Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Hausdorffova míra a Cantorova množina

Plzeň 2013 Jakub Janoušek

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně, a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, z nichž jsem čerpal.

V Plzni dne . . . .

Poděkování

Nejprve bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za čas, který mi v průběhu tvorby práce věnoval, za dobré připomínky a rady. Dále bych chtěl poděkovat Prof. RNDr. Janu Franců, CSc. z Vysokého učení technického v Brně za konzultace v průběhu týdenní brněnské stáže a za mnohá doporučení další literatury k nastudování. Moje týdenní stáž na VUT v Brně byla podpořena z projektu A-Math-Net - síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (č. projektu CZ.1.07/2.4.00/17.0100). Tento projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je shrnout základní teorii Lebesgueovy a Hausdorffovy míry a vysvětlit ji použitím jednotného a srozumitelného značení, popsat vlastnosti Lebesgueovy i Hausdorffovy míry a ukázat množiny, které jsou z pohledu měření komplikované. Tato práce se dále zabývá Hausdorffovou dimenzí a hlubší analýzou několika druhů Cantorových množin (od Cantorova diskontinua k zobecněným Cantorovým množinám). Na závěr je definována Minkowského dimenze, která je na příkladech Cantorových množin také porovnána s dimenzí Hausdorffovou.

Klíčová slova: Lebesgueova míra, Hausdorffova míra, Hausdorffova dimenze, Cantorovo diskontinuum, zobecněná Cantorova množina, Minkowského dimenze

Abstract

The main goal of this bachelor thesis is to explain the basic theory of Lebesgue and Hausdorff measure using unified and simple symbols and notation, to describe some properties of these measures and also to show examples of sets, which are not easy to measure. This thesis also discusses the Hausdorff dimension and thoroughly analyzes some types of Cantor sets (not only Cantor ternary set, but also generalized Cantor sets). At the end of this thesis, the Minkowski dimension is defined and compared to the Hausdorff dimension on some Cantor set examples.

Keywords: Lebesgue measure, Hausdorff measure, Hausdorff dimension, Cantor ternary set, general Cantor set, Minkowski dimension

Obsah

Použité značení

$[a,b]$ - uzavřený interval

(a,b) - otevřený interval

$[a,b]\times[c,d]$ - kartézský součin intervalů

$\ell_n(A)$ - elementární objem n-rozměrné množiny A

$\ell(a,b)$ - délka intervalu

$A, X, \{a,b,c\}$ - množina

$\mathbb{N}$ - množina přirozených čísel

$\mathbb{Q}$ - množina racionálních čísel

$\mathbb{R}$ - množina reálných čísel

$\mathbb{R}^*$ - množina reálných čísel včetně prvků $+\infty$ a $-\infty$

$f(x)$ - funkce f proměnné x

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$ - průnik nekonečně mnoha prvků

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ - sjednocení nekonečně mnoha prvků

$(0,a_1a_2...a_n)_{10}$ - číslo v desítkové soustavě

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ - součet (suma) nekonečně mnoha prvků

$A\to B$ - zobrazení z množiny A do množiny B

2^X - množina všech podmnožin množiny X (potenční množina)

$B\setminus A$ - doplněk množiny A do množiny B

$\overline{A}$ - uzávěr množiny A

(a_k) - posloupnost reálných čísel

$\pi(a_k)$ - přerovnání posloupnosti (a_k)

$\lambda(A)$ - Lebesgueova míra množiny A

$\mathcal{H}^s(A)$ - Hausdorffova míra rozměru s množiny A

$\dim_H(A)$ - Hausdorffova dimenze množiny A

$P_a(\xi_a)$ - rozdělení množiny $\mathbb{N}$ podle Cantorovy množiny a jejího bodu ξ_a

$\|a - b\|$ - eukleidovská metrika vyjadřující vzdálenost bodů $a, b \in \mathbb{R}^n$

$\dim_M(A)$ - Minkowského dimenze množiny A

Úvod

Podstatným nástrojem matematiky pro uchopení libovolné kvantity je míra množiny. Její zavedení je pouze důsledkem přirozeného požadavku umět nějak kvantitativně popsat (v ideálním případě) libovolnou množinu a tím přesně vymezit takové pojmy jako délka, obsah a objem. Na míru, jakožto nějakou funkci, která množině přiřadí reálné číslo, budeme také klást několik důležitých požadavků, aby se s měřitelnými množinami dobře zacházelo, čili aby bylo možné je vůbec změřit a aby se taková míra dala nějak „rozumně“ spočítat.

Problematikou měření množin se zabývalo mnoho matematiků, např. francouzský profesor Henri Lebesgue (1875 - 1941), německý matematik Felix Hausdorff (1868 - 1942), ale například i Bernhard Riemann (1826 – 1866) nebo rakouský matematik narozený v Děčíně Johann Radon (1887 – 1956).

V následující práci jsem se pokusil shrnout základy Lebesgueovy a Hausdorffovy míry (ty jsou včetně obecné teorie míry velmi podrobně shrnuty v **[6]** a **[8]**, popsat jejich vlastnosti a také ukázat některé množiny, které jsou z pohledu měření komplikované, těmi se zabýval mimo jiných Vojtěch Jarník v **[5]**. Text pokračuje definováním Hausdorffovy dimenze (zavedena a analyzována v **[3]**) a jejími odhady pro některé obecnější typy Cantorových množin (viz také **[2]**). Závěrečná kapitola se věnuje Minkowského dimenzi a jejímu výpočtu na příkladech Cantorových množin.

1 Lebesgueova míra

1.1 Základní pojmy

Pro zavedení míry (a speciálně Lebesgueovy míry) je nejprve nutné definovat několik důležitých pojmů, jako délka intervalu, elementární objem (viz [**8**]) atd.

Definice 1.1 (Spočetná a nespočetná množina)
Spočetná množina je taková nekonečná množina, jejíž mohutnost je stejná jako mohutnost množiny přirozených čísel. Jinými slovy umíme najít takové zobrazení, které na sebe vzájemně jednoznačně zobrazí prvky naší testované množiny a množiny přirozených čísel. Např. množina sudých přirozených čísel je spočetná, umíme najít zobrazení

$$s = 2 \cdot n,$$

kde s je sudé číslo a n číslo přirozené. Na druhou stranu u nespočetných množin takové zobrazení nalézt neumíme, jejich mohutnost je větší než mohutnost množiny přirozených čísel. Příkladem nespočetné množiny je množina reálných čísel.

Definice 1.2 (Vnitřní bod množiny, uzavřenost, otevřenost, uzávěr)
Nechť $X \subset \mathbb{R}$ a $X_1 \subset X$. Potom:

- Bod B je *vnitřním bodem množiny* X_1, pokud do ní náleží i s nějakým svým (libovolně malým) okolím.
- X_1 je *otevřená*, pokud všechny její body jsou *vnitřními body.*
- X_1 je *uzavřená v* X, pokud jejím doplňkem $X \setminus X_1$ do množiny X je otevřená množina.
- *uzávěrem množiny* X_1 nazveme množinu $\overline{X_1} = \bigcap\{M : M \text{ jsou uzavřené v } X, X_1 \subset M\}$.

Navíc pokud X_1 je otevřená, pak $\mathbb{R} \setminus X_1$ je uzavřená.

Definice 1.3 (Funkce intervalu (aditivní)) Zobrazení $\mathbf{m}$, které přiřadí libovolnému intervalu nějakou hodnotu z $\mathbb{R}$ se nazývá aditivní funkce intervalu, pokud pro každou trojici reálných čísel a, b, c platí

$$a \leq b \leq c \Rightarrow \mathbf{m}((a,c)) = \mathbf{m}((a,b)) + \mathbf{m}((b,c)).$$

Pro konstrukci Lebesgueovy míry je velmi důležitým příkladem takové aditivní funkce *délka intervalu*, která se definuje:

$$\ell((a,b)) = b - a.$$

Obecně každá funkce intervalu vzniká z nějaké funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\mathbf{m}((a,b)) = F(b) - F(a).$$

Definice 1.4 (Elementární objem) Máme n-rozměrný interval $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ (kartézský součin jednorozměrných intervalů). Jeho *elementární objem* $\ell_n(I)$ je mu přiřazen předpisem $\ell_n(I) = \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdot ... \cdot \ell(I_n)$.

Zavedení elementárního objemu je zcela přirozené vzhledem k tomu, že právě takové veličiny jako objem, obsah a délka chceme pomocí Lebesgueovy míry měřit.

Definice 1.5 (Potenční množina) Množina obsahující všechny podmnožiny libovolné množiny X (včetně samotné množiny X) se nazývá potenční množina. Značíme ji symbolem 2^X.

Definice 1.6 (Množinová funkce) Mějme množinu X a $G \subset 2^X$. Potom jakákoli funkce

$$f : G \to \mathbb{R}^*,$$

(kde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) je množinová funkce, čili např. funkce vhodná k libovolnému měření dané množiny.

Např. G buď množinou všech rovnoběžnostěnů a nějaká funkce f každému z nich přiřadí jeho povrch, objem nebo třeba počet hran.

Definice 1.7 (σ-algebra) Máme množinu X a její potenční množinu 2^X. Požadujeme-li, aby sjednocení spočetného počtu podmnožin patřilo také do potenční množiny (jinými slovy - sjednocení spočetně mnoha podmnožin X je také podmnožinou X), zavádíme množinový systém $\Sigma \subset 2^X$ nebo také **σ-algebru**, který požadavkům vyhovuje a platí pro něj axiomy:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$
3. $A_j \in \Sigma, j = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \Sigma$

Dvojice (X, Σ) se nazývá **měřitelný prostor**, množiny A ze Σ jsou Σ-měřitelné, zkráceně: měřitelné.

Příklad: Jako množinu X vezměme všechna jednociferná přirozená čísla. σ-algebru na množině X pak tvoří například systém množin

$$\{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,7,8,9\},$$
$$\{4,5,6,7,8,9\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}.$$

Snadno ověříme, že doplněk i sjednocení každé z těchto množin náleží to téhož systému a vidíme, že prázdná množina je v něm také, takže všechny axiomy σ-algebry jsou splněny.

Definice 1.8 (Míra) Buď (X, Σ) měřitelný prostor a množiny $A_j \subset 2^X$. Množinová funkce $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$, kde A_j jsou po dvou disjunktní.

Jednoduchým příkladem míry je *aritmetická míra*, je to funkce, která přiřazuje množině počet jejích prvků. Zapsáno symbolicky:

$$\mu(A) = |A| \vee \mu(A) = \infty.$$

Symbolem $|A|$ rozumíme *velikost* (počet prvků) množiny A. Má-li množina A nekonečně mnoho prvků, označíme její aritmetickou míru symbolem ∞. Tato míra zřejmě splňuje obě vlastnosti míry – prázdná množina neobsahuje žádný prvek a sjednocení disjunktních množin je vlastně součtem počtů jejich prvků, tedy i aritmetické míry se sčítají.

Definice 1.9 (Vnější míra) Máme množinu X a množiny $A, B \subset 2^X$. Funkce γ, která zobrazuje potenční množinu 2^X na interval $[0, \infty]$ a splňuje následující požadavky, je *vnější mírou* na množině X.

1. $\gamma(\emptyset) = 0$,
2. $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$,
3. $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$.

1.2 Konstrukce Lebesgueovy míry

Lebesgueova míra byla zavedena francouzským matematikem Henri Lebesguem (1875 - 1941) a představuje standardní nástroj, kterým je nějaké podmnožině euklidovského prostoru přiřazena délka, plošný obsah nebo objem.

Lebesgueovu míru nějaké množiny M můžeme označovat více způsoby, např. $\mu(M)$ nebo **meas** M, ale pokud chceme zdůraznit, že máme na mysli přímo Lebesgueovu míru, nahrazujeme zápis $\mu(M)$ zápisem $\lambda(M)$. Všechny množiny, kterým se dá přiřadit Lebesgueova míra, se označují jako *lebesgueovsky měřitelné.*

V následujícím textu týkajícím se konstrukce Lebesgueovy míry je čerpáno především z [**5**], [**6**] a [**8**].

Konstrukce 1.10 (Lebesgueova míra) V $\mathbb{R}^n$ uvažujme následující množinu A_i:

$$A_i = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n].$$

Elementární objem $\ell_n(A_i)$ této množiny definujeme

$$\ell_n(A_i) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Pro libovolnou podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme její vnější míru

$$\lambda^*(M) = \inf_A \left(\sum_{A_i \in A} \ell_n(A_i) \right), \text{ kde } M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

a neprázdná množina A je spočetný systém množin A_i (tj. počet těchto množin je konečný nebo nejvýše spočetně nekonečný), který pokrývá množinu M (množinu A lze interpretovat jako systém n-rozměrných krychlí pokrývajících množinu M).

Zápis $\inf_A(\sum_{A_i \in A} \ell_n(A_i))$ říká, že ze všech možných spočetných systémů A pokrývajících množinu M vybíráme pokrytí s nejmenším elementárním objemem.

Definice 1.11 Řekneme, že množina M je *lebesgueovsky měřitelná*, pokud pro libovolnou podmnožinu $S \subset \mathbb{R}^n$ platí:

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(M \cap S) + \lambda^*(S \setminus M) \tag{1}$$

Takové množiny tvoří σ-algebru a Lebesgueova míra

$$\lambda(M) = \lambda^*(M). \tag{2}$$

Rovnost (1) se nazývá *Carathéodoryova podmínka* a tvrzení (2) plyne z *Carathéodoryovy věty o měřitelnosti množin* splňujících (1). Důkaz této věty spočívá v ověření vlastností σ-algebry a míry pro množiny splňující (1), je ale poměrně rozsáhlý a celý je k nalezení v [**8**].

Ani Lebesgueovou mírou se ale nedají změřit všechny množiny. Do problémů se můžeme dostat u nespočetných množin s nulovou mírou (spíše se jedná jen o překvapivý výsledek, protože jde stále o měřitelné množiny), ale můžeme také narazit na případy, kdy danou množinu vůbec nezměříme. Více informací o těchto jevech je v kapitole o speciálních množinách.

1.3 Vlastnosti Lebesgueovy míry

Definice 1.12 Lebesgueova míra prázdné množiny $\lambda(\emptyset) = 0$.

Lemma 1.13 *Lebesgueova míra (otevřeného i uzavřeného) intervalu je rovna jeho délce. Na uzavřenosti intervalu nezáleží, protože bod má nulovou míru.*

DŮKAZ
Libovolný interval I na reálné ose je pokrytím sebe samého. Elementárním objemem (i Lebesgueovou mírou) tohoto intervalu je jeho délka $\ell(I)$. Bod můžeme chápat jako nějaký interval nulové délky $[a, a]$. Potom

$$\ell([a, a]) = a - a = 0,$$

tj. bod má skutečně nulovou míru.

$\square$

Lemma 1.14 *Je-li množina X kartézkým součinem intervalů $X = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, potom X je lebesgueovsky měřitelná a platí: $\lambda(X) = \ell_n(X) = \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdot ... \cdot \ell(I_n)$.*

DŮKAZ
Tvrzení plyne přímo z Konstrukce 1.10.

□

Následující dvě tvrzení budou uvedena bez důkazu.

Tvrzení 1.15 *Pokud je množina X sjednocením spočetně mnoha disjunktních, lebesgueovsky měřitelných množin $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, pak je sama lebesgueovsky měřitelná a platí*

$$\lambda(X) = \sum_i \lambda(X_i).$$

Tvrzení 1.16 *Mějme množiny X a Y, přičemž $X \subset Y$. Potom, jsou-li X a Y lebesgueovsky měřitelné, je měřitelný i doplněk množiny X $(Y \setminus X)$ do množiny Y.*

Lemma 1.17 *Pro všechny lebesgueovsky měřitelné množiny X platí:*

$$\lambda(X) \geq 0.$$

DŮKAZ
Tato vlastnost vyplývá přímo z konstrukce Lebesgueovy míry, kdy pokrýváme měřenou množinu systémem množin o nezáporném elementárním objemu. Hodnota Lebesgueovy míry je rovna součtu těchto objemů, tj. nezáporných čísel, a proto zřejmě nemůže být záporná.

□

Tvrzení 1.18 *Nechť X a Y jsou lebesgueovsky měřitelné množiny. Je-li X podmnožinou Y, potom*

$$\lambda(X) \leq \lambda(Y).$$

DŮKAZ
X je lebesgueovsky měřitelná, dle Tvrzení 1.15 je tedy měřitelný i její doplněk do množiny Y. Nyní pro spor předpokládejme, že

$$X \subset Y \quad \wedge \quad \lambda(X) > \lambda(Y). \tag{3}$$

Množina X a její doplněk do množiny Y $(Y \setminus X)$ jsou navzájem disjunktní – součet jejich měr je dle Tvrzení 1.15 roven $\lambda(Y)$. Z předpokladu (3) je ale zřejmé, že $\lambda(Y \setminus X)$ by muselo být záporné číslo, a to je spor s Lemmatem 1.17.

□

Platí, že míra spočetné množiny, tím pádem i jakékoli množiny obsahující konečný počet prvků, je nulová. Nejlépe si to lze představit na podmnožinách $\mathbb{R}$ - množina A konečně nebo spočetně mnoha bodů neobsahuje žádný interval nenulové délky. Z Tvrzení 1.15 vyplývá, že Lebesgueova míra takové množiny je součtem měr bodů, které ji tvoří. Podle Lemmatu 1.13 jde o součet spočetně (nebo dokonce konečně) mnoha nul.

$$\lambda(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Nespočetné množiny mohou mít nenulovou míru, existují ovšem také nespočetné množiny míry nula. Mimo množin, na kterých můžeme míru definovat a které označujeme jako měřitelné, existují také množiny, na kterých míru definovat neumíme - tyto množiny se nazývají neměřitelné.

1.4 Speciální množiny

Konstrukce 1.19 (Cantorovo diskontinuum / Cantorova množina) Mějme interval, který je podmnožinou reálné osy (zde budeme uvažovat interval $[0, 1]$). Z něj odebereme prostřední třetinu, tedy otevřený interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ze zbylých intervalů opět odebereme prostřední třetiny – celkem se ze zbytku tedy odeberou $\frac{2}{9}$. Konkrétně odebereme intervaly $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Množinu, která vznikne, pokud takových odebrání provedeme nekonečně mnoho, nazveme *Cantorovým diskontiuem / Cantorovou množinou* a budeme značit C.

Základní otázkou tedy je, zda vůbec Cantorova množina obsahuje nějaké body a pokud ano, tak jakou má mohutnost.

Tvrzení 1.20 *C je nespočetná množina.*

Důkaz
Tento důkaz vychází z [**9**]. Uvědomme si, že v konstrukci C odebíráme intervaly v diskrétních krocích. Nekonečným odebíráním otevřených intervalů tedy zůstane neodebráno spočetně mnoho bodů, které jsou počátkem, nebo koncem (námi odebraného) intervalu (např. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, ...$) Tyto body už nemohou být odebrány v žádném následujícím kroku, neboť další odebírané intervaly jsou vždy prostřední třetinou těch, které zbyly. Z toho plyne, že množina C je nejen neprázdná, ale dokonce je alespoň spočetná – ovšem za předpokladu, že by v C zbyly jen hraniční body odebraných intervalů. Odebíráním se ale také nezbavíme nespočetně mnoha bodů, které tzv. střídají svoji pozici: to znamená, že v n-tém kroku leží nalevo od odebrané třetiny, v $(n+1)$-ním kroku leží napravo od odebírané třetiny, v $(n + 2)$-tém kroku leží opět nalevo – jinými slovy dochází tak k neustálému střídání stran bez jakékoli možnosti odebrání těchto bodů. Vyjádříme-li si tyto body jako součet geometrické řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0, 1, 2\}, n \in \mathbb{N}$, pak ani v jednom z nekonečně mnoha sčítanců se nebude v čitateli vyskytovat číslo 1. Je tomu tak z těchto důvodů: body odebrané v prvním kroku (náleží intervalu

$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, viz výše) můžeme zapsat ve tvaru:

$$\frac{1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+...+\frac{a_n}{3^n},\ a_i\in\{0,1,2\},\ i=2,...,n;\ n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

přičemž alespoň jedno z čísel a_i je různé od 0, alespoň jedno z čísel a_i je různé od 2 (tyto požadavky budeme klást i v následujících krocích) a součet čísel za $\frac{1}{3}$ může být maximálně součet geometrické řady

$$\tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{27}+\tfrac{2}{81}+...=\tfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{3},\text{ obecně }\tfrac{\frac{2}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\tfrac{1}{3^{n-1}}:=\tfrac{1}{3^k}\text{ v }k\text{-tém kroku odebírání.}$$

Všechny po prvním kroku odebrané body tedy náleží intervalu $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Po druhém kroku jsou odebrány intervaly $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $(\frac{3}{9},\frac{6}{9})$ a $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. Body z těchto intervalů můžeme zapsat ve tvaru:

$$\tfrac{0}{3}+\tfrac{1}{9}+...+\tfrac{a_n}{3^n}+...,a_n\in\{0,1,2\}\text{ (body z intervalu }(\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9})\text{)},$$

$$\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{a_n}{3^n}+...,a_n\in\{0,1,2\}\text{ (body odebrané už v předchozím kroku)}$$

$$\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{9}+...+\tfrac{a_n}{3^n}+...,a_n\in\{0,1,2\}\text{ (body z intervalu }(\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9})\text{)}.$$

Tuto úvahu je možné aplikovat v každém kroku odebírání intervalů. Vyjádříme-li si bod intervalu $[0,1]$ jako součet řady (4) a vyskytuje-li se ve kterémkoli ze sčítanců čitatel 1, jde o bod, který množině C nenáleží (s výjimkou mezí odebíraných intervalů). V C ale zůstává množina všech bodů, které (vyjádřené jako součet (4)) sčítanec $\frac{1}{3^n}$ neobsahují. Jde o body, které můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{a_n}{3^n},a_n\in\{0,2\}=2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{a_n}{3^n},a_n\in\{0,1\}.$$

Ke každému takovému bodu můžeme jednoznačně přiřadit bod z intervalu $[0,1]$ předpisem

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},a_n\in\{0,1\}. \tag{5}$$

(Zjednodušeně: je to jako kdybychom v nekonečném sčítání ve všech jmenovatelích přepsali trojku na dvojku). Předpis (5) nepředpokládá, že se někdy jedničky a nuly začnou periodicky opakovat, či od příslušného desetinného místa budou následovat jen samé nuly. Zápis (5) tak není ničím jiným, než zcela libovolným reálným číslem z intervalu $[0,1]$ převedeným do dvojkové soustavy. Např. $(0,75)_{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=(0,11)_2$. Nalezli jsme tedy jednoznačné zobrazení množiny C na interval $[0,1]$ Množina C a interval $[0,1]$ tedy zřejmě mají stejnou mohutnost. Jakýkoliv interval nenulové délky z množiny reálných čísel je nespočetná množina. Z toho plyne, že množina C je nespočetná.

□

Tvrzení 1.21 *Lebesgueova míra Cantorova diskontinua* $\lambda(C) = 0$.

Důkaz

Víme, že délka intervalu $[0, 1] = 1$ a tedy i $\lambda([0, 1]) = 1$. Pro určení Lebesgueovy míry množiny C musíme zjistit, jaká je Lebesgueova míra odebraných intervalů. V prvním kroku odebíráme prostřední třetinu, tedy interval délky $\frac{1}{3}$. Ve druhém kroku, jak už bylo řečeno, odebereme $\frac{2}{9}$. Vždy odebíráme prostřední třetiny ze zbylých intervalů. Počet zbylých intervalů je v každém kroku dvojnásobný (odebráním vzniknou z jednoho intervalu dva menší), délka odebíraného intervalu je v každém dalším kroku třetinová oproti předchozímu. Délka odebraných intervalů tedy odpovídá následujícímu součtu:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{4}{27} + \tfrac{8}{81} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^n}{3^{n+1}}, \text{ což je geometrická řada s kvocientem } \tfrac{2}{3}.$$

Po úpravě:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^n}{3^{n+1}} = \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^n}{3^n} = \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^n = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Délka (a tedy i Lebesgueova míra) odebraných intervalů je stejná jako míra intervalu $[0, 1]$ a je rovna jedné. To ale znamená, že Lebesgueova míra množiny, která zbyla je $\lambda(C) = 1 - 1 = 0$.

□

Konstrukce 1.22 (Neměřitelná množina) Konstrukce lebesgueovsky neměřitelné množiny vychází z **[5]** (věta 31). Základní myšlenka je taková: máme dvě reálná čísla x, y. Tato čísla jsou v relaci, pokud $x - y \in \mathbb{Q}$. Všechna reálná čísla se tím rozdělují na disjunktní množiny tak, že x a y patří do stejné množiny právě tehdy, platí-li $x - y \in \mathbb{Q}$. Podle *axiomu výběru* (předpokládáme, že umíme vybrat jakoukoli, byť velmi specifickou množinu) existuje taková množina $V \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$, která z každé množiny určené výše zmíněnou relací obsahuje právě jedno číslo a navíc je disjunktní se svým posunutím o libovolné číslo $q \in \mathbb{Q}$. To znamená, že pro každé x reálné nalezneme ve V právě jedno y tak, že $x - y \in \mathbb{Q}$ a posuneme-li množinu V o q (ke všem prvkům množiny V přičteme q, označme tuto posunutou množinu V_q, pak

$$V \cap V_q = \emptyset. \tag{6}$$

Předpokládejme, že V je měřitelná, tedy $\lambda(V) = a \geq 0$. Lebesgueova míra se při posouvání měřeného intervalu nemění, tj. $\lambda(V) = \lambda(V_q)$. Sjednoťme nyní všechna možná posunutí V_q množiny V (znovu připomeňme, že posouváme o libovolné racionální číslo q). Tímto sjednocením $\bigcup\limits_q V_q, q \in \mathbb{Q}$ získáme celou množinu $\mathbb{R}$, protože máme-li $x \in \mathbb{R}$, existuje $y \in V$ takové, že $x - y = q, q \in \mathbb{Q}$.

To ale znamená, že $x = y + q$, tedy $x \in$ "V posunuto o q" $:= V_q$. Z toho a ze (6) plyne:

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_q V_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V_q) = a + a + a + ...$$

Zřejmě $\sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$, tedy je patrné, že $a > 0$.

Posouvejme nyní množinu V o racionální čísla z konečného intervalu $[a, b]$. Množinu V posunutou o racionální číslo $k \in [a, b]$ označme V_k. Nyní položme

$$U = \bigcup_{k \in [a,b]} V_k.$$

Lebesgueova míra množiny U je tedy $\lambda(U) = \sum_{k \in [a,b]} \lambda(V_k) = a + a + ... = +\infty$, neboť už víme, že $a > 0$.

Množina U ovšem celá leží v intervalu $[0 - 1, 1 + b]$ - vzhledem k tomu že do V vybíráme z intervalu [0,1] a posouváním o $k \in [a, b]$ se dostaneme maximálně do intervalu $[0 - a, 1 + b]$. Lebesgueova míra $\lambda([0 - a, 1 + b]) = 1 + b - (-a) = a + b + 1$. Množina U je podmnožinou intervalu $[0 - a, 1 + b]$, a tedy $\lambda(U) \leq a + b + 1$, ale zároveň už bylo výše řečeno, že $\lambda(U) = +\infty$, což je spor. Z toho plyne, že množina V je neměřitelná. Tato konstrukce množiny V se nazývá *Vitaliho konstrukce.*

2 Hausdorffova míra

2.1 Konstrukce Hausdorffovy míry

V této části zavedeme Hausdorffovu míru, pojem, který je definován v [**3**], odkud text druhé kapitoly rovněž čerpá.

Definice 2.1 (Spočetné pokrytí) Buď $A \subset \mathbb{R}^n$ množina tvořená množinami A_i, $i \in \mathbb{N}$. Takové množině říkáme *spočetné pokrytí množiny* $X \subset \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když platí

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Definice 2.2 (eukleidovská metrika) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zobrazení $a \times b \mapsto \mathbb{R}$ takové, že $a \times b \mapsto \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$ nazveme *eukleidovskou metrikou* na $\mathbb{R}^n$ a značíme jej $d\,(a, b)$.

Definice 2.3 (diametr (průměr) množiny) Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$. Číslo diam X, vyjadřující vzdálenost dvou navzájem nejvzdálenějších prvků množiny X, kde

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} d(x, y),$$

nazveme *diametrem množiny X*.

Pro přiblížení významu předchozí definice si uvedeme některé příklady. Diametrem reálného otevřeného intervalu je jeho délka, ale v prostoru $\mathbb{R}^3$ je diametrem koule její průměr.

Definice 2.4 (ε -pokrytí)
Buď ε kladné, reálné číslo (speciálně velmi blízké nule). Množiny A_i, které tvoří pokrytí A, jsou množiny o *průměru* diam A_i. Řekneme, že pokrytí A množiny X je *ε - pokrytí*, pokud platí

$$\operatorname{diam} A_i \leq \varepsilon$$

pro všechny množiny $A_i \in A$.

Definice 2.5 Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$. Potom pro $\varepsilon > 0$ a $s > 0$ buď

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(X) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_i))^s : X \subseteq \cup A_i,\, \operatorname{diam}(A_i) \leq \varepsilon\},$$

číslu s říkáme *rozměr*, $A_i \in A$, A je tedy ε - pokrytí množiny X.

Vzhledem k tomu, že množinu X chceme popsat co nejpřesněji, je přirozené požadovat velmi malá ε, kdy se pokrývajícími množinami co nejvíce přiblížíme popisované množině X. Speciálně požadujeme $\varepsilon \to 0^+$. Potom definujeme Hausdorffovu míru:

Definice 2.6 (Hausdorffova míra rozměru s)

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(X).$$

Zobrazení $\mathcal{H}^s$, $X \mapsto \mathcal{H}^s(X)$ se nazývá *Hausdorffova míra (rozměru s).*

Z definice vyplývá, že výsledná hodnota $\mathcal{H}^s(X)$ bude ležet v intervalu $[0, +\infty]$.

Navíc se dá ukázat, že v některých případech splývá Hausdorffova míra s mírou Lebesgueovou, a proto ji také můžeme pokládat za jakési zobecnění pojmu *objem.*

Definovali jsme tedy zobrazení, kterému říkáme Hausdorffova míra. Nejprve je ovšem nutné ověřit, že jde skutečně o míru – ukážeme, že Hausdorffova míra splňuje vlastnosti vnější míry a využitím *Carathéodoryovy podmínky* (1) získáme míru na σ-algebrách prostoru $\mathbb{R}^n$. Tato úvaha je naznačena v [**7**], strana 398, poznámka 51.37. Technika důkazů je převzata a upravena z [**10**] (to platí i pro podkapitolu 2.2).

Tvrzení 2.7 *Hausdorffova s-rozměrná míra prázdné množiny $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ pro libovolné s.*

Důkaz

Prázdnou množinu můžeme pokrýt jedinou množinou, například otevřenou koulí o průměru ε. Tedy

$$0 \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon(\emptyset) = \inf(\sum_{A_j \in A} (\text{diam } A_j)^s.$$

V sumě se nachází pouze jeden člen (pokrýváme jen jednou množinou) a diam $A_j = \varepsilon$. Platí:

$$0 \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon(\emptyset) = \inf \varepsilon^s.$$

Pro $\varepsilon \to 0^+$ pak platí

$$\varepsilon^s \to 0^+, \text{ a tedy } \mathcal{H}^s(\emptyset) = 0.$$

□

Tvrzení 2.8 *Nechť $X \subset Y$. Potom $\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y)$.*

Důkaz

Protože $X \subset Y$, je zřejmě každé ε-pokrytí množiny Y také pokrytím X. Vybereme-li infimum ze všech pokrytí, platí

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(X) \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon(Y).$$

Tedy i pro $\varepsilon \to 0^+$ získáváme

$$\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y).$$

□

Tvrzení 2.9 *Nechť (M_i) je konečná nebo spočetná posloupnost disjunktních množin. Potom*

$$\mathcal{H}^s(\bigcup_i M_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(M_i).$$

Důkaz

Předpokládejme, že výraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\varepsilon(M_i) < \infty$ pro nějaké ε-pokrytí posloupnosti množin M_i. Z definice infima vyplývá, že každou množinu M_i z dané posloupnosti množin lze pokrýt množinami $A_{i,j}$ takovými, že platí

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(M_i) \leq (\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } A_{i,j})^s) < \mathcal{H}^s_\varepsilon(M_i) + \beta(\varepsilon),$$

kde β je kladnou funkcí ε, která splňuje $\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \beta \to 0^+$. Množiny $A_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}$ tvoří ε-pokrytí sjednocení $\bigcup_i M_i$, tedy platí

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(\bigcup_i^{\infty} M_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } A_{i,j})^s)).$$

Zvolíme-li nyní funkci β ve tvaru $\beta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2^i}$ (obecně stačí zvolit jakoukoli funkci, která pro $\varepsilon \to 0^+$ jde k nule zprava a platí, že $\sum_{i=1}^{\infty} \beta(\varepsilon) = 1$ (to využijeme v dalším kroku důkazu), tedy např. $\beta(\varepsilon) = \frac{(n-1)\cdot\varepsilon}{n^i}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$), platí následující nerovnosti:

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(\bigcup_i^{\infty} M_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(A_{i,j})^s))$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}^s_\varepsilon(M_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\varepsilon(M_i).$$

Tyto nerovnosti jsou splněny pro jakékoli kladné ε a z toho vyplývá, že limitním přechodem dostaneme

$$\mathcal{H}^s(\bigcup_i M_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(M_i).$$

□

Z předchozích tří tvrzení vyplývá, že definované zobrazení splňuje vlastnosti vnější míry, tj. na množinách σ-algebry (splňujících (1) z první kapitoly) je Hausdorffova míra skutečně míra.

2.2 Vlastnosti Hausdorffovy míry

Tvrzení 2.10 *Buď $X \subset \mathbb{R}^n$ konečná množina. Potom hodnota 0-rozměrné míry $\mathcal{H}^0(X)$ je rovna počtu bodů tvořících množinu X.*

Důkaz
Nechť množiny A_i tvoří ε-pokrytí množiny X. Zřejmě pro každou množinu tvořící pokrytí platí $(\mathrm{diam}\ A_i)^0 = 1$, potom tedy $\sum_i (\mathrm{diam}\ A_i)^0$ je počet množin v pokrytí. Je-li X tvořena k body, potom

$$\mathcal{H}^0_\varepsilon(X) \leq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^0 = k.$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí $\varepsilon^0 = 1$, a tedy i pro $\varepsilon \to 0^+$. Tj. platí

$$\mathcal{H}^0(X) = k.$$

□

Tvrzení 2.11 *Nechť X je konečná podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $s > 0$. Potom*

$$\mathcal{H}^s(X) = 0.$$

Důkaz
Konečnou množinu pokryjeme sférami o průměru ε a středy v bodech tvořících X. Platí:

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(X) \leq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^s,$$

k je konečné přirozené číslo. Pro $\varepsilon \to 0^+$ potom

$$\mathcal{H}^s(X) = 0.$$

□

Tvrzení 2.12 *V prostoru reálných čísel $(\mathbb{R}^1)$ splývá jednorozměrná Hausdorffova míra $\mathcal{H}^1$ s mírou Lebesgueovou.*

Důkaz
Zvolme interval I v oboru reálných čísel s konečnou délkou $\ell(I)$, kde

$$\ell(I) = \sup I - \inf I. \text{ Označme } \sup I := b, \inf I := a.$$

Tento interval $I = (a, b)$ lze rozdělit pomocí bodů x_i ve smyslu

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Dále můžeme $\forall \varepsilon > 0$ zavést takové dělení intervalu, že

$$\forall i \in 0, 1, ..., (n-1) : x_i - x_{i+1} \leq \varepsilon.$$

Příkladem takového dělení může být rozdělení na n stejně dlouhých intervalů

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \ \ell(I) = n \cdot \tfrac{b-a}{n}, \text{ kde } \tfrac{b-a}{n} \leq \varepsilon.$$

Interval I je tedy pokryt spočetným systémem n stejně dlouhých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$, přičemž $\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow n \to \infty$. Platí:

$$\mathcal{H}^1(I) = \lim_{n \to \infty} \inf \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{diam}[x_i, x_{i+1}])^1 = \lim_{n \to \infty} \inf \left(n \cdot \tfrac{b-a}{n} \right) = b - a = \lambda(I).$$

Dle tohoto důkazu, na jednorozměrném intervalu, skutečně odpovídá Hausdorffova míra míře Lebesgueově.

$\square$

3 Zobecněné Cantorovy množiny

3.1 Cantorovo diskontinuum, Hausdorffova dimenze

V této kapitole poprvé blíže nahlédneme na vlastnosti Cantorových množin. Dále si ukážeme, že pojem Cantorova množina je mnohem obecnější, než představa Cantorova diskontinua, vznikajícího nekonečným odebíráním prostředních třetin zbylých intervalů. Každá Cantorova množina je charakterizována *mezerami*, tj. intervaly, které byly v určitém kroku konstrukce odebrány.

Zvolíme-li tedy posloupnost kladných čísel takovou, že suma přes všechny její prvky je konečné číslo, můžeme zkonstruovat Cantorovu množinu odebíráním intervalů délky odpovídající pro daný krok daným prvkům posloupnosti (viz [**2**]). Ukáže se, že pokud prvky posloupnosti takto přiřazené příslušné Cantorově množině přerovnáme, můžeme získat jinou Cantorovu množinu. Pokud ovšem dvě posloupnosti odpovídají stejné Cantorově množině, potom jedna je určitě přerovnáním druhé. Další otázkou také bude, jak se mění Hausdorffova míra a dimenze, změníme-li Cantorovu množinu přerovnáním posloupnosti odebraných intervalů. Touto problematikou se široce zaobírá článek [**2**].

Před podrobnějším zkoumáním otázek týkajících se těchto zobecněných Cantorových množin se ještě zaměříme na některé vlastnosti Cantorova diskontinua z první kapitoly a definujeme několik důležitých pojmů (bude čerpáno z [**3**]).

Definice 3.1 (Hustá množina) Nechť $X \subset \mathbb{R}$ a $X_1 \subset X$. Potom nazveme množinu X_1 *hustou v* X, je-li jejím uzávěrem celá množina X.

Příkladem husté množiny je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, která je hustá v $\mathbb{R}$. Opačným případem je však Cantorovo diskontinuum - jde o uzavřenou množinu, protože jeho doplňkem do intervalu $[0,1]$ je sjednocení odebraných otevřených intervalů (tj. otevřených podmnožin $\mathbb{R}$). Uzávěrem Cantorova diskontinua je opět Cantorovo diskontinuum, jde tedy o *množinu, která není hustá* vzhledem k intervalu $[0,1]$.

Nyní přejdeme od Cantorova diskontinua k definici Hausdorffovy dimenze. Pro připomenutí uveďme napřed znovu definici Hausdorffovy míry, tentokrát pouze na množině $\mathbb{R}$.

Definice 3.2 (Hausdorffova míra v $\mathbb{R}$) Nechť $X \subset \mathbb{R}$, číslo $s > 0$. Potom pro $\varepsilon > 0$ buď

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(X) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(\text{diam }(A_i))^s : X \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \text{diam }(A_i) \leq \varepsilon\}. \tag{7}$$

Limitním přechodem výrazu (7) pro $\varepsilon \to 0^+$ definujeme *Hausdorffovu míru rozměru s množiny X*:

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(X).$$

Zde je vhodné poznamenat, že $\mathcal{H}^s(X)$ je pro rostoucí s klesající, protože pro

$$0 < \operatorname{diam}(A_i) \leq \varepsilon < 1$$

platí

$$s_1 < s_2 \Rightarrow (\operatorname{diam}(A_i))^{s_1} > (\operatorname{diam}(A_i))^{s_2}.$$

Definice 3.3 (Hausdorffova dimenze)
Číslo

$$\dim_H(X) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(X) > 0\}$$

nazveme *Hausdorffovou dimenzí množiny X.*

Poznámka 3.4 Pojem Hausdorffovy dimenze lze zobecnit při uvážení následující definice Hausdorffovy míry. Pokud f_h je neklesající, zprava spojitá funkce taková že $f_h(0) = 0$, je *Hausdorffova f_h-míra* definována vztahem

$$\mathcal{H}^{f_h}(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} f_h(\operatorname{diam}(A_i)) : X \subseteq \cup A_i,\ \operatorname{diam}(A_i) \leq \varepsilon\}.$$

Definice 3.5 (s-množina) Nechť $0 \leq s \leq 1$. Potom se množina $X \subset \mathbb{R}$ nazývá *s-množina*, jestliže její Hausdorffova míra rozměru s je kladná a zároveň konečná. Tedy platí

$$0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty.$$

Pokud f_h je jako v poznámce 3.4, potom Hausdorffova f_h- míra opět splňuje vztah

$$0 < \mathcal{H}^{f_h}(X) < \infty,$$

ale Hausdorffovu míru nekonstruujeme pomocí součtu $(\operatorname{diam}(A_i))^s$, sčítáme $f_h(\operatorname{diam}(A_i))$.

Nyní prozkoumáme, jakých hodnot nabývá Hausdorffova míra v závislosti na rozměru s a tím si ukážeme význam Hausdorffovy dimenze. Je vhodné předem poznamenat, že všechny zkoumané Cantorovy množiny jsou sice podmnožinou $\mathbb{R}$, ale protože jsme Hausdorffovu míru definovali obecně na podmnožinách $\mathbb{R}^n$ (viz definici 2.3), lze formulovat následující lemma a větu obecněji.

Lemma 3.6 *Nechť $r, s \in \mathbb{R}, r > s$, množina $X \subset \mathbb{R}^n$. Potom*

$$\mathcal{H}^r_\varepsilon(X) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}^s_\varepsilon(X).$$

Důkaz
Nechť množiny A_i tvoří spočetné pokrytí množiny X. Pak

$\mathcal{H}^r_\varepsilon(X) = \inf(\sum \operatorname{diam}(A_i)^r) = \inf(\sum \operatorname{diam}(A_i)^s \cdot\ \operatorname{diam}(A_i)^{r-s}) \leq \inf(\varepsilon^{r-s} \cdot$
$\sum \operatorname{diam}(A_i)^s) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}^s_\varepsilon(X),$

přičemž ε^{r-s} je konstanta, kterou lze ze sumy vytknout. $\square$

Věta 3.7 *Buďte $r > s > t$ kladná reálná čísla a nechť množina $X \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí následující vztahy:*

$$\mathcal{H}^s(X) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^r(X) = 0$$

a

$$\mathcal{H}^s(X) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(X) = \infty.$$

Důkaz

Využitím Lemmatu 3.6 získáme vztahy

$$\mathcal{H}^r_\varepsilon(X) \leq \varepsilon^{r-s} \cdot \mathcal{H}^s_\varepsilon(X)$$

a

$$\mathcal{H}^t_\varepsilon(X) \geq \frac{\mathcal{H}^s_\varepsilon(X)}{\varepsilon^{s-t}}.$$

Uvažujeme-li $\varepsilon \to 0^+$, potom nutně

$$\mathcal{H}^r(X) = 0 \quad \text{a} \quad \mathcal{H}^t(X) = \infty.$$

$\square$

Pozorování 3.8 Podle předchozí věty tedy Hausdorffova míra množiny X nabývá hodnot 0 nebo ∞, až na případ s. Právě číslo s z předpokladu Věty 3.7 není ničím jiným, než *Hausdorffovou dimenzí* množiny X - je to totiž největší rozměr Hausdorffovy míry, pro který je ještě nenulová. Hausdorffova míra je tedy

- $\mathcal{H}^s(X) = \infty$ pro $s < \dim_H(X)$
- $\mathcal{H}^s(X) = 0$ pro $s > \dim_H(X)$
- $\mathcal{H}^s(X) = \textit{konstanta}$ pro $s = \dim_H(X)$.

Nyní se ještě jednou vraťme ke Cantorovu diskontinuu z první kapitoly:

Tvrzení 3.9 *Hausdorffova dimenze Cantorova diskontinua C je nenulová, konečná a platí*

$$\dim_H(C) = \log_3 2.$$

Důkaz

Cantorovo diskontinuum můžeme po n-tém kroku odebírání intervalů pokrýt intervaly délky $\varepsilon = \frac{1}{3^n}$, jichž bude přesně 2^n. Platí:

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(C) = \inf(\sum(\tfrac{1}{3^n})^s) = 2^n \cdot \tfrac{1}{3^{ns}}.$$

Po nekonečném odebírání přejdeme k limitě

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \tfrac{1}{3^{ns}}.$$

Hledáme takové maximální s, aby platilo

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \tfrac{1}{3^{ns}} = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{2}{3^s})^n > 0.$$

Výraz v limitě je typu x^n. Pro $x \in (0,1)$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Pokud ovšem $x = 1$, je už limita nenulová. Hledáme tedy takové s, aby platilo

$$\tfrac{2}{3^s} = 1.$$

Po úpravě výrazu získáváme Hausdorffovu dimenzi Cantorova diskontinua.

$$2 = 3^s$$
$$\log_3 2 = s = \dim_H(C).$$

□

3.2 Konstrukce zobecněných Cantorových množin

Nyní již opustíme klasickou představu Cantorovy množiny jako Cantorova diskontinua s odebíranými třetinami intervalů. Provedeme konstrukci obecnějších množin a pokusíme se mezi nimi nalézt nějaký vztah.

Definice 3.10 Buď $(a_k), k \in \mathbb{N}$ posloupnost kladných reálných čísel taková, že

$$\sum_k a_k = K < \infty.$$

Potom řekneme, že (a_k) je posloupnost *generující* danou Cantorovu množinu na intervalu $[0, K]$ délky K a to tak, že z intervalu $[0, K]$ odebíráme v k-tém kroku 2^{k-1} intervalů délky $a_{2^{k-1}}, a_{2^{k-1}+1}, ..., a_{2^k-1}$ (viz konstrukce 3.11).

Nyní máme k dispozici posloupnost (a_k), kde $\sum_k a_k = K$ a interval $I_0 = [0, K]$. Zavedeme označení *délky intervalu* $\ell(I) = \mathrm{diam}(I)$.

Konstrukce 3.11 Nejprve odebereme z I_0 otevřený interval délky a_1, z čehož získáme po prvním kroku dva uzavřené intervaly I_0^1 a I_1^1 oddělené mezerou délky a_1. Po druhém kroku už zbyde 2^2 uzavřených intervalů a tři mezery - původní o délce a_1 a dvě nové o délkách a_2 a a_3.

Po k-tém kroku už tedy zůstává 2^k uzavřených intervalů (označíme je $I_i^k, i = 0, 1, ..., 2^k - 1$). Opět z každého intervalu odebereme otevřený interval délky odpovídající dalšímu prvku a_k posloupnosti (a_k). Přesněji: z intervalu I_i^k odebereme otevřený interval délky a_{2^k+i}.

Interval I_i^k se tedy rozloží ve dva menší intervaly a mezeru mezi nimi, platí:

$$\ell(I_i^k) = \ell(I_{2i}^{k+1}) + a_{2^k+i} + \ell(I_{2i+1}^{k+1}).$$

A dále můžeme zapsat

$$\ell(I_{2i}^{k+1}) = \ell(I_{4i}^{k+2}) + a_{2^k+2i} + \ell(I_{4i+1}^{k+2}).$$

Stejným způsobem můžeme rozepsat i interval I_{4i}^{k+2} a další.
Tento postup nám říká, že délku libovolného zbylého intervalu můžeme zapsat jako součet mezer, které v něm vzniknou, neboli jako součet délek "v budoucnu" odebraných intervalů. To znamená, že pozice, odkud interval odebíráme, není libovolná. Po prvním kroku vypadá situace takto:

$$\ell(I_0^1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} a_{2^n+i} \qquad \text{a} \qquad \ell(I_1^1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_{2^n+i}.$$

Obecněji: $\forall k \in \mathbb{N}_0$ a $\forall i \in \mathbb{N} \cap [0, 2^k - 1], k \in \mathbb{N}$ platí

$$\ell(I_i^k) = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{l=i2^{n-k}}^{(i+1)2^{n-k}-1} a_{2^n+l}$$

Označíme-li $(a_k) = a$ a dále

$$C_a^k = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} I_i^k,$$

potom

$$C_a = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_a^k,$$

kde množina C_a je Cantorova množina vytvořená podle generující posloupnosti $a = (a_k)$. Množina C_a je stejně jako klasické Cantorovo diskontinuum tvořena pouze body, protože míra odebraných intervalů je rovna K.

Definice 3.12 (přerovnání posloupnosti) Buď $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení. Pak posloupnost $(a_{\pi(k)})$ nazveme *přerovnáním posloupnosti* (a_k) a označíme jej $\pi(a_k)$.

Je patrné, že případné přerovnání přiřazené posloupnosti (a_k) může výrazně změnit výslednou množinu C_a, protože vznikající mezery se objevují na jiných místech, tj. v daném kroku jsou odebrány intervaly jiných délek než před přerovnáním posloupnosti.

Definice 3.13 (zobecněná Cantorova množina) Nechť (a_k) je posloupnost jako v Definici 3.10. Potom množinu vytvořenou podle Konstrukce 3.11 a značenou C_a nazveme *zobecněnou Cantorovou množinou přiřazenou posloupnosti* (a_k).

Definice 3.14 Nechť C_a je zobecněná Cantorova množina přiřazená posloupnosti (a_k). Potom *mezera* m_{a_k} je odebraný interval délky a_k, tj. platí

$$\ell(m_{a_k}) = a_k.$$

Jsou-li m_1 a m_2 dvě mezery, pak

$$m_1 < m_2 \Leftrightarrow \forall x_1 \in m_1 \text{ a } \forall x_2 \in m_2 : x_1 < x_2.$$

Definice 3.15 (rozdělení množiny $\mathbb{N}$ podle Cantorovy množiny) Nechť C_a je jako v Definici 3.13. Pak řekneme, že rozdělení množiny $\mathbb{N}$ na právě dvě disjunktní podmnožiny P, Q takové, že pro všechny mezery platí:

$$\mathbb{N} = P \cup Q \quad \wedge \quad P \cap Q = \emptyset$$

a

$$\forall p \in P \text{ a } \forall q \in Q\colon m_{a_p} < m_{a_q}$$

je *rozdělením množiny* $\mathbb{N}$ *podle Cantorovy množiny* (Cantorova množina se tak rozdělí na dvě podmnožiny mezer).

Lemma 3.16 *Každý bod v C_a definuje rozdělení a naopak, každé rozdělení $\mathbb{N}$ podle Cantorovy množiny C_a definuje jediný bod v C_a.*

Důkaz
Zvolíme libovolný bod $z \in C_a$ a určíme množinu P (z definice 3.15) jako $P = \{p : m_{a_p} \subset [0, z]\}$.

V případě, že máme dáno rozdělení (P, Q), definujeme:

$$\kappa := \sup\{c \in \mathbb{R} : c \text{ je pravý okraj libovolné mezery } m_{a_p}, p \in P\},$$

$$\lambda := \inf\{d \in \mathbb{R} : d \text{ je levý okraj libovolné mezery } m_{a_q}, q \in Q\}.$$

Zřejmě $\kappa \leq \lambda$, protože $\forall p \in P$ a $\forall q \in Q$: $m_{a_p} < m_{a_q}$.
Pokud by platila ostrá nerovnost $\kappa < \lambda$, znamenalo by to existenci neodebrané mezery, tedy intervalu $[\kappa, \lambda] \subset C_a$, což je spor, neboť C_a neobsahuje interval kladné délky.
To znamená, že $\kappa \leq \lambda$, ale už neplatí, že $\kappa < \lambda$.
Tedy nutně $\kappa = \lambda$ a je to zároveň bod definovaný rozdělením. Jeho polohu vypočteme jednoduše sečtením délek všech mezer definovaných množinou P:

$$\kappa = \lambda = \sum_{k \in P} \ell(m_{a_k})$$

□

Ve zbytku této podkapitoly si ukážeme jistou ekvivalenci (právě vzhledem k uvedeným rozdělením, viz **[13]**) mezi Cantorovými množinami přiřazenými různým posloupnostem.

Mějme tedy C_a a C_b Cantorovy množiny přiřazené posloupnostem (a_k) a (b_k). Z konstrukce množin C_a a C_b vyplývá: pokud pro zvolená $k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$ platí:

$$m_{a_k} < m_{a_l},$$

potom také

$$m_{b_k} < m_{b_l}.$$

Tato vlastnost zřejmě plyne právě z konstrukce, kde některé indexy symbolizují odebírání v určité části intervalu. Například a_2 i b_2 jsou délky intervalu, který je vždy odebrán "vlevo". Liší se právě jen svojí délkou. Dané mezery m_{a_k} a m_{b_k} sice nebudou mít stejnou délku, ale určitě budou menší (ve smyslu Definice 3.14) než m_{a_l}, respektive m_{b_l}).

Potom můžeme definovat zobrazení φ, které bodu $\xi_a \in C_a$ přiřadí bod $\xi_b \in C_b$ určený stejným rozdělením množiny vzhledem k ξ_a (tvaru $P_a(\xi_a) = \{p \in \mathbb{N} : m_{a_p} \subset [0, \xi_a]\}$). Symbol $P_a(\xi_a)$ tedy vyjadřuje rozdělení množiny $\mathbb{N}$ podle Cantorovy množiny C_a tak, aby bod ξ_a jím byl definován. Platí:

$$\varphi(\xi_a) = \sum_{k \in P_a(\xi_a)} \ell(m_{b_k}) = \xi_b,$$

přičemž zároveň

$$\xi_b = \sum_{k \in P_b(\xi_b)} \ell(m_{b_k}).$$

Zjednodušeně řečeno, použijeme-li rozdělení $\mathbb{N}$ podle C_a, získáme množinu mezer m_{a_k} délek a_k. Zobrazení φ použije přesně ty indexy k určené rozdělením podle C_a, ale sečte délky mezer m_{b_k} - těmi je určen bod ξ_b. Zároveň můžeme zkonstruovat rozdělení množiny $\mathbb{N}$ podle C_b definující tutéž množinu indexů k a mezer m_{b_k}, abychom jejich součtem opět jednoznačně určili bod ξ_b. Vidíme tedy, že zobecněné Cantorovy množiny jsou jistým (netriviálním) způsobem ekvivalentní.

3.3 Cantorovy množiny podle geometrických posloupností

V této podkapitole se budeme krátce zabývat Cantorovými množinami přiřazenými posloupnostem s alespoň geometrickým poklesem a určíme jejich Hausdorffovu dimenzi. Tyto množiny jsou zkoumány především v článku [**2**].

Definice 3.17 Nechť $q \in (0, 1)$. Potom posloupnost (a_k) takovou, že $\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_k \leq q^k$ nazveme *posloupností s minimálně geometrickým poklesem.*

Následující tvrzení si uvedeme bez důkazu, viz [**2**].

Tvrzení 3.18 *Každá posloupnost* (a_k)*, pro niž platí*

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

může být rozložena na disjunktní sjednocení nejvýše spočetně mnoha podposloupností s minimálně geometrickým poklesem.

Definice 3.19 (Cantorova množina přiřazená posloupnosti s minimálně geometrickým poklesem) Nechť (a_k) je posloupnost s minimálně geometrickým poklesem. Potom Cantorovu množinu C_a přiřazenou posloupnosti (a_k) nazveme *zobecněnou Cantorovou množinou přiřazenou posloupnosti s minimálně geometrickým poklesem*

Při důkazu dalšího tvrzení využijeme následujícího lemmatu, viz [**4**], strana 114.

Lemma 3.20 (opačná Hölderova nerovnost) *Nechť* (a_k) *a* (b_k) *jsou posloupnosti kladných reálných čísel (můžou být i konečné, stejné délky). Dále nechť* $s < 1 \wedge r < 0$ *jsou taková čísla, pro něž platí* $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k) \geq (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^s)^{1/s} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} b_k^r)^{1/r}.$$

Tvrzení 3.21 *Nechť* C_a *je Cantorova množina přiřazená posloupnosti s minimálně geometrickým poklesem* (a_k)*. Potom* $\dim_H(C_a) = 0$*.*

Důkaz

Nechť $\varepsilon > 0$, $0 < s < 1$. Nyní předpokládejme, že z intervalu $[0, \sum a_k]$ jsme odebrali n otevřených intervalů a že $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} q^i \leq \varepsilon$. Intervaly, které po odebírání zbyly lze zapsat jako sjednocení uzavřených intervalů $I_i, i = 1, 2, ..., n+1$. Zároveň platí:

$$\sum_{i=1}^{n+1}|I_i| = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} q^i \leq \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že $\bigcup\limits_i I_i$ je ε-pokrytím C_a. Použijeme li *opačnou Hölderovu nerovnost* (Lemma 3.20), kde položíme $(a_k) = |I_i|$ a $\forall k \in \mathbb{N} : b_k = 1$, platí pro každé $s \in (0, 1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}|I_i \cdot 1| \geq (\sum_{i=1}^{n+1}|I_i|^s)^{1/s} \cdot (\sum_{i=1}^{n+1} 1^{\frac{-1}{1/s-1}})^{1-\frac{1}{s}}$$

Po úpravě (umocněním na s):

$$(\sum_{i=1}^{n+1}|I_i \cdot 1|)^s \geq \sum_{i=1}^{n+1}|I_i|^s \cdot (\sum_{i=1}^{n+1} 1^{\frac{-1}{1/s-1}})^{s-1}$$

$$(\sum_{i=1}^{n+1}|I_i \cdot 1|)^s \geq \sum_{i=1}^{n+1}|I_i|^s \cdot (n+1)^{s-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}|I_i|^s \leq (\sum_{i=n+1}^{\infty}|q^i|)^s \cdot (n+1)^{1-s}$$

Získáváme:

$$\sum_{i=1}^{n+1}|I_i|^s \leq (\sum_{i=n+1}^{\infty}|q^i|)^s \cdot (n+1)^{1-s} = (\tfrac{q^{n+1}}{1-q})^s \cdot (n+1)^{1-s} \longrightarrow 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Z toho ale vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n+1}|I_i|^s = 0$. Pak ovšem $\dim_H(C_a) \leq s$ (viz Pozorování 3.8). Protože předchozí vztahy platí pro libovolně malé kladné s, je zřejmé, že $\dim_H(C_a) = 0$.

□

Tvrzení 3.22 *Nechť* (a_k) *je libovolná posloupnost taková, že*

$$\forall k \in \mathbb{N} : (a_k) > 0 \text{ a } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Potom existuje přerovnání posloupnosti (a_k) *(ve smyslu definice 3.12)* $\pi(a_k)$*, k němuž přiřazená posloupnost* $C_{\pi(a_k)}$ *má Hausdorffovu dimenzi* $\dim_H(C_{\pi(a_k)}) = 0$.

Důkaz (náznak)
Posloupnost (a_k) rozložíme do nejvýše spočetně mnoha podposloupností s minimálně geometrickým poklesem (viz Tvrzení 3.18). Potom sjednocením Cantorových množin přiřazených všem těmto podposloupnostem definujeme novou Cantorovu množinu $C_{\pi(a_k)}$. Máme spočetně mnoho Cantorových množin, můžeme je tedy pokrýt sjednocením spočetně mnoha spočetných pokrytí, která určovala nulovou Hausdorffovu dimenzi Cantorových množin přiřazených posloupnostem s minimálně geometrickým poklesem, z nichž je složena množina $C_{\pi(a_k)}$. Délky odebraných intervalů jsou shodné s původní posloupností (a_k), protože jsme $C_{\pi(a_k)}$ tvořili z jejích podposloupností. Nalezli jsme tedy přerovnání posloupnosti (a_k), jemuž přiřazená Cantorova množina $C_{\pi(a_k)}$ má nulovou Hausdorffovu dimenzi.

□

3.4 p-Cantorovy množiny

Posledním příkladem zobecněných Cantorových množin v tomto textu budou p-Cantorovy množiny. Nejprve je definujeme, a potom se zaměříme na zkoumání jejich Hausdorffovy dimenze. Tato podkapitola je zjednodušením rozboru p-Cantorových množin z článku [**2**], který se jimi zabývá velmi široce.

Definice 3.23 (p-Cantorova množina) Buď (a_k) posloupnost tvaru $a_k = \frac{1}{k^p}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $p > 1$. Cantorovu množinu přiřazenou této posloupnosti nazveme *p-Cantorovou množinou.*

Nyní uvedeme závěrečné tvrzení této kapitoly, pomocí nějž je možné provést horní odhad Hausdorffovy dimenze p-Cantorových množin.

Tvrzení 3.24 *Nechť* C_a *je* p*-Cantorova množina přiřazená posloupnosti* $a_k = \frac{1}{k^p}, p > 1$. *Potom*

$$\dim_H(C_a) \leq \tfrac{1}{p}.$$

Důkaz
Toto tvrzení dokážeme podobně jako Tvrzení 3.21. Nechť $\varepsilon > 0$, $0 < s < 1$. Nyní předpokládejme, že z intervalu $[0, \sum a_k]$ jsme odebrali n otevřených intervalů a že $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \leq \varepsilon$. Intervaly, které po odebírání zbyly lze zapsat jako sjednocení uzavřených intervalů $I_i, i = 1, 2, ..., n+1$. Zároveň platí:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |I_i| = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{i^p} \leq \varepsilon$$

To ovšem znamená, že $\bigcup_i I_i$ je ε-pokrytím C_a.

Stejným použitím *opačné Hölderovy nerovnosti* jako v důkazu Tvrzení 3.21 získáme vztah:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |I_i|^s \leq (\sum_{i=n+1}^{\infty} |I_i|)^s \cdot (n+1)^{1-s} = (\sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{i^p})^s \cdot (n+1)^{1-s}.$$

Užitím integrálního kritéria pro konvergenci řady $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ lze dosáhnout tohoto odhadu:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |I_i|^s \leq (\tfrac{n^{1-p}}{p-1})^s \cdot (n+1)^{1-s} = (\tfrac{1}{p-1})^s \cdot (\tfrac{(n+1)^{1-s}}{n^{s(p-1)}}).$$

Potom ale $\forall s \geq \frac{1}{p}$ (potřebujeme omezit výraz $\frac{(n+1)^{1-s}}{n^{s(p-1)}}$) je konečná i následující limita.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n+1} |I_i|^s \leq (\tfrac{1}{p-1})^s < \infty.$$

To ovšem znamená, že *Hausdorffova míra rozměru s*: $\mathcal{H}^s_\varepsilon(C_a) < \infty \Leftrightarrow s \geq \frac{1}{p}$. Z toho (použitím Pozorování 3.8) vyplývá, že $\dim_H(C_a) \leq \frac{1}{p}$.

$\square$

Hausdorffova dimenze p-Cantorových množin je tedy omezena konstantou závislou na parametru p, jímž je určena posloupnost $(a_k) = \frac{1}{k^p}$, k níž je množina C_a přiřazena.

4 Minkowského dimenze

4.1 Horní a dolní odhad Minkowského dimenze

Doposud jsme se zabývali určováním, případně odhadováním Hausdorffovy dimenze Cantorových množin. V následující kapitole zavedeme obecně na podmnožinách $\mathbb{R}^n$ pojem Minkowského dimenze, později s ní budeme pracovat na intervalech z $\mathbb{R}$. Před samotnou definicí je opět nezbytné zavést několik pojmů.

Definice 4.1 (vzdálenost bodu od množiny) Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Číslo $d(a, X) := \inf_{x \in X} d(a, x)$ vyjadřuje *vzdálenost bodu a od množiny X*.

Definice 4.2 (ε-pokrývající množina) Buďte X neprázdná, omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$A_\varepsilon := \{a \in \mathbb{R}^n : d(a, X) < \varepsilon\}, \text{ kde } X \subset A_\varepsilon,$$

nazveme *ε-pokrývající množinou* množiny X.

Definice 4.3 Množinu $B^n(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(0, x) < r\}$ nazýváme *n-dimenzionální koulí* se středem v počátku a poloměrem r.

Následující úvaha je motivací (čerpající z počátku článku **[11]**) k zavedení Minkowského dimenze množiny $X \subset \mathbb{R}^n$. Množina A_ε je neprázdnou podmnožinou $\mathbb{R}^n$ a má nenulovou Lebesgueovu míru $\lambda(A_\varepsilon)$. Uvažujme nyní podprostor $\mathbb{R}^s$ prostoru $\mathbb{R}^n$, $0 \leq s \leq n$. Předpokládejme, že množina X je jednotkovou koulí prostoru $\mathbb{R}^s$, označme $X := B^s(0, 1)$. Abychom zdůraznili, že $B^s(0, 1)$ leží v $\mathbb{R}^n$, užijeme zápisu $X := B^s(0, 1) \times \{0\}^{n-s}$. Pokrýváme-li tuto množinu množinou A_ε, platí $\forall \varepsilon \in (0, 1)$

$$B^s(0, 1) \times B^{n-s}(0, \varepsilon) \subset A_\varepsilon \subset B^s(0, 2) \times B^{n-s}(0, \varepsilon)^{n-s},$$

$B^s(0, 2)$ je koule o poloměru 2 v prostoru $\mathbb{R}^s$ a $B^{n-s}(0, \varepsilon)$ vyjadřuje ε-kouli v prostoru $\mathbb{R}^{n-s}$, tedy zjednodušeně řečeno v dimenzích, ve kterých nemá pokrývaná množina $X = B^s(0, 1)$ žádný objem (jako např. čtverec nezasahuje svým obsahem do třetí dimenze prostoru $\mathbb{R}^3$).

Lebesgueovu míru množiny $B^{n-s}(0, \varepsilon)$ lze vyjádřit jako ε^{n-s}. Položíme-li

$$\lambda(B^s(0, 1)) = c_1 \quad \text{a} \quad \lambda(B^s(0, 2)) = c_2,$$

můžeme zapsat následující nerovnost odhadující objem množiny A_ε:

$$c_1 \cdot \varepsilon^{n-s} \leq \lambda(A_\varepsilon) \leq c_2 \cdot \varepsilon^{n-s}. \tag{8}$$

Zdůrazněme, že nejdůležitějším parametrem vystupujícím v nerovnosti (8) je číslo s, neboť $X \subset \mathbb{R}^s$. Úpravou vztahu (8) lze získat vyjádření jisté formy dimenze s pokrývané množiny, závislé pouze na znalosti několika parametrů.

$$s = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(n - \tfrac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right).$$

Definice 4.4 (Minkowského dimenze) Nechť X je omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a A_ε je její ε-pokrývající množinou. Číslo

$$\overline{\dim}_M(X) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(n - \tfrac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log\varepsilon}\right)$$

nazveme *horním odhadem Minkowského dimenze* a číslo

$$\underline{\dim}_M(X) := \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(n - \tfrac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log\varepsilon}\right)$$

nazveme *dolním odhadem Minkowského dimenze.* Platí-li rovnost

$$\overline{\dim}_M(X) = \underline{\dim}_M(X),$$

definujeme číslo

$$\dim_M(X) := \overline{\dim}_M(X) = \underline{\dim}_M(X),$$

které nazveme *Minkowského dimenzí množiny X.*

4.2 Minkowského dimenze Cantorových množin

V tomto odstavci budeme určovat Minkowského dimenzi Cantorových množin. Nejprve se zaměříme na klasické Cantorovo diskontiuum a zjistíme, že jeho Minkovského dimenze je stejná jako dimenze Hausdorffova (viz **[3]**, strana 43), zde však použijeme poněkud jiné techniky výpočtu.

Tvrzení 4.5 *Minkovského dimenze Cantorova diskontinua*

$$\dim_M(C) = \dim_H(C) = \log_3 2.$$

Důkaz
V k-tém kroku odebírání intervalů pokryjeme zatím nedokončenou množinu C 2^k intervaly, každý o délce $\frac{1}{3^k}$. Objemem ε-pokrývající množiny je tedy délka všech těchto intervalů $2^k \cdot \frac{1}{3^k}$. Nyní budeme hledat horní odhad Minkowského dimenze množiny C

$$\overline{\dim}_M(C) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(n - \tfrac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log\varepsilon}\right),$$

přičemž libovolně malé $\varepsilon > 0$ nahradíme hodnotou 3^{-k} (tj. délkou jednotlivých odebíraných intervalů v k-tém kroku) a položíme $n = 1$, protože se pohybujeme v prostoru $\mathbb{R}^1$. Pro výpočet Minkowského dimenze množiny C tedy platí:

$$\overline{\dim}_M(C) = \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \tfrac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log\varepsilon}\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(1 - \tfrac{\log\left(2^k/3^k\right)}{\log 3^{-k}}\right).$$

Po úpravách

$$\limsup_{k\to\infty}\left(1 - \tfrac{k\cdot\log\frac{2}{3}}{-k\cdot\log 3}\right) = \left(1 - (-1)\cdot\tfrac{\log\frac{2}{3}}{\log 3}\right) = 1 + \tfrac{\log 2 - \log 3}{\log 3} = 1 + \tfrac{\log 2}{\log 3} - 1 = \log_3 2.$$

Protože na k výpočet limity nazávisí, mohli bychom stejně postupovat i při určování dolního odhadu Minkovského dimenze množiny C. To ale znamená, že

$$\overline{\dim}_M(C) = \underline{\dim}_M(C) = \dim_M(C) = \log_3 2 = \dim_H(C).$$

$\square$

Nyní se budeme věnovat Cantorovým množinám přiřazeným posloupnostem s minimálně geometrickým poklesem ze třetí kapitoly (Definice 3.19). Nejprve si bez důkazu uveďme jedno důležité tvrzení, viz **[3]**, (3.17).

Tvrzení 4.6 *Mezi Hausdorffovou a Minkowského dimenzí množiny $X \in \mathbb{R}^n$ existuje vztah*

$$\dim_H(X) \leq \underline{\dim}_M(X) \leq \overline{\dim}_M(X).$$

Mějme tedy (a_k) posloupnost s minimálně geometrickým poklesem, která generuje Cantorovu množinu C_a. Víme, že $\dim_H(C_a) = 0$, čehož využijeme v důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 4.7 *Minkowského dimenze Cantorovy množiny C_a přiřazené posloupnosti s minimálně geometrickým poklesem je nula, tedy* $\dim_M(C_a) = 0$.

DŮKAZ

Množinu C_a lze po odebrání k intervalů pokrýt sjednocením intervalů, které ještě mají být odebrány, o celkové délce $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i$, přičemž $\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq (a_k) \leq q^k$, $q \in (0, 1)$. Přitom zvolíme $\varepsilon = q^k$. Tedy

$$\overline{\dim}_M(C) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log \varepsilon}\right) = \limsup_{k \to \infty} \left(1 - \frac{\log\left(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} q^i\right)}{\log q^k}\right).$$

Po úpravě:

$$\limsup_{k\to\infty}\left(1 - \frac{\log\left(q^{k+1}+q^{k+2}+\dots\right)}{k \cdot \log q}\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(1 - \frac{\log\left(q^{k+1}(1+q+q^2+\dots)\right)}{k\cdot\log q}\right) =$$
$$\limsup_{k\to\infty}\left(1 - \frac{\log q^{k+1} + \log\left(\frac{1}{1-q}\right)}{k\cdot\log q}\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(1 - \frac{(k+1)\cdot\log q + 0 - \log(1-q)}{k\cdot\log q}\right) =$$
$$\limsup_{k\to\infty}\left(1 - \frac{(k+1)}{k} + \frac{\log(1-q)}{k\cdot\log q}\right) = 0.$$

Tedy $\overline{\dim}_M(C_a) = 0$. Obdobně bychom mohli postupovat při výpočtu $\underline{\dim}_M(C_a)$, ale to není nutné. Při znalosti horního odhadu Minkowského dimenze $\overline{\dim}_M(C_a) = 0$ a Hausdorffovy dimenze $\dim_H(C_a) = 0$ použijeme Tvrzení 4.7, ze kterého vyplývá, že také $\underline{\dim}_M(C_a) = 0$. To ovšem znamená, že Minkowského dimenze Cantorových množin přiřazených posloupnosti s minimálně geometrickým poklesem je nula.

$\square$

Na závěr této kapitoly se ještě vrátíme k $p-$Cantorovým množinám (Definice 3.23), u nichž jsme provedli horní odhad Hausdorffovy dimenze hodnotou $\frac{1}{p}$. Aplikací Tvrzení 3.7 bohužel nedojdeme k žádnému rozumnému odhadu Minkowského dimenze těchto množin. Lze tedy pouze předpokládat, že hodnota Minkowského dimenze p-Cantorových množin bude ležet mezi hodnotou jejich Hausdorffovy dimenze a jedničkou, protože jde o podmnožiny reálné (jednorozměrné) osy. To se potvrdí i přímým výpočtem, stejným jako v obou předcházejících důkazech. Dosadíme-li do vztahu

$$\overline{\dim}_M(C) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{\log(\lambda(A_\varepsilon))}{\log \varepsilon}\right)$$

hodnoty $\varepsilon = \frac{1}{k^p}$ a $\lambda(A_\varepsilon) = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$, můžeme použitím integrálního kritéria pro konvergenci řady $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ a úpravami založenými na vlastnostech logaritmů dospět k závěrečnému vztahu

$$\limsup_{k \to \infty} \left(1 - \frac{k^{1-p}}{\log k} \cdot \frac{1}{-p^2+p}\right) = 1.$$

Podle definice p-Cantorových množin je $p > 1$, jde tedy pro k rostoucí do nekonečna zlomek $\frac{k^{1-p}}{\log k}$ k nule.

Provedli jsme tedy pouze hrubý horní odhad Minkowského dimenze. Při výpočtu dolního odhadu bychom postupovali stejně, s dosažením stejného výsledku. Není ovšem zaručeno, že při přesnějším odhadování by se horní a dolní odhady Minkowského dimenze p-Cantorových množin rovnaly. Přesné určení Minkowského dimenze p-Cantorových množin tedy na závěr ponecháme otevřeným problémem, motivujícím k jejich dalšímu zkoumání.

5 Závěr

V této práci jsme si dali za úkol ukázat odlišné přístupy k měření množin, zejména na příkladech Cantorova diskontinua a zobecněných Cantorových množin. Nejprve jsme se zabývali Lebesgueovou mírou a na příkladu Cantorova diskontinua předvedli, že i nespočetné množiny mohou mít nulovou míru. Na závěr první kapitoly jsme uvedli také příklad množiny, jejíž Lebesgueovu míru nelze určit.

V následujících dvou kapitolách jsme se zaměřili na Hausdorffovu míru i dimenzi. Po definici různých typů zobecněných Cantorových množin jsme se také v některých případech pokusili provést alespoň horní odhad jejich Hausdorffovy dimenze. V závěru práce jsme definovali Minkowského dimenzi a pokusili se opět aplikovat její výpočet na příklady Cantorových množin.

Hausdorffova míra a dimenze evidentně nejsou jedinými nástroji k popisu "objemu" množin. Např. [**3**] nabízí ve formě "packing measure" a "packing dimension" jakýsi protipól k Hausdorffově míře, neboť popisovaná množina není pokrývána zvnějšku. Narozdíl od Minkowského dimenze je však "packing" dimenze vystavena na pojmu míry (stejným způsobem jako dimenze Hausdorffova). Zkoumání dalších alternativních měr a dimenzí ovšem přesahuje rámec této práce a je tak zajímavým podnětem k dalsímu studiu, stejně jako využití některých matematických softwarových nástrojů k alespoň přibližnému výpočtu různých typů měr a dimenzí měřených množin.

Reference

[1] BEARDON, A. F. *On the Hausdorff Dimension of General Cantor Sets.* Proc. Camb. Phil. Soc., 61, 1965.

[2] CABRELLI, C. - MOLTER, U. - PAULASKAS, V. - SHONKWILER, R. *Hausdorff Measure of p-Cantor Sets.* Dostupné z: http://people.math.gatech.edu/∼shenk/Research/FractalGeometry/p-series.pdf

[3] FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* s. 3-44. John Wiley & Sons Ltd., 1990.

[4] HARDY, G. H. - LITTLEWOOD, J. E. - PÓLYA, G. *Inequalities (Second Edition).* Cambridge University Press, 1952.

[5] JARNÍK, V. *Integrální počet II.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1955.

[6] LISKEVICH, V. *Measure Theory.* Swansea, Swansea University 1998.

[7] LUKEŠ, J. a kol. *Problémy z matematické analýzy.* Katedra matematiky MFF UK, Praha 1982.

[8] LUKEŠ, J. - MALÝ, J. *Measure and Integral.* Matfyzpress, Praha 2005.

[9] NETUKA, I. *MAA068 - Teorie míry a integrálu (Lebesgueova míra).* s. 15-16. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼netuka/leb_mira.pdf

[10] PAUŠ, P. *Počítačové metody analýzy fraktálních množin (diplomová práce, FJFI ČVUT).* s. 18-21. Dostupné z http://geraldine.fjfi.cvut.cz/∼pausp/files/DIPLOMKA.pdf

[11] TAO, T. *245C, Notes 5: Hausdorff dimension (optional).* Dostupné z: http://terrytao.wordpress.com/2009/05/19/245c-notes-5-hausdorff-dimension-optional/

[12] SATTINGER, D. H. *Measure Theory and Integration.* Fall, Yale University 2004.

[13] SHONKWILER, R. - CABRELLI, C. - MOLTER, U. - PAULASKAS, V. *On the Hausdorff h-measure of Cantor sets.* s. 4-5. Dostupné z: http://math.acadiau.ca/mendivil/Papers/cantor.pdf