

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

## **Bakalářská práce**

# **Optimální volba portfolia – klasické a alternativní přístupy**

Plzeň, 2013

Jiří Panoš

(Zde bude vloženo oficiální zadání.)

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů (literatura, články, software, ...).

V Plzni dne \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

podpis

## **Poděkování**

Rád bych touto cestou poděkoval RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za její odborné vedení, podněty, rady a za veškerý čas, který mi během tvorby této práce věnovala. Dále bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni za jejich podporu.

## **ABSTRAKT**

Práce představuje moderní teorii portfolia, její historický vývoj, zabývá se prostorem riziko-výnos a vztahem investorů k riziku. Detailně je odvozen základní Markowitzův model optimální volby portfolia. Průběh odvozování je průběžně ilustrován na modelovém příkladu. Dále tato práce rozebírá modifikace základního modelu a popisuje vybrané alternativní modely a jejich vztah k základnímu modelu. V praktické části jsou Markowitzův model, Konno & Yamazaki model a Youngův minimaxový model aplikovány na soubor vybraných aktiv z amerického akciového trhu. Každý model generuje množinu efektivních portfolií pro tři odlišná jednoletá období; jedná se o roky 2010, 2011 a 2012. Dosažené výsledky jsou diskutovány a analyzovány s ohledem na konkrétní období.

**Klíčová slova:** teorie portfolia, Markowitzův model, Konno a Yamazaki, Young, minimaxový model

## **ABSTRACT**

This thesis starts with presenting Modern portfolio theory and its historical development. Then it deals with risk-return space and investors' risk aversion. Markowitz's optimal portfolio selection model is derived in detail with illustration on basic example. In addition, some of Markowitz's model modifications are mentioned and chosen alternative models are introduced and described with an emphasis on the relation to Markowitz's model. In the next part of this work Markowitz's model, Konno & Yamazaki model and Young's minimax model are applied to the selected set of assets from the U.S. stock market. Each model generates efficient frontier for three different one-year periods; it concerns years 2010, 2011 and 2012. There is a discussion and comparative analysis of the obtained results at the end of this thesis.

**Key words:** Modern portfolio theory, Markowitz's optimal portfolio selection model, Konno and Yamazaki, Young, minimax model

# OBSAH

Úvod.....	1
<b>1 Teorie portfolia.....</b>	<b>2</b>
1.1 Představení moderní teorie portfolia .....	2
1.2 Historický vývoj.....	3
1.3 Aktiva.....	4
1.3.1 Hmotná a nehmotná aktiva .....	5
1.3.2 Finanční aktiva .....	5
1.4 Použití teorie portfolia a motivy vedoucí k jeho sestavování.....	6
1.5 Způsoby správy portfolia.....	7
<b>2 Modely optimální volby portfolia .....</b>	<b>7</b>
2.1 Prostor riziko-výnos .....	7
2.1.1 Princip dominance aktiv .....	8
2.1.2 Investorův vztah k riziku .....	9
2.2 Základní Markowitzův model, 1952.....	11
2.2.1 Sestavení optimalizačního problému .....	11
2.2.2 Metoda Lagrangeových multiplikátorů .....	17
2.2.3 Optimalizace nevázaná na požadovanou výnosnost .....	18
2.2.4 Nalezení optimálního portfolia složeného z $n$ rizikových aktiv .....	19
2.2.5 Grafické znázornění v prostoru riziko-výnos.....	22
2.3 Obměny základního modelu.....	24
2.3.1 Podmínky nezápornosti vah a další lineární omezení .....	24
2.3.2 Investice do bezrizikového aktiva, model CML .....	24
2.4 Alternativní modely.....	28
2.4.1 Roy, 1952 .....	28
2.4.2 Konno & Yamazaki, 1991 .....	32
2.4.3 Young, 1998.....	33
2.4.4 Maximalizace středního užitku .....	34
<b>3 Aplikace modelů na reálná data.....</b>	<b>35</b>
3.1 Vstupní data.....	35
3.2 Řešení modelů .....	37
3.3 Diskuze výsledků .....	38
Závěr.....	44

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Různé typy korelace mezi dvěma aktivy .....	3
Obrázek 2: Prostor riziko-výnos .....	8
Obrázek 3: Dominance aktiv .....	8
Obrázek 4: Averze vůči riziku .....	9
Obrázek 5: Užitečná funkce .....	10
Obrázek 6: Vrstevnice užitečné funkce (indiferenční křivky) .....	10
Obrázek 7: Množina přípustných portfolií .....	13
Obrázek 8: Ukázka možných kombinací dvou aktiv v závislosti na korelaci .....	13
Obrázek 9: Markowitzovo optimální portfolio .....	14
Obrázek 10: Funkce rizika pro data z <i>Příkladu 2.1</i> .....	16
Obrázek 11: Funkce rizika pro data z <i>Příkladu 2.1</i> a omezující podmínky .....	16
Obrázek 12: Vrstevnice funkce rizika pro data z <i>Příkladu 2.1</i> a omezující podmínky .....	17
Obrázek 13: Množina hraničních portfolií .....	23
Obrázek 14: Eficientní hranice .....	24
Obrázek 15: Capital Market Line .....	27
Obrázek 16: Sharpeho míra portfolia .....	28
Obrázek 17: Royův model portfolia .....	30
Obrázek 18: Markowitz vs. Roy .....	31
Obrázek 19: Markowitz vs. Roy – detail .....	32
Obrázek 20: Maximalizace středního užitku .....	35
Obrázek 21: Porušování normality vstupních dat .....	37
Obrázek 22: Množiny hraničních portfolií .....	38
Obrázek 23: Průběh investice a denní výnosnost .....	40
Obrázek 24: Porovnání denních výnosností s normálním rozdělením .....	41
Obrázek 25: Požadovaná vs. skutečná výnosnost .....	42



## **SEZNAM TABULEK**

Tabulka 1: Výsledky – 2010.....	38
Tabulka 2: Výsledky – 2011.....	39
Tabulka 3: Výsledky – 2012.....	39
Tabulka 4: Souhrnné výsledky – 2010.....	41
Tabulka 5: Souhrnné výsledky – 2011.....	41
Tabulka 6: Souhrnné výsledky – 2012.....	42

## ÚVOD

Je tomu již více než půl století, co jeden student ekonomie Chicagské univerzity hledal téma pro svoji dizertační práci. Jeho konzultant mu doporučil věnovat se analýze akciového trhu. Harry Markowitz tuto radu přijal a na základě svojí práce vytvořil teorii, která se stala základem finanční ekonomie, znamenala revoluci v investování a začala být využívána investory po celém světě. Markowitzova teorie výběru portfolia se stala jedním z pilířů finanční teorie, přinesla prostor pro další rozvoj této problematiky v průběhu dvacátého století a zůstává tak aktuální i v moderním finančním světě století jednadvacátého.

Tato práce se snaží přiblížit vývoj moderní teorie portfolia, od jejích kořenů až po některé modernější přístupy. Klade si za cíl představit různé přístupy k nalezení optimálního portfolia a poukázat na to, co mají společného a čím se liší, nastínit možné výhody a nevýhody, které z těchto odlišností mohou plynout a aplikovat modely na reálných datech.

Práce začíná představením teorie investiční hodnoty, teorie, která vládla akciovému trhu před Harrym Markowitzem a tedy i teorie, která Markowitze v počátku jeho práce ovlivňovala. V úvodu také budou zmíněny různé typy aktiv, motivace k sestavování portfolia a metody jeho správy. Poté si představíme prostor riziko-výnos a investorův vztah k riziku popsany užitkovou funkcí na tomto prostoru. V následující části je představen Markowitzův model optimální volby portfolia a některé jeho obměny. Další úsek se věnuje vybraným alternativním modelům. Royův model portfolia byl publikován ve stejné době jako model Markowitzův a přináší na danou problematiku nový úhel pohledu. Přesto lze najít mnohé analogie, na které se tato práce pokouší poukázat. Cílem je i představit některé modernější modely, jako například model vytvořený Hiroshi Konnem a Hiroaki Yamazakim, nebo Youngův minimaxový model. Oba tyto přístupy přinášejí odlišný způsob měření rizika. Seznam alternativních modelů potom uzavírá přístup maximalizace užitku individuálního investora. V následující kapitole jsou některé z výše uvedených modelů aplikovány na reálná data. Závěr se poté věnuje diskuzi výsledků, které jednotlivé modely přinesly, jejich porovnání a zhodnocení.

Společnost, lišící se individuálním chápáním rizika se bude, a měla by se, lišit tím, co je bráno jako optimální. Tak, jako situace tisíce trosečníků na podobných ostrovech, s podobnými znalostmi, technologiemi a zdroji, která vyústí v tisíc možná podobných, ale při bližším pohledu vždy zcela individuálních a jedinečných řešení, bude i každé portfolio jedinečné a bude zcela odpovídat individuálním preferencím konkrétního investora.

# 1 TEORIE PORTFOLIA

Slovo portfolio pochází z itaštiny a znamená původně desky na spisy nebo listiny. V ekonomii či finanční matematice pojem portfolio odkazuje na libovolný soubor finančních aktiv jako například akcií, dluhopisů nebo i peněz v hotovosti. Portfolio může být v majetku individuálního investora nebo spravováno investičními fondy, bankami a jinými finančními institucemi. Jinak lze říci, že portfolio je soubor investic, který investor vytváří se záměrem maximalizace zisku při současné snaze o minimalizaci rizika diverzifikací portfolio mezi větší počet aktiv. Konstrukce portfolio je tak hledáním optimálního kompromisu mezi touhou po co nejvyšším výnosu a snahou minimalizovat možná rizika. [1],[4]

## 1.1 PŘEDSTAVENÍ MODERNÍ TEORIE PORTFOLIA

Moderní teorie portfolio (*modern portfolio theory*, MPT) je teorie pokoušející se nalézt minimální výši rizika při daném výnosu, nebo ekvivalentně maximalizovat zisk pro danou úroveň rizika prostřednictvím optimální volby podílů jednotlivých aktiv. Teorie portfolio je široce využívána ve finanční praxi a pánové Harry Markowitz, Merton Miller a William Sharpe, kteří stáli u jejího zrodu, byli v roce 1990 oceněni Cenou Švédské národní banky za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela, běžně označovanou jen jako Nobelova cena za ekonomii. Ocenění byli za „průkopnickou práci v oblasti ekonomie, financí a financí korporací“. [3]

MPT je matematická formulace pojmu diverzifikace v investování s cílem vybrat takovou kombinaci aktiv, která má nižší riziko než jednotlivá aktiva individuálně. Toto je možné díky tomu, že různá aktiva mohou reagovat na změny trhu opačně – jedno růstem ceny a druhé naopak poklesem. Podstatné ovšem je, že diverzifikace snižuje riziko nejen v případě, kdy mezi vývojem cen aktiv existuje záporná korelace, ale i v případě, kdy je korelace kladná. [3]

Více matematicky řečeno MPT chápe výnos aktiva jako normálně rozdělenou náhodnou proměnnou, definuje riziko jako směrodatnou odchylku z této proměnné a modeluje portfolio jako váženou kombinaci aktiv tak, že konečná výnosnost portfolio je váženou kombinací výnosů jednotlivých aktiv. Kombinací různých aktiv, jejichž výnosy nejsou absolutně korelované, dokáže MPT za splnění jistých předpokladů redukovat výsledný rozptyl výnosnosti portfolio a tak snižovat riziko plynoucí z investování.

Označme si hodnotu korelačního koeficientu  $\rho$ . Korelační koeficient má některé často využívané vlastnosti:

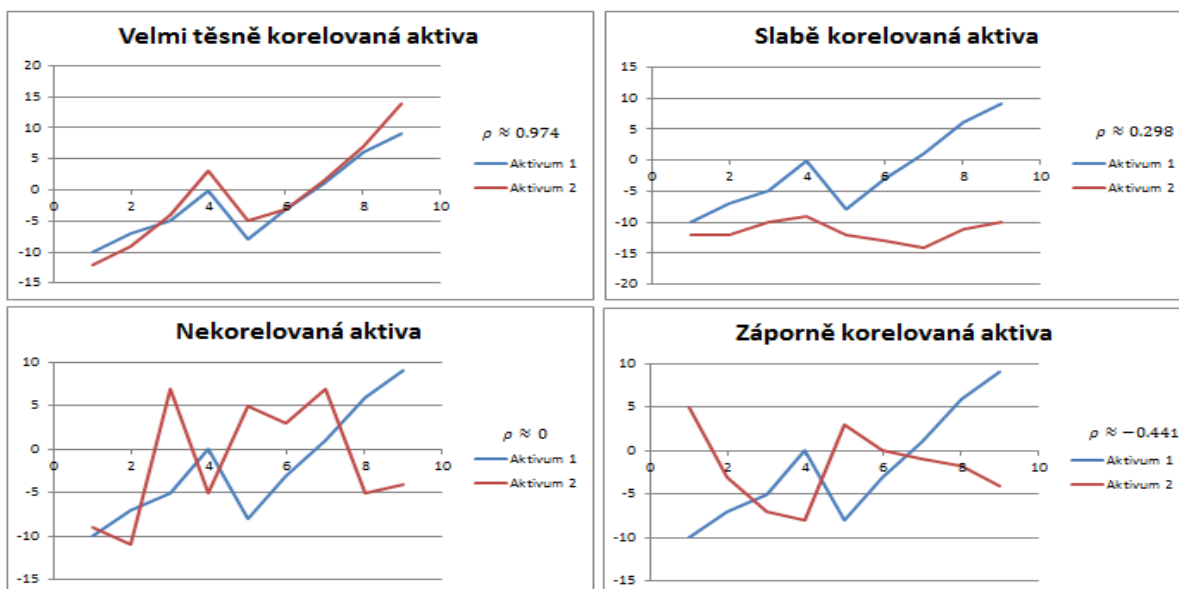
- $-1 \leq \rho \leq 1$ .
- Je-li hodnota  $\rho$  blízká 1, pak se míry zisku aktiv chovají velmi podobně v tom smyslu, že pokud roste jedna z nich, pak roste i druhá a naopak (čím je hodnota  $\rho$  blíže 1, tím je tato závislost větší, přičemž  $\rho = 1$  signalizuje dokonce deterministickou lineární závislost mezi dvěma aktivy s kladnou směrnici).
- Je-li hodnota  $\rho$  blízká  $-1$ , pak se míry zisku aktiv chovají opačně v tom smyslu, že pokud roste jedna z nich, pak druhá klesá a naopak (čím je hodnota  $\rho$  blíže  $-1$ , tím je tato závislost větší, přičemž  $\rho = -1$  signalizuje dokonce deterministickou lineární závislost mezi dvěma aktivy se zápornou směrnici).

- Je-li hodnota  $\rho$  blízko 0, pak se míry zisku aktiv chovají navzájem nezávisle.

[1]

Ilustrujme si některé příklady následujícími diagramy. Na ose  $x$  jsou obchodní dny na burze a na ose  $y$  denní výnos aktiva v procentech.

OBRÁZEK 1: RŮZNÉ TYPY KORELACE MEZI DVĚMA AKTIVY



Zdroj: vlastní zpracování

## 1.2 HISTORICKÝ VÝVOJ

Markowitzova analýza se snaží maximalizovat zisk při dané úrovni rizika, anebo naopak minimalizovat riziko při dané úrovni ziskovosti. Před Harry Markowitzem byly investice sice spojeny s výnosem, nikoliv ale s rizikem. John Burr Williams ve své stěžejním díle *The Theory of Investment Value* (1938), která ovlivnila Markowitze v jeho budoucí práci, stanovil tzv. investiční hodnotu (*investment value*). Tato investiční hodnota byla definovaná jako současná hodnota budoucích dividend nebo budoucích kuponů a jistin. Její praktický význam spočíval v tom, že pro každého investora měla představovat něco jako kritickou hodnotu, nad níž nemůže jít při nákupu či držení, aniž by zvýšil hrozbu finanční ztráty. Pokud někdo koupí aktivum za cenu nižší než je investiční hodnota, neměl by nikdy ztratit a to dokonce ani tehdy, pokud by jeho cena v budoucnu klesla, protože pořád může aktivum držet kvůli budoucím příjmům z dividend a kuponů, jejichž hodnota je větší, než byla cena, za kterou aktivum pořídil. Ale pokud by investor nakoupil za cenu, která převyšuje investiční hodnotu, pak jeho jediná šance, jak se vyvarovat ztráty v případě poklesu tržní hodnoty, je prodat aktivum někomu, kdo musí přijmout ztrátu ve formě nedostatečného příjmu. [2]

Nyní se zaměříme na práci J. B. Williamse. Pro cenné papíry Williams určil současnou hodnotu budoucích dividend:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} d_t \left( \frac{1}{1+i} \right)^t = d_1 \left( \frac{1}{1+i} \right) + d_2 \left( \frac{1}{1+i} \right)^2 + d_3 \left( \frac{1}{1+i} \right)^3 + \dots, \quad (1.1)$$

kde  $V_0$  je investiční hodnota na počátku,  $d_t$  dividendy v roce  $t$  a  $i$  úroková míra požadovaná investorem. Williams tak našel současnou hodnotu dividend, ale nikoliv zisků, protože zisky nevyplacené jako dividendy by měly být úspěšně reinvestovány tak, že budou produkovat budoucí dividendy. V případě, že se tak nestane, dojde k peněžní ztrátě; zisk je prostředkem k zajištění dividend. [2]

Podle Williamse je tedy hodnota aktiva přesně rovna současné hodnotě budoucích dividend. Tvrdil, že současné zisky, finanční kondice a ekonomický výhled pouze asistuje kupujícím a prodávajícím odhadovat budoucí dividendy, a také že firmy by měly určité procento zisků reinvestovat zpět do firmy pro udržení konkurenceschopnosti a tedy i schopnosti vyplácet dostatečně vysoké dividendy. [2]

Ačkoliv Markowitz uznává vliv Williamse na jeho počáteční pohled na běžná aktiva, uvědomoval si, že investor musí být nějak kompenzován za podstupování rizika. Fakt, že by mělo existovat přímé propojení mezi rizikovostí aktiva a jeho mírou ziskovosti, se zdá být poměrně intuitivní. Jak již bylo řečeno, zajímá nás zabezpečení co nejvyššího možného výnosu na dané úrovni rizikovosti, nebo dosažení minimální úrovně rizika na určité hladině výnosnosti. Takovýto koncept postavený na bázi riziko-výnos přesně splňuje množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu. Harry Markowitz publikoval svoji teorii v odborném časopise *Journal of Finance* ve článku s názvem *Portfolio Selection* v roce 1952 a ve stejnojmenné knize z roku 1959 a stal se tak zakladatelem moderní teorie portfolia, která znamenala důležitý pokrok v matematickém modelování financí. Tato původní Markowitzova verze se pak stala základem pro další rozvoj a modifikace základního modelu v průběhu následujících let. [2],[3]

### 1.3 AKTIVA

Jelikož portfolio je složeno z aktiv, uvedeme stručný přehled základních typů aktiv a zmíníme jejich možné využití z hlediska tvorby portfolií.

Aktivum může být cokoli, co je předmětem vlastnictví jako například cenné papíry, nemovitosti nebo movitý majetek. Aktiva členíme následovně:

- Hmotná aktiva (movitý majetek, nemovitosti, komodity...).
- Nehmotná aktiva (know-how, software...).
- Finanční aktiva – tato aktiva jsou pro teorii portfolia nejdůležitější, proto budou v jedné z následujících podkapitol rozebrány podrobněji.

[19]

### 1.3.1 HMOTNÁ A NEHMOTNÁ AKTIVA

Teorie portfolia se hmotnými a nehmotnými aktivy příliš nezabývá. Problémem je nehomogenita těchto aktiv. Mohou se velmi lišit například podobou, zpracováním či lokací a nejsou tedy vhodná pro obchodování „ve velkém“ na burzách. Tento typ majetku je však často využíván se spekuláčními účely (očekávaný růst ceny bytů či starožitností, očekávané výnosy z pronájmu apod.) nebo za účelem zajištění (ochrana před inflací, zástava za úvěr apod.). Zvláštní postavení však hrají komodity. Komodity představují zboží obchodované na trhu bez rozdílů v kvalitě. Jde o homogenní produkty, které lze obchodovat za jednotnou cenu na globálních trzích. Jedná se zejména o trhy s různými surovinami (ropa, zlato, stříbro, uran...), či zemědělskými produkty (kukuřice, pšenice, káva...). [3], [19]

### 1.3.2 FINANČNÍ AKTIVA

Finanční aktiva mají v teorii portfolia dominantní postavení. Finanční aktiva dělíme na:

#### a) Hotovost a depozita

- Hotovost – udržovat větší množství hotovostních peněz v portfoliu není obvyklé a vzhledem k inflaci také neefektivní.
- Depozita – někdy je důležité mít dostatek dostupných finančních prostředků na běžných nebo termínovaných účtech pro zajištění likvidity portfolia (např. v některých podílových fondech apod.).

#### b) Majetkové cenné papíry

- Akcie – jde o cenný papír, kterým emitent (vydává akcie) umožňuje akcionáři (kupuje akcie) podílet se na řízení a také zisku společnosti (většinou formou dividend). Rozlišujeme akcie:
  - ⇒ Kmenové – standartní akcie emitované pro získání nebo zvýšení základního kapitálu firmy.
  - ⇒ Prioritní – zajišťují akcionáři přednostní výplatu dividend.
  - ⇒ Úrokové – přinášejí majiteli pevný úrok.
- Účast – jedná se o cenný papír, který majiteli přináší právo podílet se na vytvořeném zisku. Oproti akcií zde chybí právo podílet se na řízení firmy. Tyto cenné papíry emitují většinou firmy, které podle zákona nemohou emitovat akcie.
- Podílové listy – tyto cenné papíry zajišťují majiteli podíl v instituci kolektivního investování (podílové fondy apod.).

#### c) Dluhové cenné papíry

- Směnka – listina, která obsahuje zákonem vymezené náležitosti a jejímu majiteli z ní vyplývá právo na proplacení peněžní pohledávky.
- Obligace (dluhopis, bond) – cenný papír, jehož vystavovatel se zavazuje vyplatit majiteli dluhopisu dlužnou nominální částku a vyplácet výnosy tohoto cenného papíru k pevně stanovenému datu např. formou kupónů. Obligace mohou být vydávány státem, podnikem, bankou nebo orgánem státní správy.
- Zástavní (hypoteční) list – obligace, u které je splacení závazků zabezpečeno hypotečně jištěnými pohledávkami.
- Depozitní certifikáty – jedná se o krátkodobé obchodovatelné cenné papíry, které vydávají banky výměnou za termínované vklady.

- Pokladniční poukázky – cenné papíry sloužící ke krytí deficitu státního rozpočtu. Ve srovnání s jinými cennými papíry mají největší likviditu. Kalkulace zisku spojeného s koupí poukázky je téměř bez rizika, neboť splatnost je garantována státem a krátká doba splatnosti redukuje vliv inflace a změn úrokových sazeb. Vzhledem k výše uvedenému jsou pokladniční poukázky vhodné k odhadům bezrizikové úrokové míry.
- d) Nárokové cenné papíry
- Pojistná smlouva – smlouva uzavřená mezi subjekty, kdy jeden subjekt je oprávněn požadovat plnění od jiného subjektu za předpokladu, že nastane smlouvou blíže specifikovaná událost.
  - Termínované kontrakty – jedná se zejména o smlouvy následujících typů:
    - ⇒ Forwardy – jde o individuálně sjednané termínované obchody na budoucí nákup či prodej zboží. Portfolia jsou často vázána termínovanými smlouvami, které chrání portfolio před nepředvídatelnými událostmi, jako jsou např. změny měnového kurzu apod.
    - ⇒ Futures – vysoce standardizované forwardy, což umožňuje jejich obchodování na burze.
    - ⇒ Swapy – představují dohodu o budoucí směně plateb (např. výměna pevných úrokových sazeb za proměnlivé apod.).
    - ⇒ Opce – termínovaná transakce, při níž získává držitel opce právo (ale nikoli povinnost) provést ve sjednaném termínu příslušný obchod, naopak eminent opce se pasivně podřizuje rozhodnutí držitele opce.

[1],[19]

## 1.4 POUŽITÍ TEORIE PORTFOLIA A MOTIVY VEDOUcí K JEHO SESTAVOVÁNÍ

Teorie portfolia je často využívána v rámci institucí kolektivního investování. Portfolia těchto společností jsou tvořena koupenými cennými papíry a depozity bankovních nebo nebankovních institucí. Další využití je při řízení aktiv a pasiv obchodních bank. Jde o portfolia aktiv, pasiv, portfolia měnová anebo komoditní. Pochopitelně časté je také konstruování portfolia individuálními investory. [19]

Motivy vedoucí k sestavování portfolia mohou být různé. Může jít o motiv získání kapitálu, kdy ekonomický subjekt potřebuje získat určitý kapitál. Motiv spekulativní spočívá v očekávání určitých změn na trhu. Tzv. spekulanti očekávají například pokles úrokové míry, depreciaci určité měny nebo změnu ceny konkrétních akcií. Pro portfolia sestavená se spekulativním motivem je charakteristická šance na vysoký výnos, která je ale vykoupená velkou rizikovostí. Dalším motivem je motiv arbitráže. Investoři zvaní arbitrážeri se snaží dosáhnout zisků využíváním rozdílů na jednotlivých finančních trzích. V současné době vlivem neustálé modernizace výpočetní a komunikační techniky je tento způsob dosahování zisků čím dál obtížnější. Na závěr uvedme motiv zajišťovací, kdy se investoři snaží zajistit výnos svého portfolia. Snaží se za pomoci forwardů, futures, swapů, opcí či jejich kombinací co nejvíce redukovat riziko poklesu ceny finančních aktiv a pokoušejí se efektivně řídit rizikovitost portfolia. [1],[19]

## 1.5 ZPŮSOBY SPRÁVY PORTFOLIA

V zásadě existují dva hlavní přístupy ke správě portfolia:

- 1) Aktivní správa portfolia – po celou dobu existence portfolia investor hledá na trhu nové investiční příležitosti a složení portfolia tak podle potřeby průběžně upravuje.
- 2) Pasivní správa portfolia – investor určitým způsobem sestaví portfolio a potom po celou dobu trvání investice (tato doba je předem určená) portfolio neupravuje. Výhodou je minimalizace nákladů v podobě makléřských poplatků. Nevýhodou může být, že tímto přístupem obvykle nelze dosáhnout extrémně vysokých výnosů. Výnosnost lze ale zvýšit v případě reinvestice kupónových plateb formou bankovních či termínovaných vkladů.

Ke správě portfolia může existovat i odlišný přístup, kdy cílem investora je získat kontrolní podíl v určité firmě, jejíž akcie jsou volně obchodovatelné. [19]

V této práci budeme pro testování modelů využívat pasivní přístup ke správě portfolia.

## 2 MODEL Y OPTIMÁLNÍ VOLBY PORTFOLIA

V této kapitole se zaměříme na prostor riziko-výnos, Markowitzův model volby optimálního portfolia a na některé z alternativních modelů.

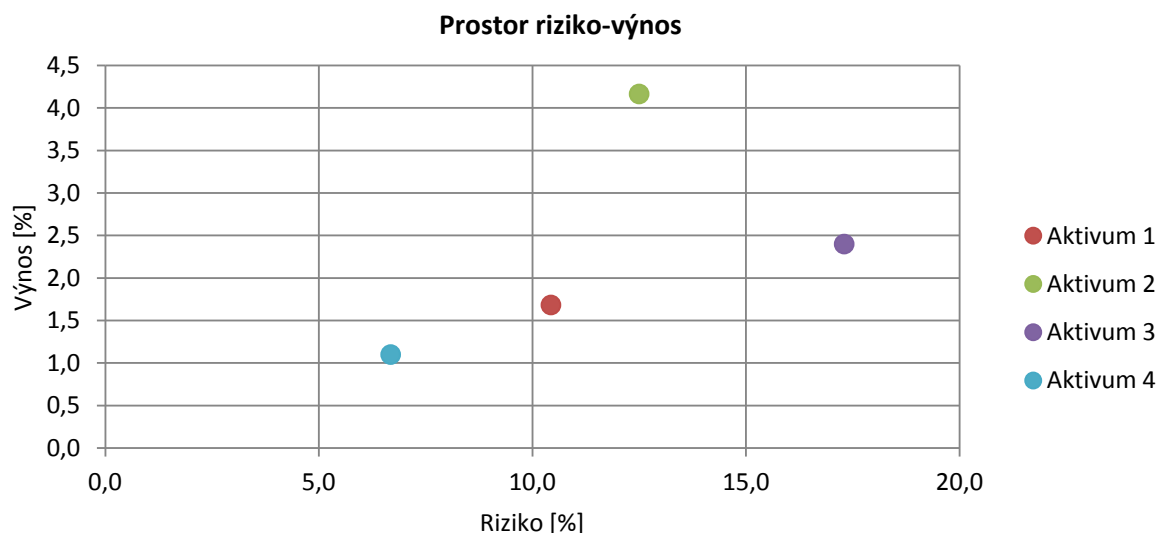
### 2.1 PROSTOR RIZIKO-VÝNOS

Tento dvoudimenzionální prostor představuje vhodné grafické schéma pro hledání kompromisu mezi dostatečně malým rizikem a zároveň uspokojivě velkou mírou zisku. Vyjdeme-li z Markowitzova přístupu k teorii portfolia, pak předpokládáme, že výnos z  $i$ -tého aktiva za dobu trvání portfolia je popsán normálně rozdělenou náhodnou veličinou  $R_i$ . Označme si očekávaný výnos aktiva (výnosnost aktiva)  $r_i = E(R_i)$ , tedy jako střední hodnotu náhodné veličiny  $R_i$ . Dále si označíme riziko změny výnosu aktiva (rizikovost aktiva) jako  $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2(R_i)}$ . Rizikovost aktiva je tedy brána jako směrodatná odchylka náhodné veličiny  $R_i$ ; riziko tak zřejmě není chápáno jen ve smyslu nižšího, či dokonce záporného výnosu (ztráty), ale též ve smyslu výnosu vyššího, než je očekávaná výnosnost  $r_i$ . Je také vhodné připomenout, že mají-li složky náhodného vektoru  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$  normální rozdělení, pak náhodný vektor  $\mathbf{R}$  má  $n$  – rozměrné normální rozdělení a zároveň platí, že každá lineární kombinace těchto složek má také normální rozdělení. [4], [7]

V praxi střední hodnotu ani směrodatnou odchylku aktiva neznáme, pro odhad se používají historické hodnoty a z nich odvozené výběrové statistiky: aritmetický průměr a výběrová směrodatná odchylka (metoda *ex-post*). Další možností je odhad pomocí očekávaných hodnot (metoda *ex-ante*). V dalším průběhu této práce budeme využívat metody *ex-post*. Výnosnost a rizikovost aktiva lze potom znázornit jako jediný bod v prostoru riziko-výnos. Příklad si můžeme uvést na *Obrázku 2*. [4]



OBRÁZEK 2: PROSTOR RIZIKO-VÝNOS



Zdroj: vlastní zpracování

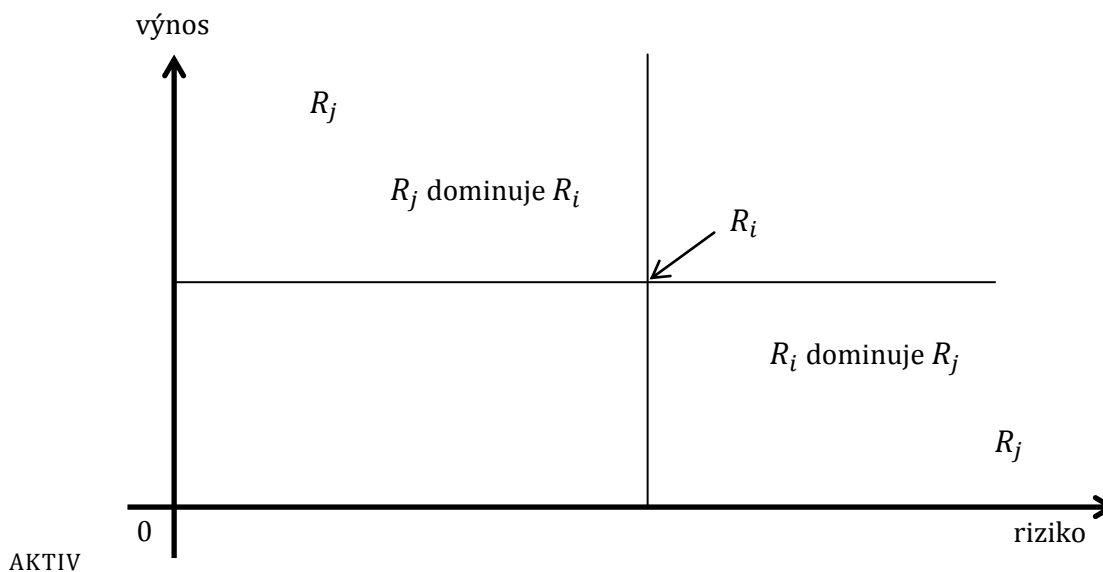
### 2.1.1 PRINCIP DOMINANCE AKTIV

Nechť aktivum  $R_i$  je charakterizováno výnosností  $r_i$  a rizikovostí  $\sigma_i$  a podobně aktivum  $R_j$  veličinami  $r_j$  a  $\sigma_j$ . O aktivu  $R_i$  řekneme, že dominuje aktivu  $R_j$ , pokud platí

$$r_i \geq r_j \wedge \sigma_i \leq \sigma_j$$

a alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá. Zjednodušeně aktivum  $R_i$  dosahuje při menším riziku vyšší výnosnosti než aktivum  $R_j$ . Obecně tedy pro aktivum  $R_i$  tak můžeme určit dvě odlišné oblasti. Situace je ilustrována na *Obrázku 3*: [1],[4]

OBRÁZEK 3: DOMINANCE



Zdroj: vlastní zpracování

Na *Obrázku 2* tedy například Aktivum 2 jednoznačně dominuje Aktivu 3.

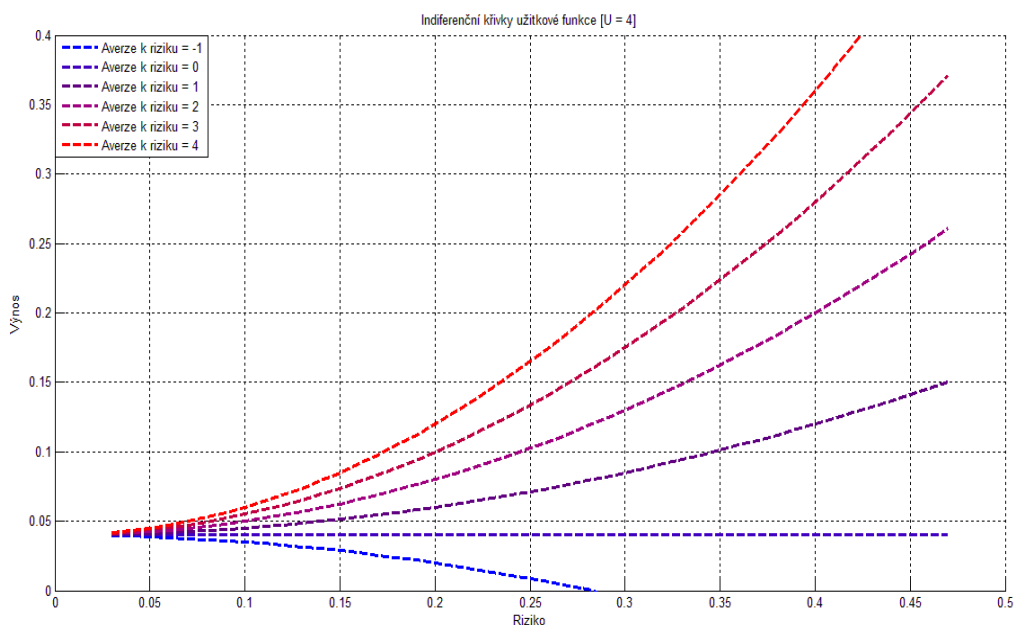
## 2.1.2 INVESTORŮV VZTAH K RIZIKU

Preference investora záleží na jeho individuálních postojích. Jeho vztah k riziku je možné vyjádřit například pomocí indifferenčních křivek Neumann-Morgensternovy užitkové funkce na prostoru riziko-výnos. Indiferenční křivky spojují ty body v rovině riziko-výnos, které investor považuje ze svého pohledu na investování za shodně přijatelné (indiferentní). Existují různé užitkové funkce a volba závisí na konkrétním investorovi. V této práci uvažujme užitkovou funkci danou předpisem:

$$U = r - \frac{\mathcal{C}}{2} \sigma^2. \quad (2.1)$$

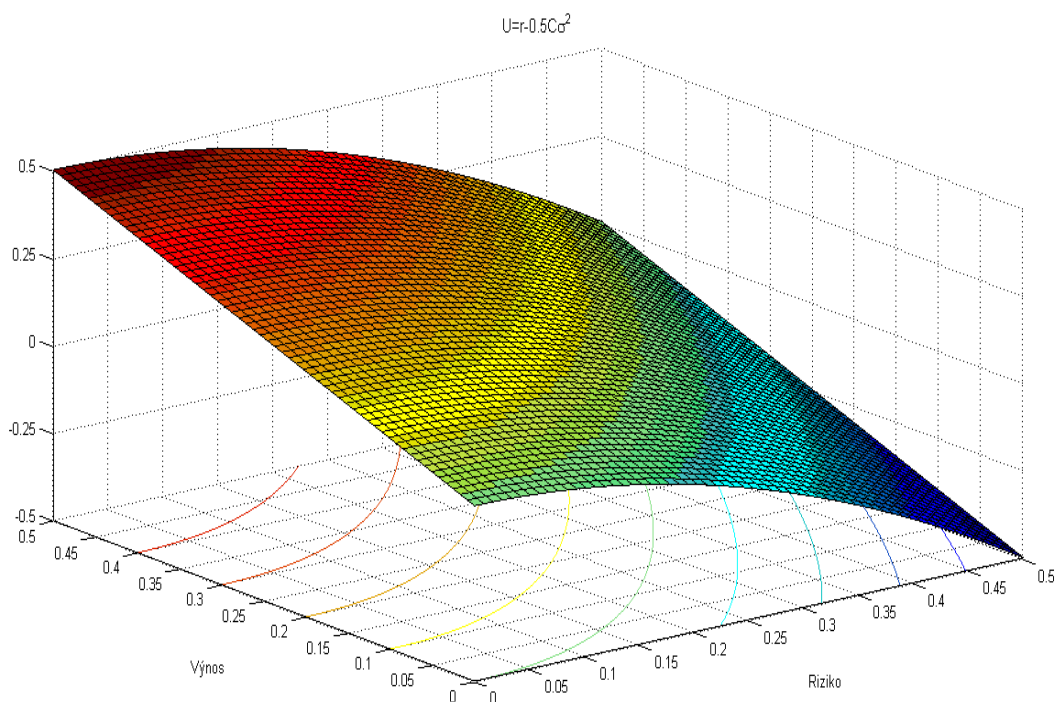
S užitkovou funkcí ve tvaru (2.1) pracuje například program MATLAB. Označení  $r$  představuje výnos,  $\sigma$  riziko a  $\mathcal{C}$  index averze k riziku, který vyjadřuje individuální vztah investora vůči riziku. Čím vyšší je hodnota tohoto indexu, tím více je investor averzní k riziku. Averze k riziku může být nulová a jsou známy i případy rizika vyhledávajících investorů, což se projeví záporným indexem averze k riziku. Na *Obrázku 4* můžeme vidět indifferenční křivky pro různé velikosti averze a velikost užitku  $U = 4$  a *Obrázek 5* zobrazuje užitkovou funkci  $U$  pro  $\mathcal{C} = 4$  včetně vrstevnic, které představují jednotlivé indifferenční křivky. *Obrázek 6* nám potom poskytuje bližší pohled na tyto křivky. Optimální portfolio daného investora se nachází v místě, kde se množina všech přípustných portfolií dotýká nejvýše položené indifferenční křivky, tedy té, která přináší investorovi největší množství užitku. [1],[6]

OBRÁZEK 4: AVERZE VŮČI RIZIKU



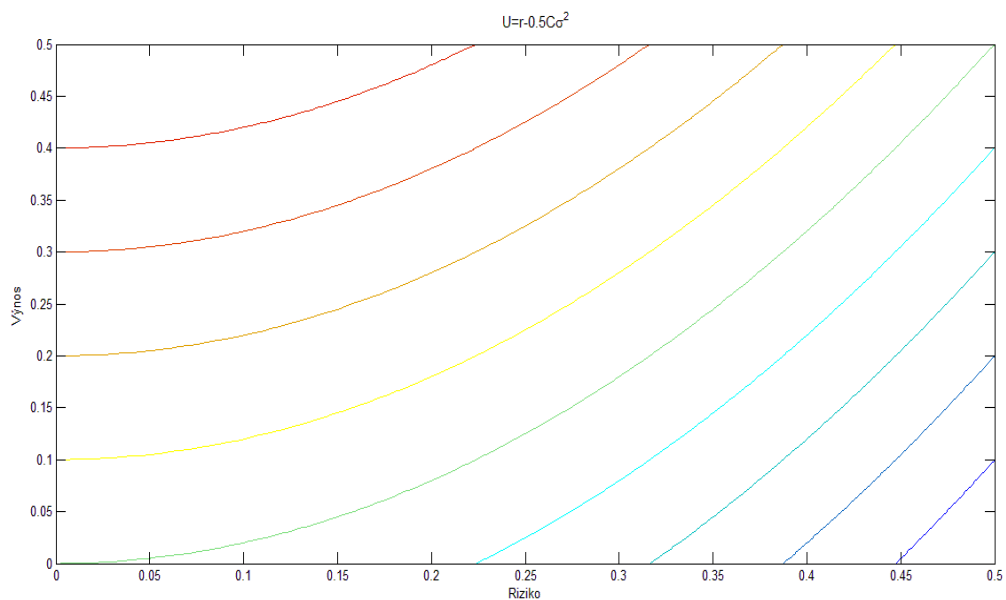
Zdroj: vlastní zpracování

OBRÁZEK 5: UŽITKOVÁ FUNKCE



Zdroj: vlastní zpracování

OBRÁZEK 6: VRSTEVNICE UŽITKOVÉ FUNKCE (INDIFERENČNÍ KŘIVKY)



Zdroj: vlastní zpracování

## 2.2 ZÁKLADNÍ MARKOWITZŮV MODEL, 1952

Nyní odvodíme základní model optimální volby portfolia poprvé formulovaný Harry Markowitzem v roce 1952, který je také známý jako *mean-variance* model. Nejdříve uvedeme několik značně zjednodušujících předpokladů tohoto modelu:

- Rizikovost portfolia je založena na rozptylu výnosností z daného portfolia.
- Investoři jsou averzní k riziku a preferují vyšší výnosy před nižšími a menší riziko před větším.
- Užitek funkce investorů jsou rostoucí a konkávní kvůli averzi k riziku a preferenci spotřeby.
- Investoři jsou racionální a využívají stejných informací.
- Investoři buď maximalizují výnos pro danou hodnotu rizika anebo minimalizují riziko pro požadovanou výnosnost.
- Všichni investoři investují ve stejném čase a pro jedno stejně dlouhé období na ideálním trhu bez transakčních nákladů, bez arbitráže a s neomezenou možností investování.

[3],[5]

### 2.2.1 SESTAVENÍ OPTIMALIZAČNÍHO PROBLÉMU

Uvažujme investici do  $n$  aktiv. Pro každé z nich známe jeho výnosnost  $r_i$  a rizikovost  $\sigma_i$ . Dále označme  $\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j)$  kovarianci aktiva  $R_i$  a aktiva  $R_j$ .

**Poznámka:** Kovariance  $\text{cov}(R_i, R_j)$  je střední hodnota součinu odchylek obou náhodných veličin od jejich středních hodnot. Zapisujeme  $\text{cov}(R_i, R_j) = E\left(\left(R_i - E(R_i)\right)\left(R_j - E(R_j)\right)\right)$ .

**Definice 2.1** *Varianční matice  $\mathbf{V}$  náhodného vektoru  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$  je čtvercová matice velikosti  $n \times n$  složená z kovariancí mezi jeho složkami  $\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j)$   $i, j=1, 2, \dots, n$ . Varianční matice je symetrická pozitivně definitní, s rozptyly složek na diagonále. [7]*

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

**Poznámka:** Platí, že  $\sigma_{ii} = \text{cov}(R_i, R_i) = \sigma_i^2$  a  $\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = \text{cov}(R_j, R_i) = \sigma_{ji}$ . [7]

**Poznámka:** Reálnou symetrickou matici  $\mathbf{A}$  nazveme pozitivně definitní, pokud pro všechny nenulové vektory  $\mathbf{b}$  platí  $\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b} > 0$ . [3]

Jelikož je pro nás kovariance mezi libovolnou dvojicí aktiv  $R_i$  a  $R_j$  známou hodnotou (respektive jsme schopni nalézt její odhad z historických dat), můžeme hledané portfolio charakterizovat pomocí vektoru známých středních hodnot aktiv charakterizujících očekávanou výnosnost  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$  a varianční matice  $\mathbf{V}$ .

**Definice 2.2** *Nechť náhodný vektor  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$  charakterizuje výnosnosti  $n$  různých aktiv. Portfoliem složeným z těchto  $n$  aktiv je každá lineární kombinace  $w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_nR_n$ , kde  $w_i$  představuje relativní podíl  $i$ -tého aktiva v portfoliu. Platí  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  a pokud je zakázán prodej na krátko, pak také  $w_i \in [0; 1]$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ . [4]*

**Poznámka:** Prodej aktiv na krátko (sell short, prázdný prodej) je typ obchodu, kdy investor prodává aktivum, které v okamžiku prodeje nevlastní. Investor si aktivum od vlastníka zapůjčí za daný poplatek na dobu trvání investice. [4]

**Poznámka:** Váhu  $w_i$   $i$ -tého aktiva v portfoliu interpretujeme jako podíl  $W_i/W$ , kde  $W_i$  je částka investovaná do  $i$ -tého aktiva a  $W$  je celková investovaná částka. Z *Definice 2.2* také vyplývá, že  $\sum_{i=1}^n W_i = W$ . Portfolio ve smyslu *Definice 2.2* s touto interpretací vah neplatí jen pro Markowitzův model, ale platí obecně pro všechny dále uvedené modely.

**Definice 2.3** *Nechť existuje reálný vektor vah  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  takový, že  $\sum_{i=1}^n w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$ , kde  $\mathbf{1}$  je vektor samých jedniček délky  $n$ . Očekávanou výnosnost (výnos) portfolia definujeme jako střední hodnotu tohoto portfolia:*

$$E(w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_nR_n) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = \sum_{i=1}^n w_i r_i = \mathbf{w}^T \mathbf{r} := r(\mathbf{w})$$

a rizikovost (riziko) portfolia je dána velikostí jeho směrodatné odchylky:

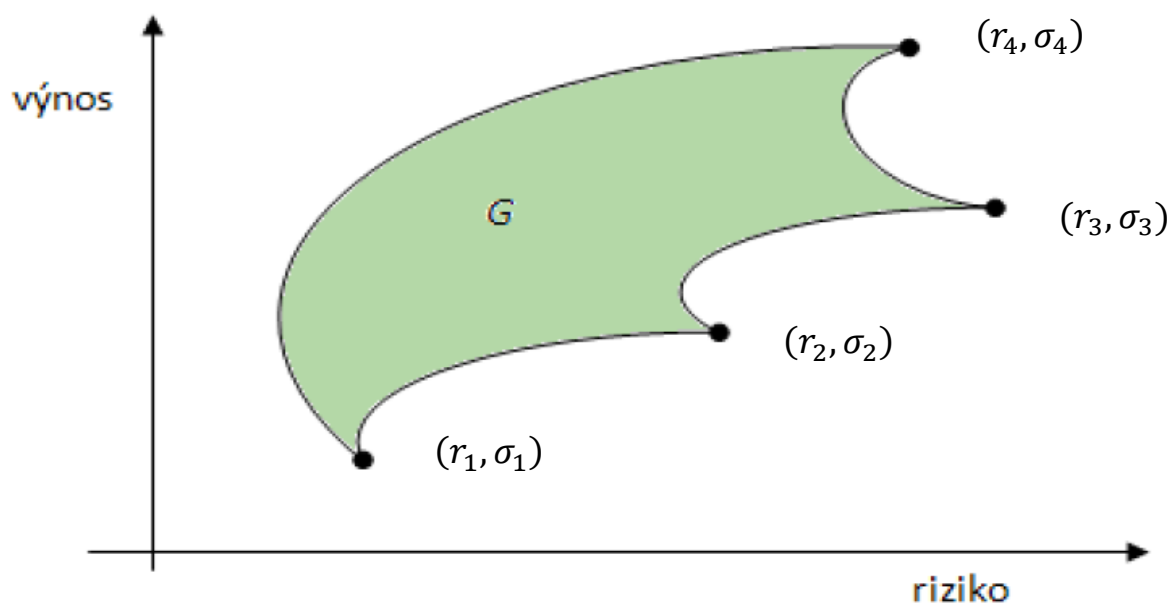
$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2(w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_nR_n)} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} := \\ &:= \sqrt{\sigma^2(\mathbf{w})} = \sigma(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

[5]

**Poznámka:** Pro dvě náhodné proměnné  $R_i$  a  $R_j$  obecně platí  $\sigma^2(w_iR_i + w_jR_j) = w_i^2 \sigma^2(R_i) + w_j^2 \sigma^2(R_j) + 2 w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) = w_i^2 \sigma_i^2 + w_j^2 \sigma_j^2 + 2 w_i w_j \sigma_{ij}$ . [10]

Všechna portfolia v souladu s *Definicí 2.2* a *Definicí 2.3* označíme jako přípustná. Množina všech přípustných portfolií  $G$  má charakteristický „deštníkový tvar“ (*umbrella shape*). [1]

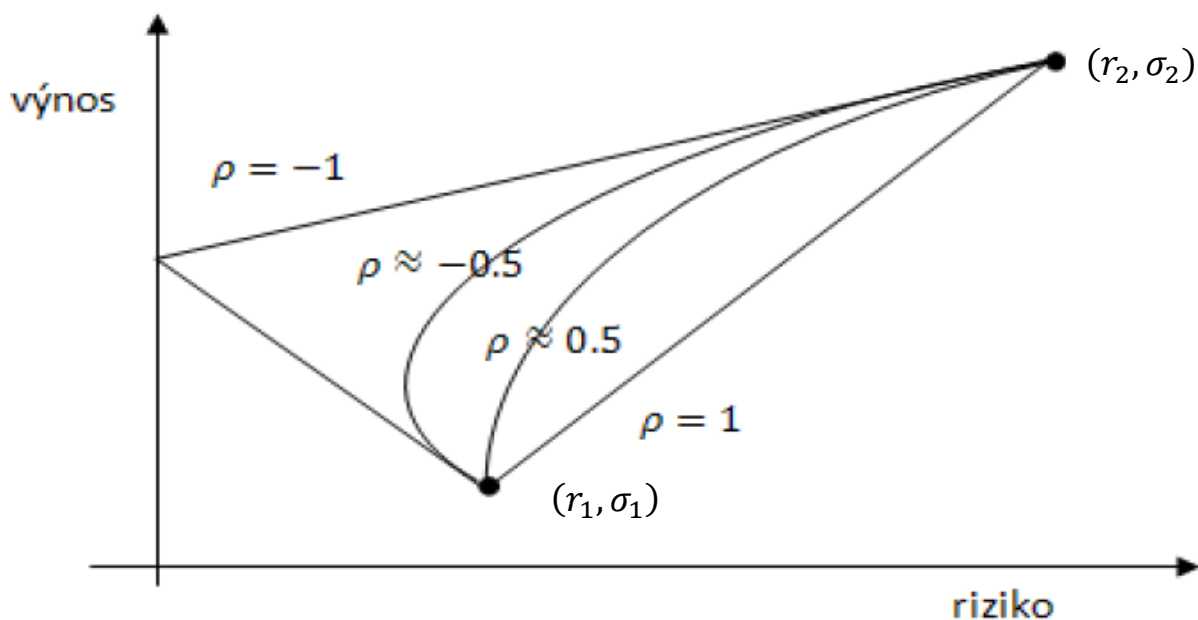
OBRÁZEK 7: MNOŽINA PŘÍPUSTNÝCH PORTFOLIÍ



Zdroj: [10]

Vyklenutí křivky je určeno hodnotou korelačního koeficientu  $\rho$  mezi dvěma aktivy. Platí, že čím je hodnota koeficientu blíže  $-1$ , tím je vyklenutí výraznější. Situaci pro různé hodnoty  $\rho$  je ilustrována na *Obrázku 8*.

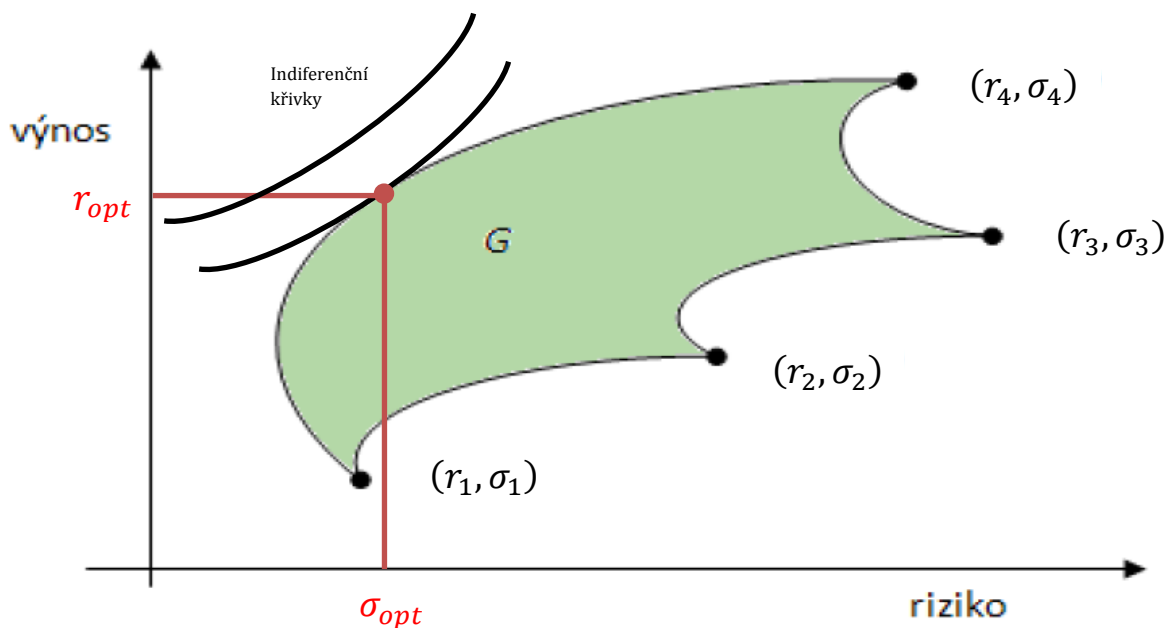
OBRÁZEK 8: UKÁZKA MOŽNÝCH KOMBINACÍ DVOU AKTIV V ZÁVISLOSTI NA KORELACI



Zdroj: [10]

Za splnění předpokladů uvedených v úvodu této kapitoly platí, že pro investora s averzí vůči riziku existuje v rámci množiny přípustných portfolií právě jedno Markowitzovo optimální portfolio přinášející konkrétnímu investorovi největší množství užítku. [4]

OBRÁZEK 9: MARKOWITZOVO OPTIMÁLNÍ PORTFOLIO



Zdroj: [10], vlastní zpracování

Podle předpokladů dávají všichni investoři přednost portfoliu s vyšším výnosem a s nižším rizikem. V souladu s tím definujeme:

**Definice 2.4** Portfolio s váhami  $\mathbf{w}^*$  je eficientní (efektivní) vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu (tzv. mean-variance efficient), jestliže neexistují jiné váhy  $\mathbf{w}$  splňující podmínku  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , pro které je

$$r(\mathbf{w}) \geq r(\mathbf{w}^*) \wedge \sigma(\mathbf{w}) \leq \sigma(\mathbf{w}^*)$$

a alespoň jedna z nerovností je ostrá. [5]

Portfolia, která vyhovují *Definici 2.4*, budeme nazývat eficientní (efektivní) portfolia.

**Příklad 2.1** Speciálně pro portfolio tvořené pouze ze dvou aktiv platí:

$$r(\mathbf{w}) = E(w_1 R_1 + w_2 R_2) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) = w_1 r_1 + w_2 r_2, \quad (2.2)$$

$$\sigma^2(\mathbf{w}) = \sigma^2(w_1 R_1 + w_2 R_2) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}. \quad (2.3)$$

Uvažujme portfolio složené z Aktiva 1 s váhou  $w_1 = 0,3$  a z Aktiva 2 s váhou  $w_2 = 0,7$ . Výnosnost Aktiva 1 je  $r_1 = 0,12$  a jeho rizikovost  $\sigma_1 = 0,10$ . U Aktiva 2 je výnosnost  $r_2 = 0,16$  a rizikovost  $\sigma_2 = 0,14$ . Jaká je střední míra zisku a riziko tohoto portfolia, je-li korelační koeficient mezi aktivy roven  $\rho_{12} = -0,8$ ? Je takové portfolio diverzifikované? [1]

*Řešení:* Dosazením do (2.2) a (2.3) dostáváme:

$$r(\mathbf{w}) = w_1 r_1 + w_2 r_2 = 0,3 \cdot 0,12 + 0,7 \cdot 0,16 = 0,148, \quad \text{tj. } 14,8 \%,$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\mathbf{w}) &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = \\ &= 0,3^2 \cdot 0,10^2 + 0,7^2 \cdot 0,14^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,10 \cdot 0,14 \cdot (-0,8) = 0,0058. \end{aligned}$$

Dále vyjádříme rizikovost portfolia pomocí směrodatné odchylky:

$$\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\sigma^2(\mathbf{w})} = \sqrt{0,0058} \cong 0,0762, \quad \text{tj. } 7,62 \text{ \%}.$$

Jelikož  $\sigma(\mathbf{w}) < \sigma_1$ ,  $\sigma(\mathbf{w}) < \sigma_2$  a výnosnost  $r(\mathbf{w}) \in [r_1, r_2]$ , lze říci, že portfolio je dobře diverzifikované. Obecně ovšem nelze tvrdit, že takto volené portfolio je efektivní, protože váhy byly zvoleny náhodně a nikoliv tak, aby minimalizovaly riziko. Na to, jak nalézt váhy  $\mathbf{w}^*$  minimalizující riziko, se zaměříme v následující části této práce.

**Poznámka:** Při výpočtu jsme využili vlastnosti  $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ , tedy  $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ . [1]

Nyní se podívejme na portfolio tvořené obecně z  $n$  aktiv. Naším cílem je nalézt váhy  $\mathbf{w}^*$ , které odpovídají *Definici 2.4*. Ukažme si metodu řešení, kdy budeme hledat extrém funkce vázaný na omezení. Problém lze tedy zapsat takto:

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma^2(\mathbf{w}) \quad (2.4)$$

za podmínek

$$r(\mathbf{w}) = r_p, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \quad (2.6)$$

kde  $r_p$  je požadovaná (očekávaná) výnosnost portfolia.

Jinými slovy minimalizují rizikovost portfolia vyjádřenou kvadratickým funkcionálem  $\sigma^2(\mathbf{w})$  nalezením optimálních vah  $\mathbf{w}^*$  pro danou úroveň výnosnosti za podmínky, že vše je investováno. Abychom zajistili existenci řešení, je třeba vznést několik předpokladů na vstupní data:

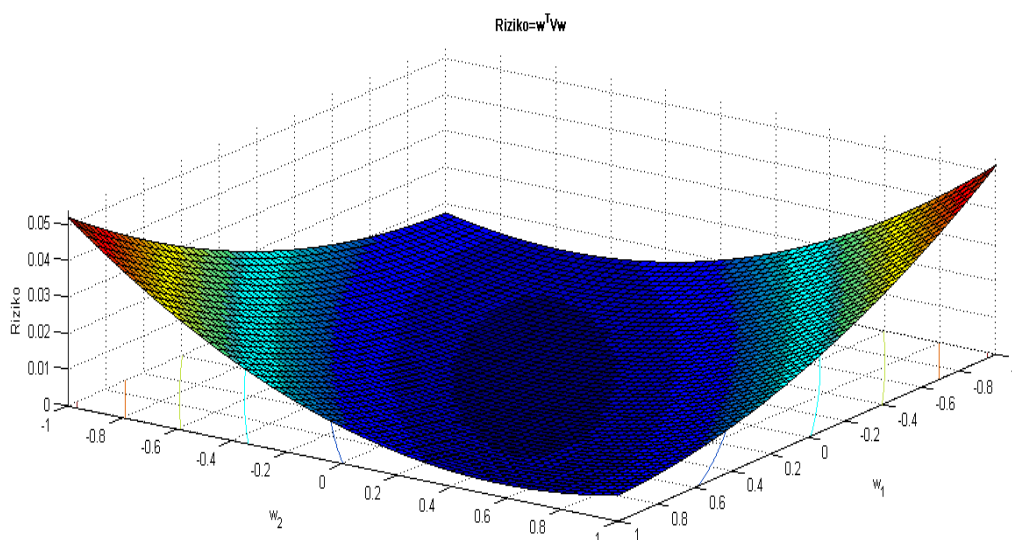
- (i) Variační matice  $\mathbf{V}$  je regulární (což mj. znamená, že žádné aktivum není bezrizikové a že žádné aktivum nelze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních).
- (ii) Výnosnosti nejsou pro všechna aktiva stejné, tedy existuje alespoň jedna dvojice  $i, j$  taková, že  $r_i \neq r_j$ .
- (iii) Výraz  $\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} \neq 0$ .

Při splnění těchto podmínek lze pro vázaný extrém funkce  $\sigma^2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$  odvodit řadu zajímavých vlastností. [2],[5]

Vraťme se nyní k *Příkladu 2.1* a ukažme si, jak bude vypadat minimalizovaná funkce v tomto případě. Jelikož vektor  $\mathbf{w}$  se zde skládá pouze ze dvou složek  $w_1$  a  $w_2$ , máme možnost znázornit funkci  $\sigma^2(\mathbf{w})$  ve třidimenzionálním prostoru:



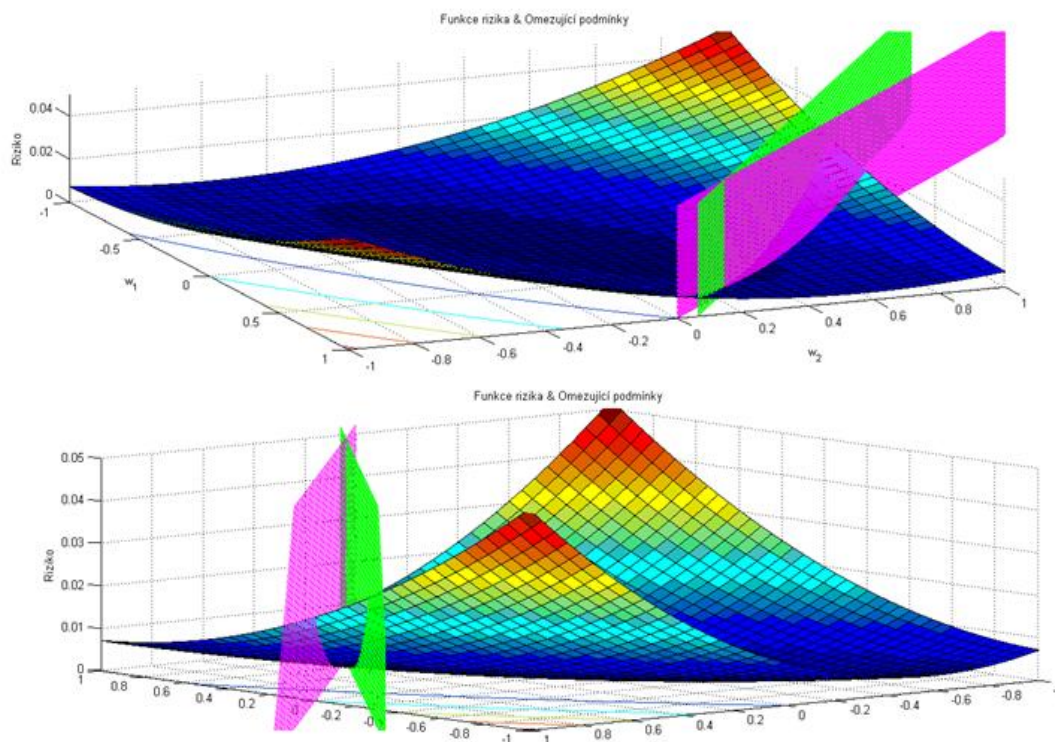
OBRÁZEK 10: FUNKCE RIZIKA PRO DATA Z PŘÍKLADU 2.1



Zdroj: vlastní zpracování

Nyní se ze dvou různých úhlů pohledu podívejme, jak bude situace vypadat po přidání omezujících podmínek  $r(\mathbf{w}) = r_p$  (zelená) a  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$  (magenta). Požadovaná výnosnost  $r_p = 0,13$ :

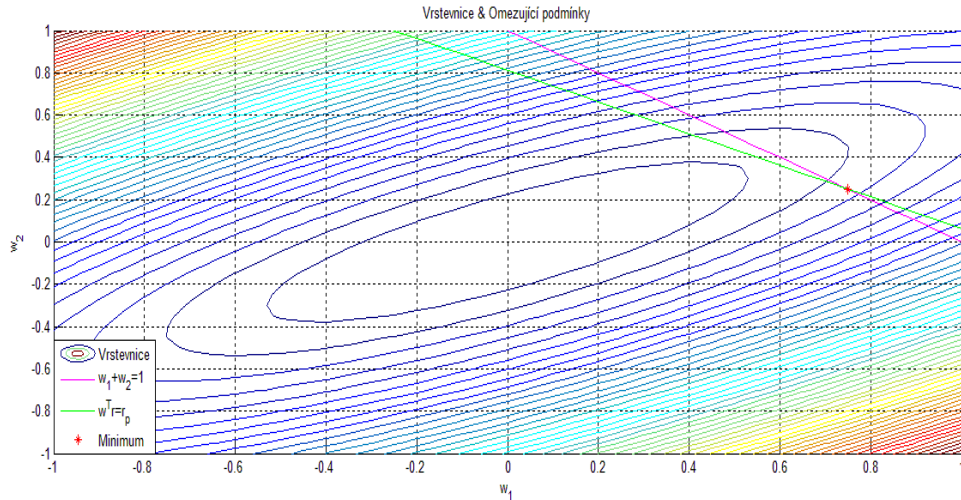
OBRÁZEK 11: FUNKCE RIZIKA PRO DATA Z PŘÍKLADU 2.1 A OMEZUJÍCÍ PODMÍNKY



Zdroj: vlastní zpracování

Pro přehlednost ještě přidáme dvoudimenzionální pohled, kde funkci popisující riziko reprezentují vrstevnice. Na obrázku je navíc červeně vyznačen bod vázaného minima této funkce:

OBRÁZEK 12: VRSTEVNICE FUNKCE RIZIKA PRO DATA Z PŘÍKLADU 2.1 A OMEZUJÍCÍ PODMÍNKY



Zdroj: vlastní zpracování

### 2.2.2 METODA LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

K hledání vázaného extrému funkce lze využít mnoha numerických metod. My tento problém ovšem chceme vyřešit analyticky. Pro analytické řešení je možné využít například metodu Lagrangeových multiplikátorů. Při užití této metody jsou omezení brána v úvahu řešením nevázaného optimalizačního problému pro následující funkci, kterou nazýváme Lagrangian:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) &= \ell(w_1, \dots, w_n, \lambda_1, \dots, \lambda_M) \\ &= f(w_1, \dots, w_n) + \lambda_1 g_1(w_1, \dots, w_n) + \dots + \lambda_M g_M(w_1, \dots, w_n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde  $f$  je funkce, kterou optimalizujeme, funkce  $g_1, \dots, g_M$  popisují omezení ve tvaru  $g_i = 0$  pro všechna  $i = 1, \dots, M$  a  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Lagrangian je konstruován tak, že jeho kritické body jsou též kritické body optimalizované funkce  $f$  a jsou zároveň splněna omezení  $g_1 = \dots = g_M = 0$ . To vyplývá z nutné podmínky na kritický bod Lagrangianu, která je dána jako:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \ell = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial w_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial w_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0 \\ \vdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_M} = g_M = 0.$$

Je patrné, že vektor  $\mathbf{w}$  splňující (2.7), (2.8) a (2.9) je kritickým bodem funkce  $f$ . [9]

**Poznámka:** Kritický bod funkce reálných proměnných je libovolná hodnota náležící definičnímu oboru, kde funkce buď není diferencovatelná, nebo je její derivace rovna 0. [3]

**Poznámka:** Při splnění podmínek (2.8) a (2.9) lze ukázat, že pokud je matice druhých partiálních derivací Lagrangiánu  $\ell(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$  vzhledem k  $\mathbf{w}$  konstantní a pozitivně definitní, pak jsou nalezené váhy  $\mathbf{w}^*$  bodem ostrého lokálního minima funkce  $f$  za podmínek  $g_i = 0$  pro všechna  $i = 1, \dots, M$ . Pro potřeby této práce je postačující podmínka v této podobě zcela vyhovující. Pokud ovšem matice konstantní není, je problematika složitější. Tím se ale v této práci zabývat nebudeme; více informací lze najít například v [11].

### 2.2.3 OPTIMALIZACE NEVÁZANÁ NA POŽADOVANOU VÝNOSNOST

Označme si  $\mathbf{w}_N^*$  váhy, které minimalizují rozptyl bez ohledu na jeho požadovanou výnosnost (tedy minimalizujeme (2.4) pouze za podmínky (2.6)). [5]

Sestavíme Lagrangián této optimalizační úlohy:

$$\ell(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}). \quad (2.10)$$

Určíme partiální derivace a položíme je rovny nule:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \ell(\mathbf{w}, \lambda) = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda\mathbf{1} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 0. \quad (2.12)$$

Z (2.11) vyjádříme  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{V}\mathbf{w} &= \lambda\mathbf{1}, \\ \mathbf{w} &= \frac{\lambda}{2}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dosadíme (2.13) do (2.12):

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\lambda}{2}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1})\right)^T \mathbf{1} &= 0, \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} &= \frac{2}{\lambda}, \\ \lambda &= \frac{2}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Poznámka:** Pro libovolné dva reálné vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  délky  $n$  platí  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = c$ , kde  $c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$  je skalár.

Nyní výraz (2.14) dosadíme do (2.11):

$$\nabla_{\mathbf{w}} \ell(\mathbf{w}, \lambda) = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \frac{2}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1} = 0, \quad (2.15)$$

V tuto chvíli stačí z výrazu (2.15) vyjádřit  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} := \mathbf{w}_N^*. \quad (2.16)$$

Jelikož matice  $\mathbf{V}$  je z definice symetrická, pozitivně definitní, nachází se v bodě  $\mathbf{w}_N^*$  minimum (tedy minimální riziko portfolia bez ohledu na požadovanou výnosnost) a  $r_{p^*} := r(\mathbf{w}_N^*)$  je odpovídající výnosnost takto zvoleného portfolia.

#### 2.2.4 NALEZENÍ OPTIMÁLNÍHO PORTFOLIA SLOŽENÉHO Z $n$ RIZIKOVÝCH AKTIV

Nyní využijeme metody Lagrangeových multiplikátorů, abychom našli analytické řešení problému vázané minimalizace funkce  $\sigma^2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$  (2.4) při požadované výnosnosti  $r(\mathbf{w}) = r_p$  (2.5) a za podmínky  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$  (2.6). Sestavíme Lagrangian:

$$\ell(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_1(r_p - \mathbf{w}^T \mathbf{r}) + \lambda_2(1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}). \quad (2.17)$$

Opět určíme podmínky prvního řádu:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \ell(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda_1 \mathbf{r} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = r_p - \mathbf{w}^T \mathbf{r} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 0. \quad (2.20)$$

Z výrazu (2.18) vyjádříme  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{V}\mathbf{w} &= \lambda_1 \mathbf{r} + \lambda_2 \mathbf{1}, \\ \mathbf{w} &= \frac{\lambda_1}{2} (\mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) + \frac{\lambda_2}{2} (\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dosadíme (2.21) do (2.19) a vyjádříme  $r_p$ :

$$r_p = \frac{\lambda_1}{2} (\mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) + \frac{\lambda_2}{2} (\mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}). \quad (2.22)$$

Stejně tak dosadíme do (2.20) a vyjádříme 1:

$$1 = \frac{\lambda_1}{2} (\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) + \frac{\lambda_2}{2} (\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}). \quad (2.23)$$

Nyní ukažme, že za předpokladu nenulovosti (iii) platí:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} = (\mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1})^T = \mathbf{1}^T (\mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{r} = \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}. \quad (2.24)$$

**Poznámka:** Pro libovolnou symetrickou matici  $\mathbf{A}$  platí  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ . Dále platí, že  $\mathbf{A}^{-1}$  je symetrická matice právě tehdy, když  $\mathbf{A}$  je symetrická matice. [3]

S využitím vlastnosti (2.24) můžeme přepsat (2.22) a (2.23) jako:

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

kde

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} := \mathcal{M}. \quad (2.26)$$

Nyní je třeba ukázat, že soustava (2.25) má řešení. Tedy že matice  $\mathcal{M}$  je regulární, což platí právě tehdy, když se její determinant  $D = BC - A^2 \neq 0$ .

**Tvrzení 2.1** Matice  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní  $\Rightarrow D = BC - A^2 > 0$ .

**Důkaz:** Uvažujme vektor

$$\mathbf{Ar} - B\mathbf{1}. \quad (2.27)$$

Tento vektor je nulový pouze v případě:

$$0 = \mathbf{Ar} - B\mathbf{1} = \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} \mathbf{1}. \quad (2.28)$$

Toto je ovšem vyloučeno, jelikož jediné řešení této rovnice je  $\mathbf{r} = \mathbf{1}$  a to je ve sporu s předpokladem (ii). Tedy za předpokladu (ii) lze tvrdit, že  $\mathbf{Ar} - B\mathbf{1} \neq 0$ .

Matice  $\mathbf{V}$  je z definice pozitivně definitní, tudíž také  $\mathbf{V}^{-1}$  je pozitivně definitní a platí:

$$0 < (\mathbf{Ar} - B\mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Ar} - B\mathbf{1}) \quad (2.29)$$

$$= A^2 \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} - AB \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} - BA \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} + B^2 \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \quad (2.30)$$

$$= B^2 C - A^2 B = B(BC - A^2). \quad (2.31)$$

Z faktu, že  $B = \mathbf{r}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} > 0$ , který přímo plyne z pozitivní definitnosti matice  $\mathbf{V}$ , už rovnou vyplývá, že  $D = BC - A^2 > 0$ . [9]

■

S využitím *Tvrzení 2.1* můžeme nyní nalézt matici  $\mathcal{M}^{-1}$  a přepsat rovnici (2.25) takto:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

kde  $\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}$  je matice adjungovaná k matici  $\mathcal{M}$ .

Z rovnice (2.32) snadno získáme Lagrangeovy multiplikátory  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_1 = 2 \frac{Cr_p - A}{D}, \quad (2.33)$$

$$\lambda_2 = 2 \frac{B - Ar_p}{D}. \quad (2.34)$$

Pro získání hledaných vah  $\mathbf{w}$  dosadíme nalezené multiplikátory do rovnice (2.21):

$$\mathbf{w}^* = \frac{Cr_p - A}{D} (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) + \frac{B - Ar_p}{D} (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}). \quad (2.35)$$

Nyní upravme:

$$\mathbf{w}^* = \frac{A(Cr_p - A)}{D} \left( \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}} \right) + \frac{C(B - Ar_p)}{D} \left( \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}} \right). \quad (2.36)$$

Označíme si:

$$\mu_1 := \frac{A(Cr_p - A)}{D}, \quad (2.37)$$

$$\mu_2 := \frac{C(B - Ar_p)}{D}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{w}_V^* := \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}}{\mathbf{1}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}}. \quad (2.39)$$

Zavedeného značení využijeme a přepíšeme (2.36) jako

$$\mathbf{w}^* = \mu_1 \mathbf{w}_V^* + \mu_2 \mathbf{w}_N^*. \quad (2.40)$$

Vidíme tedy, že za splnění předpokladů (i),(ii) a (iii) existuje vždy jediný vektor vah  $\mathbf{w}^*$ , který minimalizuje rozptyl výnosnosti (rizikovost) portfolia pro zvolenou hodnotu  $r_p$ .

Z vzorce (2.40) je také dobře patrné, že všechna eficientní portfolia lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou eficientních portfolií s váhami  $\mathbf{w}_V^*$  a  $\mathbf{w}_N^*$ , přičemž z předchozího víme, že portfolio s váhami  $\mathbf{w}_N^*$  je portfolio s nejmenším možným rizikem pro daná aktiva bez ohledu na požadovanou výnosnost. V jakém poměru jsou tato dvě portfolia, vyjadřují koeficienty  $\mu_1$  a  $\mu_2$ , které jsou lineárně závislé na požadované výnosnosti  $r_p$ . Výše uvedené má svoji ekonomickou interpretaci známou jako Tobinova věta o separaci (*two fund separation theorem*). Lze též ukázat, že nelze nalézt portfolio, které by bylo absolutně nezávislé na portfoliu s minimálním rizikem. [5],[9]

**Tvrzení 2.2** Pro  $\mu_1$  a  $\mu_2$  platí vztah  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ .

**Důkaz:** Postačí dosadit vztahy (2.37) a (2.38) a dostáváme:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{A(Cr_p - A)}{D} + \frac{C(B - Ar_p)}{D} = \frac{ACr_p - A^2 + BC - ACr_p}{BC - A^2} = 1.$$

■

Pro dvě eficientní portfolia daná požadovanými výnosnostmi  $r_p$  a  $r_{\hat{p}}$  s váhami  $\mathbf{w}^*$  a  $\widehat{\mathbf{w}}^*$  platí, že i každá jejich lineární kombinace  $\alpha\mathbf{w}^* + (1 - \alpha)\widehat{\mathbf{w}}^*$  je eficientní pro požadovanou výnosnost  $\alpha r_p + (1 - \alpha)r_{\hat{p}}$  a  $\alpha \in [0; 1]$ . [5]

### 2.2.5 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ V PROSTORU RIZIKO-VÝNOS

Nyní se zaměříme na to, jak znázornit eficientní portfolio (respektive množinu eficientních portfolií) v prostoru riziko-výnos. Z (2.36) je zřejmé, že získané váhy  $\mathbf{w}^* := \mathbf{w}^*(r_p)$  jsou lineární funkcí parametru  $r_p$ , takže odpovídající rozptyl portfolia  $\sigma^2(\mathbf{w}^*) = \sigma^2(\mathbf{w}^*(r_p))$  je kvadratickou funkcí  $r_p$ . Lze ukázat, že platí:

$$\frac{\sigma^2(\mathbf{w}^*)}{1/C} - \frac{(r_p - A/C)^2}{D/C^2} = 1. \quad (2.41)$$

Z tohoto si můžeme povšimnout, že vztah mezi požadovanou výnosností  $r_p$  a rizikovostí  $\sigma(\mathbf{w}^*) := \sigma_p$  lze vyjádřit v prostoru riziko-výnos jako hyperbolu. Na ní ležící portfolia nazýváme hraniční portfolia (*frontier portfolios*). Z podstaty věci vyplývá, že se budeme zabývat pouze tou větví hyperboly, která splňuje  $\sigma_p \geq 0$ . Ta má následující vlastnosti:

$$\text{Střed} \quad [0, A/C] \quad (2.42)$$

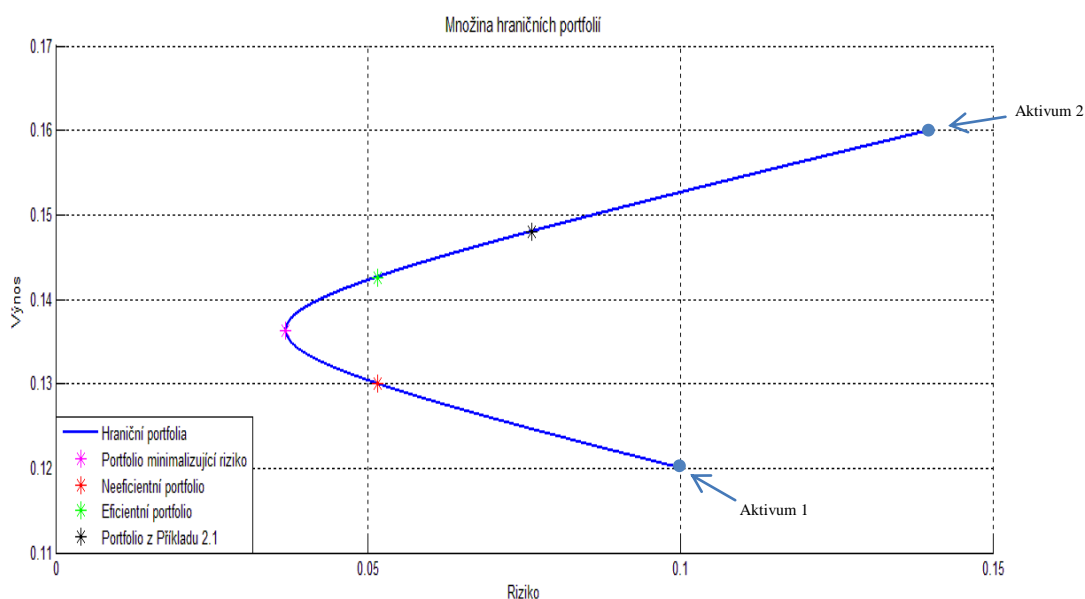
$$\text{Vrchol} \quad [\sqrt{1/C}, A/C] \quad (2.43)$$

$$\text{Ohnisko} \quad [\sqrt{1/C + D/C^2}, A/C] \quad (2.44)$$

$$\text{Asymptoty} \quad r_p = \pm\sqrt{D/C} \sigma_p + A/C. \quad (2.45)$$

Z vlastnosti (2.43) je patrné, že pro portfolio s minimálním rizikem a s váhami  $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_N^*$  je jeho výnosnost  $r(\mathbf{w}_N^*) = A/C = r_{p^*}$  a rizikovost  $\sigma(\mathbf{w}_N^*) = \sqrt{1/C}$ . [8], [9]

OBRÁZEK 13: MNOŽINA HRANIČNÍCH PORTFOLIÍ



Zdroj: vlastní zpracování

Na *Obrázku 13* vidíme, jak vypadá množina hraničních portfolií v prostoru riziko-výnos pro aktiva z *Příkladu 2.1*. Na konci *Kapitoly 2.2.1* jsme hledali váhy minimalizující rizikovost portfolia pro požadovanou výnosnost  $r_p = 0,13$ . Portfolio s těmito váhami je na *Obrázku 13* vyznačeno červeně. Z obrázku je ale také zřejmé, že existuje jiné hraniční portfolio, které je stejně rizikové, ale přináší investorovi vyšší výnos. To je na obrázku vyznačeno zelenou barvou. Investor se dle předpokladů přikloní k tomuto portfoliu s vyšším výnosem.

Obecně tedy platí, že je možné, aby dvě portfolia s rozdílnou výnosností měla stejnou rizikovost. Jedno z nich ale vždy nabízí větší výnosnost než to druhé. To nám umožňuje rozdělit množinu hraničních portfolií na dvě podmnožiny. Portfolia, pro které platí

$$r_p < r_{p^*}, \quad (2.46)$$

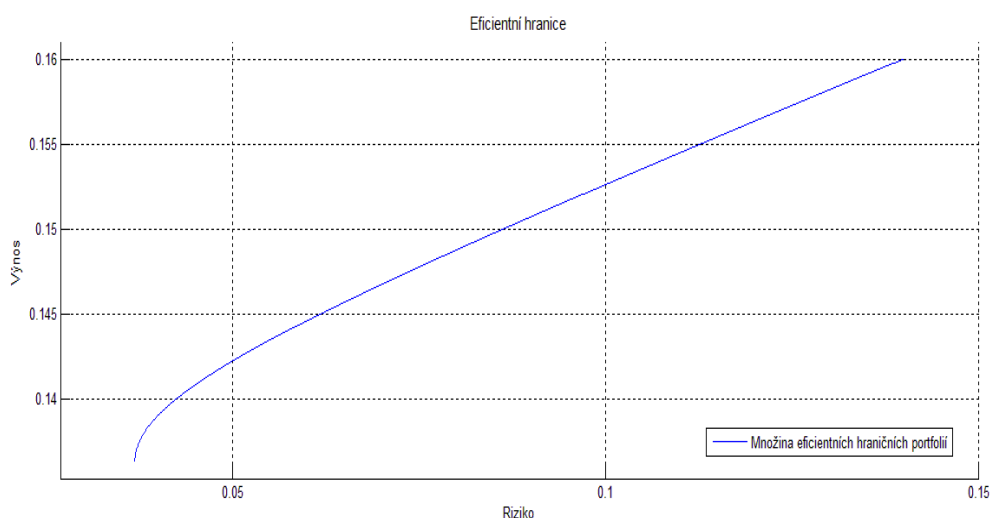
označíme v souladu s *Definicí 2.4* jako neeficientní. Naopak portfolia, pro které platí

$$r_p > r_{p^*}, \quad (2.47)$$

označíme jako eficientní hraniční portfolia (*efficient frontier portfolios*). Množinu všech takových portfolií společně s portfoliem s minimálním rizikem nazýváme eficientní hranice (*mean-variance efficient frontier*). [5],[9]



OBRÁZEK 14: EFICIENTNÍ HRANICE



Zdroj: vlastní zpracování

Na *Obrázku 13* je černou barvou označeno původní portfolio z *Příkladu 2.1* s váhami  $w_1 = 0,3$  a  $w_2 = 0,7$ . Přesto, že váhy byly vybrány náhodně, vidíme, že takto zkonstruované portfolio leží v hraniční množině. Jak je to možné?

Řešení spočívá ve faktu, že jsme toto modelové portfolio sestavovali pouze ze dvou aktiv. Jak je patrné například z *Obrázku 8*, pro dvě aktiva skutečně všechny možné kombinace těchto aktiv leží v hraniční množině. Je to způsobeno tím, že pro každou přípustnou hodnotu váhy  $w_1$  existuje právě jedna hodnota váhy  $w_2$  taková, aby platilo  $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = w_1 + w_2 = 1$ . Na druhou stranu skutečnost, že výše uvedené portfolio leží i v množině eficientních hraničních portfolií, je zcela náhodná. Pokud bychom například zvolili váhy opačně, tedy  $w_1 = 0,7$  a  $w_2 = 0,3$ , potom by výnosnost  $r(\mathbf{w}) = 0,132$ , rizikovost  $\sigma(\mathbf{w}) \approx 0,0443$  a portfolio by eficientní nebylo.

## 2.3 OBMĚNY ZÁKLADNÍHO MODELU

Nyní si uvedeme některé z možných modifikací základního Markowitzova modelu.

### 2.3.1 PODMÍNKY NEZÁPORNOSTI VÁH A DALŠÍ LINEÁRNÍ OMEZENÍ

Omezení tohoto typu znamenají pouze složitější diskuzi podmínek optimality, ale povaha výsledků se nemění. Váhy je pro různé podmínky též možno odvodit analyticky nebo použít některý vhodný software a získat váhy numericky. [5]

### 2.3.2 INVESTICE DO BEZRIZIKOVÉHO AKTIVA, MODEL CML

Uvažujme nyní možnost investice do bezrizikového aktiva (např. typu státní pokladniční poukázky) s výnosností  $r_f$  a rizikovostí  $\sigma_f = 0$  a zároveň i možnost neomezeného vypůjčování za bezrizikovou úrokovou míru  $r_f$ . Tím se výše odvozený Markowitzův model stane více realistický a bližší současnému trhu, kde má investor šanci investovat do některého z bezrizikových aktiv nebo uložit své peníze například na spořicí účet. V tomto případě

celková částka investovaná do  $n$  aktiv, která nejsou bezriziková, již nadále nemusí splňovat podmínku  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . V případě, že

$$\sum_{i=1}^n w_i < 1, \quad (2.48)$$

říkáme, že jsme „pod rozpočtem“ (*under budget*) a investujeme zbylou částku do bezrizikového aktiva. V opačném případě, tedy když

$$\sum_{i=1}^n w_i > 1, \quad (2.49)$$

jsme takzvaně „nad rozpočtem“ (*over budget*) a půjčujeme si potřebnou částku za bezrizikovou úrokovou míru a tu investujeme mezi riziková aktiva. [5], [9]

Za těchto okolností je třeba reformulovat, co je chápáno jako optimální portfolio. Investor již není omezen nutností investovat všechny svoje dostupné prostředky do  $n$  rizikových aktiv. Úkolem je tedy najít portfolio s minimálním rizikem, které bere v potaz pouze požadovanou výnosnost. S využitím faktu, že váha bezrizikového aktiva v portfoliu bude  $w_f = 1 - \sum_{i=1}^n w_i$ , dostáváme optimalizační problém ve tvaru

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma^2(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (2.50)$$

za podmínky

$$\mathbf{w}^T \mathbf{r} + w_f r_f = r_f + \mathbf{w}^T (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) = r_p. \quad (2.51)$$

Lagrangian je v tomto případě:

$$\ell(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda (r_f - r_p + \mathbf{w}^T (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})). \quad (2.52)$$

Najdeme parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \ell(\mathbf{w}, \lambda) = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \lambda} = r_f - r_p + \mathbf{w}^T (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) = 0. \quad (2.54)$$

Z rovnice (2.53) si vyjádříme  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}). \quad (2.55)$$

Dosadíme (2.55) do (2.54) a vyjádříme  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2(r_p - r_f)}{(\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})}. \quad (2.56)$$

**Poznámka:** Při odvozování (2.56) jsme využili symetrie variační matice  $\mathbf{V}$  a toho, že pro libovolnou  $n \times n$  matici  $\mathbf{A}$  a libovolný vektor  $\mathbf{b}$  délky  $n$  platí  $(\mathbf{A}\mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T$ .

Nechť

$$H := (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) \quad (2.57)$$

a po dosazení (2.56) do (2.55) a po zavedení značení (2.57) dostáváme:

$$\mathbf{w}_F^* = \left( \frac{r_p - r_f}{H} \right) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}). \quad (2.58)$$

Výraz  $H > 0$ , což přímo vyplývá z pozitivní definitnosti matice  $\mathbf{V}^{-1}$ .

Pro portfolio s nejmenším rizikem pro požadovanou výnosnost  $r_p$  je pak dáno:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\mathbf{w}_F^*) &= \mathbf{w}_F^{*T} \mathbf{V} \mathbf{w}_F^* \\ &= \left( \left( \frac{r_p - r_f}{H} \right) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) \right)^T \mathbf{V} \left( \left( \frac{r_p - r_f}{H} \right) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) \right) \\ &= \left( \frac{r_p - r_f}{H} \right)^2 (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) \\ &= \left( \frac{r_p - r_f}{H} \right)^2 (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{r} - r_f \mathbf{1}) \\ &= \frac{(r_p - r_f)^2}{H}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

**Poznámka:** Při odvozování (2.59) jsme využili stejných vlastností jako při odvozování (2.56) a značení zavedeného ve (2.57).

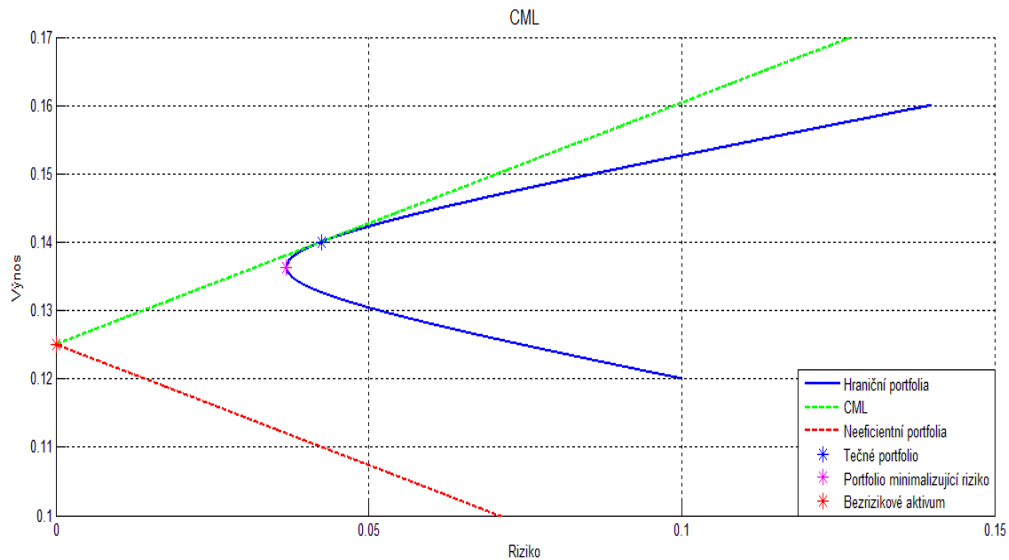
Výraz (2.59) můžeme vyjádřit jako:

$$\sigma(\mathbf{w}_F^*) = \frac{|r_p - r_f|}{\sqrt{H}}. \quad (2.60)$$

Vztah mezi požadovanou výnosností  $r_p$  a rizikovostí  $\sigma(\mathbf{w}_F^*)$  lze v tomto případě v prostoru riziko-výnos vyjádřit jako dvě polopřímky se sklonem  $\pm\sqrt{H}$  vycházející z bodu  $(0, r_f)$ . Horní větev bude v souladu s *Definicí 2.4* množinou eficientních portfolií, tuto polopřímku nazýváme CML (*Capital Market Line*); dolní větev potom obsahuje portfolia neeficientní. Situace je graficky znázorněna na *Obrázku 15* na datech z *Příkladu 2.1*. Bezriziková míra

byla pro dobrou ilustraci zvolena  $r_f = 0,125$ . Tato míra je pochopitelně velice nadsazená tak, aby vhodně korespondovala s daty z příkladu; ve skutečnosti se bezriziková úroková míra odvozená od státních pokladničních poukázek emitovaných ČNB v současnosti pohybuje v mnohem nižších hodnotách (okolo jednoho procenta p.a. i méně). [9], [12]

OBRÁZEK 15: CAPITAL MARKET LINE



Zdroj: vlastní zpracování

Nyní ukažme zajímavý geometrický vztah mezi hraničními portfolii obsahující pouze riziková aktiva a hraničními portfolii, které obsahují bezrizikové aktivum. Dále budeme předpokládat  $r_f < r_p^* = A/C$ . Tento předpoklad má svoji finanční interpretaci, kdy uvažujeme, že výnosnost bezrizikového aktiva je menší než výnosnost nejméně rizikového portfolia složeného z  $n$  rizikových aktiv. Tedy než výnosnost portfolia s váhami  $\mathbf{w}_N^*$  a rizikovostí  $\sigma(\mathbf{w}_N^*) = \sqrt{1/C}$ . Toto vychází z naší intuitivní představy, že investor by měl být za podstupování rizika kompenzován vyšší výnosností. V případě, že je tento předpoklad splněn, CML se stává tečnou eficientní části hyperboly hraničních portfolií (2.41). To má velmi důležitý důsledek; všechna eficientní portfolia sestavená z  $n$  rizikových aktiv a jednoho bezrizikového aktiva mohou být vyjádřena jako lineární kombinace samotného bezrizikového aktiva a tečného hraničního portfolia obsahující pouze riziková aktiva. Toto označujeme jako *one fund theorem*. Tečné portfolio je též někdy označováno jako tzv. „tržní portfolio“ a na Obrázku 15 je označeno modrou barvou. [5], [9]

Lze ukázat, že za splnění předpokladu  $r_f < A/C$  je výnosnost  $r_T$  tečného portfolia

$$r_T = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{r_f - A/C} \quad (2.61)$$

a jeho rizikovost  $\sigma_T$  potom

$$\sigma_T = \frac{-\sqrt{H}}{C(r_f - A/C)}. \quad (2.62)$$

Obecný analytický předpis CML je tedy možné zapsat:

$$r(\mathbf{w}_F) = \frac{r_T - r_f}{\sigma_T} \sigma(\mathbf{w}_F) + r_f. \quad (2.63)$$

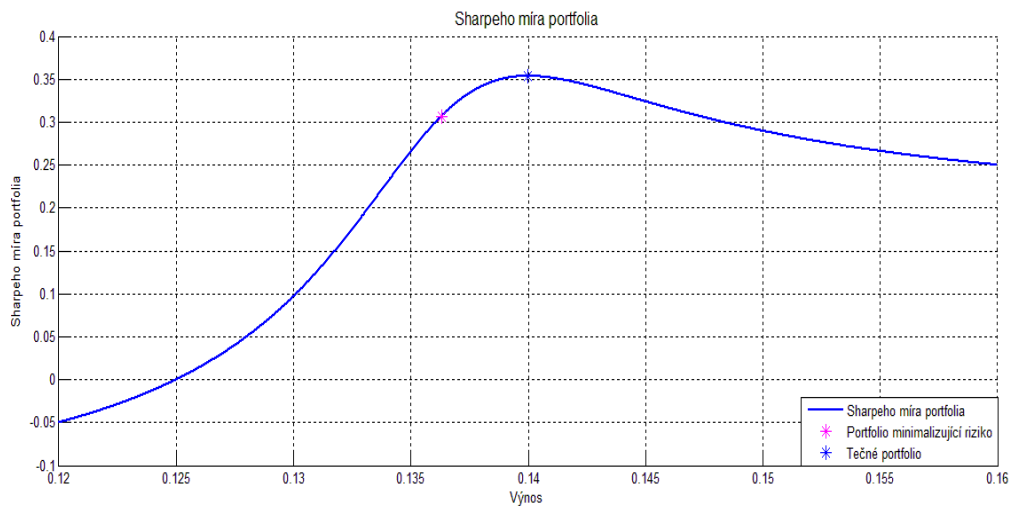
[5], [9]

**Definice 2.5** Za předpokladu konstantní výnosnosti bezrizikového aktiva  $r_f$  za dané období, poměr  $\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$  nazýváme Sharpeho míra portfolia (Sharpe Ratio). [5]

V čitateli výrazu nalezneme rozdíl požadované (očekávané) výnosnosti  $r_p$  portfolia a výnosnosti bezrizikového aktiva  $r_f$ . Ve jmenovateli potom rizikovost portfolia pro danou požadovanou výnosnost  $r_p$  vyjádřenou pomocí směrodatné odchylky  $\sigma_p$ . Tuto míru je například možno využít, pokud chceme zjistit, zda navýšení výnosnosti portfolia není vykoupeno příliš velkým nárůstem rizika. Čím vyšší je Sharpeho míra portfolia, tím lepší je poměr mezi výnosností a rizikovostí portfolia. [3]

Lze ukázat, že tečné portfolio dává maximální možnou Sharpeho míru portfolia. Situaci ilustrujeme na *Obrázku 16* opět na datech z *Příkladu 2.1*. [5]

OBRÁZEK 16: SHARPEHO MÍRA PORTFOLIA



Zdroj: vlastní zpracování

## 2.4 ALTERNATIVNÍ MODELY

V této části práce stručně rozebereme některé z alternativních modelů.

### 2.4.1 ROY, 1952

Současně s Harrym Markowitzem se zahrnutím rizika do finančního rozhodování zabýval také A. D. Roy, který někdy bývá označován jako „zapomenutý otec teorie portfolia“. Svůj

princip „zabezpečení především“ (*the Principle of Safety First*) představil ve své práci *Safety First and the Holding of Assets* v roce 1952. Základní myšlenkou je minimalizace horní hranice pravděpodobnosti ztrátové situace za předpokladu, že informace dostupné o pravděpodobnostním rozdělení chování výnosnosti aktiv jsou omezeny na znalost momentů prvního a druhého řádu. [5], [13]

Ve finančním světě vždy musíme počítat s jistým rizikem *neúspěchu*, ať už v podobě ztráty nebo nedostatečného výnosu. Royův princip „zabezpečení především“ vychází z představy, že toto riziko vnímá většina investorů a že se toto riziko snaží co nejvíce snížit při dané hraniční výnosnosti  $r_b$ . Tato hodnota představuje minimální výnosnost, kterou je investor ještě ochoten akceptovat, při výnosnosti nižší než  $r_b$  již hovoříme o *neúspěchu*.

Analogicky k Markowitzovu modelu portfolia předpokládáme, že výnosnosti jednotlivých aktiv v portfoliu jsou popsány náhodnými veličinami  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Portfolio chápeme podle *Definice 2.2* a celková výnosnost portfolia se řídí náhodnou veličinou  $\mathcal{R}$ . V souladu s *Definicí 2.3* označme výraz  $E(\mathcal{R}) := r(\mathbf{w})$  jako výnosnost portfolia, rizikovost portfolia opět chápeme jako směrodatnou odchylku výnosnosti, tedy  $\sqrt{\sigma^2(\mathcal{R})} := \sigma(\mathbf{w})$ , a dále označme  $\varepsilon(\mathbf{w}) := r(\mathbf{w}) - r_b$ . [13]

K odhadu střední hodnoty a směrodatné odchylky, které ve skutečnosti přesně neznáme, opět použijeme historické hodnoty a z nich odvozené výběrové statistiky. Navíc předpokládáme, že pro dané hodnoty  $r(\mathbf{w})$  a  $\sigma(\mathbf{w})$  existuje funkční vztah takový, že  $f(r(\mathbf{w}), \sigma(\mathbf{w})) = 0$ . [13]

Z dostupných informací není možné určit přesnou pravděpodobnost toho, že výsledná výnosnost portfolia bude nižší než hraniční výnosnost  $r_b$ ; není tedy možno přesně určit pravděpodobnost *neúspěchu*. Je ale možné určit horní hranici této pravděpodobnosti. K tomu využijeme Čebyševovu nerovnost:

$$P(|\mathcal{R} - r(\mathbf{w})| \geq \varepsilon(\mathbf{w})) \leq \frac{\sigma^2(\mathbf{w})}{\varepsilon^2(\mathbf{w})}. \quad (2.64)$$

Jelikož z pohledu investora je negativní pouze situace, kdy je aktuální výnos nižší než střední hodnota  $r(\mathbf{w})$ , můžeme provést následující úpravy:

$$P(r(\mathbf{w}) - \mathcal{R} \geq \varepsilon(\mathbf{w})) = P(r(\mathbf{w}) - \mathcal{R} \geq r(\mathbf{w}) - r_b) = P(\mathcal{R} \leq r_b) \leq \frac{\sigma^2(\mathbf{w})}{\varepsilon^2(\mathbf{w})}. \quad (2.65)$$

Nyní je tedy nutné minimalizovat výraz  $\sigma^2(\mathbf{w})/\varepsilon^2(\mathbf{w})$ , což je úloha ekvivalentní k

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\varepsilon(\mathbf{w})}{\sigma(\mathbf{w})} = \max_{\mathbf{w}} \frac{r(\mathbf{w}) - r_b}{\sigma(\mathbf{w})}. \quad (2.66)$$

Opět samozřejmě platí podmínka na součet vah  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . V případě, že výnosnost portfolia  $\mathcal{R}$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $r(\mathbf{w})$  a rozptylem  $\sigma^2(\mathbf{w})$ , tedy pokud

$\mathcal{R} \sim \mathcal{N}(r(\mathbf{w}), \sigma^2(\mathbf{w}))$ , pak řešení úlohy (2.66) s podmínkou na součet vah přímo povede k minimalizaci pravděpodobnosti *neúspěchu* jako takového. [3],[13]

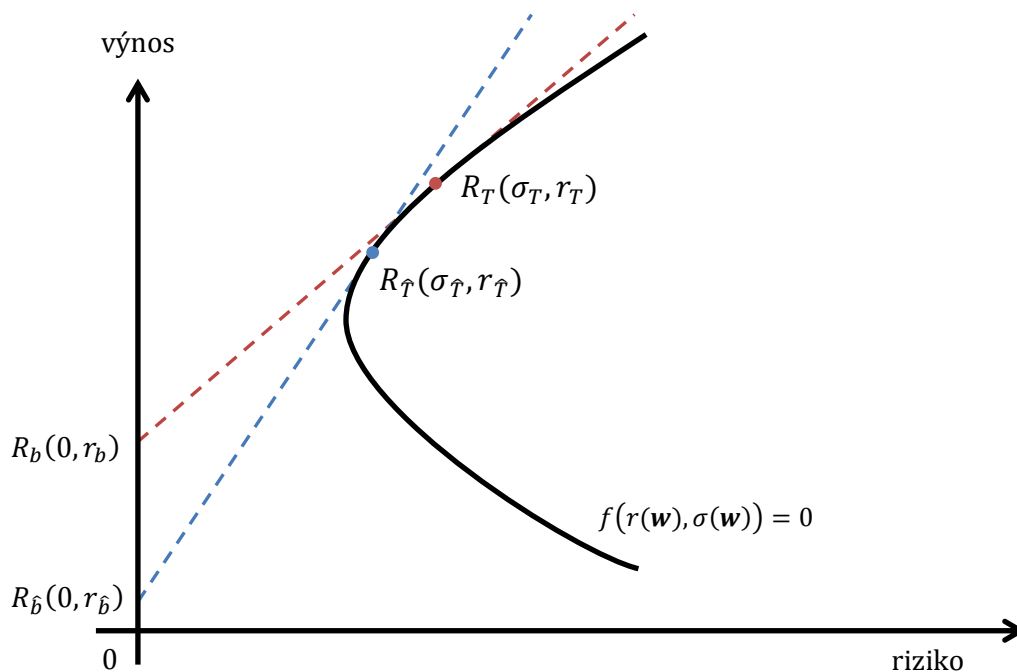
Důsledek výše uvedeného lze snadno reprezentovat graficky. Funkci  $f(r(\mathbf{w}), \sigma(\mathbf{w})) = 0$  je možno znázornit jako hyperbolickou křivku v prostoru riziko-výnos, jak vidíme na *Obrázku 17*. Pokud se chceme vyvarovat výnosu nižšímu než  $r_b$ , zaneseme bod  $R_b(0, r_b)$ . Poté z tohoto bodu zkonstruujeme polopřímku s kladným sklonem tak, že bude tečnou křivky  $f(r(\mathbf{w}), \sigma(\mathbf{w})) = 0$  v bodě  $R_T(\sigma_T, r_T)$ . Analytický předpis této polopřímky bude tedy:

$$r(\mathbf{w}) = \frac{r_T - r_b}{\sigma_T} \sigma(\mathbf{w}) + r_b. \quad (2.67)$$

Výše uvedeným postupem jsme v tečném bodě našli portfolio, jehož horní mez pravděpodobnosti *neúspěchu* je nejmenší možná. Tato horní mez je rovna převrácené hodnotě kvadrátu gradientu polopřímky  $R_b R_T$ , tedy výrazu

$$\frac{\sigma_T^2}{(r_T - r_b)^2}. \quad (2.68)$$

OBRÁZEK 17: ROYŮV MODEL PORTFOLIA

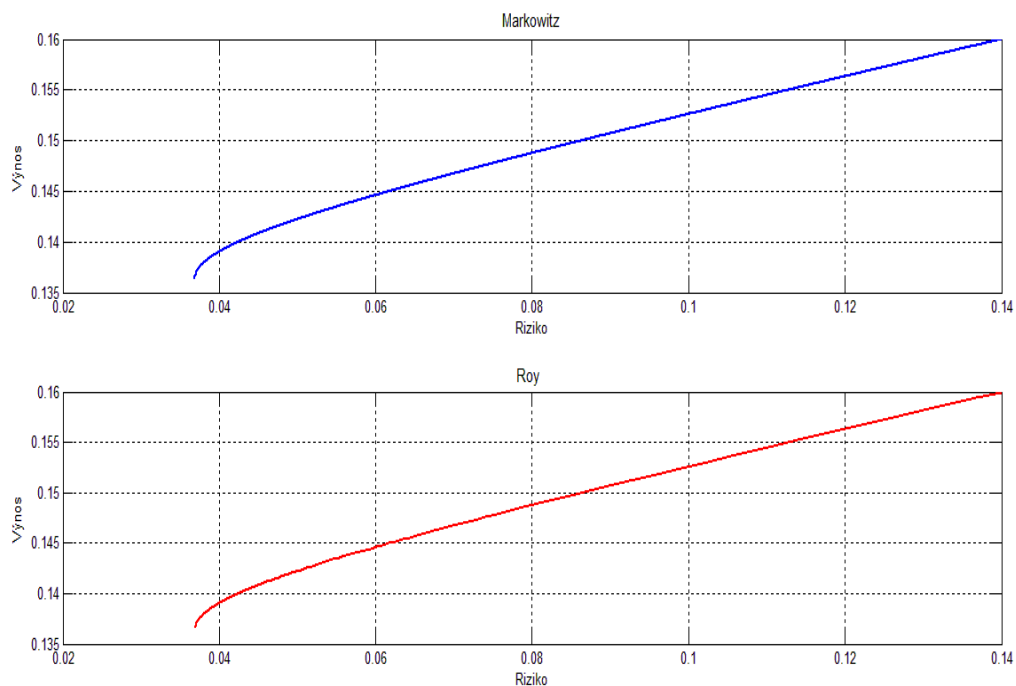


Zdroj: vlastní zpracování

Z *Obrázku 17* a výrazu (2.68) je patrné, že čím strmější je přímka, tím nižší je i pravděpodobnost *neúspěchu*. Tedy například pro výnosnost  $r_b$  je pravděpodobnost, že výnosnost portfolio bude nižší než tato hodnota (a investor bude hovořit o *neúspěchu*), menší, než je pro výnosnost  $r_b$ . Pro vektor optimálních vah  $\mathbf{w}^*$  zřejmě platí  $r(\mathbf{w}^*) = r_T$  a  $\sigma(\mathbf{w}^*) = \sigma_T$ . [13]

**Poznámka:** Z předchozího jsou patrné některé zjevné podobnosti Royova modelu s CML a Sharpeho mírou portfolia. Pro hraniční výnosnost  $r_b = r_f < r_{p^*} = A/C$  přechází maximalizační problém (2.66) přímo v maximalizaci Sharpeho míry portfolia a optimální portfolio podle Royova modelu je tedy shodné s tečným portfoliem modelu CML s výnosností (2.61) a rizikovostí (2.62). Polopřímka  $R_b R_T$ , jak je patrné z jejího předpisu (2.67), je pak přímo shodná s CML. Množina optimálních portfolií podle Royova modelu ležící na části vhodné funkce  $f(r(\mathbf{w}), \sigma(\mathbf{w})) = 0$  je tedy vlastně množinou tečných portfolií modelu CML pro různé bezrizikové úrokové míry  $r_f$  takové, že jsou rovny různě voleným hraničním výnosnostem  $r_b$ , a příslušná část funkce  $f$  potom splývá s množinou eficientních portfolií v Markowitzově smyslu. Situace je ilustrována na *Obrázku 18* pro data z *Příkladu 2.1*. Na *Obrázku 19* je potom detail rozdílu mezi oběma množinami, který je dán tím, že nepředpokládáme investory, kteří by byli ochotni smířit se se zápornou výnosností  $r_b$ , a krajní tečné portfolio pro  $r_b = r_f = 0$  není (a ani nemůže být) totožné s portfoliem s minimálním rizikem, které je krajním bodem Markowitzovy eficientní množiny. Na obrázku je též vyznačena polopřímka  $R_b R_T$  pro  $r_b = 0$ , která splývá s CML pro  $r_f = 0$ . V případě, že  $r_b > r_{p^*} = A/C$ , již srovnání s CML ztrácí smysl. Nicméně pro Royovo optimální portfolio stále platí, že je shodné s Markowitzovo eficientním portfoliem, které dává maximální Sharpeho míru pro  $r_f = r_b$ .

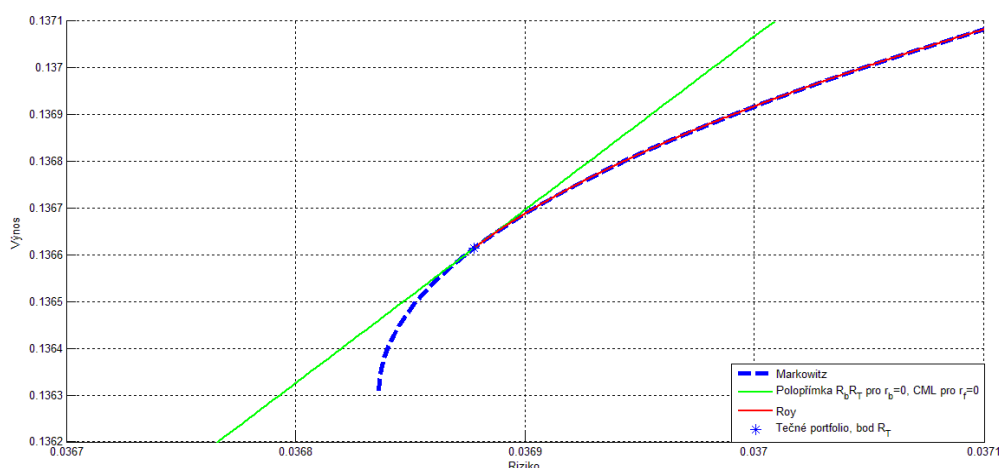
OBRÁZEK 18: MARKOWITZ VS. ROY



Zdroj: vlastní zpracování



OBRÁZEK 19: MARKOWITZ VS. ROY – DETAIL



Zdroj: vlastní zpracování

### 2.4.2 KONNO & YAMAZAKI, 1991

V roce 1991 Konno a Yamazaki navrhli nový model využívající střední absolutní odchylku (*mean absolute deviation*, MAD) jako míru rizika k překonání některých nevýhod Markowitzova *mean-variance* modelu, který jako míru rizika využívá směrodatné odchylky. [14]

Konno a Yamazaki představili funkci rizika založenou na absolutní odchylce:

$$\omega(\mathbf{w}) = E \left( \left| \sum_{i=1}^n w_i R_i - E \left( \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) \right| \right). \quad (2.69)$$

**Tvrzení 2.3** *Necht' náhodný vektor  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$  má  $n$  – rozměrné normální rozdělení. Potom*

$$\omega(\mathbf{w}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma(\mathbf{w}). \quad (2.70)$$

[14]

Toto tvrzení zde ponecháme bez důkazu, který lze nalézt v [14]. Plyne z něj ovšem zajímavý fakt; pokud se výnosnosti jednotlivých aktiv v portfoliu řídí normálním rozdělením, míry rizika založené na absolutní odchylce a na směrodatné odchylce jsou v podstatě stejné a minimalizace  $\omega(\mathbf{w})$  je ekvivalentní k minimalizaci  $\sigma(\mathbf{w})$ .

Dále předpokládáme znalost historických dat za období  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ); střední hodnotu výnosnosti  $r_i = E(R_i)$  aktiva odhadneme aritmetickým průměrem a střední absolutní odchylku průměrnou absolutní odchylkou. Označme si  $r_{it}$  realizaci náhodné veličiny  $R_i$  v čase  $t$  a  $a_{it} = r_{it} - r_i$ . Výše uvedené nám umožní přepsat funkci (2.69) jako

$$\omega(\mathbf{w}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n w_i a_{it} \right| \quad (2.71)$$

a optimalizační úlohu pak zapíšeme:

$$\min_{\mathbf{w}} \omega(\mathbf{w}) \quad (2.71)$$

za podmínek

$$r(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i r_i = r_p, \quad (2.73)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (2.74)$$

kde  $r_p$  je očekávaná výnosnost portfolia. Případně lze přidat podmínky nezápornosti vah a další lineární omezení. Lze ukázat, že výše uvedená úloha může být snadno převedena na úlohu lineárního programování, která je efektivně řešitelná simplexovou metodou. [14], [15]

Nyní uveďme některé výhody tohoto modelu oproti Markowitzovu přístupu:

- Není nutné odhadovat variační matici  $\mathbf{V}$ . Díky tomu je velmi snadné upravit model, když jsou přidána nová data.
- Řešení lineární úlohy je mnohem jednodušší než řešení kvadratické úlohy.
- Optimální řešení může obsahovat nejvíce  $2T + 2$  aktiv bez ohledu na velikost  $n$  (podrobnosti například v [15]), kdežto optimální řešení úlohy podle Markowitze může obsahovat až  $n$  aktiv. Tento rozdíl může být markantní především pro velmi velká  $n$ . Další výhodou tedy je, že lze využít  $T$  jako kontrolní proměnnou pro omezení počtu aktiv v portfoliu.

[14]

### 2.4.3 YOUNG, 1998

Youngův takzvaný minimaxový model (*the Minimax Model*) z roku 1998 je založen na principech teorie her. Platí zásada, že každá hra může mít dva nebo více hráčů, z nichž každý má svůj cíl a je obeznámen s možnými strategiemi svých soupeřů. Pokud se všichni hráči chovají racionálně (snaží se maximalizovat svůj užitek), potom teorie her tvrdí, že každá situace může být rozhodnuta dvěma způsoby; hráči se snaží maximalizovat své očekávané minimální výnosy (maximinové kritérium) nebo se naopak snaží minimalizovat maximální očekávanou ztrátu (minimaxové kritérium). Tato dvě kritéria jsou vzájemně duální. Více informací o teorii her je možno nalézt například v [17].

Young zvolil minimální výnos jakožto míru rizika. Takováto míra rizika je velmi odlišná od dříve zmiňovaných (směrodatná odchylka, střední absolutní odchylka...). Specifická je zejména tím, že může být (a také v naprosté většině případů bude) záporná. Hovořit o

minimálním výnosu je potom tedy totéž, jako hovořit o maximální ztrátě. Young definoval optimální portfolio jako to, které minimalizuje maximální ztrátu za období, za podmínky požadované očekávané výnosnosti portfolio  $r_p$ . Analýza opět vychází z historických dat za období  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ). [16]

Uvažujme opět investici do  $n$  aktiv. Označme si  $r_i$  průměrný výnos z  $i$  – tého aktiva za období,  $r_{it}$  výnos  $i$  – tého aktiva v čase  $t$ , dále pak  $r(\mathbf{w})$  očekávaný výnos portfolio,  $r_t(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i r_{it}$  výnosnost portfolio v čase  $t$  a  $M_r(\mathbf{w}) = \min_t r_t(\mathbf{w})$ . Ačkoliv tato formulace zjevně vede na maximinové kritérium, v literatuře je Youngův model označován jako minimaxový model. [16]

Minimaxový model se pokouší dosáhnout maximální hodnoty  $M_r$ , tak, že portfolio dosáhne požadované výnosnosti  $r_p$  a vše je investováno. Optimalizační úlohu je tedy možno zapsat následovně:

$$\max_{\mathbf{w}} \min_t r_t(\mathbf{w}) = \max_{\mathbf{w}} M_r(\mathbf{w}) \quad (2.75)$$

za podmínek

$$r(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i r_i = r_p, \quad (2.76)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (2.77)$$

[16]

Úlohu je pochopitelně možno rozšířit o doplňující podmínky na váhy apod. Podle Younga dává tento model lepší výsledky než jiné modely portfolio v případě, když data nejsou normálně rozdělena (především s ohledem na šikmost), a podobné výsledky, pokud data normálně rozdělena jsou. Výhodou je opět možnost převést úlohu na úlohu lineárního programování řešitelnou simplexovým algoritmem. [18]

#### 2.4.4 MAXIMALIZACE STŘEDNÍHO UŽITKU

Konkurencí pro výše uvedené modely může být přístup založený na kritériu maximalizace středního užitku z výnosnosti portfolio. Takový model má obecně tvar

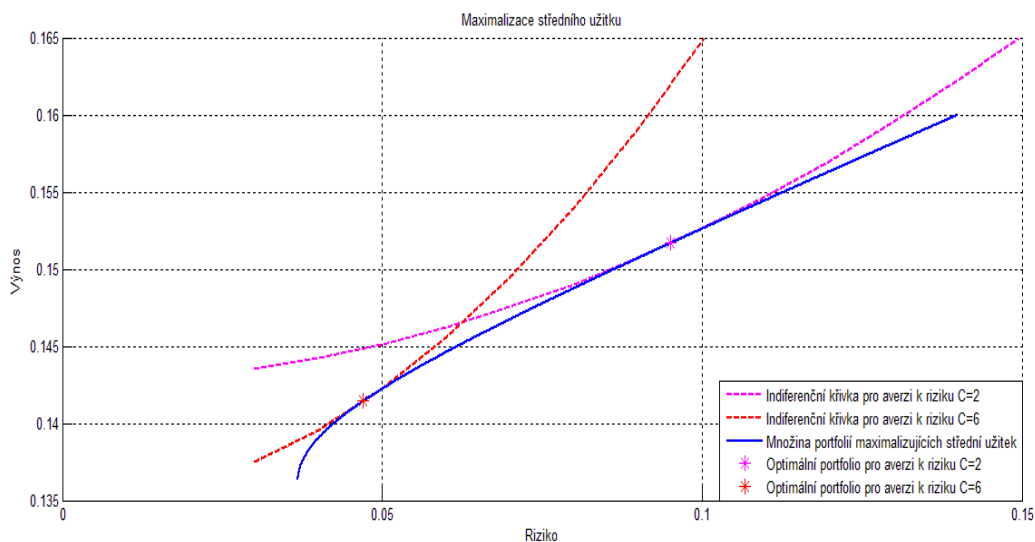
$$\max_{\mathbf{w}} E(U(\mathbf{w})), \quad (2.79)$$

kde  $U(\mathbf{w})$  je užitková funkce zvolená investorem a platí podmínka na součet vah. Výhoda této metody spočívá v její široké využitelnosti. Optimální portfolio v tomto případě přímo závisí na volbě užitkové funkce, která je pro každého investora individuální a pro její volbu není možné dát obecný návod. [5]

Platí, že při vhodné volbě užitkové funkce (např. ve tvaru  $U(\mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) - \frac{c}{2} \sigma^2(\mathbf{w})$  (2.1)) a pokud chápeme výnosnost a rizikovost ve smyslu *Definice 2.3* (tedy podle Markowitz),

potom množina portfolií maximalizujících užitek, která je řešením maximalizační úlohy (2.79) pro různé hodnoty averze k riziku, je shodná s množinou eficientních hraničních portfolií v Markowitzově smyslu. Na *Obrázku 20* je tato množina znázorněna (data z *Příkladu 2.1*) spolu s indifferenčními křivkami, na kterých leží dvě různá optimální portfolia pro dva různé investory s odlišnou averzí k riziku.

OBRÁZEK 20: MAXIMALIZACE STŘEDNÍHO UŽITKU



Zdroj: vlastní zpracování

### 3 APLIKACE MODELŮ NA REÁLNÁ DATA

V této kapitole aplikujeme některé z výše uvedených modelů na reálná data a zhodnotíme výsledky. K testování byly vybrány následující modely:

- (i) Markowitzův model, 1952.
- (ii) Model Konno & Yamazaki, 1991.
- (iii) Youngův model, 1998.

Tyto modely byly zvoleny zejména proto, že se liší způsobem chápání rizika. Zatímco Markowitz chápe riziko jako směrodatnou odchylku výnosnosti portfolia, pro Konno a Yamazakiho se jedná o střední absolutní odchylku výnosnosti a u Youngova modelu je rizikovostí portfolia myšlena maximální ztráta portfolia za období.

Veškeré naprogramované zdrojové kódy a vstupní data v rámci této kapitoly lze nalézt v elektronické příloze k této práci. Zpracování dat bylo provedeno tabulkovým procesorem MS EXCEL a v programovém prostředí MATLAB.

#### 3.1 VSTUPNÍ DATA

Pro účely testování modelů byla vybrána aktiva obchodovaná na americkém akciovém trhu (především na NYSE). Akcie byly vybrány napříč odvětvími, aby co nejlépe prověřily vlastnosti jednotlivých modelů a jejich reakce na změny trhu. Cílem tedy nebylo nalézt co

nejvýnosnější či nejméně rizikové akcie, ale nalézt akcie vhodně reprezentující různé segmenty trhu (hardware, software, finanční sektor, stravování apod.), které by měly alespoň částečně aproximovat chování trhu jako celku ve zvolených obdobích. Úplný seznam vybraných společností a korporací je uveden v *Příloze B*.

Portfolio z vybraných akcií bylo sestaveno postupně pro roky 2010, 2011 a 2012. Pro každé období byla výnosnost a rizikovitost každého aktiva odhadována metodou *ex post*. Základem odhadů byly časové řady denních závěrečných cen akcií očištěných o dividendy a případné akciové splity za dané období. Období vždy tvořilo posledních pět let před sestavováním portfolia, tedy například pro rok 2010 byla volena časová řada v období 2005 až 2009 atd. Všechna data pocházejí z [20]. Tyto časové řady závěrečných cen byly následně transformovány na časové řady ročních výnosností jednotlivých aktiv. Výnosnost aktiva  $i$  v čase  $t$  v souladu s předchozím značením označíme  $r_{it}$ . Transformace proběhla následovně:

$$r_{it} = \frac{cena_t - cena_{t-1}}{cena_{t-1}}, \quad (3.1)$$

kde rozdíl mezi časem  $t$  a  $t - 1$  je jeden rok. Následně byly roční výnosnosti ještě převedeny na procenta. Z takto transformovaných časových řad byla odhadnuta výnosnost a rizikovitost každého aktiva. Výnosnost byla pro všechny tři modely odhadnuta shodně aritmetickým průměrem. Pro Markowitzův model jsme k odhadu rizikovitosti využili výběrovou směrodatnou odchylku a rizikovitost aktiv pro Konno & Yamazaki model jsme odhadli průměrnou absolutní odchylkou. Dále bylo nutné provést odhad variační matice  $V$ . Kovariance mezi libovolnou dvojicí aktiv byla odhadnuta výběrovou kovariancí. Lze ukázat, že výše uvedené výběrové statistiky jsou nestranné, konzistentní odhady hledaných pravděpodobnostních veličin. Více o teorii odhadu např. v [22]. U Youngova modelu byla rizikovitost  $i$  –tého aktiva odhadnuta jako  $\min_t r_{it}$ .

Dle teorie by se výsledky, které vybrané modely dávají, měly lišit tím více, čím větší odchylky od normálního rozdělení vykazuje výnosnost aktiv. Diskutujme tedy nyní normalitu vstupních dat. Lze říci, že výnosnosti aktiv vykazují nejčastěji tyto problémy narušující normalitu:

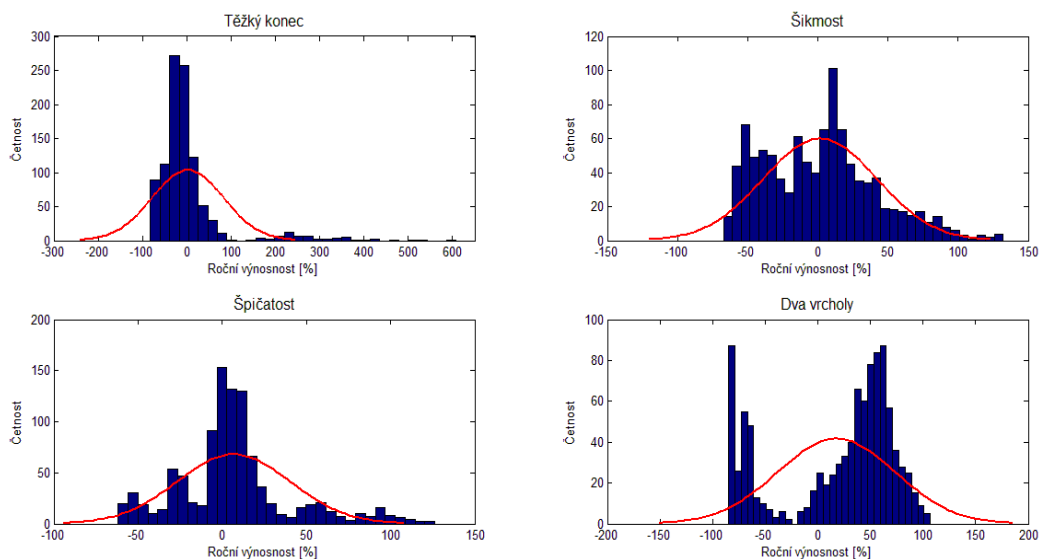
- Těžké konce – pravděpodobnost extrémních hodnot je vyšší než u normálního rozdělení, kde platí tzv. pravidlo 3 SIGMA.
- Šikmost – statistika založená na třetím centrálním momentu, která popisuje symetrii rozdělení. Normální rozdělení je symetrické (nulová šikmost), zatímco výnosnost aktiv bývá často asymetrická (vychýlená na jednu či druhou stranu od střední hodnoty).
- Špičatost – statistika založená na čtvrtém centrálním momentu, která porovnává dané rozdělení s normálním rozdělením. Rozdělení aktiv bývá často špičatější než normální rozdělení. Vysoká špičatost napovídá, že velké množství dat leží v blízkém okolí střední hodnoty.
- Dva vrcholy – rozdělení některých aktiv mívá dva vrcholy, na rozdíl od jednovrcholového normálního rozdělení.

[22]

**Poznámka:** Pravidlo 3 SIGMA říká, že pro náhodnou veličinu řídící se normálním rozdělením se střední hodnotou  $\mu$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma$  platí, že více než 99,7 % hodnot leží v intervalu  $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ . [3]

Ilustrujme si výše uvedené problémy na *Obrázku 21*. Pro porovnání je červenou barvou vyznačena křivka hustoty normálního rozdělení s odhadnutými parametry  $\mu$  a  $\sigma$ .

OBRÁZEK 21: PORUŠOVÁNÍ NORMALITY VSTUPNÍCH DAT



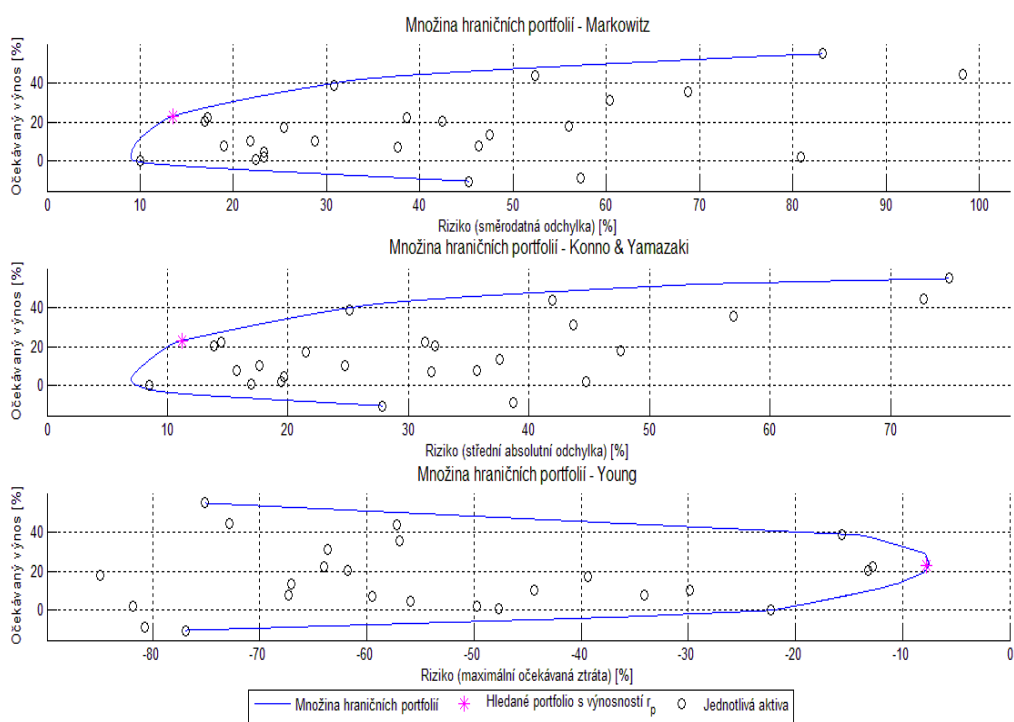
Zdroj: vlastní zpracování

Velká většina vybraných aktiv se normálním rozdělením neřídila. Normalita dat byla testována pomocí Lillieforsova testu, který je založen na porovnávání distribučních funkcí, dále potom pomocí Jarque – Bera testu, jehož testovací statistika využívá šikmosti a špičatosti testovaného souboru v porovnání se šikmostí a špičatostí normálního rozdělení, a také pomocí  $\chi^2$  testu dobré shody. Všechny testy byly vzhledem k dostatečně velkému objemu dat testovány na hladině významnosti  $\alpha = 1\%$ . Další podrobnosti o výše uvedených testech normality lze nalézt v [22].

### 3.2 ŘEŠENÍ MODELŮ

Všechny tři modely byly řešeny v programu MATLAB pomocí funkce *fmincon*, která je vhodná pro úlohy vázané optimalizace. Optimalizace proběhla za podmínky zakázaného prodeje na krátko (tedy  $w_i \in [0; 1]$ ) a za podmínky, že vše je investováno ( $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ). Požadovaná výnosnost  $r_p$  byla u všech modelů zvolena jako očekávaná výnosnost tečného portfolia CML (bezriziková úroková míra byla odhadnuta výnosností *U. S. Treasury Bonds* s jednoletou splatností; tyto výnosnosti jsou dostupné na webových stránkách [21]). Pro Markowitzův model se tedy přímo jedná o tečné portfolio, které maximalizuje Sharpeho míru. Vstupní data nebyla předem očištěna od dominovaných aktiv či aktiv se zápornou výnosností. Na *Obrázku 22* vidíme množiny hraničních portfolií pro všechny tři zvolené modely s vyznačeným eficientním portfoliem s požadovanou výnosností  $r_p$  pro rok 2010.

OBRÁZEK 22: MNOŽINY HRANIČNÍCH PORTFOLIÍ



Zdroj: vlastní zpracování

### 3.3 DISKUZE VÝSLEDKŮ

Zaměříme se nejdříve na jedno konkrétní portfolio s požadovanou výnosností  $r_p$  a označme si jeho skutečnou výnosnost  $r_s$ . Výsledky rozeberme v následujících tabulkách. Testy normality denní výnosnosti v průběhu jednotlivých let v tomto případě probíhaly na hladině významnosti  $\alpha = 5 \%$ .

TABULKA 1: VÝSLEDKY – 2010

Rok 2010	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Požadovaná roční výnosnost $r_p$	23,03 %	23,03 %	23,03 %
Skutečná výnosnost $r_s$	30,83 %	30,66 %	31,39 %
Rozdíl $r_s - r_p$	7,80 %	7,64 %	8,37%
Očekávaná rizikovost portfolia	13,55 %	11,18 %	-7,80 %
Lilliefors test	ANO	ANO	NE
P-hodnota	0,1026	0,0540	0,0119
Jarque – Bera test	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0029	0,0015	0,0026
$\chi^2$ test dobré shody	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0012	0,0035	0,0149

Zdroj: vlastní zpracování

Po roce 2009 byl na světových finančních trzích rok 2010 již druhým růstovým rokem v řadě. Odehrával se především ve znamení ožívování trhů z důsledků světové finanční krize roku 2008. Toto je patrné i na modelovém portfoliu, které ve všech třech případech vykázalo vyšší

výnosnost, než jaká byla očekávána. Nejvyšší výnosnost (ale také největší odchylku od požadované výnosnosti) přinesl Youngův model. Na opačné straně skončil Konno & Yamazaki model. Dle výsledků testů normality lze říci, že denní výnosnost portfolia se v tomto období neřídila normálním rozdělením (problémem byla především větší špičatost oproti normálnímu rozdělení).

TABULKA 2: VÝSLEDKY – 2011

Rok 2011	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Požadovaná roční výnosnost $r_p$	19,01 %	19,01 %	19,01 %
Skutečná výnosnost $r_s$	20,64 %	20,25 %	15,32 %
Rozdíl $r_s - r_p$	1,63 %	1,24 %	-3,69 %
Očekávaná rizikovost portfolia	6,20 %	5,01 %	-1,03 %
Lilliefors test	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0013	0,0010	0,0010
Jarque – Bera test	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0015	0,0017	0,0010
$\chi^2$ test dobré shody	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0001	0,0010	0,0001

Zdroj: vlastní zpracování

V roce 2011 se ve Spojených státech často řešil problém státního dluhu, který se v té době přiblížil stu procent DPH. Dalším závažným problémem byla krize v Eurozóně, která vlivem globalizace a provázanosti světových ekonomik ovlivnila i finanční trh ve Spojených státech. Modelové portfolio přesto vykazovalo růst, i když nižší než v roce 2010. Nejhůře si v roce 2011 vedl Youngův model portfolia, který se dostal téměř o čtyři procenta pod požadovanou výnosnost. Markowitzův i Konno & Yamazaki model zakončily rok s výnosností nad dvacet procent a velmi blízko požadované výnosnosti. Denní výnosnost portfolia se ani v tomto případě neřídila normálním rozdělením, problémem byla opět její špičatost a tendence k těžkým koncům.

TABULKA 3: VÝSLEDKY – 2012

Rok 2012	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Požadovaná roční výnosnost $r_p$	25,14 %	25,14 %	25,14 %
Skutečná výnosnost $r_s$	5,31 %	5,98 %	10,38 %
Rozdíl $r_s - r_p$	-19,83 %	-19,16 %	-14,75 %
Očekávaná rizikovost portfolia	14,35 %	11,87 %	-7,57 %
Lilliefors test	NE	NE	ANO
P-hodnota	0,0010	0,0284	0,2097
Jarque – Bera test	NE	NE	NE
P-hodnota	0,0010	0,0010	0,0032
$\chi^2$ test dobré shody	NE	NE	ANO
P-hodnota	0,0175	0,0473	0,8181

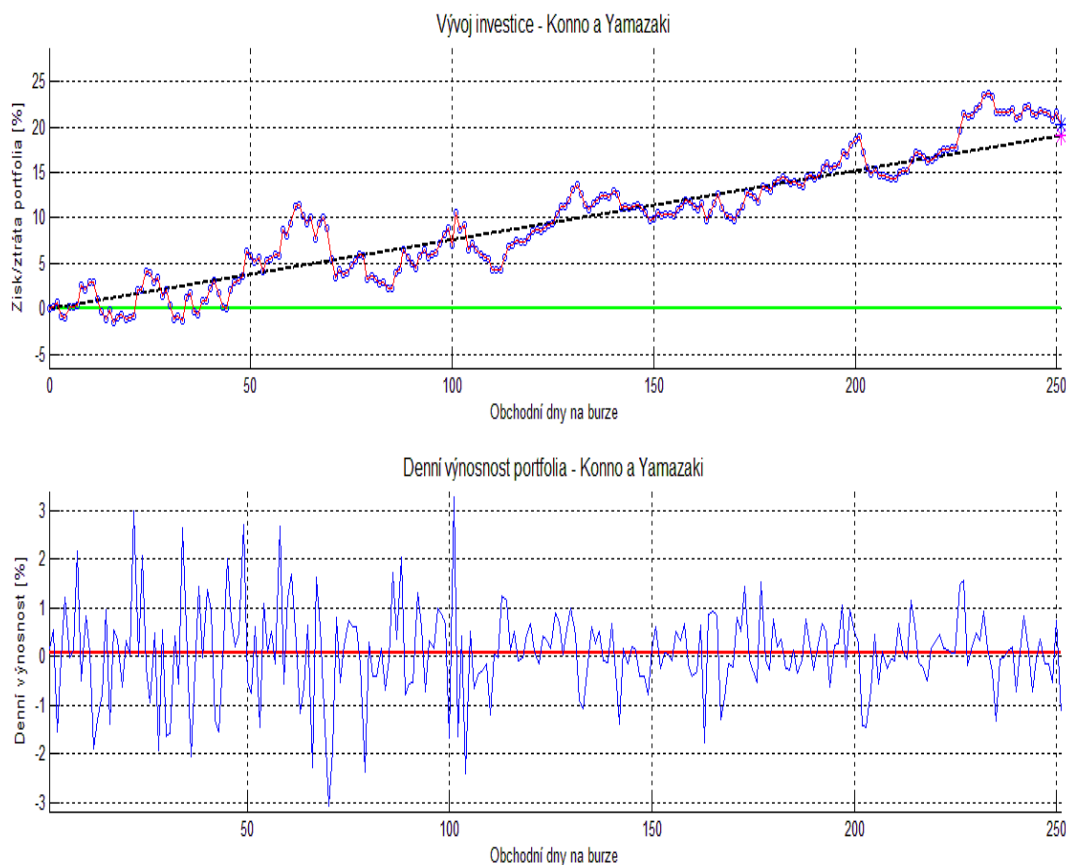
Zdroj: vlastní zpracování



Rok 2012 byl ovlivněn pokračující krizí Eurozóny a fiskální krizí ve Spojených státech, což vedlo k většímu kolísání cen. Modelové portfolio zaznamenalo výrazně nižší výnosnost, než bylo očekáváno. Větší rozdíl oproti zbylým dvěma modelům přinesl Youngův model. Jeho výnosnost byla až o pět procent vyšší a také denní výnosnost portfolio vykazovala oproti Markowitzovu a Konno & Yamazaki modelu větší míru shody s normálním rozdělením (zejména p-hodnota  $\chi^2$  testu dobré shody byla velmi vysoká).

Obrázek 23 graficky znázorňuje průběh investice Konno & Yamazaki modelu a denní výnosnost v roce 2011. Černá úsečka na horním obrázku představuje lineární spojnici mezi počáteční nulovou výnosností a požadovanou výnosností  $r_p$ . Červená čára na dolním obrázku značí průměrnou denní výnosnost v daném období.

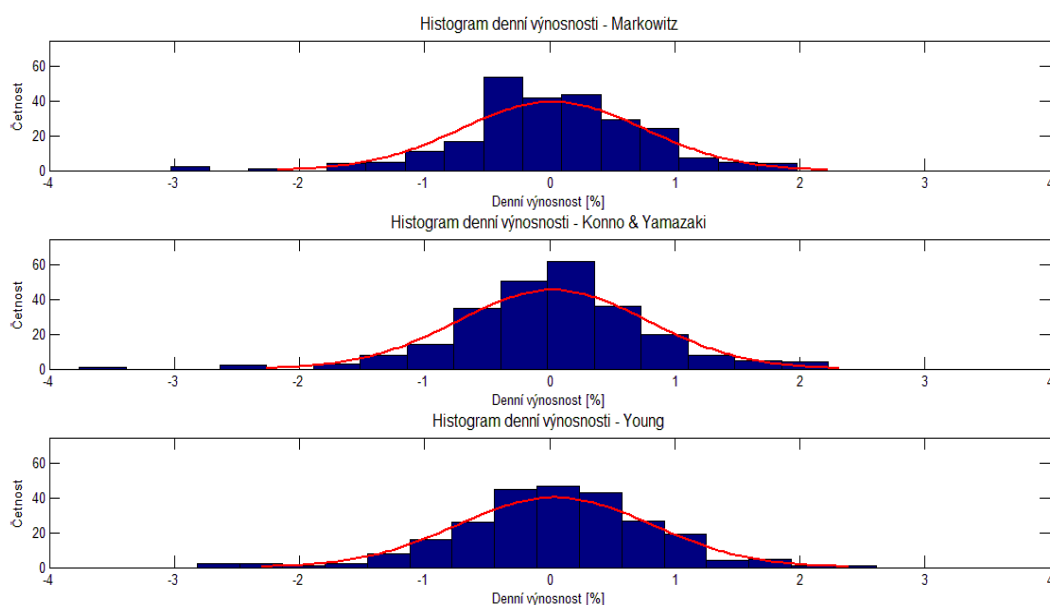
OBRÁZEK 23: PRŮBĚH INVESTICE A DENNÍ VÝNOSNOST



Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 24 ukazuje porovnání denní výnosnosti s normálním rozdělením v roce 2012 pro všechny tři modely. Z obrázku je dobře patrné, že denní výnosnosti Youngova modelu nejlépe kopírují tvar hustoty normálního rozdělení s příslušnou odhadnutou střední hodnotou  $\mu$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma$ .

OBRÁZEK 24: POROVNÁNÍ DENNÍCH VÝNOSNOSTÍ S NORMÁLNÍM ROZDĚLENÍM



Zdroj: vlastní zpracování

Další grafy k výše uvedeným tabulkám lze nalézt v elektronické příloze této práce.

Nyní se již nezaměříme na jediné portfolio, ale pokusíme se shrnout výsledky celé množiny hraničních portfolií.

TABULKA 4: SOUHRNNÉ VÝSLEDKY - 2010

Rok 2010	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Průměrný rozdíl $r_s - r_p$	7,61 %	7,98 %	8,19 %
Maximální kladný rozdíl $r_s - r_p$	50,56 %	50,56 %	50,56 %
Maximální záporný rozdíl $r_s - r_p$	-37,90 %	-37,90 %	-37,90 %

Zdroj: vlastní zpracování

Úspěšný rok 2010 přinesl u všech modelů kladný průměrný rozdíl mezi  $r_s$  a  $r_p$ . Své konkurenty lehce předčil Youngův model, u něhož se tento průměrný rozdíl dostal přes osm procent.

TABULKA 5: SOUHRNNÉ VÝSLEDKY - 2011

Rok 2011	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Průměrný rozdíl $r_s - r_p$	-25,09 %	-24,66 %	-33,76 %
Maximální kladný rozdíl $r_s - r_p$	12,42 %	14,46 %	26,81 %
Maximální záporný rozdíl $r_s - r_p$	-124,62 %	-124,62 %	-124,62 %

Zdroj: vlastní zpracování

Co se týče průměrného rozdílu  $r_s - r_p$  se v roce 2011 již ani jednomu z modelů nepovedlo dostat se do kladných čísel. Zatímco Markowitzův a Konno & Yamazaki model vykazovaly podobná čísla, u Youngova modelu, ačkoliv nabízel nejvyšší možný kladný rozdíl výnosností, byl tento rozdíl v průměru výrazně horší než u jeho konkurentů.

TABULKA 6: SOUHRNNÉ VÝSLEDKY - 2012

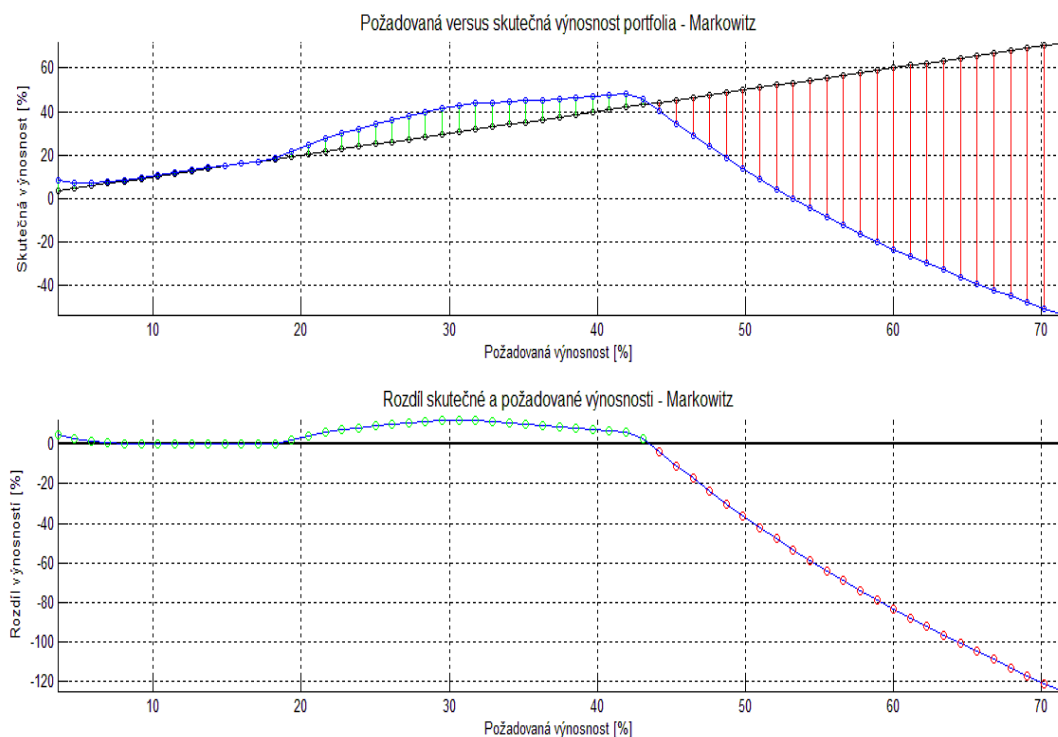
Rok 2012	Markowitz	Konno & Yamazaki	Young
Průměrný rozdíl $r_s - r_p$	-35,61 %	-34,95 %	-34,40 %
Maximální kladný rozdíl $r_s - r_p$	18,20 %	19,87 %	18,88 %
Maximální záporný rozdíl $r_s - r_p$	-119,36 %	-119,36 %	-119,36 %

Zdroj: vlastní zpracování

V roce 2012 všechny tři modely dávají velmi podobné hodnoty. Lze říci, že Markowitzův model v tomto roce mírně zaostává, ale rozdíly nepřesahují dvě procenta. V průměru byl nejlepší Youngův model, mezi tímto a Konno & Yamazaki modelem byl však v tomto ukazateli jen velmi malý rozdíl.

Ukázka grafického zpracování výše uvedených tabulek je znázorněna na *Obrázku 24*. Jedná se o Markowitzův model a rok 2011. Další grafy lze opět nalézt v elektronické příloze.

OBRÁZEK 25: POŽADOVANÁ VS. SKUTEČNÁ VÝNOSNOST



Zdroj: vlastní zpracování

Provedená analýza výsledků nepřinesla jednoznačné rozhodnutí, zda je některý z modelů lepší než ostatní. Obecně lze říci, že i přes odchylky vstupních dat od normality Markowitzův a Konno & Yamazaki model přinášely velmi podobné výsledky. Youngův minimaxový model naproti tomu přinášel často odlišné výsledky, které ovšem ne vždy byly jednoznačně lepší než u zbylých dvou modelů. Pro testované modely nebyla provedena citlivostní analýza, která by mohla být podnětem pro další rozsáhlejší diskuzi.

Podívejme se znovu na *Obrázek 25*. Na něm je dobře patrné, že skutečná výnosnost po určitou dobu fluktuuje okolo požadované výnosnosti, ale od jisté (dostatečně vysoké) požadované výnosnosti  $r_p$  dojde k propadu a s dále rostoucím  $r_p$  je tato degrese téměř lineární. Tendence k takovému chování byla pozorovatelná ve všech devíti zkoumaných případech. Je to způsobeno tím, že pro velká  $r_p$  je portfolio málo diverzifikované a pro  $r_p = \max_i r_i$  je dokonce tvořeno pouze jediným aktivem s maximální očekávanou výnosností. Velká požadovaná výnosnost je tedy vykoupena vysokým rizikem, které plyne z nedostatečné diverzifikace portfolia.

Porovnáme-li  $r_p$  v roce 2011 (uvedená v *Tabulce 2*) s *Obrázkem 25*, zjistíme, že pro tuto požadovanou výnosnost se skutečná výnosnost stále nachází ve fázi, kdy přibližně kopíruje výnosnost požadovanou. Situace byla podobná i v ostatních případech (viz. elektronická dokumentace). Lze dokonce říci, že ve většině případů by se zdálo být z pohledu investora vhodnější volit vyšší  $r_p$ . Jak již bylo řečeno, požadovaná výnosnost byla vypočtena jako výnosnost tečného portfolia CML a maximalizuje tedy Sharpeho míru. Obecně lze říci, že takto zvolené portfolio je dobře diverzifikované a zdá se být vhodné především pro konzervativnější investory, kteří preferují vyšší míru zajištění před extrémně vysokou výnosností (tedy ti, kteří mají vyšší averzi k riziku). Portfolia volená tímto způsobem přinesla kladný výnos v každém z devíti sledovaných případů a ve více než polovině případů překročila svoji požadovanou výnosnost.

## ZÁVĚR

Tématem této práce bylo pracovat s klasickými a alternativními přístupy optimální volby portfolia. Základem pro správné pochopení problematiky teorie portfolia je důležité seznámit se s její historií a také kdy, kde a na jakém pozadí byla teorie vytvořena. První kapitola proto tuto teorii představila tak, jak ji vidíme dnes, a seznámila nás se základními milníky jejího historického vývoje. Jelikož portfolio je tvořeno z aktiv, uvedli jsme jejich stručný přehled a popis zejména se zaměřením na jejich možné využití v teorii portfolia. V závěru první kapitoly jsme diskutovali možné motivy k sestavení portfolia a také jsme představili dva základní přístupy k jeho správě.

Druhá kapitola se již přímo zabývala konkrétními modely optimální volby portfolia. Základním pilířem první části této kapitoly bylo detailní analytické odvození základního Markowitzova modelu. Před samotným odvozením bylo nezbytné definovat prostor riziko-výnos, na kterém se moderní teorie portfolia pohybuje, seznámit se se vztahem investorů k riziku a matematicky definovat pojem portfolio a jeho výnosnost a rizikovost. Samotné odvození bylo provedeno s důrazem na některé zajímavé vlastnosti Markowitzova modelu a celé bylo provázeno elementárním dvouaktivovým příkladem, který umožňoval praktickou ukázkou a elegantní grafickou ilustraci vhodně vybraných kroků odvození. Dále jsme se v druhé kapitole zabírali některými modifikacemi základního Markowitzova modelu. Druhá část této kapitoly se zaměřila na představení vybraných alternativních modelů. Úkolem nebylo se s vybranými modely pouze seznámit, ale také uvést jejich případný vztah k Markowitzovu modelu a diskutovány byly také jejich možné výhody či nevýhody.

Ve třetí kapitole této práce jsme k Markowitzovu modelu vybrali další dva alternativní modely tak, aby se lišily zejména chápáním rizika a dávaly tak hypoteticky co nejvíce různorodé výsledky, a byla provedena fiktivní investice do vybrané množiny akcií z amerického trhu. Cílem bylo vybrat taková aktiva, která by pokrývala co nejširší část trhu. Postupně jsme rozebrali charakteristiku vstupních dat, metody řešení vybraných modelů a v závěru jsme uvedli a analyzovali dosažené výsledky. Analýza výsledků sice nepřinesla jednoznačnou odpověď v podobě nejlepšího modelu, ale přinesla zajímavá fakta a srovnání modelů v souvislosti s normalitou dat a také potencionálně otevřela dveře dalšímu rozboru a citlivostní analýze vybraných modelů.

Tato práce se nesnaží být komplexním seznamem modelů optimální volby portfolia ani příručkou jak a do jakých aktiv investovat. Snaží se představit a v souvislostech srovnat vybrané modely a ukázat čtenáři, jak pracují na reálných datech. Celá práce byla vypracována se zřejmým důrazem na názornost a přehlednost. Zároveň byla doplněna o četná obrazová znázornění a grafy.

## A ZDROJE A LITERATURA

- [1] CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 2. vyd. Praha: Ekopress, 2005. ISBN 80-86119-91-2.
- [2] GUERARD, John B. *Handbook of Portfolio Construction*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-0-387-77439-8.
- [3] Wikipedia, the free encyclopedia [online]. Citováno 17.3.2013. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org>
- [4] ŠEDIVÁ, Blanka a FRIESL, Michal. *Finanční matematika hypertextově* [online]. Citováno 19.3.2013. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/hfim/tit.html>
- [5] DUPAČOVÁ, Jitka. *Markowitzův model optimální volby portfolia* [online]. Citováno 22.3.2013. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/downloads/Markowitz.pdf>
- [6] The MathWorks, Inc. *MATLAB Documentation Center* [online]. Citováno 22.3.2013. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/matlab/>
- [7] ŠEDIVÁ, Blanka a FRIESL, Michal. *Pravděpodobnost a statistika hypertextově* [online]. Citováno 25.3.2013. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/tit.html>
- [8] BROSCH, Rainer. *Portfolios of Real Options*. Berlín: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-78298-8.
- [9] ATZBERGER, Paul J. *An Introduction to Portfolio Theory* [online]. Citováno 30.3.2013. Dostupné z: <http://www.math.ucsb.edu/~atzberg/finance/portfolioTheory.pdf>
- [10] MAREK, Patrice. *Přednášky k předmětu KMA/FIPM vyučovaném na Západočeské univerzitě* [online]. Citováno 2.4.2013. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~patrke/WWW-KMA/FIPM/>
- [11] MÍKA, Stanislav. *Matematická optimalizace*. Plzeň: Vydavatelství ZČU, 1997. ISBN 80-7082-319-4.
- [12] Česká národní banka. *Seznam emitovaných pokladničních poukázek a poukázek ČNB* [online]. Citováno 2.4.2013. Dostupné z: [http://www.cnb.cz/cs/financni\\_trhy/trh\\_statnich\\_dluhopisu/spp/poukazky.jsp](http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/trh_statnich_dluhopisu/spp/poukazky.jsp)
- [13] ROY, A. D. *Safety First and the Holding of Assets*. *Econometrica*, 1952, 20(3), 431 – 449. ISSN 00129682.
- [14] KONNO, Hiroshi a YAMAZAKI, Hiroaki. *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market*. *Management Science*, 1991, 37(5), 519 – 531. ISSN 0025-1909.

- [15] DANTZIG, George B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton: Princeton University Press, 1963. ISBN 9780691059136.
- [16] FARIAS, Christiano, VIEIRA, Wilson a DOS SANTOS, Maurinho. *Portfolio Selection Models: Comparative Analysis and Applications to the Brazilian Stock Market*. Revista de Economia e Agronegócio, 2006, 4(3), 387 – 408. ISSN 1679-1614
- [17] MYERSON, Roger B. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press, 1997. ISBN 9780674341166
- [18] YOUNG, Martin R. *A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution*. Management Science, 1998, 44(5), 673 – 683. ISSN 0025-1909.
- [19] ČÁMSKÝ, František. *Přednášky k předmětu ESF/PFTEPO vyučovaném na Masarykově Univerzitě* [online]. Citováno 5.4.2013. Dostupné z: <http://is.muni.cz/el/1456/jaro2008/PFTEPO>
- [20] Yahoo! Finance [online]. Citováno 12.4.2013. Dostupné z: <http://finance.yahoo.com/>
- [21] Board of Governors of the Federal Reserve System. *Selected Interest Rates* [online]. Citováno 24.4.2013. Dostupné z: <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>
- [22] REIF, Jiří. *Metody matematické statistiky*, 2. vyd. Plzeň: Vydavatelství ZČU, 2004. ISBN 80-7043-302-7.

## **B VYBRANÁ AKTIVA**

Vybraná aktiva:

1. Google, Inc. – Internet, Software
2. Microsoft Corp. – Software, Hardware
3. IBM Corp. – Hardware, IT služby
4. Apple, Inc. – Hardware, Software, Elektronika
5. Alexion Pharmaceuticals, Inc. – Farmaceutika, Výzkum
6. Amazon.com, Inc. – Online retail
7. McDonald's Corp. – Síť rychlého občerstvení
8. Broadcom Corp. – Elektronika, Polovodičové technologie
9. Cheesecake Factory, Inc. – Řetězec restaurací
10. Western Digital Corp. – Hardware
11. JP Morgan Chase & Co. – Bankovníctví
12. Franklin Resources, Inc. – Podílové a penzijní fondy
13. AAR Corp. – Letectví a obrana
14. SPDR Gold Shares – Zlato
15. Ford Motor Co. – Automobily
16. AT&T, Inc. – Telekomunikace
17. The Walt Disney Comp. – Masová média
18. British American Tobacco p.l.c. – Tabákový průmysl
19. Whole Food Market, Inc. – Potraviný
20. US Steel Corp. – Ocelárny
21. Walter Energy, Inc. – Těžba uhlí, energetika
22. Cabot Oil & Gas Comp. – Těžba ropy a zemního plynu
23. Guess, Inc. – Oblečení
24. The Coca-Cola Comp. – Nápoje
25. Johnson & Johnson – Kosmetika, Zdravotnické vybavení