Exponenciální rozdělení	15
1.3	Náhodná a pseudonáhodná čísla	16
2	Historie teorie náhodných matic	17
3	Náhodné matice	21
3.1	Obecné gaussovské matice	21
3.2	Wignerova matice	23
3.2.1	Gaussovské ortogonální matice	23
3.2.2	Gaussovské unitární matice	27
3.2.3	Pásové náhodné matice	29
4	Vlastnosti gaussovských matic	32
4.1	Počet reálných vlastních čísel obecné gaussovské matice	32
4.2	Hustota pravděpodobnosti vlastních čísel	35
4.2.1	Girkův kruhový zákon	35
4.2.2	Wignerův polokruhový zákon	38
4.3	Hustota pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel	44
5	Vlastnosti negaussovských náhodných matic	51
5.1	Girkův kruhový zákon	51
5.2	Wignerův polokruhový zákon	56
5.3	Izrailevova formule	59

Kapitola 1

Základní pojmy

Tato práce je věnována náhodným maticím, proto nejprve budou uvedeny základní pojmy vztahující se k maticím.

1.1 Definice základních pojmů

Vzhledem k širokému uplatnění matic v teoretických i aplikačních oblastech matematiky je tato problematika rozpracovaná v mnoha základních učebnicích. Pro přehlednost jsou zde uvedeny jen ty pojmy a tvrzení, která budou následně používána.

Matice jsou často používány k výpočtu soustav lineárních rovnic, k vyjádření obecné rotace vektorů, transformaci vektorů od jedné báze ke druhé, anebo k vyjádření operátorů v kvantové mechanice.

Definice 1. *Matice A typu m/n nad tělesem T je soubor $m \cdot n$ prvků z tělesa T uspořádaných do m řádků a n sloupců.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pokud se jedná o těleso reálných čísel \mathbb{R} , nazýváme matici A reálnou maticí.

Pokud se jedná o těleso komplexních čísel \mathbb{C} , nazýváme matici A komplexní maticí.

Prvek a_{ij} je prvek matice A na pozici i, j . První index i je index řádkový, druhý index j je index sloupcový. Prvky a_{kk} , pro které platí, že řádkový index je stejný jako sloupcový, se nazývají *diagonální prvky*.

Matice A typu m/n se nazývá *čtvercová matice* řádu n , jestliže $m = n$.

Matice A typu m/n se nazývá *obdelníková matice*, jestliže $m \neq n$.

Matice A typu m/n se nazývá *nulová matice*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i=1,2,\dots,m$ a pro každé $j=1,2,\dots,n$, t.j. jestliže na každém místě matice je prvek roven 0.

Čtvercová matice $A = [a_{ij}]$ řádu n se nazývá *diagonální matice*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i \neq j$. Používáme značení $diag[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$.

Jednotková matice řádu n je matice $I = diag[1, 1, \dots, 1]$.

Jestliže A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T , potom čtvercová matice A^{-1} řádu n nad T se nazývá *inverzní matice* k matici A , jestliže

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

kde I je jednotková matice.

Matice A typu m/n je *horní* (resp. *dolní*) *trojúhelníková matice*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i > j$ (resp. $i < j$).

Reálné a komplexní matice A typu m/n se nazývají *pásové matice*, pokud pro ně platí, že jsou čtvercové a obsahují v pravém horním a levém dolním rohu "nulový trojúhelník". Takové matice jsou charakterizovány pomocí pološířky pásu, který označujeme b .

Čtvercová matice A řádu n je *symetrická matice*, jestliže $a_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i=1,2,\dots,m$ a pro každé $j=1,2,\dots,n$.

Je-li matice $A = [a_{ij}]$ typu m/n , potom se matice $A^T = [a_{ji}]$ typu n/m nazývá *transponovaná matice* k matici A .

Komplexní čtvercová matice A^H se nazývá *hermitovskky sdružená matice*, pokud platí $A^H = (A^*)^T$, kde A^* je komplexně sdružená matice.

Reálná symetrická matice A řádu n se nazývá *pozitivně definitní matice*, pokud pro každý nenulový vektor x platí $x^T Ax > 0$. Každá *pozitivně definitní matice* má vždy kladná vlastní čísla. Analogicky je definovaná *negativně definitní matice* (vztah s obrácenou nerovností).

Pokud platí $x^T Ax \geq 0$, řekneme, že matice A se nazývá *pozitivně semidefinitní matice*. Analogicky je definovaná *negativně semidefinitní matice* (vztah s obrácenou nerovností).

Každá pozitivně definitní matice je podle této definice také pozitivně semidefinitní maticí.

Definice 2. Necht' $A = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T . Potom determinant matice A je prvek

$$\det A = \sum_{\pi} zn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π na množině $\{1, 2, \dots, n\}$, $zn(\pi)$ je znaménko permutace, jenž nabývá hodnoty 1 , pokud je permutace sudá, anebo hodnoty -1 , pokud je permutace lichá.

Čtvercová matice A se nazývá *regulární matice*, jestliže $\det A \neq 0$.

Čtvercová matice A se nazývá *singulární matice*, jestliže $\det A = 0$.

Ortogonální matice A je reálná čtvercová matice, jejíž transponovaná matice je současně maticí inverzní ($A^T = A^{-1}$). Pro takovou matici platí $A^T A = A A^T = I$. Dále požadujeme, aby sloupce a řádky ortogonální matice byly normovány.

Unitární matice A je čtvercová komplexní matice, jejíž hermitovskly sdružená matice je současně maticí inverzní ($A^H = A^{-1}$). Pro takovou matici platí $A^H A = A A^H = I$. Poznamenejme, že reálná unitární matice je ortogonální.

[1]

1.1.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

Speciální důraz v teorii náhodných matic je kladen na problematiku spektrálních vlastností, proto si v následující kapitole nadefinujeme vlastní čísla a vlastní vektory matic.

Definice 3. Necht' A je čtvercová matice, potom $\det(\lambda I - A)$ se nazývá *charakteristický polynom matice* A .

Kořeny charakteristického polynomu nazýváme *vlastní (charakteristická) čísla matice* A . Jestliže λ_0 je vlastní číslo, potom nenulový vektor h takový, že

$$(\lambda_0 I - A)h = 0, \tag{1.1}$$

t.j. $\lambda_0 h = Ah$, se nazývá vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ_0 .
Množina všech vlastních čísel matice A se nazývá spektrum matice A .

[1]

Souvislostem mezi charakterem vlastních čísel a typem matice je věnována celá řada odborných prací. V této práci budou využita zejména tato tvrzení:

Tvrzení 1

(a) Nula je vlastním číslem matice A právě tehdy, když je matice singulární.
Je-li matice A regulární, pak nula není jejím vlastním číslem.

(b) Je-li matice A symetrická a reálná, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná.

(c) Jestliže k matici A existuje inverzní matice A^{-1} , pak λ je vlastním číslem matice A tehdy, pokud λ^{-1} je vlastním číslem matice A^{-1} .

Dále platí, že vlastní vektory matice A odpovídající vlastnímu číslu λ jsou stejné jako vlastní vektory matice A^{-1} odpovídající vlastnímu číslu λ^{-1} .

(d) Pokud má matice A vlastní číslo λ a odpovídající vlastní vektor u , pak matice A^2 má vlastní číslo λ^2 a jemu odpovídající vlastní vektor je také vektor u .

(e) Pokud je vlastním číslem reálné matice A komplexní číslo z , pak je komplexně sdružené číslo \bar{z} také vlastním číslem matice A .

(f) Pokud je matice A hermitovskou maticí, pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.

Důkazy uvedených tvrzení lze nalézt například v [1].

1.2 Náhodné veličiny

Měření, pokusy, výrobní procesy apod., se kterými se setkáváme v praxi, lze z hlediska pravděpodobnosti považovat za náhodné pokusy, při kterých není výsledek jednoznačně určen výchozími podmínkami. Výsledek takového náhodného pokusu nazýváme náhodným jevem.

Často se stává, že jsme schopni, nebo je pro nás výhodné a užitečné popsat náhodný jev $\omega \in \Omega$ prostřednictvím nějaké jeho číselné charakteristiky $X(\omega)$.

Příkladem takových přirozeně zavedených charakteristik je rozměr, nebo doba trvání nějaké sledované situace apod. Takto získanou číselnou charakteristiku nazýváme náhodnou veličinou X .

V teorii pravděpodobnosti je pro přesnou definici pravděpodobnosti vycházeno z pravděpodobnostního prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je prostor všech možných výsledků, \mathcal{A} je takový systém podmnožin Ω , který tvoří σ -algebru a P je pravděpodobnostní míra definovaná na σ -algebře \mathcal{A} . Náhodnou veličinu $X(\omega)$ pak definujeme jako měřitelnou funkci z prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde \mathcal{B} je systém borelovských podmnožin množiny \mathbb{R} .

[2]

1.2.1 Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti

Definice 4. *Distribuční funkci náhodné veličiny X definujeme vztahem*

$$F(x) = P(X \leq x), \text{ pro } x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Distribuční funkce náhodné veličiny X přiřazuje každému reálnému číslu x pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné tomuto číslu.

Z definice distribuční funkce a s přihlédnutím k vlastnostem pravděpodobnosti plynou tato tvrzení:

Tvrzení 2

(a) $0 \leq F(x) \leq 1$, pro $x \in \mathbb{R}$.

(b) $F(x)$ je neklesající funkce.

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Důkazy uvedených tvrzení lze najít v různých odborných knihách, jako je např. [3].

V praxi se obvykle vyskytují dva typy distribučních funkcí. Pokud existuje taková funkce f , že pro každé reálné x platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (1.3)$$

pak říkáme, že X je *náhodná veličina spojitého typu*.

Pokud F je funkce skoků, tedy pokud funkce F má v konečné nebo spočetné množině hodnot $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ skok a jinak je konstantní, mluvíme o *náhodné veličině diskrétního typu*.

K popisu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny spojitého typu se častěji než distribuční funkce používá právě hustota pravděpodobnosti.

Definice 5. *Necht' X je náhodná veličina spojitého typu a její distribuční funkce je označena $F(x)$. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je nezáporná funkce taková, pro kterou platí*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

[2]

1.2.2 Střední hodnota a rozptyl

Distribuční funkce podává o náhodné veličině úplnou informaci. Známe-li tuto funkci, pak víme, jakých hodnot může uvažovaná veličina nabývat a jaké jsou pravděpodobnosti, které těmto hodnotám odpovídají. V praxi však často potřebujeme nějaké konkrétnější a přehlednější vyjádření této informace. K takovému zestručněnému popisu užíváme číselné hodnoty, které nazýváme charakteristiky náhodných veličin. Nejčastěji používanými charakteristikami náhodných veličin jsou *střední hodnota*, která popisuje polohu (úroveň) náhodné veličiny a *rozptyl*, který popisuje variabilitu náhodné veličiny.

Střední hodnota

Střední hodnotu náhodné veličiny X označujeme obvykle symbolem EX . Pro náhodné veličiny diskrétního typu je střední hodnota definována vztahem

$$EX = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i). \quad (1.5)$$

Jde tedy v podstatě o jakýsi průměr možných hodnot náhodné veličiny X , v němž jsou jednotlivé hodnoty váženy odpovídajícími pravděpodobnostmi.

Střední hodnota náhodné veličiny spojitého typu X , mající hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, bude obdobně definována jako

$$EX = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx. \quad (1.6)$$

Rozptyl

Rozptyl je mírou variability náhodné veličiny X a značíme jej DX . Obecně můžeme rozptyl vyjádřit ve tvaru

$$DX = EX^2 - (EX)^2, \quad (1.7)$$

pokud je EX^2 konečná.

Pro náhodné veličiny diskrétního typu lze vzorec (1.7) rozepsat

$$DX = \sum_{i=1}^{+\infty} [x_i - EX]^2 P(X = x_i).$$

Obdobně také pro náhodné veličiny spojitého typu

$$DX = \int_{\mathbb{R}} [x - EX]^2 f(x) dx.$$

[4]

1.2.3 Gaussovo rozdělení

Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti je jedno z nejdůležitějších rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny a má širokou škálu uplatnění.

Definice 6. *Náhodná veličina X má Gaussovo neboli normální rozdělení s parametry $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, jestliže pro její hustotu $f(x)$ platí*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Gaussovo rozdělení se obvykle značí $N(\mu, \sigma^2)$, parametrem σ^2 označujeme rozptyl a μ je střední hodnota.

Rozdělení $N(0, 1)$ bývá označováno jako *normované normální rozdělení* a jeho hustota je symetrická kolem 0. To je zapříčiněno nulovou střední hodnotou.

Střední hodnota normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ je definovaná

$$EX = 0$$

a rozptyl

$$DX = 1.$$

Velký význam nomovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ vyplývá především ze skutečnosti, že je-li veličina součtem velkého množství nezávislých vlivů, pak její pravděpodobnostní rozdělení je přibližně Gaussovo.

Důležitost Gaussova rozdělení spočívá v tom, že za určitých podmínek dobře aproximuje řadu jiných pravděpodobnostních rozdělení.

Třída normálních rozdělení je stabilní v následujícím smyslu: součet, anebo rozdíl dvou nezávislých veličin s normálním rozdělením má opět normální rozdělení. Navíc lineární kombinace nezávislých normálních náhodných veličin má opět normální rozdělení. Obecně lze formulovat následující tvrzení o lineární kombinaci normálních rozdělení.

Věta 7. *Necht' $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1, 2, \dots, n$ jsou nezávislé veličiny, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$, pak $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \sim N(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$.*

Důkaz je uveden v [5].

1.2.4 Spojité rovnoměrné rozdělení

Spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti přiřazuje všem hodnotám náhodné veličiny X stejnou pravděpodobnost. Rovnoměrné rozdělení má také svoji diskrétní podobu, ale tou se nebudeme v této práci zabývat.

Definice 8. *Náhodná veličina X , která nabývá libovolné reálné hodnoty x z intervalu $(a;b)$ a její výskyt na celém intervalu $(a;b)$ je stejně možný, má spojité rovnoměrné rozdělení s parametry $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$, jestliže pro její hustotu $f(x)$ platí*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{pro } x \in \langle a; b \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Mimo daný interval $\langle a; b \rangle$ je tedy hustota pravděpodobnosti nulová.

Střední hodnota rovnoměrného rozdělení je dána vztahem

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

a rozptyl

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Poznamenejme, že se o tomto rozdělení můžeme bavit také jako o rozdělení pravděpodobnosti, jež má lehké konce.

1.2.5 Gama rozdělení

Gama rozdělení je zobecněním několika dalších rozdělení, jako je například rozdělení exponenciální.

Definice 9. Náhodná veličina X má gama rozdělení s parametry $\alpha, \beta > 0$, jestliže její hustota pravděpodobnosti $f(x)$ má tvar

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ pro } x \geq 0, \quad (1.10)$$

kde Γ je gama funkce definovaná pro všechna komplexní čísla x kromě celých záporných čísel a nuly

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Střední hodnota gama rozdělení je dána

$$EX = \alpha\beta$$

a rozptyl

$$DX = \alpha\beta^2.$$

Dama rozdělení je příkladem nesymetrického rozdělení.

1.2.6 Exponenciální rozdělení

Dalším typem často využívaného rozdělení je rozdělení exponenciální a náhodná veličina X může nabýt libovolné reálné hodnoty x z intervalu $\langle 0; \infty \rangle$.

Definice 10. Náhodná veličina X má rozdělení exponenciální s parametrem δ , pokud její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-x/\delta}, & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Střední hodnota exponenciálního rozdělení je dána

$$EX = \delta$$

a rozptyl

$$DX = \delta^2.$$

1.3 Náhodná a pseudonáhodná čísla

Protože velká část této práce je zaměřena na simulační experimenty, zmíníme zde několik poznámek k simulačním postupům.

Pravděpodobnostní chování řady statistických postupů, ať již odhadů, testovaných statistik, či jiných procedur, často nelze vyšetřovat analyticky. Buď rozdělení pravděpodobnosti těchto statistik vůbec neumíme spočítat, nebo je její analytický výpočet příliš složitý.

V takových situacích máme k dispozici dvě možnosti:

- (1) zkoumat jejich asymptotické chování
- (2) sledovat jejich chování při simulacích

Pro pochopení řady složitých procesů v ekonomii, technice, biologii, medicíně i dalších oborech se stále častěji místo reálných experimentů používá modelování na počítačích. Aby tyto experimenty co nejvíce odpovídaly skutečnosti, je potřeba do jejich deterministického chodu vnést prvky náhody. Těmito prvky mohou být dodatečný šum, rušení, neočekávaná pozorování, či náhodné děje běžně se vyskytující v praxi.

Při simulacích modelů na počítačích právě náhodná čísla reprezentují vliv náhody. Tato náhodná čísla si můžeme pomocí počítače vygenerovat a pokud dojde ke generování nealgoritmicky, jedná se o výsledky fyzikálních procesů, a tudíž o *náhodná čísla*. Příkladem mohou být sálání, fúze, difúze, absorbce světla a další.

V případě použití algoritmu ke generování čísel nemůžeme tato čísla nazývat náhodnými. Tento algoritmus označujeme jako generátor náhodných čísel a vygenerovaná čísla *čísla pseudonáhodnými*. U generátorů pseudonáhodných čísel můžeme po určité době sledovat periodu. Po dlouhém intervalu se tedy začnou opakovat.

Abychom mohli pseudonáhodná čísla vygenerovat, musíme nadefinovat vstupní parametry pro zvolený algoritmus:

- od jaké hodnoty pseudonáhodné číslo začíná
- jakou hodnotu číslo nesmí překročit
- maximální rozpětí mezi vygenerovanými čísly a jiné.

[6, 7]

Kapitola 2

Historie teorie náhodných matic

Teorie náhodných matic fascinuje jak matematiky, tak fyziky a to již od roku 1928, kdy byly poprvé zavedeny v matematické statistice Wishartem [8]. Až po velmi dlouhé době teorie náhodných matic nabyla své důležitosti, když Wigner představil koncept statistického rozložení jaderné energie v roce 1950. Avšak trvalo až do roku 1955, než Wigner představil jednotlivé skupiny náhodných matic. Myšlenka invariance skupin náhodných matic byla zavedena ve fyzice Porterem a Rosenzweigem [9] až po té, co se objevily v matematické literatuře. K analýze hustoty vlastních čísel vynalezl Mehta [10] metody ortogonálním polynomem.

Matematické základy teorie náhodných matic byly zveřejněny v mnoha Dysonových pracích. Představil klasifikaci skupin náhodných matic podle jejich invariance vůči transformacím [11]. Prvky matic odpovídající skupinám náhodných matic jsou komplexní i reálné. Gaussovské skupiny symetrických náhodných matic známe jako gaussovské ortogonální matice (GOE), gaussovské unitární matice (GUE), anebo jako pásové náhodné matice (BRME).

Dyson také zformuloval základní filozofii teorie náhodných matic. To bylo zpřesněno Balianem, který získal skupiny gaussovských náhodných matic z minimalizace informační entropie.

Další zajímavý výsledek Dysonovy práce byl vztah mezi teorií náhodných matic a teorií přesně integrovatelných systémů. Důkladně je jejich vztah rozebrán v knize od Forrestra. Jako svou další myšlenku uvádí Dyson použití informační entropie ve spektru náhodných matic.

Počátky vývoje teorie náhodných matic jsou dobře shrnuty v prvním vydání knihy od Mehty. Tato důležitá kniha obsahuje mnoho matematických detailů, u kterých bylo

v průběhu let prokázáno, že jsou velmi užitečné. Další takovou knihu sepsal Porter. Obsahuje důležité dokumenty o teorii náhodných matic, které byly napsány před rokem 1965.

Přibližně ve stejnou dobu, jako na počátku vývoje teorie náhodných matic v oblasti jaderné fyziky, se zrodilo v práci Andersona [12] pole neuspořádaných systémů na lokalizaci vlnových funkcí v jednorozměrných neuspořádaných systémech. Uvažoval jednorozměrnou mřížku s náhodným potenciálem u každého mřížkového bodu. Zjistil, že vlastní funkce takových systémů jsou lokalizovány exponenciálně. Jeho práce měla silný vliv na experimentální i teoretickou fyziku pevných látek.

Další aplikaci na začátku vývoje teorie náhodných matic představuje teorie malých kovových částíček od Gorkova a Eliasberga, která je v současné době součástí mezoskopické fyziky.

Teorie náhodných matic, jež byla poprvé formulována v matematické statistice, pokračovala ve vývoji v matematice nezávisle na vývoji ve fyzice. Významné výsledky, pokud jde o integrační opatření invariantních náhodných matic, byly získány díky pracem od Hua [13]. Výsledky, více než desetileté práce shrnul ve své knize, která se objevila v roce 1959. Ta však zůstala do značné míry neznámá.

Pouze malý počet matematiků pracoval na integrálech, které se zobrazují v teorii náhodných matic. Práce Selberga je známá, ale ani v nejmenším ne tolik jako práce Mehty, který věnoval kapitolu ve druhém vydání své knihy právě tomuto tématu. Girko sepsal řadu matematických knih týkajících se analytických vlastností rozdělení vlastních čísel velkých náhodných matic. Matematické literatury zůstaly až do nedávné doby převážně bez povšimnutí fyziků.

Překvapivější je, že teorie neuspořádaných systémů a aplikace teorie náhodných matic v oblasti jaderné fyziky probíhaly víceméně nezávisle, dokud nevznikla klíčová práce Efetova [14] na supersymetrické metody a jejich aplikace na teorii malých kovových částíček.

Hlavní události v teorii náhodných matic v průběhu desetiletí po Mehtově sepsání prvního vydání knihy patřily aplikaci v jaderné fyzice. V roce 1973 vyslovil Montgomery domněnku pro asymptotickou limitu dvoubodové korelační Riemannovy funkce na kritické hranici. Spolu s Dysonem si uvědomili, že jeho odhadovaný výsledek je dvoubodová funkce skupiny GUE. Propojení bylo rozšířeno podle Hejhala, Rudnicka a Sarnaka, ačkoliv úplný soulad korelačních funkcí s teorií náhodných matic dosud nebyl prokázán.

Teorie náhodných matic se stala velmi užitečnou pro odhady veličin v teorii čísel, které byly dříve nedosažitelné jakýmkoliv způsobem.

V období 1975-1985 se teorie náhodných matic vyvíjela velmi rychle a sjednotila se s teorií neuspořádaných systémů. První kroky v tomto směru udělali Edwards a Anderson, kteří ve své knize představili teorii o spinech. Předpokládali přirozený rámec pro oblasti teoretické formulace Andersonova modelu, který byl veřejnosti představen až o několik let později Wegenerem.

Mnoho vědců spoléhalo na dřívější práce Wegenera. Jedním z nich byl Efetov, který ukázal, že rozdělení funkce neuspořádaného systému je dáno nelineárním supersymetrickým modelem. V této oblasti dvoubodové korelační funkce se jeho výsledky shodují s výsledky získanými od Dysona.

Supersymetrické metody byly velmi plodné. V následujících letech bylo mnoho dalších nových výsledků získáno pomocí takových metod. Mimo jiné můžeme uvést výsledky parametrických korelací, kde jsou považovány za vlastní čísla pro různé hodnoty externího parametru.

V roce 1986 byl hlavní vývoj experimentální a sloužil k objevení univerzální vodivosti fluktuací podle Webba a Washburna . Avšak až poté, co to teoreticky předpověděli Altshuler, Stone a Lee. Tímto objevem začala nová oblast chaotických kvantových teček. Přepravní vlastnosti takových kvantových teček mohou být popsány jako supersymetrický nelineární model. Ve skutečnosti můžeme říci, že složené jádro je chaotická kvantová tečka.

Všechny teoretické i praktické výzkumy vedly k propojení teorie náhodných matic s několika oblastmi kvantové fyziky: například QCD na mřížce nebo Seiberg-Wittonovo řešení dvoudimenzionální supersymetrickou kalibrační teorií. Důležitým výsledkem je Eguchi-Kawaiova redukce.

V teorii neuspořádaných supravodičů ještě mohou existovat jiné čtyři typy náhodných matic, což umožňuje jasně odlišit další skupiny. Bylo zjištěno Dysonem, že každá ze tří Wigner-Dysonových náhodných matic odpovídá symetrickému prostoru. Zjistilo se, že distribuce největších vlastních čísel v GUE je dána Painlevého rovnicemi. Tento vývoj našel uplatnění při řešení dlouholetých matematických problémů s rozdělením rostoucí podposloupnosti. Ve skutečnosti je vyhledávané rozdělení stejné jako u největšího vlastního čísla skupiny GUE.

Brzy si uvědomili, že podrobné vlastnosti vlastních čísel totiž nezávisí na specifikách rozdělení pravděpodobnosti. Jedním z hlavních důvodů pro práci s teorií náhodných matic je již zmíněn v práci od Dysona [11], kde tvrdí, že pokud je systém dostatečně složitý, stav systému již není důležitý. Avšak musíme říci, že trvalo až do počátku osmdesátých let, než bylo zjištěno, že klíčem je odpovídající chaotický systém.

Ačkoliv zde bylo několik studií, které se týkaly teorie náhodných matic klasického chaosu, bylo to jednoznačně formulováno až Bohigasem na základě numerických studií za podmínky, že odpovídající systém je chaotický. Tato domněnka byla potvrzena řadou systémů. Úplný důkaz této myšlenky stále chybí a značné množství analytického chápání bylo získáno na základě semiklasické analýzy. Teorie náhodných matic hraje zásadní roli při studiu kvantového chaosu.

V tomto krátkém historickém pohledu můžeme vidět, že teorie náhodných matic byla použita ve velkém množství vědních oborů. Její rozsah však nebyl zdaleka dosud vyčerpán, jak je uváděno v publikacích z poslední doby. Ty jsou různorodé stejně jako aplikace na finančních korelacích a bezdrátové komunikaci.

[15, 16]

Kapitola 3

Náhodné matice

Teoreticky bychom mohli říci, že náhodnou maticí rozumíme takovou matici, jejíž prvky jsou tvořeny libovolnými náhodnými veličinami. Tyto veličiny mohou pocházet z libovolného pravděpodobnostního rozdělení.

Prakticky se však setkáváme se speciálními typy matic. V této práci se nejprve zaměříme na matice, jejichž prvky mají náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

V praktických aplikacích obvykle na matici klademe další požadavky, například aby byla daná matice symetrická nebo hermitovská.

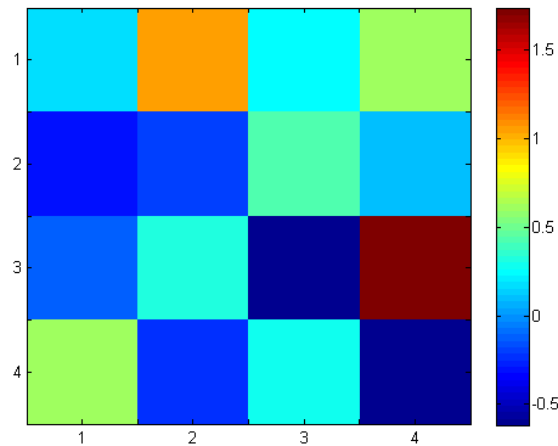
Již v *Kapitole 2* obsahující historii teorie náhodných matic jsme uvedli klasifikaci třech základních typů gaussovských matic. Jedná se o gaussovské ortogonální matice (GOE), gaussovské unitární matice (GUE) a pásové náhodné matice (BRME). Tyto tři typy náhodných gaussovských matic budeme přesněji definovat v následující kapitole. Nejprve se však zmíníme o obecných maticích s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

3.1 Obecné gaussovské matice

Definice 11. *Necht' A je čtvercová matice, jejíž prvky jsou náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$, pak matici A nazveme **gaussovskou obecnou maticí**.*

Jako ukázkou si můžeme uvést příklad obecné gaussovské matice A a pro názornost si zobrazíme barevné vykreslení hodnot jejích polí prvků a_{ij} . Vzhledem k charakteru normálního rozdělení $N(0,1)$ lze očekávat, že simulovaná data se budou pohybovat v intervalu $(-3,3)$ a na obrázku barevně zachytíme tyto hodnoty.

$$A = \begin{pmatrix} 0.18 & 1.05 & 0.23 & 0.60 \\ -0.31 & -0.19 & 0.44 & 0.09 \\ -0.13 & 0.33 & -0.62 & 1.73 \\ 0.59 & -0.24 & 0.27 & -0.61 \end{pmatrix}$$



Obrázek 3.1: Obecná gaussovská matice řádu $n = 4$

Jak naznačuje i grafické znázornění, nemají obecné gaussovské matice žádnou specifickou strukturu, a proto ani pro jejich vlastní čísla, která jsou obecně komplexní, nelze formulovat žádná speciální tvrzení.

Ukážeme tři obecné gaussovské matice A, B, C a vypíšeme jejich vlastní čísla a, b, c . Matice vygenerujeme pomocí prostředí MATLAB.

$$A = \begin{pmatrix} -1.51 & -0.26 & -0.95 & 0.01 \\ -0.45 & 0.44 & -0.74 & -3.03 \\ -0.16 & 0.39 & -0.51 & -0.46 \\ 0.28 & -1.25 & -0.32 & 1.24 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 2.86$$

$$a_2 = -0.65$$

$$a_3 = -0.91$$

$$a_4 = -1.63$$

$$B = \begin{pmatrix} 1.35 & 1.44 & 2.91 & -0.47 \\ -1.07 & -1.96 & 0.83 & -0.27 \\ 0.96 & -0.20 & 1.38 & 1.10 \\ 0.12 & -1.21 & -1.06 & -0.28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 2.90 \\ b_2 &= -0.23 + 1.45i \\ b_3 &= -0.23 - 1.45i \\ b_4 &= -1.95 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.54 & 0.32 & 3.58 & 0.73 \\ 1.84 & -1.31 & 2.77 & -0.06 \\ -2.26 & -0.43 & -1.35 & 0.71 \\ 0.86 & 0.34 & 3.03 & -0.21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.06 + 2.34i \\ c_2 &= 0.06 - 2.34i \\ c_3 &= -1.22 + 0.11i \\ c_4 &= -1.22 - 0.11i \end{aligned}$$

Vidíme, že vlastní čísla jsou opravdu obecně komplexní. Matice A měla všechna vlastní čísla reálná, matice B měla 2 vlastní čísla reálná, 2 vlastní čísla komplexní a matice C měla všechna svá vlastní čísla komplexní. Při podrobnějších studiích však lze o vlastních číslech obecných matic získat zajímavé vlastnosti. Právě jim se budeme více věnovat v *Kapitole 4.1*.

[16, 17, 18, 19]

3.2 Wignerova matice

Pojmem Wignerova matice souhrnně označujeme naše tři základní skupiny náhodných matic (gaussosvské ortogonální matice (GOE), gaussovské unitární matice (GUE), náhodné pásové matice (BRME)). Název dostaly podle Eugena Wignera, který se původně zabýval symetrickými čtvercovými maticemi H_n řádu n , kde diagonální prvky nabývaly hodnoty 0 a nediagonální prvky byly ± 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Později si však uvědomil, že hodnoty vlastních čísel takových matic budou velmi obecné a zaměřil se na speciálnější typy matic.

3.2.1 Gaussovské ortogonální matice

Gaussovské ortogonální matice, nebo-li GOE (z anglického Gaussian orthogonal ensemble) jsou první ze tří základních skupin náhodných matic, patřících mezi Wignerovy

matice, kterými se budeme v naší práci zabývat.

Definice 12. *Necht' A je čtvercová matice řádu n , jejíž prvky jsou z normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$. Symetrická čtvercová matice H_n řádu n , tvořená pomocí matice A*

$$H_n = \frac{(A + A^T)}{2}, \quad (3.1)$$

*se nazývá **gaussovská ortogonální matice (GOE)**.*

Lze snadno ukázat, že pro prvky h_{ii} této matice platí

$$h_{ij} \sim N(0, \sigma_{ij}), \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}), \quad (3.2)$$

$$\text{kde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{když } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Vidíme tedy, že diagonální prvky jsou s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$ a mimodiagonální prvky s rozdělením $N(0, \frac{1}{2})$.

Protože matice H_n je symetrická a reálná, vlastní čísla matice GOE jsou reálná. To vyplývá z *Tvrzení 1b* na straně 10.

Další důležitou vlastností matic GOE je invariantnost vůči transformaci ortogonální maticí.

Věta 13. *Necht' H_n je maticí GOE, pak je tato matice invariantní vůči transformaci ortogonální maticí Q , tzn.*

$$H_n \in GOE \Rightarrow Q^T H_n Q \in GOE \quad (3.4)$$

Důkaz je založen na využití *Věty 7*:

Nejprve rozepíšeme prvek vzniklý násobením dvou matic

$$(A \cdot B) = [\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}]$$

Přeznačíme si $Q^T H_n Q$ jako matici M pro jednodušší zápis.

Nyní využijeme výše uvedeného vztahu a dostaneme vyjádření pro prvek m_{ij} matice M

$$m_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n h_{lr} q_{li} q_{rj} .$$

Prvek m_{ij} je tedy lineární kombinací prvku h_{lr} . Protože podle předpokladů má h_{ij} normální rozdělení ($h_{ii} \sim N(0,1)$ a $h_{ij} \sim N(0, \frac{1}{2})$), má jejich lineární kombinace podle *Věty 7* také normální rozdělení.

Dále se zaměříme na to, jakou má prvek m_{ij} střední hodnotu a rozptyl.

$$E(m_{ij}) = E\left(\sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n h_{lr} q_{li} q_{rj}\right) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n q_{li} q_{rj} \underbrace{E(h_{lr})}_{=0} = 0$$

Střední hodnota je tedy rovna 0.

Pro rozptyl $D(m_{ij})$ platí

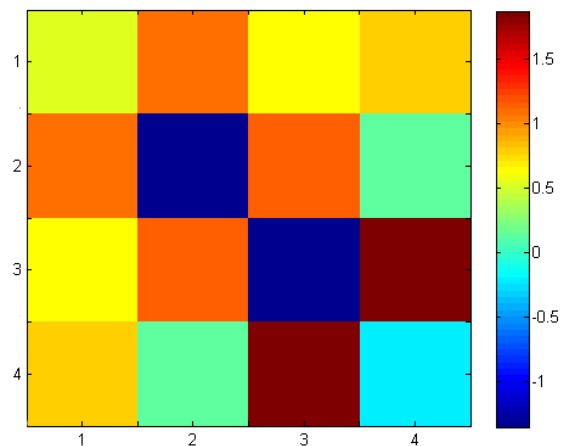
$$\begin{aligned} D(m_{ij}) &= D\left(\sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n h_{lr} q_{li} q_{rj}\right) = D(h_{11} q_{1i} q_{1j} + \\ &\quad + h_{12} q_{1i} q_{2j} + \dots \\ &\quad \dots + h_{nn} q_{ni} q_{nj}) = \\ &= (q_{1i} q_{1j})^2 D(h_{11}) + \\ &+ (q_{1i} q_{2j})^2 D(h_{12}) + \dots \\ &\quad \dots + (q_{ni} q_{nj})^2 D(h_{nn}) = \\ &= (q_{1i} q_{1j})^2 \cdot 1 + \\ &+ (q_{1i} q_{2j})^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots \\ &\quad \dots + (q_{ni} q_{nj})^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Nyní již lze za použití vztahů $\sum_{r=1}^n q_{li} q_{ri} = 1$ a $\sum_{r=1}^n q_{ri} q_{rj} = 0$ (protože se jedná o ortogonální matici Q) ukázat, že pro $i = j$ je rozptyl $D(m_{ij}) = 1$ a pro $i \neq j$ je $D(m_{ij}) = \frac{1}{2}$.

□

Stejně jako jsme si uvedli příklad u obecných gaussovských matic, také zde napíšeme příklad náhodné matice H_n , která je maticí GOE a názorně zobrazíme hodnoty polí prvků h_{ij} . Grafické znázornění nám zdůrazní symetričnost studované matice H_n .

$$H_n = \begin{pmatrix} 0.54 & 1.08 & 0.66 & 0.79 \\ 1.08 & -1.31 & 1.17 & 0.14 \\ 0.66 & 1.17 & -1.35 & 1.87 \\ 0.79 & 0.14 & 1.87 & -0.21 \end{pmatrix}$$



Obrázek 3.2: Gaussovská ortogonální matice řádu $n = 4$

Vlastní čísla této gaussovské ortogonální matice (GOE) jsou opravdu reálná, jak jsme demonstrovali výpočtem vlastních čísel v prostředí MATLAB. Vlastní čísla jsou:

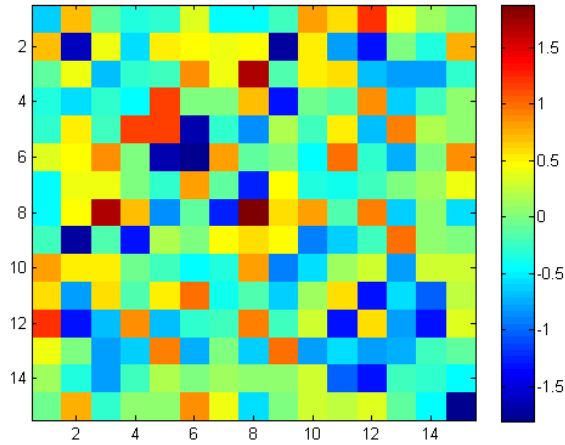
$$h_1 = 2.42$$

$$h_2 = -0.12$$

$$h_3 = -1.41$$

$$h_4 = -3.20$$

Teorie náhodných matic je nejčastěji používána pro matice s velkým řádem n , a proto následující vygenerovaná matice bude většího řádu, než matice předchozí. Právě na této matici bude lépe vidět symetričnost gaussovské ortogonální matice (GOE).



Obrázek 3.3: Gaussovská ortogonální matice řádu $n = 15$

[16, 17, 18, 19]

3.2.2 Gaussovské unitární matice

Gaussovské unitární matice, nebo-li GUE (z anglického Gaussian unitary ensemble) jsou druhou ze tří základních skupin náhodných matic. Také GUE patří mezi Wignerovy matice a následující kapitola je věnována právě těmto maticím.

Definice 14. Necht' A je čtvercová matice řádu n , jejíž prvky jsou komplexní čísla, které mají reálnou i imaginární složku z $N(0,1)$. Hermitovská čtvercová matice H_n řádu n , tvořená pomocí matice A

$$H_n = \frac{(A + A^H)}{2}, \quad (3.5)$$

kde A^H je hermitovsky sdružená matice ke komplexní matici A , se nazývá **gaussovská unitární matice (GUE)**.

Věta 15. Necht' H_n je gaussovská unitární matice (GUE), pak její diagonální prvky jsou tvořeny pouze reálnou částí.

Důkaz:

$$h_{ii} = \frac{a_{ii} + a_{ii}^*}{2} = \frac{Re(a_{ii}) + iIm(a_{ii}) + Re(a_{ii}^*) - iIm(a_{ii}^*)}{2} = Re(a_{ii})$$

□

O reálné části diagonálních prvků můžeme říci, že jsou z normovaného normálního rozdělení

$N(0,1)$ a jejich imaginární části jsou nulové. Reálná část i imaginární část mimodiagonálních prvků (zabezpečují hermiticitu) jsou náhodné veličiny s rozdělením $N(0, \frac{1}{2})$.

Z *Tvrzení 1f* na straně 10 vyplývá, že GUE, jakožto hermitovská matice, má všechna svá vlastní čísla reálná.

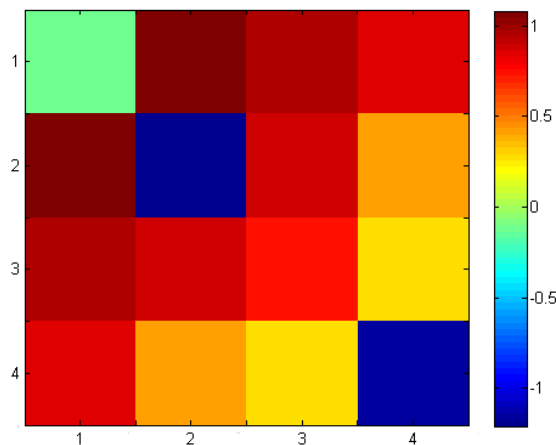
Věta 16. *Necht' H_n je maticí skupiny matic GUE, pak je invariantní vůči transformaci unitární maticí U , tzn.*

$$H_n \in GUE \Rightarrow U^T H_n U \in GUE \quad (3.6)$$

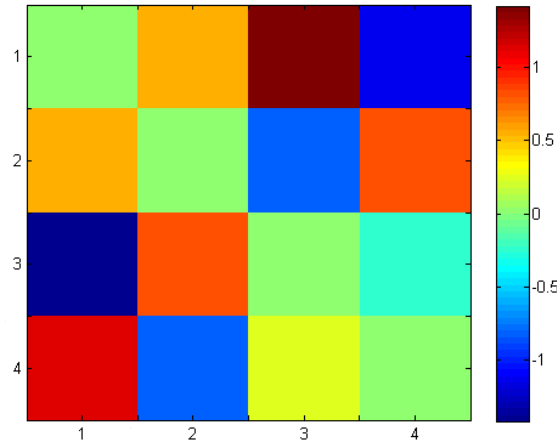
Důkaz je obdobný jako důkaz u Věty 13.

Také zde si uvedeme příklad matice H_n splňující nadefinované podmínky pro její prvky tak, abychom ji mohli nazývat maticí GUE.

$$H_n = \begin{pmatrix} -0.12 & 1.08 + 0.57i & 0.95 + 1.42i & 0.86 - 1.15i \\ 1.08 - 0.57i & -1.21 & 0.88 - 0.81i & 0.42 + 0.84i \\ 0.95 - 1.42i & 0.88 + 0.81i & 0.73 & 0.29 - 0.24i \\ 0.86 + 1.15i & 0.42 + 0.84i & 0.29 + 0.24i & -1.15 \end{pmatrix}$$



Obrázek 3.4: Reálné části prvků gaussovské unitární matice řádu $n = 4$



Obrázek 3.5: Imaginární části prvků gaussovské unitární matice řádu $n = 4$

Vlastní čísla této gaussovské unitární matice (GUE) jsou opravdu reálná, jak lze demonstrovat výpočtem těchto vlastních čísel:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2.74 \\ h_2 &= 0.21 \\ h_3 &= -1.23 \\ h_4 &= -3.48 \end{aligned}$$

[16, 17, 18, 19]

3.2.3 Pásové náhodné matice

Poslední skupinou ze tří základních typů náhodných matic s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$, kterou se budeme v této práci zabývat, jsou pásové náhodné matice, nebo-li BRME (z anglického Band random matrix ensemble).

Definice 17. Necht' A je čtvercová symetrická matice řádu n , jejíž nenulové prvky mají rozdělení stejné jako matice GOE a pro její nulové prvky platí

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow |i - j| \geq b, \text{ přičemž } 1 \leq b \leq n, \quad (3.7)$$

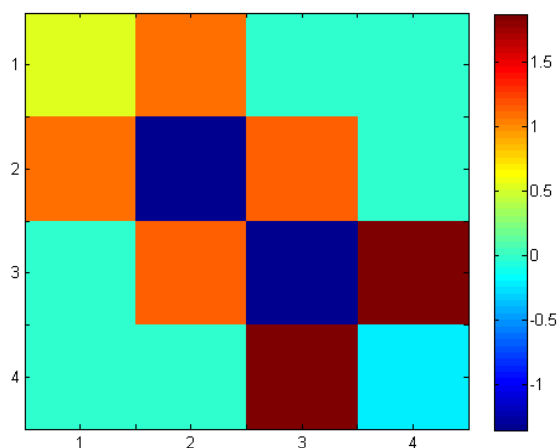
pak takovou matici A nazveme **pásovou náhodnou maticí (BRME)**.

Diagonální prvky matice A jsou z normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ a mi-modiagonální nenulové prvky jsou z rozdělení $N(0, \frac{1}{2})$.

Protože matice A je symetrická a reálná, vlastní čísla matice BRME jsou reálná. To vyplývá z *Tvrzení 1b* na straně 10.

Ukážeme si příklad pásové náhodné matice A a opět zobrazíme barevné rozlišení hodnot polí prvků a_{ij} . Z obrázku vidíme, že nulový trojúhelník se opravdu nachází v pravém horním a levém dolním rohu matice A .

$$A = \begin{pmatrix} -0.12 & 1.08 & 0 & 0 \\ 1.08 & -1.21 & 0.88 & 0 \\ 0 & 0.88 & 0.73 & 0.29 \\ 0 & 0 & 0.29 & -1.15 \end{pmatrix}$$

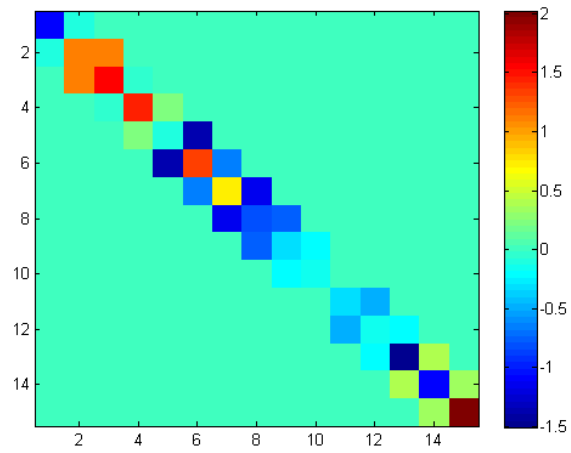


Obrázek 3.6: Pásová náhodná matice řádu $n = 4$ s pološířkou pásu $b = 2$

Také u této ukázkové pásové matice jsme spočítali vlastní čísla. Výsledky opět demonstují známé tvrzení, že jsou vlastní čísla reálná:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1.24 \\ h_2 &= 0.27 \\ h_3 &= -1.18 \\ h_4 &= -2.09 \end{aligned}$$

Zkusíme si vytvořit větší pásovou matici řádu $n = 15$ s pološířkou pásu $b = 2$, abychom lépe viděli pás nul.



Obrázek 3.7: Pásová náhodná matice řádu $n = 15$ s pološířkou pásu $b = 2$

[16, 17, 18, 19]

Kapitola 4

Vlastnosti gaussovských matic

Víme, že prvky náhodných matic jsou náhodná čísla, vlastní čísla takových matic jsou také náhodné veličiny a má smysl zaobírat se tím, jaké je jejich rozdělení. V této kapitole se budeme věnovat právě vlastním číslům náhodných matic a zaměříme se na poměr reálných vlastních čísel ke všem vlastním číslům u obecných gaussovských matic. Teoretické poznatky porovnáme s výsledky simulací. Dále se v této kapitole soustředíme na charakter rozdělení vlastních čísel obecných gaussovských matic a formujeme zde tzv. Girkův kruhový zákon. V poslední části této kapitoly se budeme věnovat rozdělení vlastních čísel matic GOE a GUE a rozdělení vzdáleností vlastních čísel těchto matic.

4.1 Počet reálných vlastních čísel obecné gaussovské matice

Jak jsme se již v úvodu zmínili, bude nás nejprve zajímat počet reálných vlastních čísel náhodných matic, a proto si zde nyní vyslovíme předpoklad týkající se právě počtu reálných vlastních čísel a zkusíme si jej demonstrovat na konkrétních náhodných maticích. Budeme nyní uvažovat pouze náhodné matice s prvky s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

Této problematice je věnován článek [20], kde je ukázán následující vztah pro počet vlastních reálných čísel.

Věta 18. *Necht' E_n je očekávaný počet reálných vlastních čísel obecné gaussovské matice A řádu n , pak platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ můžeme E_n vyjádřit ve tvaru

$$E_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(1 - \frac{3}{8n} - \frac{3}{128n^2} + \frac{27}{1024n^3} + \frac{499}{32768n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right) + \frac{1}{2}.$$

Pro zajímavost zde uvedeme počet očekávaných reálných vlastních čísel obecné gaussovské matice pro různé řády n a později se k této tabulce vrátíme, abychom se přesvědčili, zda naše simulace odpovídají těmto teoretickým vztahům.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	50
E_n	1.00	1.41	1.71	1.95	2.15	2.33	2.50	2.65	2.79	2.93	4.82	6.10
$\frac{E_n}{n}$	1.00	0.71	0.57	0.49	0.43	0.39	0.36	0.33	0.31	0.29	0.16	0.12

Tabulka 1: Očekávaný počet reálných vlastních čísel

Pro lepší pochopení toho, jaký charakter mají vlastní čísla, jsme si vytvořili simulaci v prostředí MATLAB, která nám bude postupně počítat vlastní čísla čtvercových matic s řádem $n = 1, 2, 4, 7, 10, 30$ a 50 . Vypíše se poměr reálných vlastních čísel ke všem vlastním číslům. V rámci simulace bylo postupně generováno $k = 10, 100, 200$ a 500 matic s daným řádem n . Program spočte průměr a směrodatnou odchylku poměru počtu vlastních čísel jednotlivých matic (viz tabulky uvedené níže).

Tabulka 2 nám představuje průměr a *Tabulka 3* ukazuje směrodatné odchylky poměru reálných vlastních čísel ke všem vlastním číslům vygenerovaných obecných gaussovských matic řádu n .

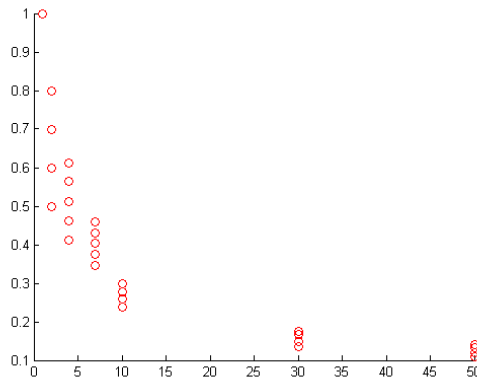
n	1	2	4	7	10	30	50
k							
10	1.00	0.66	0.52	0.40	0.26	0.16	0.12
100	1.00	0.69	0.48	0.35	0.30	0.16	0.12
200	1.00	0.72	0.50	0.36	0.30	0.16	0.13
500	1.00	0.72	0.50	0.37	0.29	0.16	0.12

Tabulka 2: Průměry poměrů počtu reálných a všech vlastních čísel

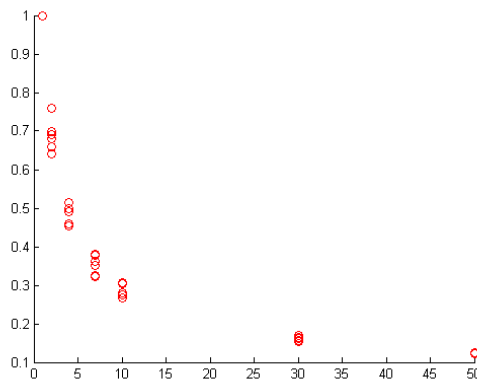
Vidíme, že *Tabulka 1* s očekávaným počtem reálných vlastních čísel se shoduje s výsledky naší simulace, které jsou zaznamenány v *Tabulce 2*.

k	n	1	2	4	7	10	30	50
10		0.00	0.49	0.20	0.16	0.14	0.06	0.03
100		0.00	0.46	0.27	0.17	0.13	0.06	0.04
200		0.00	0.45	0.26	0.18	0.13	0.06	0.04
500		0.00	0.44	0.26	0.17	0.13	0.05	0.04

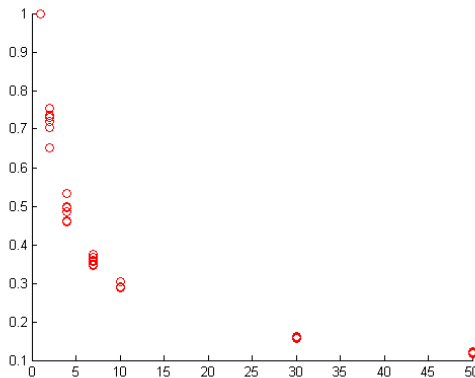
Tabulka 3: Směrodatné odchylky poměrů počtu reálných a všech vlastních čísel



Obrázek 4.1: Poměry reálných vlastních čísel závisících na řádu matice n , pro $k = 10$



Obrázek 4.2: Poměry reálných vlastních čísel závisících na řádu matice n , pro $k = 100$



Obrázek 4.3: Poměry reálných vlastních čísel závisících na řádu matice n , pro $k = 200$

Z obrázků snadno vypočítáme, že se směrodatné odchylky, se zvyšujícím se řádem matic, zmenšují.

Pro zajímavost uvedeme ještě dobu délky výpočtů poměrů reálných vlastních čísel vzhledem ke všem vlastním číslům pro různý počet gaussovských matic.

k	10	100	200	500
čas[sec]	1.133	2.787	4.627	9.253

Tabulka 4: Čas potřebný k výpočtu simulace pro různý počet matic

4.2 Hustota pravděpodobnosti vlastních čísel

V teorii náhodných matic je hustotě pravděpodobnosti vlastních čísel věnována velká pozornost. Je důležitou součástí teoretických poznatků a je popisována především pomocí dvou zákonů. Jsou jimi Girkův kruhový zákon a Wignerův polokruhový zákon. V této části práce je oba zformulujeme a pomocí prostředí MATLAB demonstrujeme simulace pro námi zvolené gaussovské matice velkých řádů n .

4.2.1 Girkův kruhový zákon

Nejprve budeme brát v úvahu obecné gaussovské matice řádu n , jejichž vlastní čísla jsou popsána pomocí *Girkova kruhového zákona*.

Definice 19. *Necht' A je čtvercová matice řádu n s vlastním číslem $\lambda \in \mathbb{C}$, pak náhodnou veličinu*

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{2} \quad (4.1)$$

nazýváme normalizované vlastní číslo.

Protože se v této práci zabýváme čtvercovými maticemi řádu n , tak můžeme říci, že každá naše náhodná matice bude mít nanejvýš n různých vlastních čísel.

Věta 20. (*Girkův kruhový zákon*) *Necht' Λ jsou normalizovaná vlastní čísla obecné gaussovské matice řádu n . Pro $n \rightarrow \infty$ jsou rozptýlena rovnoměrně v jednotkovém kruhu se středem v počátku komplexní roviny. Hustota pravděpodobnosti normalizovaných vlastních čísel obecných gaussovských matic je dána vztahem*

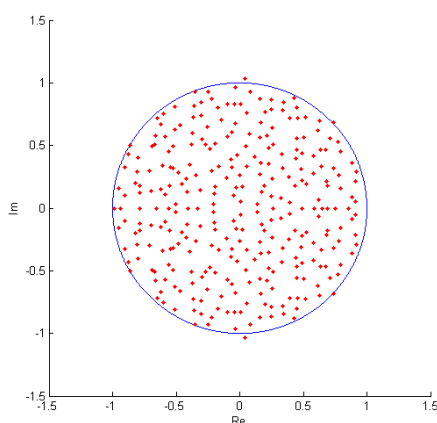
$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \theta(1 - |\lambda|), \quad (4.2)$$

kde $|\lambda|$ představuje absolutní hodnotu maximálního normalizovaného vlastního čísla obecné gaussovské matice A a θ je jednorozměrnou nespojitou Heavisideovou funkcí určenou předpisem

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ 1, & \text{pro } x > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

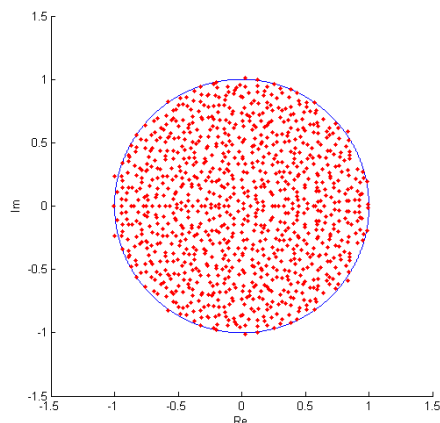
Důkaz uvedeného tvrzení najdeme například v [21].

V prostředí MATLAB si demonstrováme Girkův kruhový zákon pro obecnou gaussovskou matici řádu $n = 300$.

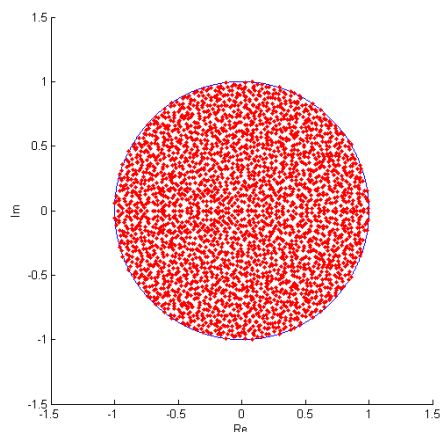


Obrázek 4.4: Girkův kruhový zákon pro obecnou gaussovskou matici řádu $n = 300$

Hustější vykreslení vlastních čísel obecné gaussovské matice dostáváme pro matici vyššího řádu, např. pro $n = 1000$ nebo pro $n = 3000$.



Obrázek 4.5: Girkův kruhový zákon pro obecnou gaussovskou matici řádu $n = 1000$



Obrázek 4.6: Girkův kruhový zákon pro obecnou gaussovskou matici řádu $n = 3000$

n	300	1000	3000
čas [sec]	2.688	7.948	70.847

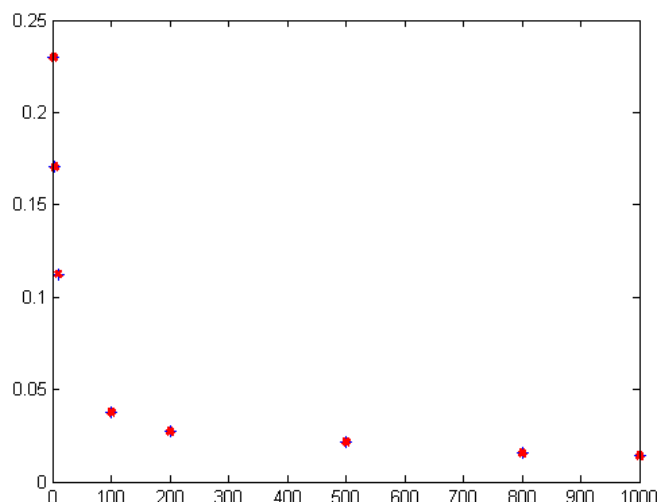
Tabulka 5: Čas potřebný k výpočtu jednotlivých simulací

Další simulace v prostředí MATLAB jsou zaměřeny na analýzu toho, kolik procent vlastních čísel leží mimo jednotkový kruh. Vzhledem k tomu, že Girkův kruhový zákon, formulovaný ve Větě 20, platí limitně, lze očekávat, že pro větší hodnoty n se bude počet vlastních čísel ležících mimo jednotkový kruh zmenšovat. V tabulkách uvedených níže si můžeme všimnout, že se zvyšujícím se řádem matice n se opravdu snižuje procento vlastních čísel, které leží mimo jednotkový kruh. To je zapříčiněno právě tím, že Girkův kruhový zákon platí pouze limitně pro $n \rightarrow \infty$.

Volili jsme řád matice $n = 2, 4, 10, 100, 200, 500, 800$ a 1000 . Poznamenejme, že jsme pro porovnání výsledků spustili simulaci pro stejný počet vlastních čísel (10 000) u každé matice s řádem n .

n	2	4	10	100	200	500	800	1000
%	23.7	18.3	11.4	3.6	2.5	1.9	1.2	1.1

Tabulka 6: Počet procent vlastních čísel ležících mimo jednotkový kruh



Obrázek 4.7: Závislost počtu procent vlastních čísel mimo jednotkový kruh na řádu matice n

4.2.2 Wignerův polokruhový zákon

Nyní se dostáváme k maticím symetrickým a budeme uvažovat čtvercové matice ze skupiny matic GOE či GUE. Hermiticity (resp. symetričnost) matice nám zaručuje, že vlastní čísla budou reálná. To vyplývá z *Tvrzení 1b* a *Tvrzení 1f* na straně 10.

Věta 21. (*Wignerův polokruhový zákon I*) *Necht' A je čtvercová symetrická matice velkého řádu n ze skupiny matic GOE či GUE, pak pro hustotu pravděpodobnosti vlastních čísel platí*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \theta \left(2\sqrt{n} - \left| \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{2} \right| \right) \sqrt{4n - \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{2} \right)^2}, \quad (4.4)$$

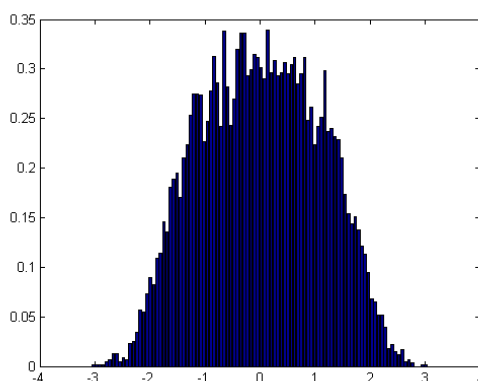
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}, \quad \text{pro } |\lambda| \leq 2, \quad (4.5)$$

kde n je rozměr matice.

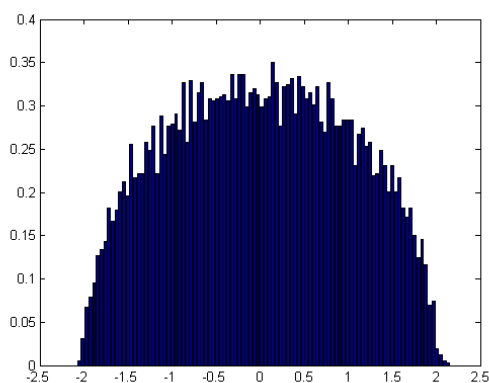
Důkaz této věty můžeme nalézt například v [22].

Níže si demonstrujeme, že vztah (4.5) zobrazuje tvar polokružnice pro vlastní čísla symetrických náhodných matic. Vezmeme si matice řádu $n = 5, 100, 1000$ a 5000 splňující zadané předpoklady postupně pro matice GOE a GUE.

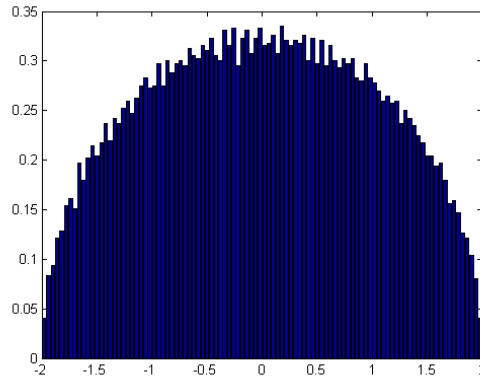
Simulaci jsme upravili tak, aby byl vždy vykreslený stejný počet vlastních čísel (10 000) a měnili jsme pouze řád matice n . Začneme tedy se simulací pro gaussovskou ortogonální matici (GOE).



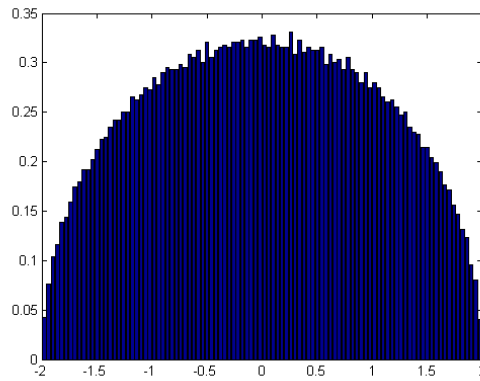
Obrázek 4.8: Wignerův polokruhový zákon pro matici GOE řádu $n = 5$



Obrázek 4.9: Wignerův polokruhový zákon pro matici GOE řádu $n = 100$



Obrázek 4.10: Wignerův polokruhový zákon pro matici GOE řádu $n = 1000$



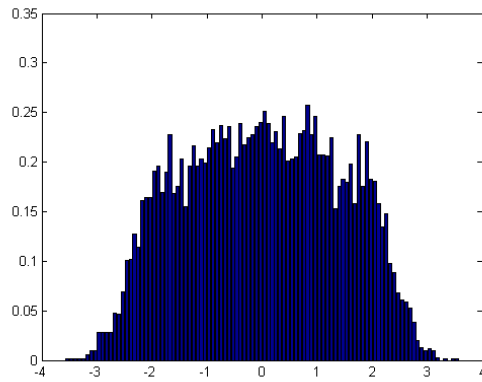
Obrázek 4.11: Wignerův polokruhový zákon pro matici GOE řádu $n = 5000$

n	5	100	1000	5000
čas [sec]	0.342	0.485	17.115	123.763

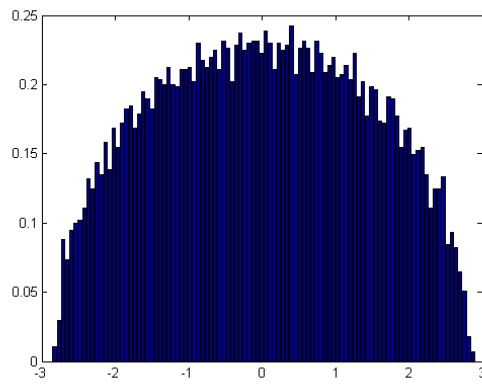
Tabulka 7: Čas potřebný k výpočtu jednotlivých simulací

Vidíme, že Wignerův polokruhový zákon opravdu zobrazuje vlastní čísla čtvercových symetrických matic do tvaru polokružnice a se zvyšujícím se řádem matice n , se více přibližuje k požadovanému tvaru.

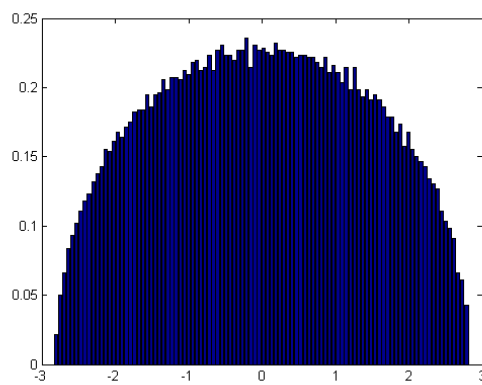
Nyní provedeme tu samou simulaci, s tím rozdílem, že použijeme gaussovskou unitární matici (GUE).



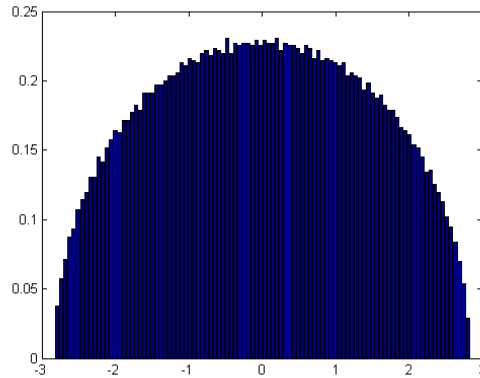
Obrázek 4.12: Wignerův polokruhový zákon pro matici GUE řádu $n = 5$



Obrázek 4.13: Wignerův polokruhový zákon pro matici GUE řádu $n = 100$



Obrázek 4.14: Wignerův polokruhový zákon pro matici GUE řádu $n = 1000$



Obrázek 4.15: Wignerův polokruhový zákon pro matici GUE řádu $n = 5000$

n	5	100	1000	5000
čas [sec]	0.589	0.830	23.357	450.577

Tabulka 8: Čas potřebný k výpočtu jednotlivých simulací

Také u tohoto typu náhodné matice vidíme, že se zvyšujícím se řádem n se přibližujeme požadovanému tvaru.

Abychom vyzkoušeli všechny skupiny náhodných matic s prvky normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$, o kterých se v této práci zmiňujeme, musíme se zaměřit na formulaci Wignerova polokruhového zákona pro matice ze skupiny pásových náhodných matic (BRME).

Věta 22. (*Wignerův polokruhový zákon II*) *Necht' A je maticí ze skupiny matic BRME, pak hustota pravděpodobnosti vlastních čísel, popsaná Wignerovým zákonem, má tvar*

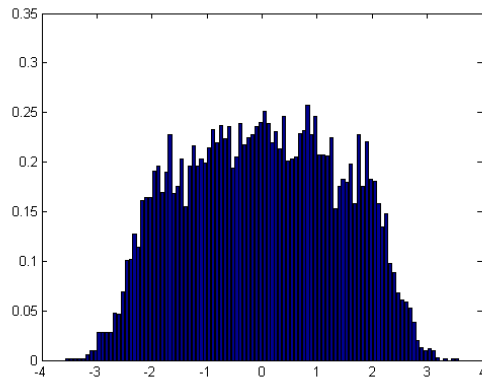
$$f(\lambda) = \frac{\theta(c - |\lambda|)}{\pi c^2} \sqrt{c^2 - \lambda^2}, \quad (4.6)$$

kde

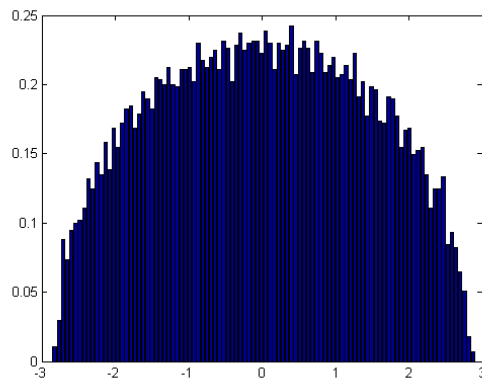
$$c^2 = \frac{4b}{n}(2n - b + 1). \quad (4.7)$$

Důkaz věty je uveden například v [22].

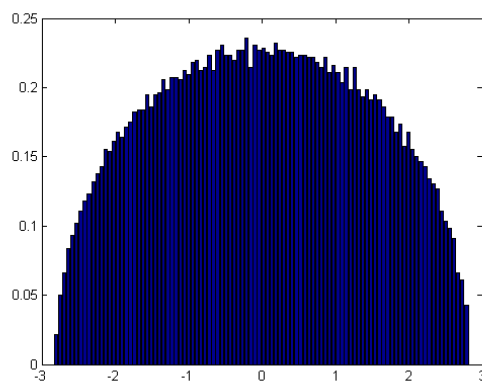
Také pro tento případ jsme provedli řadu simulací, které nám demonstrují chování vlastních čísel BRME pro různé řády matic.



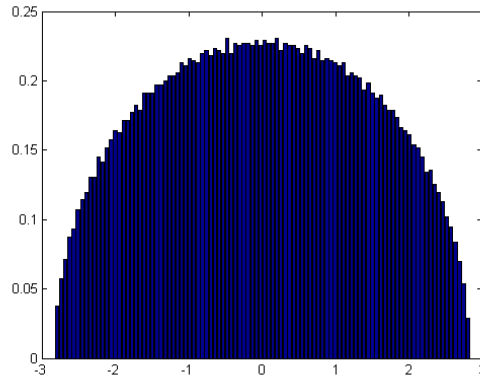
Obrázek 4.16: Wignerův polokruhový zákon pro matici BRME řádu $n = 5$



Obrázek 4.17: Wignerův polokruhový zákon pro matici BRME řádu $n = 100$



Obrázek 4.18: Wignerův polokruhový zákon pro matici BRME řádu $n = 1000$



Obrázek 4.19: Wignerův polokruhový zákon pro matici BRME řádu $n = 5000$

n	5	100	1000	5000
čas [sec]	0.355	0.521	18.210	112.864

Tabulka 9: Čas potřebný k výpočtu jednotlivých simulací

Názorně jsme demonstrovali, že hustota pravděpodobnosti vlastních čísel matice ze skupiny pásových náhodných matic BRME splňuje tvar polokružnice stejně jako v případě pro náhodné matice ze skupiny gaussovských ortogonálních matic GOE či gaussovských unitárních matic GUE.

[16, 18, 19]

4.3 Hustota pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel

Víme, že vlastní čísla matic skupin GOE, GUE či BRME jsou reálná, a lze je tedy uspořádat dle velikosti. Rozdíl po sobě jdoucích vlastních čísel je opět náhodná veličina. V následující kapitole se budeme zabírat myšlenkou, jak vypadá hustota pravděpodobnosti rozdělení této vzdálenosti.

Poznamenejme nyní, že skutečná podoba vztahu hustoty pravděpodobnosti nebyla prozatím analyticky nalezena, a proto se využívají různé aproximace, které jsou více či méně přesné.

Nejnámější a v praxi nejvíc používanou aproximací je *Izrailevova formule*.

Věta 23. (*Izrailevova formule*) *Nechť A je Wignerova matice, pak aproximace hustoty pravděpodobnosti rozdělení vzdálenosti vlastních čísel matice A má tvar*

$$f(r) \approx \theta(r) A \left(\frac{\pi r}{2} \right)^\beta e^{-\frac{\beta \pi^2 r^2}{16} - (B - \frac{\beta \pi}{4})r}. \quad (4.8)$$

Parametry A a B jsou normalizační konstanty Izrailevovy formule, které nám zajišťují, aby vztah byl hustotou pravděpodobnosti a aby střední hodnota vzdálenosti vlastních čísel byla rovna jedné. Parametr β charakterizuje strukturu matice a lze ukázat, že pro Wignerovy matice jsou hodnoty parametru β definované takto

$\beta = 1$ pro skupinu GOE,

$\beta = 2$ pro skupinu GUE,

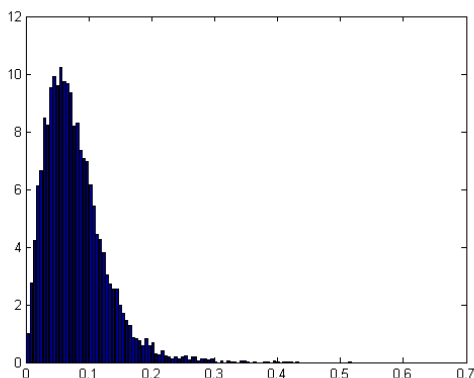
$\beta \in (0,1)$ pro skupinu matic BRME a pro velká n a b platí vztah

$$\beta = \frac{1,4b^2}{n + 1,4b^2}.$$

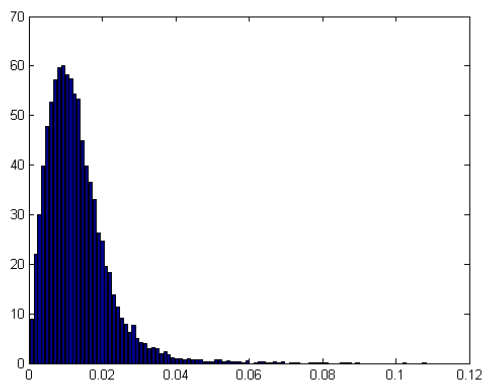
Tato věta je dokázána například v [23].

Stejně jako u předešlých dvou vlastností, tak i zde uvedeme obrázky s vykreslenou hustotou pravděpodobnosti pro náhodné matice skupin GOE, GUE i BRME. Budeme používat řád matice $n = 50, 300, 1000$ a 3000 .

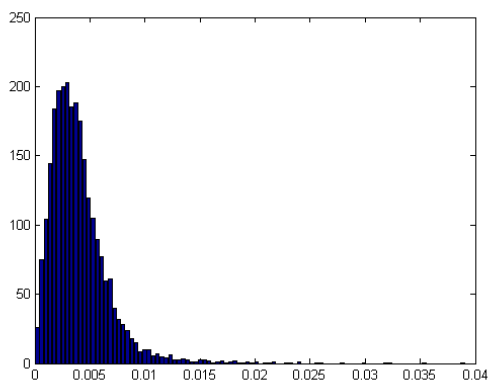
Demonstrujeme si tedy také tuhle vlastnost v prostředí MATLAB. Začneme s gaussovskou ortogonální maticí GOE.



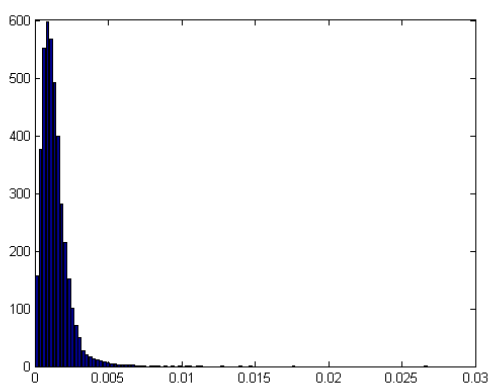
Obrázek 4.20: Izrailevova formule pro matici GOE řádu $n = 50$



Obrázek 4.21: Izrailevova formule pro matici GOE řádu $n = 300$

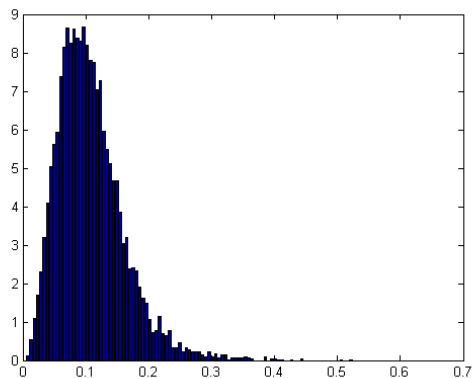


Obrázek 4.22: Izrailevova formule pro matici GOE řádu $n = 1000$

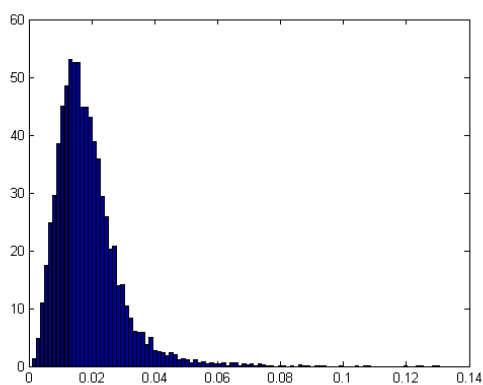


Obrázek 4.23: Izrailevova formule pro matici GOE řádu $n = 3000$

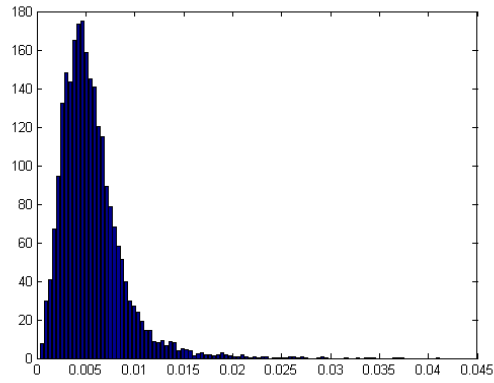
Jako další skupinu náhodných matic použijeme gaussovské unitární matice GUE a vezmeme opět v úvahu řády matic $n = 50, 300, 1000$ a 3000 .



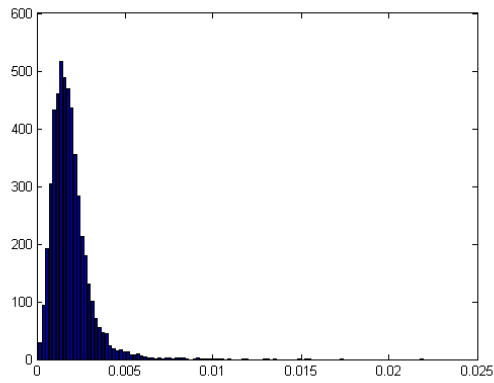
Obrázek 4.24: Izrailevova formule pro matici GUE řádu $n = 50$



Obrázek 4.25: Izrailevova formule pro matici GUE řádu $n = 300$

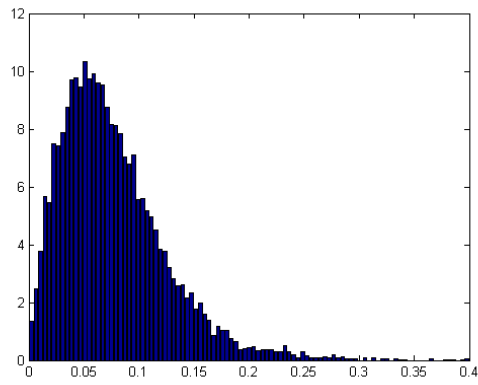


Obrázek 4.26: Izrailevova formule pro matici GUE řádu $n = 1000$

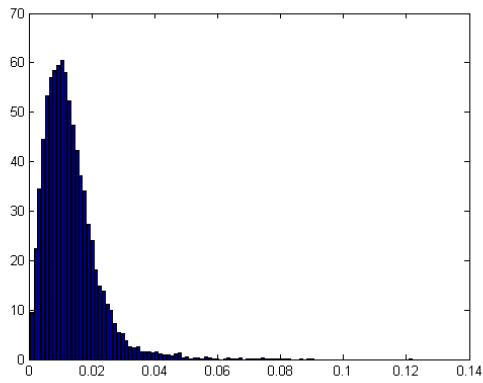


Obrázek 4.27: Izrailevova formule pro matici GUE řádu $n = 3000$

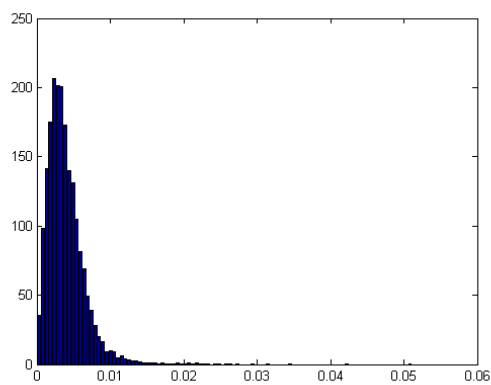
Poslední skupinou ze skupiny náhodných matic jsou náhodné pásové matice BRME. Také u této matice znázorníme Izrailevovu formuli pro náhodné matice řádu $n = 50, 300, 1000$ a 3000 .



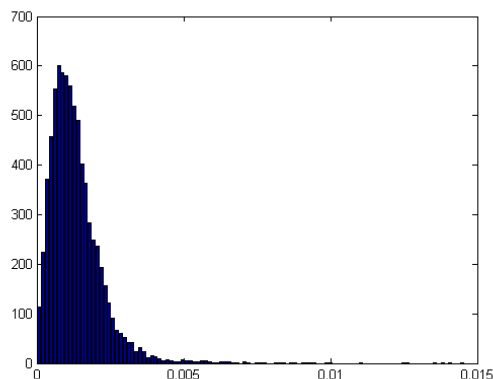
Obrázek 4.28: Izrailevova formule pro matici BRME řádu $n = 50$



Obrázek 4.29: Izrailevova formule pro matici BRME řádu $n = 300$



Obrázek 4.30: Izrailevova formule pro matici BRME řádu $n = 1000$



Obrázek 4.31: Izrailevova formule pro matici BRME řádu $n = 3000$

n	5	300	1000	3000
typ matice				
GOE	0.272	1.487	7.416	59.365
GUE	0.385	3.135	22.519	121.325
BRME	0.261	1.125	6.947	56.597

Tabulka 10: Časy v [sec] potřebné k výpočtu jednotlivých simulací

Připomeňme, že Izrailevův vztah je pouze vhodnou aproximací skutečné hustoty pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel. Jak jsme již zmínili, můžeme nalézt mnoho dalších aproximací této hustoty pravděpodobnosti. Pro úplnost uvedeme další dvě aproximace, které se využívají místo Izrailevovy formule:

Wignerova domněnka (1958):

$$f_{WIG}(r) \approx \theta(r) Ar^\beta e^{-Br^2}$$

Izrailev - Casati - Molinariho rozdělení (1991):

$$f_{ICM}(r) \approx \theta(r) Ar^\beta (1 + B\beta r)^{g(B)} e^{-\frac{\beta\pi^2 r^2}{16}} - \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{2}\beta\right) r,$$

$$\text{kde } g(\beta) = \frac{2\beta}{\beta} \left(-\frac{1}{2}\beta\right) - 0,16874.$$

Pro zajímavost poznamenejme, že Izrailevova formule vznikla v roce 1988.

[16, 18, 19]

Kapitola 5

Vlastnosti negaussovských náhodných matic

V následující kapitole se budeme zabývat myšlenkou, zda vlastnosti vlastních čísel uvedených v *Kapitole 4* (Vlastnosti gaussovských matic) platí také pro náhodné čtvercové matice s prvky s jiným rozdělením, než mají matice, jejichž prvky jsou náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

Vzhledem k tomu, že nejsou v této oblasti zatím známy žádné analytické výsledky, pokusíme se získat odpovědi pouze pomocí simulací provedených v prostředí MATLAB a to na maticích s náhodnými veličinami spojitého typu.

Pro úplnost si zde vypíšeme pravděpodobnostní rozdělení, se kterými budeme simulovat vlastnosti vlastních čísel náhodných čtvercových matic. Blíže jsme je rozepsali v *Kapitole 1* na straně 14-15.

Gama rozdělení

Exponenciální rozdělení

Spojitě rovnoměrné rozdělení

[2, 4, 19]

5.1 Girkův kruhový zákon

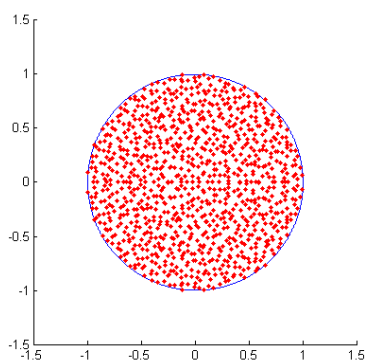
Začněme s testováním Girkova kruhového zákona a názorně si jej demonstrováme na vlastních číslech náhodných čtvercových matic velkého řádu n .

V první simulaci použijeme **gama rozdělení** s různými hodnotami parametrů α a β .

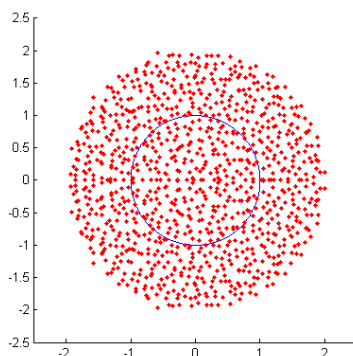
Z výsledků simulace je patrné, že poloměr kruhu, ve kterém se nachází normalizovaná vlastní čísla náhodné matice není vždy roven jedné. Jednoduše vyzorujeme, že vše záleží na parametrech α a β . Poloměr kružnice je dán vztahem

$$\rho = \sqrt{\alpha\beta^2} = \sqrt{\alpha}\beta = \sqrt{DX}, \quad (5.1)$$

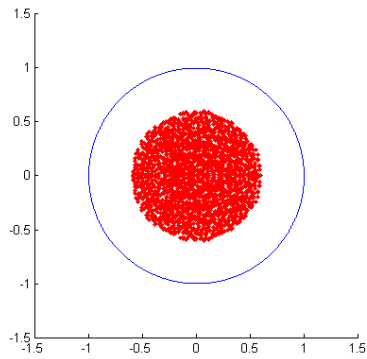
což je směrodatná odchylka prvků náhodné matice.



Obrázek 5.1: Girkův kruhový zákon náhodné matice s gama rozdělením, $\alpha = 1, \beta = 1$



Obrázek 5.2: Girkův kruhový zákon náhodné matice s gama rozdělením, $\alpha = 4, \beta = 1$



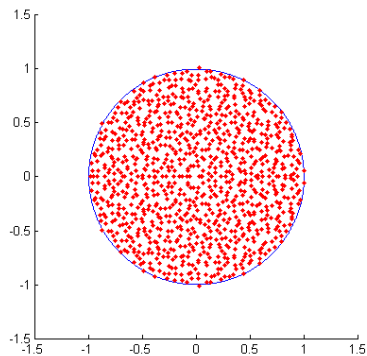
Obrázek 5.3: Girkův kruhový zákon náhodné matice s gama rozdělením, $\alpha = 0.04, \beta = 3$

Ve druhé simulaci budeme používat **exponenciální rozdělení** a zvolíme opět různé hodnoty parametru δ . Jak víme, rozptyl prvků matice je daný

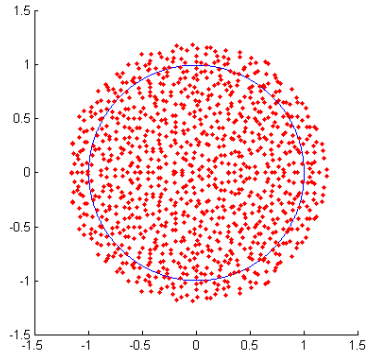
$$DX = \delta^2, \quad (5.2)$$

a proto poloměr kruhu, ve kterém jsou vykreslena normalizovaná vlastní čísla náhodné matice s prvky s exponenciálním rozdělením bude

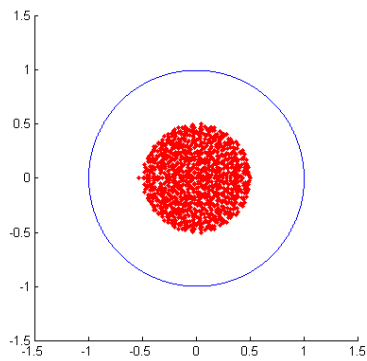
$$\rho = \sqrt{DX} = \sqrt{\delta^2} = \delta. \quad (5.3)$$



Obrázek 5.4: Girkův kruhový zákon náhodné matice s exponenciálním rozdělením, $\delta = 1$,



Obrázek 5.5: Girkův kruhový zákon náhodné matice s exponenciálním rozdělením, $\delta = 1.2$



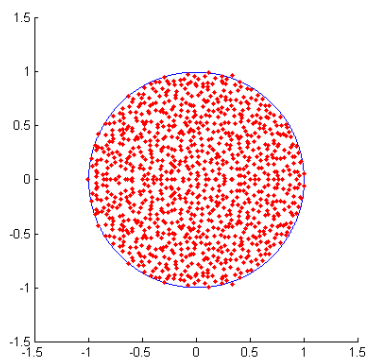
Obrázek 5.6: Girkův kruhový zákon náhodné matice s exponenciálním rozdělením, $\delta = 0.5$

Jako poslední simulaci pro Girkův kruhový zákon zvolíme náhodné matice s prvky se **spojitým rovnoměrným rozdělením** a použijeme různé hodnoty parametrů a a b . Rozptyl prvků matice je dán vztahem

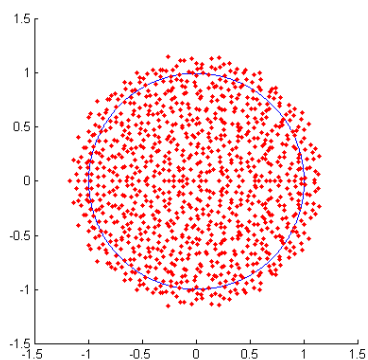
$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (5.4)$$

a tudíž poloměr kruhu, ve kterém jsou normalizovaná vlastní čísla matice vykreslena, je

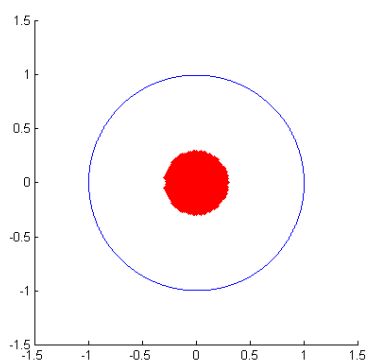
$$\rho = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}. \quad (5.5)$$



Obrázek 5.7: Girkův kruhový zákon náhodné matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $a = 0, b = \sqrt{12}$



Obrázek 5.8: Girkův kruhový zákon náhodné matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $a = 1, b = 5$



Obrázek 5.9: Girkův kruhový zákon náhodné matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $a = 1, b = 0$

Demonstrovali jsme Girkův kruhový zákon na čtvercových náhodných maticích s prvky s různým rozdělením pravděpodobnosti. Zjistili jsme, že poloměr kruhu, ve kterém se nacházejí normalizovaná vlastní čísla matice, odpovídá směrodatné odchylce. Poznamenejme, že v simulacích jsme používali náhodné čtvercové matice řádu $n = 1000$.

Díky pozorování různých simulací jsme schopni vyslovit domněnku, která nám představuje zobecnění zákona o vlastních číslech náhodných čtvercových matic.

Věta 24. *(Zobecněný Girkův kruhový zákon) Necht' A je čtvercová náhodná matice řádu n s prvky z libovolného spojitého rozdělení s existujícím a konečným rozptylem prvků DX , pak pro $n \rightarrow \infty$ jsou normalizovaná vlastní čísla matice A rovnoměrně rozptýlena v kruhu se středem v počátku komplexní roviny. Poloměr dané kružnice odpovídá hodnotě $\rho = \sqrt{DX}$.*

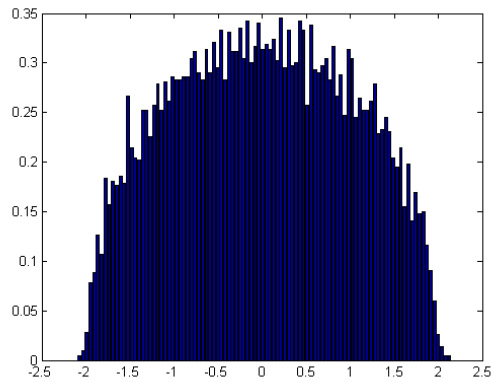
5.2 Wignerův polokruhový zákon

Budeme pokračovat v simulacích vlastností vlastních čísel čtvercových náhodných matic řádu n a demonstrujeme si Wignerův polokruhový zákon pomocí prostředí MATLAB. Simulace budeme provádět stejným způsobem jako u předešlého Girkova kruhového zákona. Zobrazíme si výsledky testů a uvedeme hodnoty parametrů pro jednotlivá pravděpodobnostní rozdělení. Také nyní budeme testovat matice, jejichž prvky jsou náhodné veličiny s jiným než s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

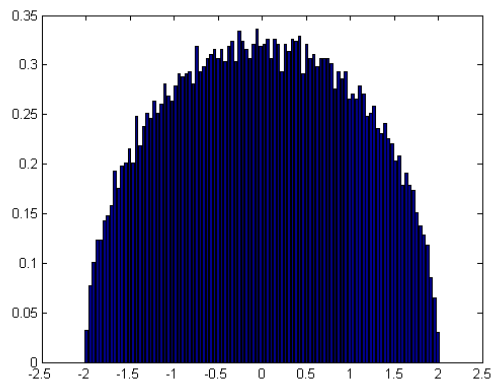
Pokud zvolíme parametry tak, aby rozptyl prvků DX byl roven jedné, požadovaný tvar Wignerova polokruhového zákona bude zachován. To se budeme snažit v těchto simulacích splnit a z obrázků bude patrné, že lze očekávat, že Wignerův polokruhový zákon platí i pro matice s prvky s jiným rozdělením pravděpodobnosti.

Z pozorování několika simulací jsme zjistili, že v případě vyššího rozptylu DX (resp. nižšího), bude také vyšší rozptyl vlastních čísel (resp. nižší). To se dá vysvětlit tím, že není splněna předpověď o maximální hodnotě vlastního čísla, pokud je rozptyl roven hodnotě vyšší (resp. nižší) než jedna.

První simulaci provedeme s použitím **spojitého rovnoměrného rozdělení** a opět se přesvědčíme, že je naše domněnka o Wignerově polokruhovém zákonu správná. Poznamenejme, že budeme brát řád matice $n = 100$ a 500 .

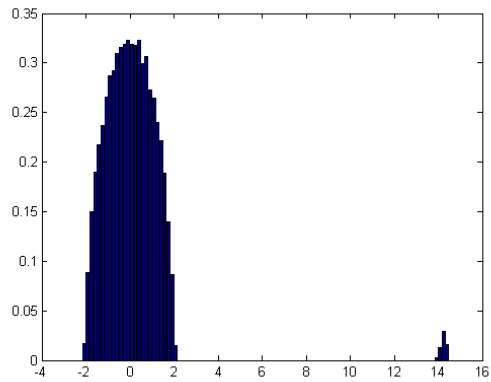


Obrázek 5.10: Wignerův polokruhový zákon pro matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $n = 100$

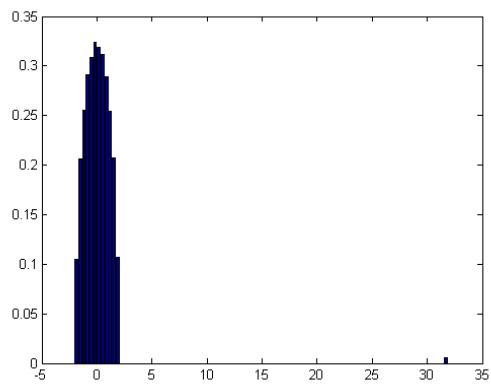


Obrázek 5.11: Wignerův polokruhový zákon pro matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $n = 500$

Ve druhé simulaci použijeme **rozdělení exponenciální** s parametrem $\delta = 1$ a pokusíme se ověřit naši domněnku také pro matice s prvky s právě takovým rozdělením.



Obrázek 5.12: Wignerův polokruhový zákon pro matice s exponenciálním rozdělením, $n = 100$



Obrázek 5.13: Wignerův polokruhový zákon pro matice s exponenciálním rozdělením, $n = 500$

Z obrázků je zřejmé, že většina vlastních čísel matice s prvky s exponenciálním rozdělením splňuje Wignerův polokruhový zákon, ale některá vlastní čísla se vyskytují mimo polokružnici.

Pomocí numerických testů v prostředí MATLAB jsme si demonstrovali, že Wignerův polokruhový zákon platí alespoň pro většinu vlastních čísel symetrických čtvercových náhodných matic řádu n s náhodnými veličinami i jiného rozdělení, než bylo normované normální rozdělení $N(0,1)$. Podmínkou je, že musíme zachovat jednotkový rozptyl prvků DX .

Zkusíme si tedy zobecnit Wignerův polokruhový zákon pro symetrické čtvercové matice řádu n .

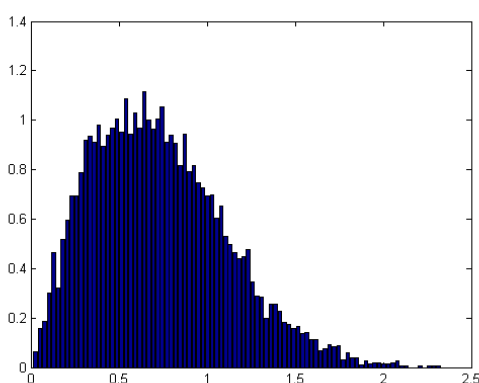
Věta 25. (*Zobecněný Wignerův polokruhový zákon*) *Necht' A je symetrická čtvercová matice řádu n , jejíž prvky jsou s libovolným rozdělením pravděpodobnosti, přičemž rozptyl prvků $DX = 1$, pak hustota pravděpodobnosti vlastních čísel je popsána pomocí Wignerova polokruhového zákona.*

5.3 Izrailevova formule

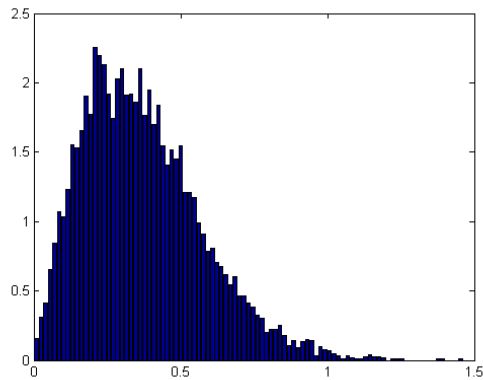
Poslední simulací v této práci je vykreslení Izrailevovy formule pro negaussovské matice. Použijeme spojité rovnoměrné rozdělení a exponenciální rozdělení stejně jako v předešlých případech.

Pokud se zamyslíme nad hustotou pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel náhodných matic, uvědomíme si, že závisí na jejich rozdělení. Můžeme tedy předpokládat, že Izrailevova formule bude platit, pokud bude zachován jednotkový rozptyl prvků.

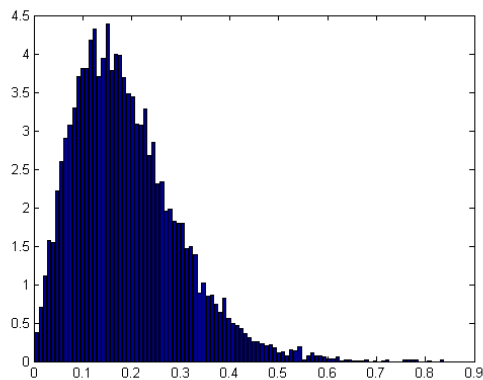
Jako první si demonstrujeme Izrailevovu formuli pro matice s prvky se **spojitým rovnoměrným rozdělením** pro náhodnou matici s řádem $n = 5, 10$ a 20 .



Obrázek 5.14: Izrailevova formule pro matice se spojitém rovnoměrným rozdělením, $n = 5$

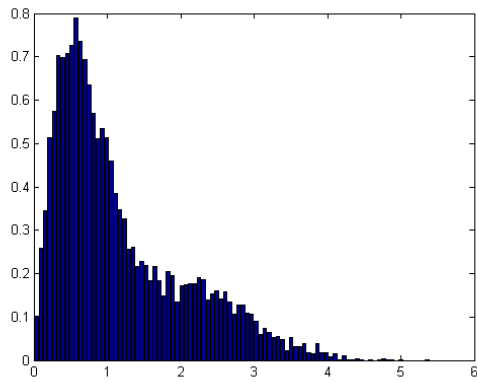


Obrázek 5.15: Izrailevova formule pro matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $n = 10$

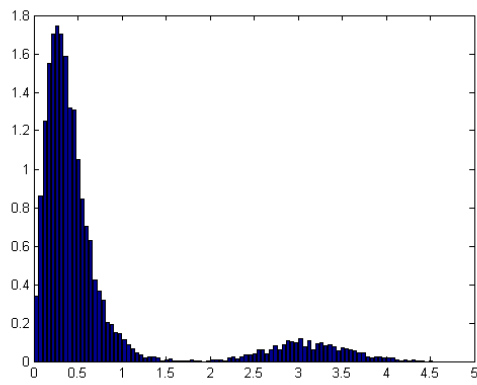


Obrázek 5.16: Izrailevova formule pro matice se spojitým rovnoměrným rozdělením, $n = 20$

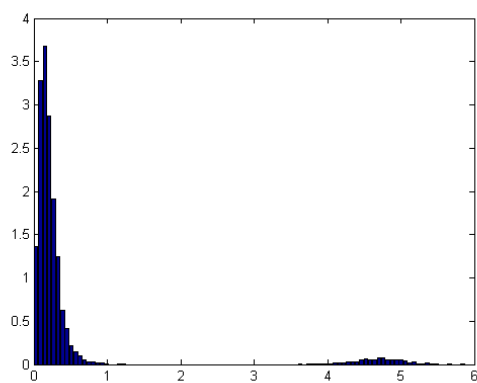
V poslední simulaci použijeme **exponenciální rozdělení** pro prvky náhodných matic s řádem $n = 5, 10$ a 20 . Přiložíme opět obrázky a zjistíme, že tvar Izrailevovy formule je také téměř totožný s obrázky Izrailevovy formule pro matice gaussovské.



Obrázek 5.17: Izrailevova formule pro matice s exponenciálním rozdělením, $n = 5$



Obrázek 5.18: Izrailevova formule pro matice s exponenciálním rozdělením, $n = 10$



Obrázek 5.19: Izrailevova formule pro matice s exponenciálním rozdělením, $n = 20$

Pokusíme se zobecnit Izrailevovu formuli pro čtvercovou matici řádu n s libovolným pravděpodobnostním rozdělením.

Věta 26. *(Zobecnění Izrailevovy formule) Necht' A je čtvercová náhodná matice řádu n s prvky s libovolným rozdělením pravděpodobnosti, přičemž rozptyl prvků $DX = 1$. Pak je hustota pravděpodobnosti vzdálenosti vlastních čísel matice A popsána pomocí Izrailevovy formule.*

Závěr

První kapitola této práce je věnována základním pojmům týkajících se matic, vlastním číslům a náhodným veličinám. V další části jsme se věnovali gaussovským maticím (obecné gaussovské matice, gaussovské ortogonální matice GOE, gaussovské unitární matice GUE a náhodné pásové matice BRME), vlastnostem vlastních čísel a vzdálenosti reálných vlastních čísel. V této kapitole jsme formulovali Girkův kruhový zákon, Wignerův polokruhový zákon a Izrailevovu formuli. Poslední část je věnovaná maticím negaussovským a v prostředí MATLAB jsme demonstrovali výše zmiňované zákony také pro tyto matice.

Z výsledků simulací lze usuzovat, že zákony a tvrzení týkající se vlastních čísel náhodných matic můžeme zobecnit pro náhodné matice s prvky s jiným než s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$. Simulace byly provedeny se základními typy spojitých rozdělení, ale můžeme tvrdit, že zákony budou platit pro libovolné rozdělení. Bylo by však samozřejmě nutné provést další simulace, numerické testy a nastínit analytické důkazy, abychom naši domněnku mohli s jistotou potvrdit.

Literatura

- [1] RNDr. Libuše Tesková. *Lineární algebra*. Západočeská univerzita v Plzni, 2010.
- [2] Doc. RNDr. Jiří Reif and RNDr. Zdeněk Kobeda. *Úvod do pravděpodobnosti a spolehlivosti*. Západočeská univerzita v Plzni, 2000.
- [3] Doc. RNDr. Jiří Reif. *Metody matematické statistiky*. Západočeská univerzita v Plzni, 2000.
- [4] Richard Hindls, Stanislava Hronová, Jan Seger, and Jakub Fisher. *Statistika pro ekonomy*. Professional publishing, 2007.
- [5] Jiří Anděl. *Základy matematické statistiky*. Matfyz press, Praha, 2007.
- [6] Prof. RNDr. Jaromír Antoch and RNDr. Dana Vorlíčková. *Vybrané metody statistické analýzy dat*. Academia, 1992.
- [7] http://cs.wikipedia.org/wiki/generátor_náhodných_čísels, listopad 2012.
- [8] Wishart J. *Generalized product moment distribution in samples* *Biometrika*. 1928.
- [9] Porter and Rosenzweig. *Statistical properties of atomic and nuclear spectra* *Suomalaisen Tiedeakatemia Toimituksia*. 1960.
- [10] Mehta M.L. *L'emploi del polynomes orthogonaux pour calculer certain determinants* *Rapport*. 1960.
- [11] Mehta M.L. *Statistical theory of the energy levels of complex systems*. 1962.
- [12] Anderson P.W. *Absence of diffusion in certain random lattices* *Phys.Rev.* 1958.
- [13] Hua L.K. *Harmonic Analysis of Functions of Many Complex Variables in Classical Domains*. 1958.
- [14] Efetov K.B. *Supersymmetry and the theory of disordered metals* *Adv.Phys.* 1983.
- [15] P. J. Forrester, N. C. Snaith, and J. J. Verbaarschot. *Developments in random matrix theory*. Publishing Ltd, 2003.

- [16] Emil Doležal. Úvod do teorie náhodných matic a její aplikace. Master's thesis, České vysoké učení technické v Praze Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2005.
- [17] http://cs.wikipedia.org/wiki/náhodné_matic, říjen 2012.
- [18] Vlková, Berg, Martínek, Švec, and Neumann. Teorie náhodných matic aneb tak trochu jiná statistika, 2011.
- [19] Martin Veselý. Úvod do teorie náhodných matic. Master's thesis, České vysoké učení technické v Praze Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2010.
- [20] A. Edelman, E. Kostlan, and M. Shub. *How many eigenvalues of a random matrix are real?* American Mathematical Society, 1994.
- [21] A. Edelman. *The Probability that a Random Real Gaussian Matrix has k Real Eigenvalues, Related Distributions, and the Circular Law.* J. Multivariate Anal., 1997.
- [22] L. Arnold. *On Wigner's Semicircle Law for the Eigenvalues of Random Matrices.* Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw, 1971.
- [23] F.M. Izrailev, G. Casati, and L. Molinari. *Scaling properties of the eigenvalue spacing distribution for band random matrices.* Journal of Physics A: Mathematical and general, 1991.