Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Zpracování výsledků vstupních testů z matematiky

Plzeň, 2013

Kateřina Palková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 30. 5. 2013

Kateřina Palková

Poděkování

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce panu Mgr. Michalu Frieslovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, vstřícný přístup a trpělivost během psaní této práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá statistickým zpracováním dat ze vstupních testů z matematiky psaných v akademickém roce 2011/12. Těchto testů se každoročně zúčastňují studenti prvních ročníků na většině fakult Západočeské univerzity v Plzni. V práci je provedeno základní statistické zpracování. Následně je zformulováno a testováno několik hypotéz se zaměřením na rozdíly ve výsledcích testů mezi muži a ženami.

Klíčová slova: vstupní testy, statistické zpracování dat, analýza rozptylu

Abstract

The thesis discusses the statistical processing of the results of entrance tests in mathematics for the academic year 2011/2012. The first year students of most of the faculties of the University of West Bohemia participate in the tests. First, a basic statistical analysis is conducted. Subsequently, several hypothesis are formulated and tested. The hypothesis are focused on the difference in test results based on the gender of the participant.

Keywords: entrance tests, statistical processing, analysis of variance

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Kapitola 1

Úvod

Hlavním cílem bakalářské práce je statistické zpracování výsledků vstupních testů z matematiky psaných na Západočeské univerzitě v Plzni v akademickém roce 2011/2012 z pohledu rozdílnosti výsledků mužů a žen.

Práce je rozčleněna do několika kapitol. Nejprve popíšeme vstupní testy a data, která se z nich získávají. V třetí kapitole provedeme základní statistické zpracování dat. Čtvrtá kapitola je věnována testům nezávislosti založených na χ^2 testech. Testy o shodě rozdělení (Wilcoxonův test) se nacházejí v kapitole číslo pět. Další, šestá kapitola se zabývá analýzou rozptylu. Cílem této kapitoly je zjistit, zda rozdíly mezi muži a ženami nejsou způsobeny jiným faktorem či faktory než je pohlaví. Jedná se tedy o jednofaktorovou i vícefaktorovou analýzu rozptylu. Sedmá kapitola se zaobírá neparametrickou verzí jednofaktorové analýzy rozptylu, tudíž Kruskalovým-Wallisovým testem. Konečně v závěrečné kapitole dojde ke zhodnocení všech výsledků testů.

Kapitola 2

Data ze vstupních testů

2.1 Vstupní testy z matematiky

Vstupní testy z matematiky se na Západočeské univerzitě píší začátkem zimního semestru již od roku 2006. V roce 2011 se vstupního testu zúčastnilo 2263 studentů z osmi fakult Západočeské univerzity (FAV, FEK, FPE, FEL, FST, UUD, FZS, FF) a z Přírodovědné fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Test se skládá z deseti otázek v rozsahu osnov středoškolské matematiky. Tento test je stejný pro každého studenta, jediný rozdíl mezi zadáním A a B je v pořadí otázek. Na vypracování testu mají studenti 20 minut, přičemž vědí, že je vždy alespoň jedna správná odpověď.Jednotlivé odpovědi se zaškrtávají a jsou v práci značené jako $a, b, c...$ Krom svých nacionálií uvádějí do testu studenti i informace o své střední škole, typu maturity z matematiky a místa bydliště.

2.2 Data a software

Výsledky testů z roku 2011 mi byly poskytnuty v MS Excel. Jediná úprava, která byla udělána, bylo zohlednění pořadí otázek v zadáních. Pořadí odpovědí na otázky varianty B bylo pozměněno, aby odpovídalo variantě A. Výpočty testů a vykreslení grafů a boxplotů budou realizovány v programu MATLAB. Všechny testy budou výhradně provedeny na hladině významnosti $\alpha = 5$ %.

Kapitola 3

Základní statistické zpracování

Tato kapitola pojednává o základních popisných statistikách přístupných dat ze vstupních testů z matematiky. Celkový počet studentů, kteří test psali, byl 2263. Jelikož tato práce zkoumá úspěšnost mužů a žen v testu, tak byly vyřazeny položky, které neobsahovaly informaci o pohlaví studenta. V tabulce 3.1 jsou uvedeny základní statistické vlastnosti po této korekci.

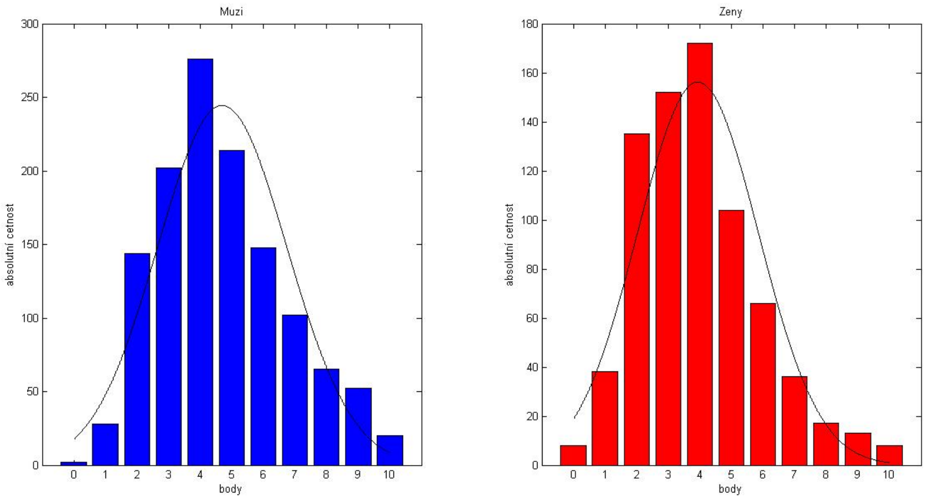
Celkové počty bodů

	Muži	**Ženy**	**Celkem** [1]
rozsah	1253	749	2002
aritmetický průměr	4.6975	3.9426	4.4151
modus	4	4	4
medián	4	4	4
dolní kvantil	3	3	3
horní kvantil	6	5	6
směrodatná odchylka	2.0451	1.9127	2.0293

Tabulka 3.1: Základní statistické údaje

Dle výše uvedeného tabulky 3.1 muži z pohledu aritmetického průměru odpovídali lépe než ženy, kdežto medián je stejný. U obou pohlaví byly nejčastěji získány 4 body. Na následujících sloupcových grafech 3.1 a 3.2 je znázorněno rozložení celkového počtu bodů z testu. Černě je zobrazena křivka normálního rozdělení se střední hodnotou a směrodatnou odchylkou, které byly odhadnuty z celkových bodů získaných v testu. Nejméně četný byl u mužů zisk

[1] Pod popisem Celkem jsou myšlena data obsahující údaj o pohlaví, tedy muži a ženy dohromady, tzn. nezapočítávají se položky, které byly odstraněné korekcí.



Obrázek 3.1: Porovnání rozložení celkového počtu bodů z testu mužů a žen.

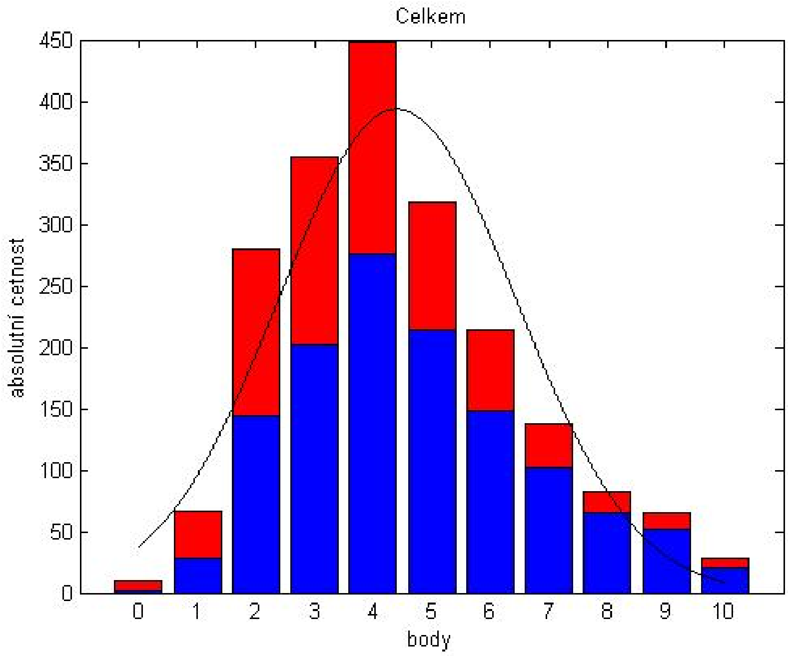
0 bodů, následovaný ziskem všech deseti bodů. Počet mužů, kteří získali plný počet bodů, je desetkrát větší než počet mužů s 0 body. U žen jsou také nejméně četné třídy s nula a s deseti body, ovšem počty žen v těchto dvou třídách jsou stejné. Jak je vidět z grafů, počty studentů, kteří získali 0 bodů, 1 bod, atd..., rostou až do skupiny se ziskem čtyř bodů, kde dochází ke zlomu a dále počty studentů s pěti a více body klesají.

Odpovědi v jednotlivých otázkách

	Muži		**Ženy**	
Příklad	**Správně**	**Úspěšnost [%]**	**Správně**	**Úspěšnost [%]**
1.	370	29.5291	211	28.1709
2.	1119	89.3057	619	82.6435
3.	245	19.5531	163	21.7623
4.	366	29.2099	150	20.0267
5.	454	36.2330	201	26.8358
6.	307	24.5012	99	13.2176
7.	628	50.1197	245	32.7103
8.	1066	85.0758	595	79.4393
9.	467	37.2706	277	36.9826
10.	864	68.9545	393	52.4700

Tabulka 3.2: Počty správných odpovědí a úspěšnost v jednotlivých příkladech

Z přiložené tabulky 3.2 je patrné, že muži byli úspěšnější ve všech



Obrázek 3.2: Rozložení celkového počtu bodů získaných v testu bez ohledu na pohlaví.

typech příkladů až na příklad číslo tři (identifikace rovnice kružnice). Nejvýraznějším rozdílem byli muži lepší v příkladu číslo sedm (vztah mezi cos^2x a sin^2x) a následně v desátém příkladě (planimetrie přímek).

Testování normality dat

Důležitou vlastností statistického souboru je to, zda má či nemá normální rozdělení, respektive zda je či není náhodným výběrem z normálního rozdělení. Na normalitu byly testovány celkové počty bodů v testů získané muži, ženami i oběma pohlavími současně. Jedná se tudíž o normalitu ze zaokrouhlených diskrétních dat. Pro ověření byly použity tři následující testy: test Jarque-Bera, χ^2 test dobré shody a Lillieforsův test. Tyto testy jsou popsány například v [7], [10] nebo [5]. Žádná testovaná sada dat (muži, ženy ani dohromady) nepochází z normálního rozdělení pravděpodobnosti s hladinou významnosti $\alpha = 5$ %. P - hodnota navíc vychází vždy menší než 0.01.

test Jarque-Bera

Muži	Ženy	Celkem	Kritická hodnota
58.5577	72.3874	113.9162	$\chi^2_{\alpha=0.05}(2) = 5.99$

χ^2 test dobré shody

Muži	Ženy	Celkem	Kritická hodnota[2]
193.9026	129.5133	318.5844	$\chi^2_{\alpha=0.05}(K-3)$

Lillieforsův test

Muži	Ženy	Celkem	Kritická hodnota[3]
0.1538	0.001	0.1590	$0.886/\sqrt{n}$

Tabulka 3.3: Testové a kritické hodnoty testů normality

[2]Stupně volnosti χ^2 rozdělení závisí na K, což je počet disjunktních intervalů použitých v průběhu testu [10]

[3]Jedná se o aproximaci kritické hodnoty pro $\alpha = 5$ %. [10]

Kapitola 4

Test nezávislosti ve dvourozměrné kontingenční tabulce

Následující kapitolou se podrobněji zabývají zdroje [1] nebo [7]. Pomocí kontingenčních tabulek lze otestovat nezávislost (respektive závislost) dvou diskrétních veličin X a Y. Pokud veličina X nabývá I různých variant a veličina Y zase J variant, lze počty n_{ij}, které značí, že současně nastaly varianty $X = i$ a $Y = j$, $i = 1, 2, ...I$, $j = 1, 2, ...J$, napsat do obdélníkové matice o rozměrech I x J. Dále označme

$$n_{i*} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}, \quad n_{*j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}. \tag{4.1}$$

Čísla n_{i*} a n_{*j} se nazývají marginální četnosti. Zároveň platí vztah

$$n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}, \tag{4.2}$$

kde n je celkový počet všech pozorování. Nyní lze spočítat tzv. očekávané četnosti o_{ij} pro i-tý řádek a j-tý sloupec vztahem

$$o_{ij} = \frac{n_{i*} n_{*j}}{n}, \quad pro\ i = 1, 2, ...I,\ j = 1, 2, ...J. \tag{4.3}$$

Pokud jsou některé $o_{ij} < 5$ je nutné některé řádky či sloupce sloučit při zachování podmínky $I > 1$, $J > 1$. Pokud jsou $o_{ij} \geq 5$ pro všechna $i = 1, 2, , ..I; j = 1, 2, ..J$ lze spočítat testové kritérium pro test nezávislosti

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}}. \tag{4.4}$$

Kritickou hodnotou je kvantil χ^2 rozdělení $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, kde $\nu = (I-1)(J-1)$ jsou stupně volnosti. Porovnáním testového kritéria a kritické hodnoty lze dle testu nezávislosti přijmout nebo zamítnout nulovou hypotézu na dané hladině významnosti. Přičemž nulová (H_0) a alternativní (H_1) hypotéza znějí:
H_0: Veličiny X a Y jsou nezávislé.
H_1: Veličiny X a Y jsou závislé.
Pokud $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, pak dle testu s chybou 1. druhu α zamítáme nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti a přijímáme alternativní hypotézu H_1 a naopak pokud $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(\nu)$, tak přijímáme nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti dvou veličin X a Y.

4.1 Čtyřpolní kontingenční tabulka

Zvláštním případem kontingenční tabulky je tabulka, kdy veličiny X a Y nabývají pouze dvou variant. Tento typ matice o rozměrech 2 x 2 se nazývá čtyřpolní kontingenční tabulkou. Vztah pro testové kritérium (4.4) lze zjednodušit na

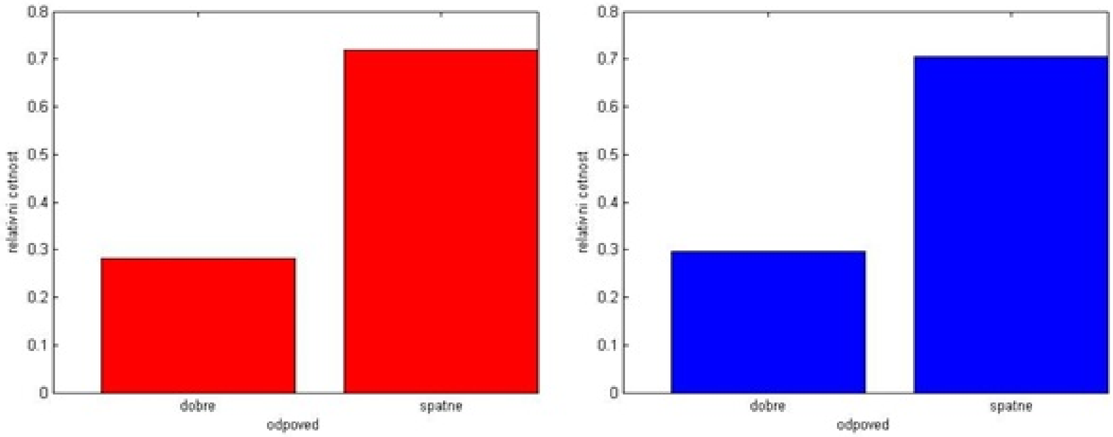
$$\chi^2 = n\frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1*}n_{2*}n_{*1}n_{*2}} \tag{4.5}$$

a kritická hodnota se rovná $\chi^2_{1-\alpha}(1)$. Pro $\alpha = 5$ % se kritická hodnota přibližně rovná $\chi^2_{0.95}(1) \doteq 3.84$

Výsledky

Při testování nezávislosti v čtyřpolní kontingenční tabulce veličiny X a Y byly pohlaví (muž, žena) a odpověď na danou otázku (dobrá, špatná). Testová kritéria včetně p - hodnoty vyšla následovně

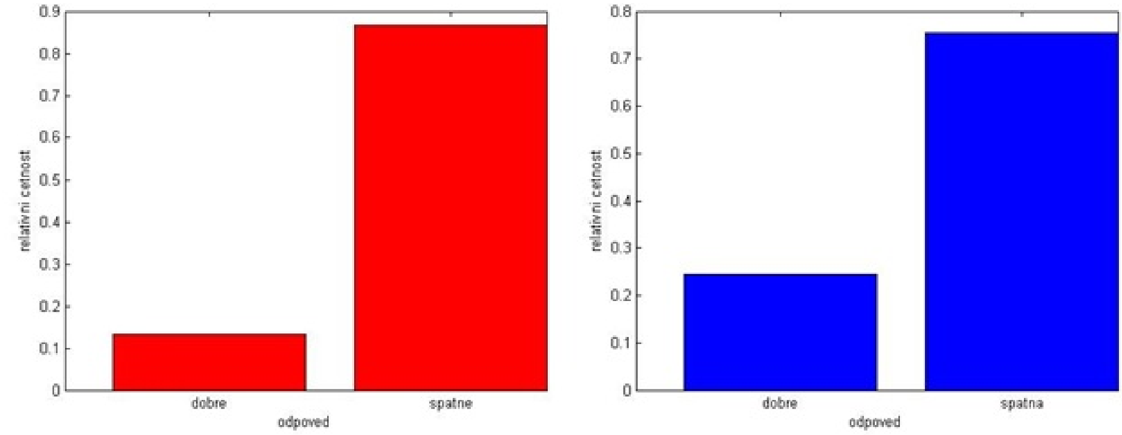
- 1. příklad: $\chi^2 = 0.4198 < 3.84$ přijímáme nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti, $p = 0.5170$
- 2. příklad: $\chi^2 = 18.1749$, $p = 2.0152 * 10^{-5}$
- 3. příklad: $\chi^2 = 1.4101 < 3.84$ přijímáme nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti, $p = 0.2350$
- 4. příklad: $\chi^2 = 20.6641$, $p = 5.4733 * 10^{-6}$



Obrázek 4.1: Porovnání relativních odpovědí mužů a žen v 1. příkladu - nezávislost

- 5. příklad: $\chi^2 = 18.8057$, $p = 1.4473 * 10^{-5}$
- 6. příklad: $\chi^2 = 36.9174$, $p = 1.2324 * 10^{-9}$
- 7. příklad: $\chi^2 = 57.7774$, $p = 2.9310 * 10^{-14}$
- 8. příklad: $\chi^2 = 10.5391$, $p = 0.0012$
- 9. příklad: $\chi^2 = 0.0166 < 3.84$ přijímáme nulovou hypotézu H_0 o nezávislosti, $p = 0.8974$
- 10. příklad: $\chi^2 = 54.5205$, $p = 1.5388 * 10^{-13}$

Jak je vidět výše, pouze u příkladu 1, 3 a 9 je odpověď na otázku nezávislá vůči pohlaví. U ostatních příkladů je testové kritérium výrazně větší než kritická hodnota, takže přijímáme alternativní hypotéza o tom, že pohlaví odpovídajícího a správnost odpovědi jsou závislé na hladině významnosti $\alpha = 5$ %. Na sloupcových grafech 4.1, 4.2 jsou porovnány rozdíly počtu správný a špatných odpovědí mužů a žen u dvou příkladů. U příkladu (př. 1), pro který byla přijata hypotéza H_0 o nezávislosti, jsou rozdíly v relativních četnostech odpovědí menší než u příkladu číslo 6, u kterého byla hypotéza H_0 zamítnuta. Modré sloupce odpovídají relativní četnosti odpovědí mužů a červené sloupce zase relativní četnosti odpovědí u žen.



Obrázek 4.2: Porovnání relativních odpovědí mužů a žen v 6. příkladu - závislost

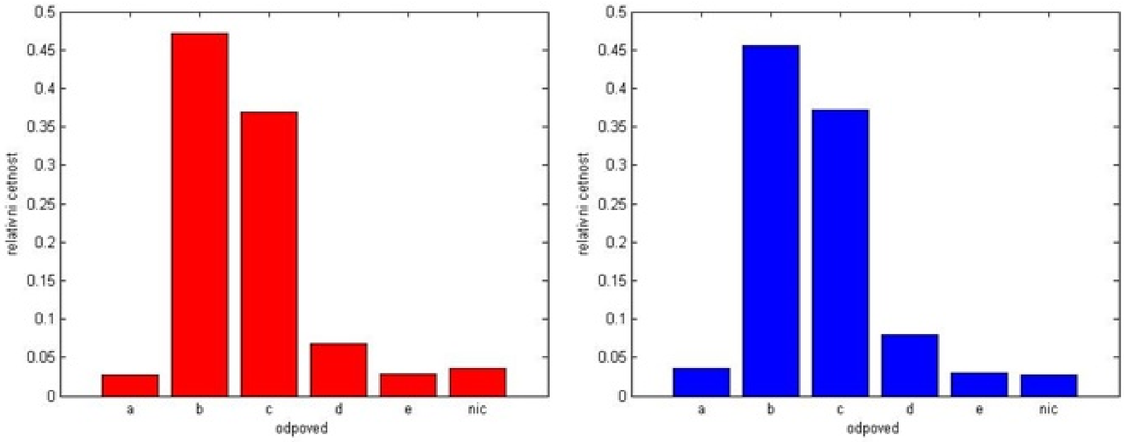
4.2 Obecná kontingenční tabulka

U následujících kontingenčních tabulek je opět veličina X binární a odpovídá pohlaví (muž, žena), ale veličina Y obsahuje tři až šest variant. Nyní veličina Y je konkrétní odpověď na otázku (a, b, ... (počet odpovědí záleží na otázce), a žádná odpověď). U příkladu číslo šest, ve kterém se nezaškrtává odpověď, ale kreslí se funkce $\sin x$, jsou varianty veličiny Y: dobrá odpověď, špatná odpověď a žádná odpověď. Dále u příkladu tři je možností veličiny Y pět (a, b, c, d, žádná odpověď) a u ostatních příkladů šest (a, b, c, d, e, žádná odpověď). Tím pádem se liší i kritické hodnoty u jednotlivých příkladů. Kritická hodnota u šestého příkladu je $\chi^2_{0,95}(\nu = 2) \doteq 5.99$, u třetího příkladu $\chi^2_{0,95}(\nu = 4) \doteq 9.49$ a u ostatních $\chi^2_{0,95}(\nu = 5) \doteq 11.07$.

Výsledky

Vzhledem k malým očekávaným hodnotám o_{ij} musely být spojeny sloupce u příkladů 2, 7 a 8, a to konkrétně:
př. 2: spojeny sloupce 3, 5 a 6
př. 7: spojeny sloupce 5 a 6
př. 8: spojeny sloupce 3, 5 a 6

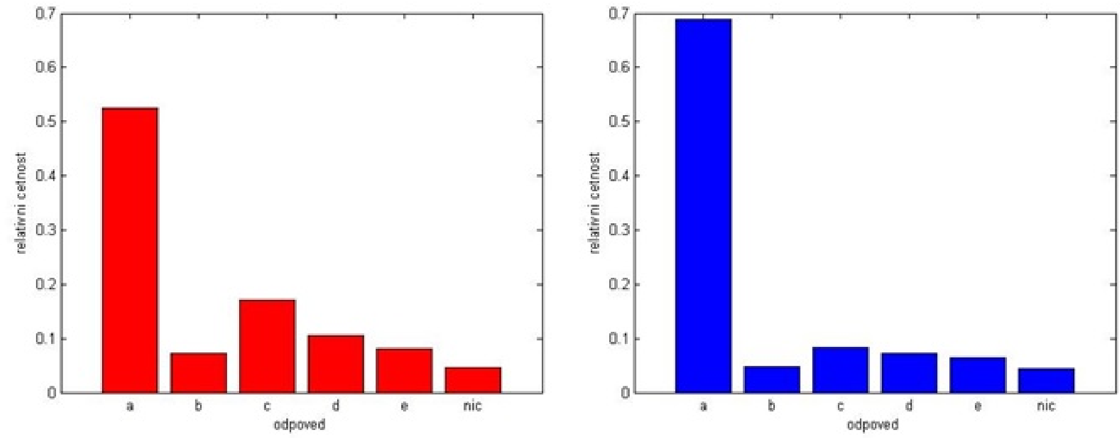
- 1. příklad: $\chi^2 = 31.9694$, $p < 0.0001$
- 2. příklad: $\chi^2 = 48.0722$, $p < 0.0001$



Obrázek 4.3: Porovnání relativních odpovědí mužů a žen v 9. příkladu - nezávislost, správná odpověď: c

- 3. příklad: $\chi^2 = 11.1295$, $p = 0.0251$
- 4. příklad: $\chi^2 = 40.7690$, $p < 0.0001$
- 5. příklad: $\chi^2 = 20.9002$, $p = 0.0008$
- 6. příklad: $\chi^2 = 109.9842$, $p < 0.0001$
- 7. příklad: $\chi^2 = 62.2405$, $p < 0.0001$
- 8. příklad: $\chi^2 = 20.9331$, $p = 0.0001$
- 9. příklad: $\chi^2 = 3.8469 < 11.07$ platí nulová hypotéza H_0 o nezávislosti, $p = 0.5717$
- 10. příklad: $\chi^2 = 65.2851$, $p < 0.0001$

Pouze u příkladu číslo 9 přijímáme dle testu na hladině významnosti $\alpha = 5$ % nulovou hypotézu o nezávislosti pohlaví a konkrétní odpovědi. U ostatních příkladů je opět testové kritérium výrazně větší než kritická hodnota, proto nelze přijmout nulovou hypotézu, a tak jsou veličiny dle testu závislé. Obdobně jako u čtyřpolní tabulky lze porovnávat relativní četnosti odpovědí u příkladu (př. 9), u kterého byla přijata nulová hypotéza H_0, a příkladu (př. 10), u kterého byla H_0 zamítnuta. Opět je vidět, že rozdíly v relativních četností u příkladu 10 jsou větší než u příkladu 9.



Obrázek 4.4: Porovnání relativních odpovědí mužů a žen v 10. příkladu - závislost, správná odpověď: a

Kapitola 5

Test o shodě rozdělení

Testy o shodě rozdělení se podrobně zabývají například [1], [7] či [8]. Nechť $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ jsou celkové počty bodů ve vstupním testu mužů a žen. Již v kapitole 3 jsme zjistili, že data nepochází z normálního rozdělení, proto využíváme neparametrických pořadových testů.
Navíc předpokládáme, že jsou $X_1, X_2...X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2...Y_{n_2}$ nezávislé a také, že se jedná o náhodné výběry ze spojitých rozdělení s distribučními funkcemi F_1 a F_2.

5.1 Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Nulová a alternativní hypotéza tohoto testu je následující:
H_0: Distribuční funkce obou rozdělení z nichž pochází náhodné výběry $X_1, X_2...X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2...Y_{n_2}$ jsou totožné.
H_1: Distribuční funkce obou rozdělení z nichž pochází náhodné výběry $X_1, X_2...X_{n_1}$ a $Y_1, Y_2...Y_{n_2}$ se liší.
Tento test je konzistentní v případě, že se rozdělení liší střední hodnotou a ne pouze rozptylem. Dvouvýběrový Wilcoxonův test je zobecněním dvouvýběrového t testu.
Po spojení obou výběrů, seřazení dle velikosti a přiřazení pořadí, spočteme součet pořadí (T_1) výběru $X_1, X_2...X_{n_1}$ a součet pořadí (T_2) výběru $Y_1, Y_2...Y_{n_2}$. Testové kritérium pak vypadá

$$U = min(U_1, U_2), \tag{5.1}$$

kde $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1$ a $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2$. Toto testové kritérium porovnáme s tabelovanou kritickou hodnotou $w_{n_1,n_2}(\alpha = 5\ \%)$. Pokud $U \leq w_{n_1,n_2}(\alpha = 5\ \%)$ zamítáme nulovou a přijímáme alternativní hypotézu na hladině α. A naopak pokud $U > w_{n_1,n_2}(\alpha = 5\ \%)$, tak platí hypotéza H_0 s hladinou významnosti $\alpha = 5\ \%$. Pro velké hodnoty n_1, n_2 (zdroj [7] uvádí $n_1, n_2 > 40$) lze v důsledku platnosti centrální limitní věty použít vztah

$$U_0 = \frac{U_1 - \frac{1}{2}n_1 n_2}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{12}(n_1 + n_2 + 1)}}, \tag{5.2}$$

který za platnosti H_0 má asymptoticky normální normované rozdělení $N(0,1)$. Jinak řečeno v případě, že $|U_0| \geq u_{(1-\frac{\alpha}{2})}$, kde $u_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ je kvantil normálního normovaného rozdělení, zamítáme nulovou hypotézu na asymptotické hladině α.

Výsledky

V programu Matlab existuje funkce ranksum, jenž vypočítává dvouvýběrový Wilcoxonův test (Wilcoxon rank sum test). Tato funkce vrací p - hodnotu, testové kritérium i U_0 (5.2):

$$p = 5.2071 * 10^{-16}$$

$$TK = 6.4994 * 10^{5}$$

$$U_0 = -8.1066$$

Jak je vidět z velice malé p - hodnoty na základě tohoto testu zamítáme nulovou hypotézu H_0 a přijímáme alternativní hypotézu o tom, že distribuční funkce se liší na hladině významnosti $\alpha = 5\ \%$. Stejně tak $|U_0| > u_{0.975} \doteq 1.96$ značí, že zamítáme H_0 na asymptotické hladině 5 %.

Kapitola 6

Analýza rozptylu

Výsledný počet bodů ve vstupním testu z matematiky ovlivňuje jistě mnoho faktorů. Do této doby jsme se zabývali pouze jediným faktorem a to pohlavím studenta. Tato kapitola je věnována tomu, zda i jiné sledované faktory mají vliv na úspěšnost v testu. Rozborem všech vlivů na veličinu (v tomto případě na celkový počet získaných bodů) se zabývá analýza rozptylu, zkráceně ANOVA z anglického analysis of variance. Více teorie analýzy rozptylu lze najít v [1], [3], [9], [2] a [6]. Nechť jsou data rozdělena do k výběrů (skupin) dle nějakého faktoru.

6.1 Předpoklady analýzy rozptylu

- Normalita
  Prvním předpokladem je to, že data (pozorování) jsou realizace náhodných výběrů z normálního rozdělení $N(\mu_i, \sigma_i^2)$

- Homogenita rozptylu
  Předpokládáme, že v každé skupině mají data stejný rozptyl a platí:
  $$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = ... = \sigma_k^2 \tag{6.1}$$
  kde k je počet všech skupin.

- Nezávislost jednotlivých dat

6.2 Jednofaktorová ANOVA

Jednofaktorová ANOVA, jinak zvaná ANOVA s jednoduchým tříděním či z angličtiny One-Way ANOVA, je nejjednodušším případem analýzy rozptylu. Nechť pro i-tou skupinu faktoru A máme n_i nezávislých pozorování $y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in_i}$, $i = 1, 2, ...k$, o kterých předpokládáme, že jsou náhodným výběrem z normálního rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$. Pozorování pak můžeme popsat následujícím modelem

$$y_{ip} = \mu_i + e_{ip}, \quad p = 1, ..., n_i, \; i = 1, ..., k, \tag{6.2}$$

kde e_{ip} jsou náhodné odchylky s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Testujeme zde nulovou hypotézu, že se jednotlivé skupiny od sebe neliší oproti alternativě, že se liší, neboli

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k$$

$$H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$$

Nechť jsou také dány následující součty čtverců:

Celkový součet čtverců:

$$S_T = \sum (\bar{y} - y_i)^2, \tag{6.3}$$

neboli suma kvadrátů všech odchylek jednotlivých pozorování od celkového průměru vypočteného ze všech pozorování bez ohledu na toho, z které skupiny pocházejí,

Řádkový součet čtverců:

$$S_A = \sum n_i (\bar{y_i} - \bar{y})^2, \tag{6.4}$$

neboli suma kvadrátu odchylky průměru ve skupině od celkového průměru vynásobená počtem pozorování v jednotlivé skupině,

Reziduální součet čtverců:

$$S_e = \sum (\bar{y} - \bar{y_i})^2 = S_T - S_A. \tag{6.5}$$

Ve vzorcích (6.3), (6.4) a (6.5) platí, že $\bar{y}$ je celkový aritmetický průměr všech pozorování bez ohledu na to, ze které skupiny jsou a

$\bar{y}_i$ je aritmetický průměr všech pozorování v i-té skupině.
Dále máme dány počty stupňů volnosti df. Obecně platí, že df je počet nezávislých výsledků snížený o počet parametrů odhadovaných z těchto výsledků. Konkrétně se v analýze rozptylu počítají stupně volnosti (popořadě celkový, řádkový a reziduální) takto $df_T = n-1$, $df_A = k-1$ a $df_e = df_T - df_A = n-k$, kde k je počet všech skupin a n je celkový počet pozorování. Testová statistika se pak vypočte jako

$$F = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} \tag{6.6}$$

a porovná se s kritickou hodnotou $F_{1-\alpha}(k-1, n-k)$, což je kvantil Fisherova rozdělení. Je-li statistika F větší než $F_{1-\alpha}(k-1, n-k)$ zamítáme nulovou hypotézu H_0 na hladině α. V opačném případě, platí-li $F < F_{1-\alpha}(k-1, n-k)$, přijímáme H_0 opět na hladině α.

Výsledky

V celé analýze rozptylu zkoumáme vliv jednotlivých faktorů na celkový počet bodů získaných v testu. Jako v testu dopadly jednotlivé skupiny je vidět v následujících boxplotech, ve kterých červená úsečka v centrálním boxu značí medián a okraje centrálního boxu dolní a horní kvartil. Případná odlehlá pozorování v jednotlivých skupinách jsou vyznačena červeným křížkem. Tato práce je zaměřená na testování rozdílů mezi muži a ženami, ale v této kapitole jsou uvedené i jiné faktory ovlivňující výsledek v testu z matematiky.

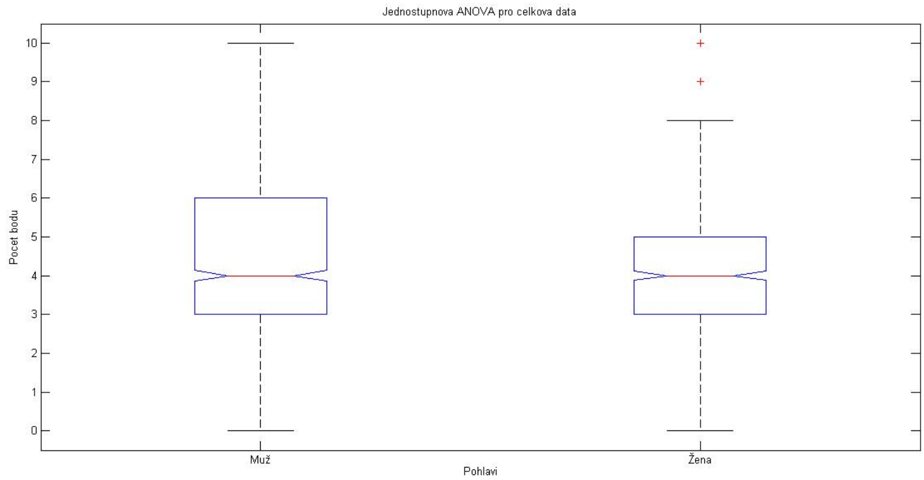
- Pohlaví

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	267.17	1	267.171	67.02	4.73216e-016
Error	7972.89	2000	3.986		
Total	8240.06	2001			

Obrázek 6.1: Jednofaktorová ANOVA, faktor pohlaví

Z analýzy rozptylu z obrázku 6.1 vyplývá, že zamítáme nulovou hypotézu H_0 o shodě středních hodnot výsledků mužů a žen. Na boxplotu 6.2 je znázorněno, že muži měli lepší průměrný zisk bodů v testu než ženy.



Obrázek 6.2: Boxplot, faktor pohlaví

- Typ střední školy

ANOVA Table

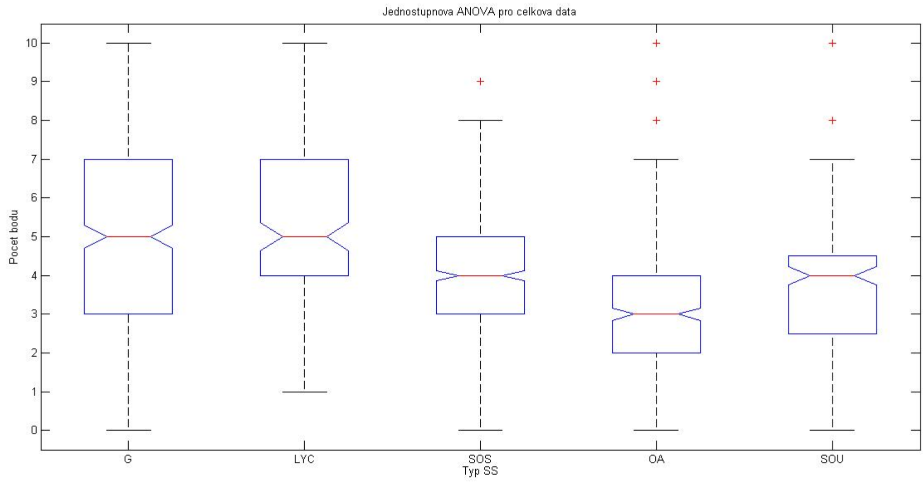
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	827.19	4	206.799	56.4	7.73329e-045
Error	6512.17	1776	3.667		
Total	7339.36	1780			

Obrázek 6.3: Jednofaktorová ANOVA, faktor typ střední školy

Jak je vidět z p - hodnoty a hodnoty F na obrázku 6.9 typ střední školy ovlivňuje počet získaných bodů v testu. V boxplotu 6.4 je zřejmé, že nejlepší průměr má skupina, která navštěvovala gymnázia (G) a lycea (LYC), naopak nejhorší průměr má skupina z obchodní akademie (OA).

- Fakulta

  F test analýzy rozptylu má opět malou p - hodnotu a velkou hodnotu F, viz obrázek 6.10, proto zase zamítáme nulovou hypotézu H_0 o shodě středních hodnot všech skupin a přijímáme hypotézu alternativní, tj. že ne všechny střední hodnoty se rovnají. Z boxplotu 6.6 je vidět, že nejlepšího průměru celkových bodů v testu dosáhli studenti FAV a UUD. Nejhorší průměry



Obrázek 6.4: Boxplot, faktor typ střední školy

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	960.01	7	137.144	37.56	1.03917e-049
Error	7280.06	1994	3.651		
Total	8240.06	2001			

Obrázek 6.5: Jednofaktorová ANOVA, faktor fakulta

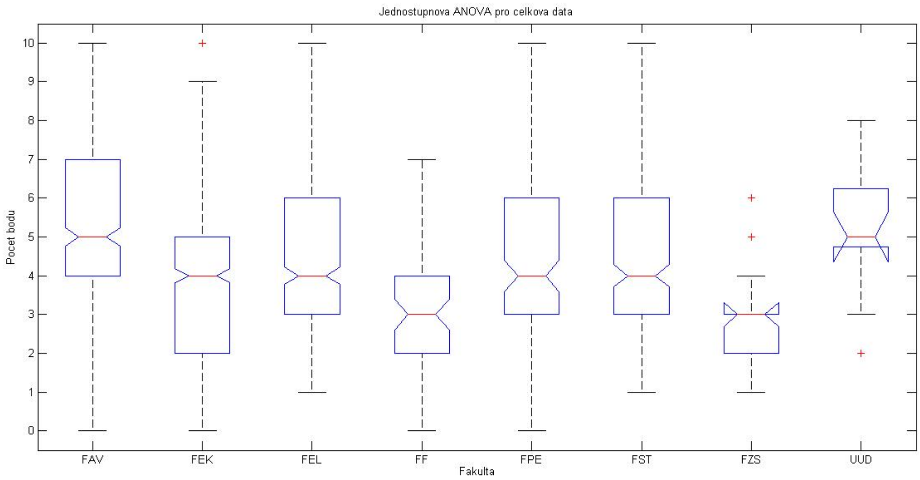
měli studenti z FF a FZS.

- Varianta zadání

  Na obrázku 6.7 je test, dle kterého je přijímána nulová hypotéza o rovnosti středních hodnot všech skupin. Neboli jinak řečeno varianta zadání nemá vliv na celkový počet bodů získaných v testu.

6.2.1 Metody mnohonásobného porovnání

Jestliže zamítneme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot, pak další přirozená otázka je, které skupiny se od sebe liší. Odpověď na tuto otázku nám dají metody mnohonásobného porovnání, například Scheffého nebo Tukeyova metoda.



Obrázek 6.6: Boxplot, faktor fakulta

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	3.36	1	3.3644	0.82	0.3662
Error	8236.7	2000	4.11835		
Total	8240.06	2001			

Obrázek 6.7: Jednofaktorová ANOVA, faktor varianta zadání

Schefféhο metoda

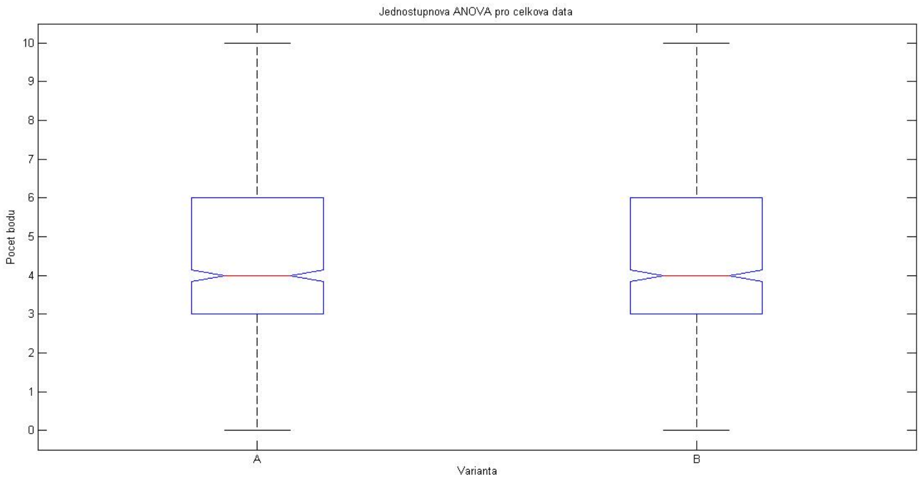
Nechť jsou $\bar{y_1}, \bar{y_2}, ...\bar{y_k}$ opět průměry hodnot v jednotlivých skupinách, respektive odhady středních hodnot ve všech k skupinách, a jsou navzájem nezávislé. Dle Schefféhο metody zamítneme rovnost středních hodnot i-té a j-té skupiny, pokud platí

$$|\bar{y_i} - \bar{y_j}| > \sqrt{(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})(k-1)s^2 F_\alpha(k-1, n-k)}, \qquad (6.7)$$

kde $s^2 = S_e/(n-k)$ je reziduální rozptyl.

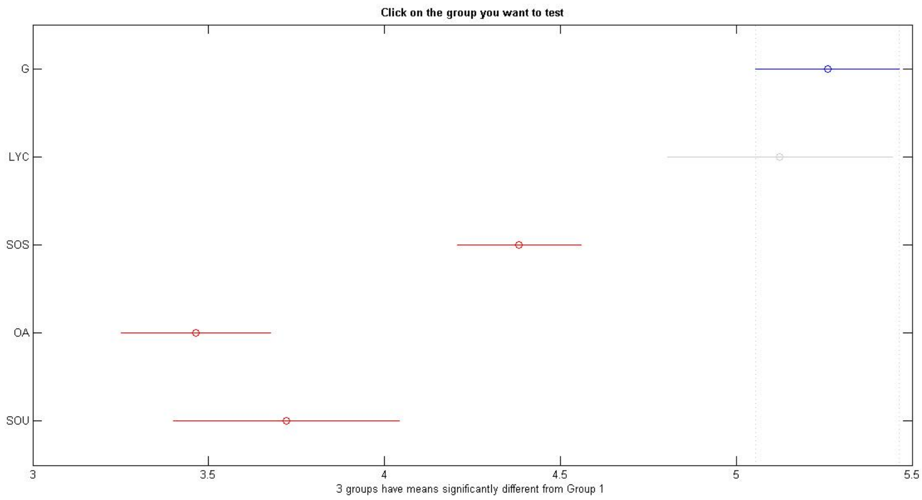
Výsledky

Zde jsou porovnávány skupin pouze těch faktorů, které výše v jednofaktorové ANOVĚ zamítly nulovou hypotézu a ovlivňují tedy celkový počet bodů z testu. Bohužel kvůli podmínce vyváženého třídění nemůže být použita Tukeyova metoda mnohonásobného porovnání, ale jen Schefféhο.



Obrázek 6.8: Boxplot, faktor varianta zadání

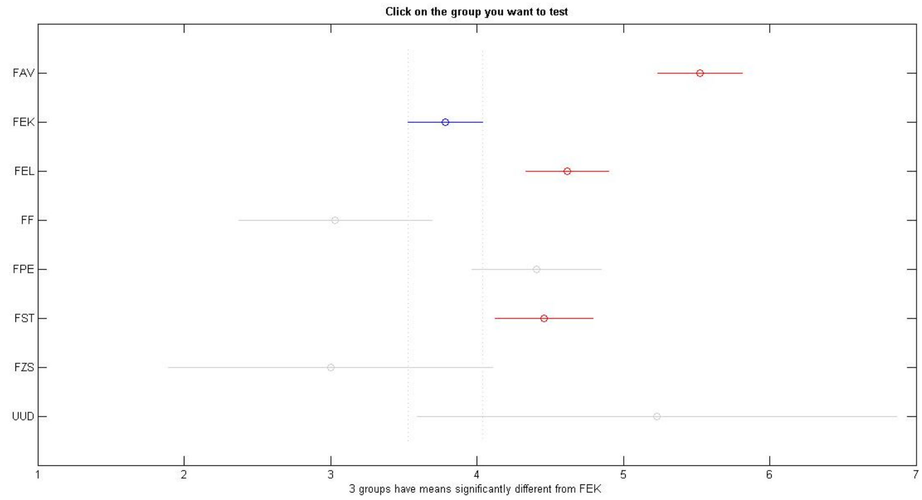
- Typ střední školy



Obrázek 6.9: Schefféího metoda mnohonásobného porovnání, faktor typ střední školy

Jak je vidět na obrázku 6.9 všech pět typů škol se středními hodnotami velmi liší. Statistickou rovnost středních hodnot přijímáme pouze ve dvojici gymnázium a lyceum a v další dvojici obchodní akademie a střední odborné učiliště.

- Fakulta
  Na obrázku 6.10 je vidět, jak se mezi sebou skupin liší střední hodnotou. Například modře označená střední hodnota fakulty



Obrázek 6.10: Scheffého metoda mnohonásobného porovnání, faktor fakulta

FEK se významně liší od tří skupin - FAV, FEL a FST.

6.3 Dvoufaktorová ANOVA

Ve dvoufaktorové analýze rozptylu (Two-Way ANOVA) zkoumáme vliv dvou faktorů. Navíc od jednofaktoré ANOVY rozlišujeme dva přístupy - bez interakční (efekty obou faktorů se sčítají) a interakční (efekty obou faktorů se kombinují jinak). Nechť k_A je počet skupin faktoru A a k_B faktoru B a nechť n_{ij} je počet pozorování ve třídě ij. Třídu chápeme jako kombinaci i-té skupiny faktoru A a j-té skupiny faktoru B.

Dvoufaktorová ANOVA bez interakcí
Uvažujme model

$$y_{ijp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijp}, \quad p = 1, ..., n_{ij}, \; i = 1, ..., k_A, \; j = 1, ..., k_B \tag{6.8}$$

kde y_{ijp} jsou pozorování ve třídě,
α_i je pevný efekt i-té skupiny faktoru A,
β_j je pevný efekt j-té skupiny faktoru B,
a e_{ijp} jsou neznámé náhodně rozdělené odchylky $e_{ijp} \sim N(0, \sigma^2)$.

O obou faktorech samostatně rozhodujeme, zda mají či nemají vliv, proto máme dvě nulové hypotézy s označením H_0^A a H_0^B a k tomu

odpovídající alternativní hypotézy.
H_0^A: Faktor A neovlivňuje sledovanou veličinu a platí $\mu_{A1} = \mu_{A2} = \mu_{A3} = ... = \mu_{Ak_A}$
H_1^A: Faktor A ovlivňuje sledovanou veličinu

H_0^B: Faktor B neovlivňuje sledovanou veličinu a platí $\mu_{B1} = \mu_{B2} = \mu_{B3} = ... = \mu_{Bk_B}$
H_1^B: Faktor B ovlivňuje sledovanou veličinu
Výpočty součtů čtverců S_T, S_A, S_B a S_e jsou v případě stejných počtů pozorování v jednotlivých třídách uvedeny například v [7] a v případě různých počtů pozorování například v [2]. Celý výpočet statistik F_A a F_B je pak uveden v následující tabulce 6.1.

	Součet čtverců	**Počet stupňů volnosti**	**F statistika**
faktor A	S_A	$f_A = k_A - 1$	$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e}$
faktor B	S_B	$f_B = k_B - 1$	$F_B = \frac{S_B/f_B}{S_e/f_e}$
rezidua	S_e	$f_e = n - k_A - k_B + 1$	
celkem	S_T	$f_T = n - 1$	

Tabulka 6.1: Dvoufaktorová ANOVA bez interakcí

Hypotézu H_0^A zamítneme na hladině významnosti α, je-li

$$F_A > F_{1-\alpha}(f_A, f_e) \tag{6.9}$$

a hypotézu H_0^A zamítneme na hladině významnosti α, je-li

$$F_B > F_{1-\alpha}(f_B, f_e). \tag{6.10}$$

Při opačných nerovnostech nulové hypotézy přijímáme zase na hladině α. Stejně jako v jednofaktorové analýze rozptylu po zamítnutí nulové hypotézy můžeme některou z metod mnohonásobného porovnání zjistit, jaké skupiny se od sebe liší.

Dvoufaktorová ANOVA s interakcemi
Uvažujme model

$$y_{ijp} = \mu+\alpha_i+\beta_j+\lambda_{ij}+e_{ijp}, \;\; p = 1, ..., n_{ij}, \; i = 1, ..., k_A, \; j = 1, ..., k_B, \tag{6.11}$$

kde α_i, β_j jsou hlavní efekty jako v modelu (6.8) a λ_{ij} jsou tzv. interakce.

V případě interakční analýzy rozptylu definujeme součty čtverců S_T, S_A a S_B stejně jako v případě bez interakcí a dále dodefinujeme reziduální součet čtverců S_e (viz [7] nebo [2]). Opět i zde musíme rozlišovat, zda se jedná o vyvážené počty pozorování v třídách či ne. Pro součet čtverců interakcí platí

$$S_{AB} = S_T - S_A - S_B - S_e. \tag{6.12}$$

Další důležitou vlastností, kterou lze použít při výpočtu je

$$S_e(bez\ interakci) = S_T - S_A - S_B = S_{AB} + S_e(s\ interakcemi). \tag{6.13}$$

Zbylý výpočet statistik je pak uveden v následující tabulce 6.2.

	Součet čtverců	**Počet stupňů volnosti**	**F statistika**
faktor A	S_A	$f_A = k_A - 1$	$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e}$
faktor B	S_B	$f_B = k_B - 1$	$F_B = \frac{S_B/f_B}{S_e/f_e}$
interakce AB	S_{AB}	$f_{AB} = (k_A - 1)(k_B - 1)$	$F_{AB} = \frac{S_{AB}/f_{AB}}{S_e/f_e}$
rezidua	S_e	$f_e = n - k_A k_B$	
celkem	S_T	$f_T = n - 1$	

Tabulka 6.2: Dvoufaktorová ANOVA s interakcemi

Vliv jednotlivých faktorů A a B bylo testováno již v případě bez interakcí, proto se ve dvoufaktorové analýze rozptylu se zkoumá nulová hypotéza ohledně interakce obou faktorů.
H_0^{AB}: Interakce jsou nulové neboli $\lambda_{ij} = 0, \forall i, j$
H_1^{AB}: Interakce nejsou nulové
Nulovou hypotézu H_0^{AB} zamítáme na hladině významnosti α platí-li

$$F_{AB} > F_{1-\alpha}(f_{AB}, f_e), \tag{6.14}$$

při opačné nerovnosti nulovou hypotézu H_0^{AB} přijmeme. V případě přijetí nulové hypotézy H_0, testujeme vliv faktorů A a B pouze v interakčním případě.

Výsledky

V kapitole Příloha A jsou uvedeny konkrétní odhady parametrů modelů bez interakcí i s interakcemi. Zde v textu bude uveden pouze rozdíl hlavních efektů β_{muz} a β_{zena} faktoru pohlaví v modelu bez interakcí. Pro následující 3 modely dvoufaktorové ANOVY bez interakcí vždy platí, že $\beta_{muz} > \beta_{zena}$.

- Typ střední školy ($X1$) a pohlaví ($X2$)

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	732.64	4	183.161	53.21	2.17079e-042
X2	132.42	1	132.419	38.47	6.90416e-010
X1*X2	122.43	4	30.607	8.89	4.15592e-007
Error	6096.01	1771	3.442		
Total	7339.36	1780			

Obrázek 6.11: Dvoufaktorová ANOVA s interakcemi, faktory typ SŠ ($X1$) a pohlaví ($X2$)

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	849.59	4	212.397	60.63	4.70127e-048
X2	293.72	1	293.722	83.84	1.43336e-019
Error	6218.44	1775	3.503		
Total	7339.36	1780			

Obrázek 6.12: Dvoufaktorová ANOVA bez interakcí, faktory typ SŠ ($X1$) a pohlaví ($X2$)

Jak je vidět na obrázku 6.11 p - hodnota interakce obou faktorů je menší než 5 %, proto přijímáme alternativní hypotézu o tom, že interakce není nulová a nelze ji tedy zanedbat. Navíc u obou faktorů A i B je také p - hodnota menší než 5 %, proto oba faktory mají vliv na celkový počet bodů. Pro ukázku je zde uveden i případ 6.12, při kterém předpokládáme nulové interakce. Rozdíl hlavních efektů v faktoru pohlaví je 0.9326, což v tomto modelu znamená, že muži měli při absolvování stejného typu SŠ o skoro celý bod v testu více než ženy.

- Fakulta ($X1$) a pohlaví ($X2$)

  Z výsledku na obrázku 6.13 je vidět, že přijímáme nulovou hypotézu o nulovosti interakce, proto interakci zanedbáme, a vliv faktorů zkoumáme na modelu bez interakcí na obrázku 6.14. V tomto modelu jsou zase obě p - hodnoty pro faktory

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	680.3	7	97.1854	26.7	0
X2	2.82	1	2.8216	0.78	0.3787
X1*X2	26.32	7	3.7605	1.03	0.4056
Error	7229.25	1986	3.6401		
Total	8240.06	2001			

Obrázek 6.13: Dvoufaktorová ANOVA s interakcemi, faktory fakulta ($X1$) a pohlaví ($X2$)

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	717.32	7	102.475	28.15	0
X2	24.49	1	24.487	6.73	0.0096
Error	7255.57	1993	3.641		
Total	8240.06	2001			

Obrázek 6.14: Dvoufaktorová ANOVA bez interakcí, faktory fakulta ($X1$) a pohlaví ($X2$)

menší než 5 %, a tak přijímáme hypotézu o tom, že oba faktory ovlivňují celkový počet bodů. Rozdíl hlavních efektů v faktoru pohlaví při stejné fakultě je 0.2764. Zde se hlavní efekty faktoru pohlaví liší nejméně ze tří uvedených modelů.

- Maturita z matematiky ($X1$) a pohlaví ($X2$)

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	905.43	1	905.433	258.86	0
X2	107.12	1	107.116	30.62	0
X1*X2	2.51	1	2.511	0.72	0.397
Error	6852.14	1959	3.498		
Total	8102.9	1962			

Obrázek 6.15: Dvoufaktorová ANOVA s interakcemi, faktory maturita z matematiky ($X1$) a pohlaví ($X2$)

P - hodnota interakce na obrázku 6.15 je větší než 5 %, proto ji lze zanedbat. Výsledný celkový počet bodů ovlivňují jak oba faktory A i B, jak je vidět z malé p - hodnoty na obrázku 6.16. Rozdíl hlavních efektů v faktoru pohlaví při stejné skupině druhého faktoru je 0.494.

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	975.08	1	975.084	278.81	1.25923e-058
X2	108.32	1	108.325	30.97	2.97463e-008
Error	6854.66	1960	3.497		
Total	8102.9	1962			

Obrázek 6.16: Dvoufaktorová ANOVA bez interakcí, faktory maturita z matematiky ($X1$) a pohlaví ($X2$)

- Pohlaví ($X1$), typ SŠ ($X2$), kraj ($X3$), fakulta ($X4$), varianta zadání ($X5$) a maturita z matematiky ($X6$)

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	37.16	1	37.156	12.75	0.0004
X2	615.77	4	153.942	52.81	0
X3	58.58	13	4.506	1.55	0.0941
X4	305.87	7	43.695	14.99	0
X5	7.32	1	7.324	2.51	0.1131
X6	386.91	1	386.91	132.74	0
Error	4867.75	1670	2.915		
Total	7082.13	1697			

Obrázek 6.17: Nfaktorová ANOVA bez interakcí, $N = 6$

Na obrázku 6.17 je vidět, že faktory kraj ($X3$) a varianta zadání ($X5$) mají p - hodnotu větší než 5 %, proto byl vytvořen další model bez těchto dvou faktorů, kde jsou faktory pohlaví ($X1$), typ SŠ ($X2$), fakulta ($X3$) a maturita z matematiky ($X4$), který je obrázcích 6.18 a 6.19.
V modelu bez interakcí 6.19 všechny faktory ovlivňují celkový počet bodů v testu z matematiky. To je patrné z p - hodnot, které jsou mnohem menší než 5 %. Zajímavější výsledky však získáváme v modelu s interakcemi 6.18. Z toho plyne, že celkový počet bodů v testu ovlivňují faktory typ SŠ ($X2$), fakulta ($X3$) a maturita z matematiky ($X4$) a interakce mezi faktory $X1 * X2$, $X2 * X3$ a $X2 * X4$. U zbylých (včetně faktoru $X1$ tj. pohlaví) vyšla p - hodnota větší než 5 %.

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	1.63	1	1.6292	0.58	0.4446
X2	59.21	1	59.2061	21.25	0
X3	97.37	5	19.4731	6.99	0
X4	16.47	1	16.4704	5.91	0.0151
X1*X2	43.83	4	10.9585	3.93	0.0035
X1*X3	33.98	7	4.8542	1.74	0.0951
X1*X4	3.39	1	3.3919	1.22	0.27
X2*X3	109.02	24	4.5424	1.63	0.0278
X2*X4	78.48	4	19.6212	7.04	0
X3*X4	13.02	7	1.8603	0.67	0.6997
Error	4736.64	1700	2.7863		
Total	7269.44	1760			

Obrázek 6.18: Nfaktorová ANOVA s interakcemi, $N = 4$

Analysis of Variance

Source	Sum Sq.	d.f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	32.63	1	32.628	11.18	0.0008
X2	636.56	4	159.139	54.52	0
X3	341.17	7	48.739	16.7	0
X4	391.27	1	391.27	134.05	0
Error	5099.28	1747	2.919		
Total	7269.44	1760			

Obrázek 6.19: Nfaktorová ANOVA bez interakcí, $N = 4$

Kapitola 7

Kruskalův-Wallisův test

Tato kapitola je podrobněji probírána v [7], [1] a [4]. Kruskalův-Wallisův test je neparametrickou obdobou jednofaktorové analýzy rozptylu. Mějme k nezávislých výběrů $x_1, x_2, ...x_k$ o rozsazích $n_1, n_2,$ $...n_k$. Také předpokládejme, že každý tento výběr pochází ze spojitého rozdělení a chceme testovat nulovou hypotézu H_0: Všechny výběry pocházejí ze stejného rozdělení ($F_1(x) = F_2(x) = ... = F_k(x)$), oproti alternativní hypotéze H_1: Výběry nepocházejí ze stejného rozdělení. Tento test je konzistentní v případě, že se rozdělení liší střední hodnotou, nemusí však nalézt rozdíl mezi rozděleními, pokud se odlišují v rozptylech. Po uspořádání všech n hodnot, kde $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, do neklesající posloupnosti a určení pořadí všech hodnot, označíme R_i jako součet pořadí všech hodnot patřících do i-tého nezávislého výběru x_i. Následně vypočítáme testové kritérium jako

$$KW = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \tag{7.1}$$

Pro velká n_i se pak kritérium KW při platnosti hypotézy H_0 asymptoticky blíží k χ^2 rozdělení o $k-1$ stupních volnosti. Tedy pokud je $KW \geq \chi^2_\alpha(\nu = k-1)$, tak zamítáme nulovou hypotézu H_0 a přijímáme hypotézu H_1 na hladině asymptoticky rovné α. A pokud $KW < \chi^2_\alpha(\nu = k-1)$ přijímáme H_0 na téže hladině α.

Výsledky

- Pohlaví

Kruskal-Wallis ANOVA Table

Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Groups	2.14084e+007	1	21408417.7	65.72	5.20536e-016
Error	6.3045e+008	2000	315225.2		
Total	6.51859e+008	2001			

Obrázek 7.1: Kruskalův-Wallisův test, faktor pohlavi

- Typ střední školy

Kruskal-Wallis ANOVA Table

Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Groups	4.70897e+007	4	11772424.3	182.73	1.92914e-038
Error	4.11608e+008	1776	231761.5		
Total	4.58698e+008	1780			

Obrázek 7.2: Kruskalův-Wallisův test, faktor typ střední školy

- Fakulta

Kruskal-Wallis ANOVA Table

Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Groups	7.00781e+007	7	10011161	215.12	7.16901e-043
Error	5.81781e+008	1994	291765.7		
Total	6.51859e+008	2001			

Obrázek 7.3: Kruskalův-Wallisův test, faktor fakulta

- Varianta zadání

Závěry z testů z obrázků 7.1, 7.2, 7.3 a 7.4 jsou stejné jako v parametrické verzi, tj. v analýze rozptylu. I z testu Kruskala-Wallise plyne, že faktor pohlaví, typ střední školy a faktor fakulty mají vliv na výsledný počet bodů v testu, ale varianta zadání ne.

Kruskal-Wallis ANOVA Table

Source	SS	df	MS	Chi-sq	Prob>Chi-sq
Groups	355804	1	355804	1.09	0.296
Error	651503098	2000	325751.5		
Total	651858902	2001			

Obrázek 7.4: Kruskalův-Wallisův test, faktor varianta zadání

Kapitola 8

Závěr

Cílem této práce bylo zpracovat výsledky vstupních testů z matematiky se zaměřením na rozdíly mezi muži a ženami. Bylo provedeno základní statistické zpracování dat celkových bodů získaných v testu jak u mužů a žen, tak i obou pohlaví dohromady. Hlavní částí bakalářské práce však byla formulace a následné testování statistických hypotéz.

První hypotéza zněla, zda dvě veličiny jsou nezávislé. Tyto dvě veličiny konkrétně byly pohlaví (muž, žena) a odpověď na daný příklad (dobrá, špatná). Další kombinací veličin bylo opět pohlaví (muž, žena) a konkrétní odpověď na daný příklad (a, b, c... - počet odpovědí záleží na konkrétním příkladě).

Druhá hypotéza bylo o shodě dvou rozdělení. Přičemž jsme předpokládali, že celkové počty bodů v testu mužů $X_1, ..., X_{n_1}$ a žen $Y_1, ..., Y_{n_2}$ jsou náhodné výběry ze spojitých rozdělení s distribučními funkcemi F_1 a F_2. Tato hypotéza byla vyvrácena dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem.

Další hypotézy se týkaly toho, zda i další faktory kromě pohlaví ovlivňují celkový zisk bodů v testu z matematiky. Tyto hypotézy byly prověřeny jednofaktorovou i vícefaktorovou analýzou rozptylu a testem Kruskala-Wallise. Jediným modelem, ve kterém nemělo pohlaví vliv na celkový počet bodů, byl interakční model 6.18. V neposlední řadě byly odhadnuty parametry dvoufaktrové analýzy rozptylu. Nejzajímavějším výsledkem odhadu parametrů je to, že interakce faktorů fakulta a pohlaví je pro některé skupiny faktoru A (FAV, FEL, FF a FZS) příznivější pro ženy viz tabulka A.4.

Literatura

[1] Anděl, J. Matematická statistika. SNTL, 1978

[2] Antoch, J., Vorlíčková, D. Vybrané metody statistické analýzy dat. Academia, 1992

[3] Cardinal, R. N., Aitken, M. R. F. Anova for the Behavioural Sciences Researcher. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2006

[4] Hátle, J., Likeš, J. Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL, 1972

[5] Hendl, J. Přehled statistických metod zpracování dat: analýza a metaanalýza dat. Portál, 2006

[6] Kubiak, T. M., Benbow, W. D. The certified six sigma black belt handbook. ASQ Quality Press, 2009

[7] Reif, J. Metody matematické statistiky. Západočeská univerzita v Plzni, 2000

[8] Rényi, A. Teorie pravděpodobnosti. Academia, 1972

[9] Šedivá, B. výukový text k předmětu KMA/MSM, `http://home.zcu.cz/~sediva/msm/08_msm.pdf`

[10] Šedivá, B. výukový text k předmětu KMA/STAV, `http://home.zcu.cz/~sediva/stav/`

Příloha A

Odhady parametrů dvoufaktorové analýzy rozptylu

Zde jsou uvedeny odhady parametrů modelu bez interakcí (6.8) a modelu s interakcemi (6.11). Značení parametrů odpovídá těmto výše uvedeným modelům.

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2703
α_G	0.9825
α_{LYC}	0.7881
α_{SOS}	-0.1839
α_{OA}	-0.6406
α_{SOU}	-0.9461
β_{muz}	0.4663
β_{zena}	-0.4663

Tabulka A.1: Odhady parametrů Two-way ANOVY, faktory typ SŠ (A) a pohlaví (B)

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2876
α_G	0.9627
α_{LYC}	0.7106
α_{SOS}	-0.2410
α_{OA}	-0.8174
α_{SOU}	-0.6149
β_{muz}	0.4279
β_{zena}	-0.4279
$\lambda_{G,muz}$	0.2148
$\lambda_{G,zena}$	-0.2148
$\lambda_{LYC,muz}$	0.4650
$\lambda_{LYC,zena}$	-0.4650
$\lambda_{SOS,muz}$	0.1009
$\lambda_{SOS,zena}$	-0.1009
$\lambda_{OA,muz}$	0.4101
$\lambda_{OA,zena}$	-0.4101
$\lambda_{SOU,muz}$	0.3706
$\lambda_{SOU,zena}$	-0.3706

Tabulka A.2: Odhady parametrů interakční Two-way ANOVY, faktory typ SŠ (A) a pohlaví (B)

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2408
α_{FAV}	1.2033
α_{FEK}	-0.4016
α_{FEL}	0.2598
α_{FF}	-1.2012
α_{FPE}	0.1746
α_{FST}	0.1121
α_{FZS}	-1.1689
α_{UUD}	1.0219
β_{muz}	0.1382
β_{zena}	-0.1382

Tabulka A.3: Odhady parametrů Two-way ANOVY, faktory fakulta (A) a pohlaví (B)

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2610
α_{FAV}	1.3035
α_{FEK}	-0.3714
α_{FEL}	0.3594
α_{FF}	-1.2281
α_{FPE}	0.1552
α_{FST}	0.0604
α_{FZS}	-1.3180
α_{UUD}	1.0390
β_{muz}	0.0903
β_{zena}	-0.0903
$\lambda_{FAV,muz}$	-0.1611
$\lambda_{FAV,zena}$	0.1611
$\lambda_{FEK,muz}$	0.1772
$\lambda_{FEK,zena}$	-0.1772
$\lambda_{FEL,muz}$	-0.0906
$\lambda_{FEL,zena}$	0.0906
$\lambda_{FF,muz}$	-0.0887
$\lambda_{FF,zena}$	0.0887
$\lambda_{FPE,muz}$	0.0650
$\lambda_{FPE,zena}$	-0.0650
$\lambda_{FST,muz}$	0.0883
$\lambda_{FST,zena}$	-0.0883
$\lambda_{FZS,muz}$	-0.1999
$\lambda_{FZS,zena}$	0.1999
$\lambda_{UUD,muz}$	0.2097
$\lambda_{UUD,zena}$	-0.2097

Tabulka A.4: Odhady parametrů interakční Two-way ANOVY, faktory fakulta (A) a pohlaví (B)

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2708
α_{ANO}	0.7230
α_{NE}	-0.7230
β_{muz}	0.2470
β_{zena}	-0.2470

Tabulka A.5: Odhady parametrů Two-way ANOVY, faktory maturita z matematiky (A) a pohlaví (B)

Parametr	**Odhad**
konstanta μ	4.2642
α_{ANO}	0.7146
α_{NE}	-0.7146
β_{muz}	0.2458
β_{zena}	-0.2458
$\lambda_{ANO,muz}$	0.0376
$\lambda_{ANO,zena}$	-0.0376
$\lambda_{NE,muz}$	-0.0376
$\lambda_{NE,zena}$	0.0376

Tabulka A.6: Odhady parametrů interakční Two-way ANOVY, faktory maturita z matematiky (A) a pohlaví (B)

Příloha B

Přílohy na CD

- Bakalářská práce
- Obrázky vygenerované programem Matlab
- Vstupní data
- Zadání vstupního testu z akademického roku 2011/2012
- Zdrojové kódy (Matlab)