

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ, 2013

MATĚJ KAUKAL

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

INVERZNÍ KINEMATIKA SÉRIOVÝCH
MANIPULÁTORŮ S OMEZENOU
ARCHITEKTUROU

PLZEŇ, 2013

MATĚJ KAUKAL

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 15. května 2013

.....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval Ing. Martinovi Švejdovi za vedení a připomínky k práci, poskytnutí materiálů a pomoc s řešením rovnic.

Abstrakt

Tato práce se zabývá řešením zpětné kinematické úlohy pro sériové manipulátory s omezenou strukturou. Nejprve je popsána struktura obecného manipulátoru a důležité pojmy z robotiky. Dále je vysvětlen způsob popisu polohy a rotace použitý v práci a dvě úmluvy pro popis manipulátoru - Denavit Hartenbergova a Khalil Kleinfingerova. Oba popisy jsou předvedeny na příkladech. Hlavní část práce se pak zabývá řešením zpětné úlohy manipulátorů se třemi rotačními a třemi translačními klouby a manipulátorů se sférickým zápěstím. Nalezené postupy řešení jsou nakonec implementovány jako funkce v Matlabu, která ze zadaných parametrů manipulátoru počítá přímou a zpětnou kinematickou úlohu.

Klíčová slova

Sériové manipulátory, přímá kinematická úloha, zpětná kinematická úloha, Denavit Hartenbergova úmluva, Khalil Kleinfingerova úmluva, sférické zápěstí, dekompozice omezených architektur, Matlab.

Abstract

This theses deals with solving inverse kinematic model of serial manipulators with constrained structure. First, the structure of general manipulator is described and important terms are explained. After that, notation of position and rotation of axes system is shown, along with two methods of axes transformation - the Denavit Hartenberg convention and Khalil Kleinfinger convention. Both conventions are described using examples. The main part of this work deals with the solution of inverse kinematic model of manipulators with three revolute joints and three prismatic joints and manipulators with spherical wrist. Obtained solutions are then implemented in Matlab function, which solves the direct and inverse kinematic model using the input parameters.

Keywords

Serial manipulators, direct kinematic model, inverse kinematic model, Denavit Hartenberg convention, Khalil Kleinfinger convention, spherical wrist, constrained architectures decomposition, Matlab.

Obsah

1 Úvod a cíle práce	6
2 Manipulátory	7
2.1 Struktura manipulátoru	7
2.2 Důležité pojmy	8
2.3 Současný stav	10
3 Reprezentace polohy a rotace	11
3.1 Další možnosti reprezentace rotace	13
3.2 Homogenní transformační matice	14
4 Denavit Hartenbergova úmluva pro popis kinematiky manipulátorů	15
5 Khalil Kleinfingerova úmluva pro popis kinematiky manipulátorů	19
6 Přímá kinematická úloha	23
7 Zpětná kinematická úloha	24
8 Manipulátory se třemi translačními a třemi rotačními klouby	25
8.1 Typy rovnic	28
9 Manipulátory se sférickým zápěstím	29
9.1 Sférické zápěstí	29
9.2 Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.	29
9.3 Obecný manipulátor se sférickým zápěstím	33
9.4 Sférické zápěstí a tři translační klouby	35
9.5 Sférické zápěstí, dva translační a jeden rotační kloub	36
9.6 Sférické zápěstí, dva rotační a jeden translační kloub	37
9.7 Sférické zápěstí a tři rotační klouby	39
9.7.1 Sférické zápěstí na pozici 1 a 4	39
9.7.2 Sférické zápěstí na pozici 2 a 3	41
10 Implementace v Matlabu	44
10.1 Funkce DGM	44
10.2 Funkce IGM	45
10.3 Interní funkce	45
11 Zhodnocení výsledků	47
12 Závěr	51
A Příloha - help pro funkce IGM a DGM	52

1 Úvod a cíle práce

Hlavním zaměřením této práce jsou manipulátory, zejména sériové se šesti stupni volnosti. V první části je popsána struktura obecného manipulátoru a vysvětleny pojmy z robotiky relevantní pro tuto práci. Dále jsou probrány možnosti reprezentace polohy a rotace použité v této práci a pro srovnání ukázány alternativní postupy reprezentace rotace. Na tyto notace pak navazují úmluvy pro popis transformací mezi souřadnými systémy, používané pro popis manipulátorů. Jedná se o Denavit Hartenbergovu úmluvu a Khalil Kleinfingerovu úmluvu. Denavit Hartenbergova úmluva je využita při vysvětlení důležitých pojmů přímá a zpětná kinematická úloha. Opět nejprve pro obecné manipulátory a poté pro omezené architektury, kterými se tato práce zabývá - manipulátorem se třemi translačními a třemi rotačními klouby a manipulátorem se sférickým zápěstím. Nejprve jsou odvozeny obecné rovnice, které jsou poté prozkoumány a vyřešeny pro jejich různé tvary.

Tak se dostáváme k nejdůležitějšímu bodu a cíli této práce, implementaci těchto algoritmů jako funkce v Matlabu. Tato funkce zpracuje přímou a zpětnou úlohu podle zadaných Denavit Hartenbergových parametrů a zjistí tak buď polohu a rotaci koncového efektoru pro přímou úlohu, či potřebné nastavení jednotlivých kloubů v případě zpětné úlohy. Na závěr této práce je tato funkce popsána v jakési uživatelské příručce, společně s některými zajímavými interními funkcemi, které tento algoritmus využívá.

2 Manipulátory

Tato práce se zabývá robotickými manipulátory, jedná se o robotické zařízení, které zesiluje, urychluje či jiným způsobem ulehčuje či zkvalitňuje lidskou práci. Podle svého zaměření je lze rozdělit do několika kategorií, my se budeme zabývat zejména manipulátory nasazovanými v průmyslu. Tyto manipulátory se většinou vyznačují univerzální použitelností a jejich funkci lze měnit úpravou programu [5].



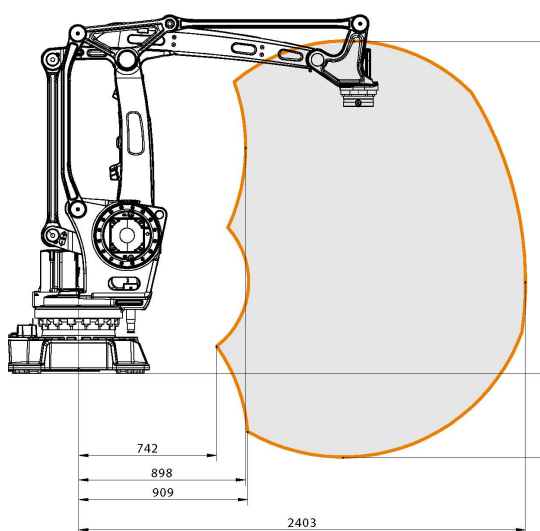
Obrázek 1: Manipulátor KUKA.

2.1 Struktura manipulátoru

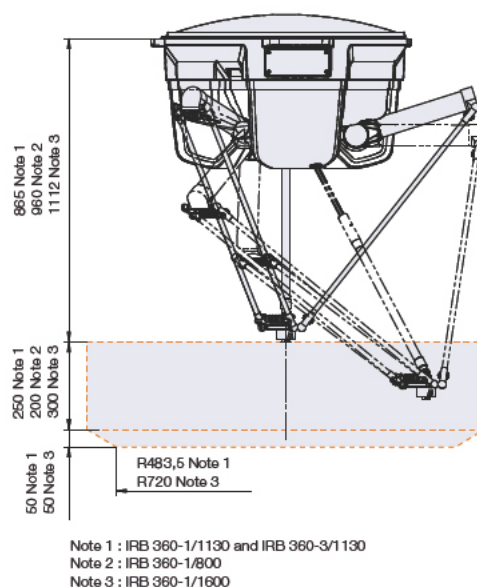
V krátkosti si popíšeme strukturu manipulátoru [5]. *Základna manipulátoru* představuje pevnou část, která určuje souřadný systém robotu. Na tu jsou napojena *ramena manipulátoru*, která vykonávají vlastní pohyb. Ta jsou spojena pomocí *kloubů*, jejich druh a počet určuje rozsah pohybu a počet stupňů volnosti (viz dále). Pokud jsou klouby poháněny nějakým pohonem, mluvíme o kloubech aktivních, v opačném případě jde o pasivní klouby, které pouze vymezují rozsah pohybu dvou sousedních ramen. Spojení ramen a kloubů tvoří *kinematickou strukturu* manipulátoru. Poslední část je *koncový efektor*, většinou pracovní nástroj. *Pracovní prostor* určuje množinu všech dosažitelných pozic v prostoru, tato množina je závislá na konstrukci robotu. Natočení, či posun jednotlivých aktuátorů určuje *vektor kloubových souřadnic* Q . Výsledná poloha a orientace koncového efektoru je *vektor zobecněných souřadnic* X . Nalezení transformací mezi kloubovými a zobecněnými souřadnicemi je pak úkolem pro *přímou kinematickou úlohu* $X = F(Q)$, která převádí jednotlivé natočení a posuny kloubů na souřadnice a natočení efektoru. Inverzní úloha k této je *zpětná kinematická úloha* $Q = F^{-1}(X)$, která převádí pozici a rotaci koncového efektoru na natočení a posun jednotlivých kloubů. Více o těchto úlohách dále.

Manipulátory se podle tvaru kinematické struktury dělí do dvou skupin. *Sériové manipulátory* mají kinematickou strukturu ve tvaru otevřeného řetězce. Vznikají postupným napojováním ramen a kloubů. Toto uspořádání umožňuje jednoduchou mechanickou konstrukci a v porovnání s jinými způsoby uspořádání jednodušší konstrukci. Nevýhodou je způsob, jakým se projevují chyby v jednotlivých částech manipulátoru - vlivem konstrukce se tyto chyby sčítají.

Paralelní manipulátory mají uzavřenou kinematickou strukturu, koncový efektor je tak současně připojen na více než jedno rameno. Výhodou je vyšší přesnost, protože se mechanické chyby průměrují a vyšší tuhost, díky rozložení na větší počet ramen. Nevýhodou je složitější řízení vlivem komplikovaných transformací mezi souřadnicemi kloubů a efektoru. Konstrukční omezení také mohou způsobit relativně menší pracovní prostor oproti sériovému manipulátoru.



(a) Sériový manipulátor.



(b) Paralelní manipulátor.

Obrázek 2: Srovnání sériového a paralelního manipulátoru ABB s vyznačenými pracovními prostory.

2.2 Důležité pojmy

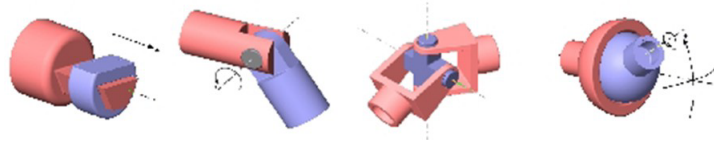
Na závěr této kapitoly si ještě vysvětlíme několik důležitých pojmů [5].

- Počet stupňů volnosti - DoF

Minimální počet parametrů (rotace, translace), který jednoznačně popisuje polohu bodu tělesa v rovině či prostoru. Bod v rovině má tak 2 DoF, v prostoru 3 DoF. Tuhé těleso, kde uvažujeme i rotaci má v prostoru 6 DoF.

- Klouby manipulátoru

Liší se počtem a typem stupňů volnosti, nejpoužívanější jsou:
 posuvný, **P**-kloub, přidávající jeden translační stupeň volnosti.
 rotační, **R**-kloub, přidávající jeden rotační stupeň volnosti.
 univerzální (Kardanův), **U**-kloub, přidávající dva rotační stupně volnosti.
 sférický, **S**-kloub, přidávající všechny tři rotační stupně volnosti.



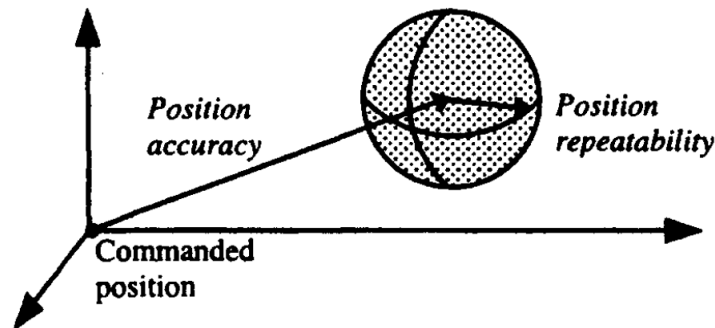
Obrázek 3: Různé typy kloubů (P, R, U, S).

- Domovská poloha manipulátoru

Manipulátor je v domovské poloze, pokud jsou jeho aktivní kloubové souřadnice Q ve výchozí (domovské) poloze.

- Přesnost a opakovatelnost

Přesnost (accuracy) manipulátoru je dána odchylkou požadované polohy a skutečné polohy (naměřené referenčním měřidlem) koncového efektoru. Opakovatelnost (repeatability) je maximální rozdíl mezi skutečnými polohami koncového efektoru po jeho přesunu do jedné požadované polohy z různých výchozích poloh.



Obrázek 4: Přesnost (accuracy) a opakovatelnost (repeatability).

- Redundance

Manipulátor je redundantní, pokud je počet jeho nezávislých aktivních kloubových souřadnic větší než počet stupňů volnosti koncového efektoru manipulátoru.

2.3 Současný stav

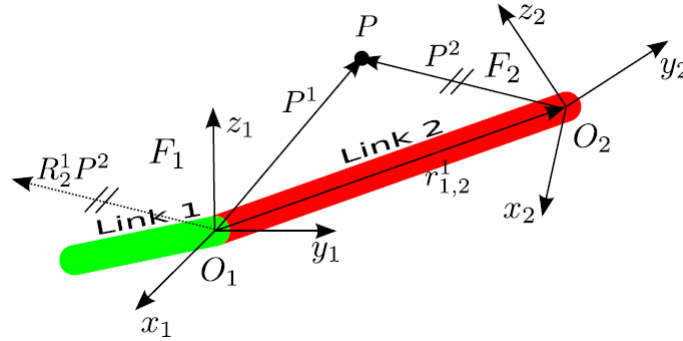
Manipulátory jsou v současné době široce nasazované a používané. Zejména sériové manipulátory lze nalézt takřka na každé výrobní lince. Pro správný a efektivní chod je třeba řešit přímou a zpětnou kinematickou úlohu. Přímá úloha je pro sériové manipulátory obecně triviální, zpětná úloha pak může být v závislosti na počtu a typu kloubů řešitelná velmi obtížně. Přímočaré analytické řešení lze obecně nalézt pro jednoduché manipulátory, s pohybem většinou planárního charakteru. Často je přesto potřeba zkušeností a geometrického náhledu na úlohu. Dále existují metody pro řešení obecných architektur, ty ovšem bývají komplikované. Je také možnost nasadit numerické, například gradientní metody, tyto jsou ovšem většinou schopné nalézt jen jedno řešení, otázka je zda toto řešení bude realizovatelné. Také se potýkají s tradičními neduhy numerických metod, jako je stabilita, či numerické chyby.

V této práci se využívá zejména specializovaných metod pro řešení omezených architektur pomocí dekompozice. Bylo dokázáno [2], že při určitém složení kloubů lze manipulátor rozdělit na dvě jednodušší úlohy a řešení tak usnadnit.

3 Reprezentace polohy a rotace

Pro práci s manipulátorem je nejprve třeba určit jak reprezentovat polohu a rotaci jeho jednotlivých ramen. Je přirozené reprezentovat polohu vektorem, tedy například $X = [x \ y \ z]^T$ představuje souřadnice $x \ y \ z$. Pro další práci bude také potřeba rozlišovat v jakém souřadném systému se tyto souřadnice nacházejí.

Předpokládejme tedy dva souřadné systémy, F_1 , s počátkem souřadnic O_1 a osami x_1, y_1, z_1 , pevně spojený s ramenem *Link 1* a systém $F_2 = \{O_2 - x_2 y_2 z_2\}$ spojený s ramenem *Link 2*.



Obrázek 5: Transformace souřadných systémů.

Vzájemná translace mezi systémy F_1 a F_2 je tedy dána vektorem translace $r_{1,2}^1 = O_2^1 - O_1^1 = O_2^1$. [6] [5]

Rotaci vyjádříme pomocí matice rotace \mathbf{R}_j^i . Jedná se o reálnou matici 3×3 , kde sloupce $\mathbf{R}_j^i[:, k]$ představují jednotkové směrové vektory souřadného systému F_j vzhledem souřadnému systému F_i .

$$\mathbf{R}_j^i = \begin{bmatrix} x_j^i & y_j^i & z_j^i \end{bmatrix}$$

Tato matice má následující vlastnosti:

- \mathbf{R}_j^i je ortogonální, platí tedy $(\mathbf{R}_j^i)^T = (\mathbf{R}_j^i)^{-1}$.
- Díky závislosti prvků dále platí $\mathbf{R}_j^i[:, k]^T \cdot \mathbf{R}_j^i[:, l] = \mathbf{R}_j^i[k, :] \cdot \mathbf{R}_j^i[l, :]^T = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = l \\ 0 & \text{pro } k \neq l \end{cases}$
kde $\mathbf{R}_j^i[:, k]$ značí k -tý sloupec a $\mathbf{R}_j^i[k, :]$ k -tý řádek.
- Díky první vlastnosti platí druhá vlastnost i pro $(\mathbf{R}_j^i)^{-1}$

Tyto vlastnosti budou s výhodou dále využity. Uvedeme si předpisy pro rotace podle hlavních os:

Rotace podle osy x o úhel α $\text{Rot}(x, \alpha)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$\text{Rot}(y, \beta)$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$\text{Rot}(z, \gamma)$

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Úhly α, β, γ se nazývají Eulerovské úhly. Obecnou rotaci můžeme vyjádřit dvěma způsoby pomocí těchto elementárních rotací. [5]

1. Postupná rotace kolem os souřadných systémů.

Při schématu XYZ:

- Odrotuj s.s. F_1 kolem osy x_1 o úhel $\alpha \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_1'
- Odrotuj s.s. F_1' kolem osy y_1' o úhel $\beta \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_1''
- Odrotuj s.s. F_1'' kolem osy z_1'' o úhel $\gamma \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_2

Zapíšeme jako

$$\mathbf{R}_2^1 = \text{Rot}(z, \gamma) \cdot \text{Rot}(y, \beta) \cdot \text{Rot}(x, \alpha)$$

2. Rotace kolem os souřadného systému F_1 (fixované osy rotace)

Opět schéma XYZ:

- Odrotuj s.s. F_1 kolem osy x_1 o úhel $\alpha \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_1'
- Odrotuj s.s. F_1' kolem osy y_1 (tedy původní osy y) o úhel $\beta \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_1''
- Odrotuj s.s. F_1'' kolem osy z_1 o úhel $\gamma \Rightarrow$ vzniká nový souřadný systém F_2

Lze zapsat jako

$$\mathbf{R}_2^1 = \text{Rot}(x, \alpha) \cdot \text{Rot}(y, \beta) \cdot \text{Rot}(z, \gamma)$$

Rotaci tedy lze reprezentovat Eulerovými úhly nebo maticí rotace. Nyní si ukážeme, jak mezi těmito reprezentacemi přecházet. Pokud známe Eulerovy úhly, lze jednoznačným způsobem získat matici rotace $\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma)$. Například pokud uvažujeme schéma XYZ s postupnou rotací kolem os souřadných systémů, pak platí:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & -\cos(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\gamma) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cos(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Zpětná transformace lze tedy určit například takto¹:

Pokud platí $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\beta) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(-\mathbf{R}_2^1[2, 3], \mathbf{R}_2^1[3, 3]) \\ \beta &= \text{atan2}\left(\mathbf{R}_2^1[1, 3], \sqrt{(\mathbf{R}_2^1[2, 3])^2 + (\mathbf{R}_2^1[3, 3])^2}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}(-\mathbf{R}_2^1[1, 2], \mathbf{R}_2^1[1, 1]) \end{aligned}$$

¹atan2 značí funkci, která respektuje znaménka argumentů a vrací korektní řešení podle kvadrantu úhlu.

Pokud platí $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $\cos(\beta) < 0$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{atan2}(\mathbf{R}_2^1[2, 3], -\mathbf{R}_2^1[3, 3]) \\ \beta &= \text{atan2}\left(\mathbf{R}_2^1[1, 3], -\sqrt{(\mathbf{R}_2^1[2, 3])^2 + (\mathbf{R}_2^1[3, 3])^2}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}(\mathbf{R}_2^1[1, 2], -\mathbf{R}_2^1[1, 1])\end{aligned}$$

Pokud platí $\beta = \frac{\pi}{2}$, pak matice rotace degeneruje na

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze tak určit jen rozdíl úhlů α a γ . Pro $\beta = -\frac{\pi}{2}$, pak matice rotace degeneruje na

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

a lze tak určit pouze součet úhlů α a γ . Úhly $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ představují singularitu v reprezentaci rotace pomocí Eulerových úhlů. Osy x_1 a z_1'' jsou v tomto případě rovnoběžné a nelze jednoznačně určit úhly α a γ , pouze jejich rozdíl či součet.

3.1 Další možnosti reprezentace rotace

V krátkosti si ještě představíme alternativní možnosti reprezentace rotace. Jedná se o obecnou osu rotace a jednotkový kvarternion.

1. Obecná osa rotace

Jedná se o reprezentaci pomocí 4 parametrů: vektor rotace $r = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ kde norma vektoru $\|r\| = 1$ a úhel rotace ϑ kolem tohoto vektoru. Dopředná transformace $r, \vartheta \rightarrow \mathbf{R}$ pak probíhá takto [1]:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(r, \vartheta) &= \text{Rot}(z, \alpha) \cdot \text{Rot}(y, \beta) \cdot \text{Rot}(z, \vartheta) \cdot \text{Rot}(y, -\beta) \cdot \text{Rot}(z, -\alpha) = \\ &= \begin{bmatrix} r_x^2(1 - \cos(\vartheta)) + \cos(\vartheta) & r_x r_y(1 - \cos(\vartheta)) - r_z \sin(\vartheta) & r_x r_z(1 - \cos(\vartheta)) + r_y \sin(\vartheta) \\ r_x r_y(1 - \cos(\vartheta)) + r_z \sin(\vartheta) & r_y^2(1 - \cos(\vartheta)) + \cos(\vartheta) & r_y r_z(1 - \cos(\vartheta)) - r_x \sin(\vartheta) \\ r_x r_z(1 - \cos(\vartheta)) - r_y \sin(\vartheta) & r_y r_z(1 - \cos(\vartheta)) - r_x \sin(\vartheta) & r_z^2(1 - \cos(\vartheta)) + \cos(\vartheta) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

To si lze představit jako přesun do souřadného systému obecné osy, rotace kolem této osy a zpětný návrat do původního souřadného systému. Zpětná transformace pak lze zapsat jako [1]

$$\vartheta = \text{acos}\left(\frac{\mathbf{R}[1, 1] + \mathbf{R}[2, 2] + \mathbf{R}[3, 3] - 1}{2}\right), \quad r = \frac{1}{2 \sin(\vartheta)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}[3, 2] - \mathbf{R}[2, 3] \\ \mathbf{R}[1, 3] - \mathbf{R}[3, 1] \\ \mathbf{R}[2, 1] - \mathbf{R}[1, 2] \end{bmatrix}$$

Nastává tedy singularita pokud $\vartheta = \{0, \pi\}$.

2. Jednotkový kvarternion

Definován jako $\Pi = [\eta \quad \epsilon^T]^T$, $\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z]^T$, kde $\eta = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, $\epsilon = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)r$, $\|\Pi\| = 1$. r a ϑ zůstávají z předchozí reprezentace. Dopředná transformace je pak

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\epsilon_x\epsilon_z + \eta\epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y\epsilon_z + \eta\epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z) & 2(\epsilon_y\epsilon_z + \eta\epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

Zpětná transformace:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{R}[1, 1] + \mathbf{R}[2, 2] + \mathbf{R}[3, 3] + 1}, \quad \epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\mathbf{R}[3, 2] - \mathbf{R}[2, 3]) \sqrt{\mathbf{R}[1, 1] - \mathbf{R}[2, 2] - \mathbf{R}[3, 3] + 1} \\ \operatorname{sgn}(\mathbf{R}[1, 3] - \mathbf{R}[3, 1]) \sqrt{\mathbf{R}[2, 2] - \mathbf{R}[3, 3] - \mathbf{R}[1, 1] + 1} \\ \operatorname{sgn}(\mathbf{R}[2, 1] - \mathbf{R}[1, 2]) \sqrt{\mathbf{R}[3, 3] - \mathbf{R}[1, 1] - \mathbf{R}[2, 2] + 1} \end{bmatrix}$$

Nenastává tedy žádná singularita.

3.2 Homogenní transformační matice

Při znalosti vektoru polohy $r_{i,j}^i$ a matice rotace \mathbf{R}_j^i je možné sestavit transformační matici polohy a rotace \mathbf{T}_j^i ve tvaru

$$\mathbf{T}_j^i = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & \mathbf{R}_j^i & & r_{i,j}^i & \\ & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tato matice souvisí s projektivními transformacemi, využívá se například v grafice. Lze ji interpretovat jako reprezentaci polohy a rotace vektoru Y_i v souřadném systému F_j , ale také ji lze použít jako transformační matici pro přechod mezi souřadnými systémy. Tato transformace probíhá jednoduše vynásobením, pokud chceme vyjádřit souřadnice bodu X_i v souřadném systému F_j , potřebujeme pouze transformační matici \mathbf{T}_j^i a pak platí:

$$X_i = \mathbf{T}_j^i X_j$$

neboli

$$X_j = (\mathbf{T}_j^i)^{-1} X_i = \mathbf{T}_i^j X_i$$

Matice tedy obecně popisuje transformaci souřadného systému F_j vzhledem k souřadnému systému F_i . Platí:

- $\mathbf{T}_j^i \cdot \mathbf{T}_k^j = \mathbf{T}_k^i$
- $\mathbf{T}_j^i[1 : 3, 1 : 3] = \mathbf{R}_j^i$ neboli rotace a $\mathbf{T}_j^i[1 : 3, 4] = r_{i,j}^i$ je posun, tedy translace.

$$\bullet (\mathbf{T}_j^i)^{-1} = \mathbf{T}_i^j = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & (\mathbf{R}_j^i)^T & & (\mathbf{R}_j^i)^T \cdot r_{i,j}^i & \\ & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

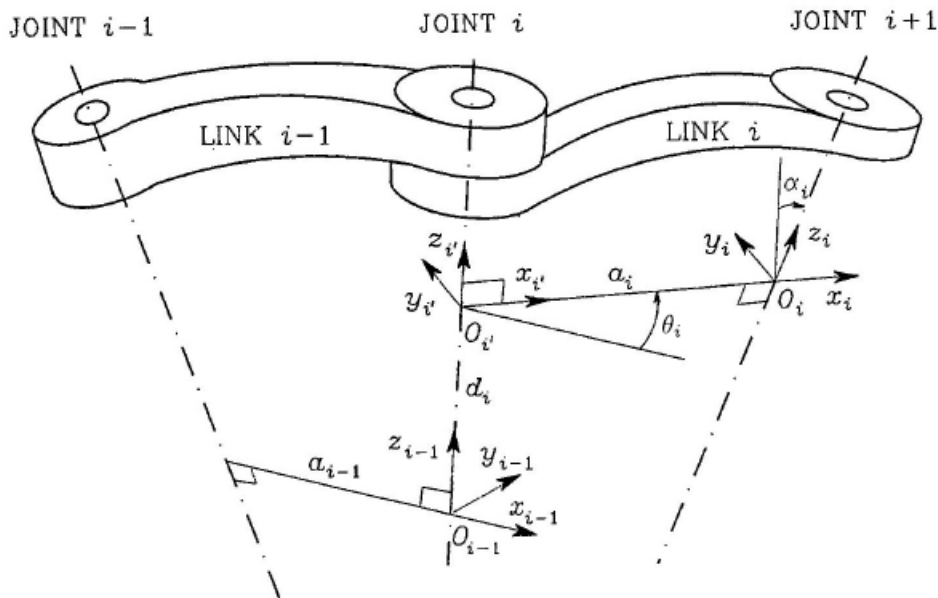
NEPLATÍ již tedy, že translace je ekvivalentní inverzi jako u rotační matice !

4 Denavit Hartenbergova úmluva pro popis kinematiky manipulátorů

Nyní, když máme prostředek jak definovat souřadné systémy, je třeba určit si jednoznačný systém jak tyto systémy určit v rámci manipulátoru. V této práci se pracuje s Denavit Hartenbergovým (DH) popisem, který definuje přechod z jednoho ramena manipulátoru na další pomocí 4 parametrů. Pokud máme klouby $i-1$, i , $i+1$ a mezi nimi spojení $i-1$, i , je třeba postupovat následovně [1] [3]:

- Označíme osu kloubu $i+1$ (směr, kterým se pohybuje translační kloub, či osa podle které se otáčí rotační kloub) jako z_i a osu kloubu i jako z_{i-1} .
- Určíme počátek souřadnic O_i v průsečíku osy z_i s normálou os z_i a z_{i-1} .
- Osu x_i zvolíme ve směru výše uvedené normály tak, aby směřovala z kloubu i do kloubu $i+1$.
- Osu y_i doplníme tak, aby byl souřadný systém pravotočivý.

Pro lepší představu je připojen obrázek [3]:



Obrázek 6: Denavit Hartenbergova úmluva.

Nyní je možné definovat parametry $[d \ \theta \ a \ \alpha]$ s následujícím významem [1]:

d – Vzdálenost počátků souřadnic O_{i-1} a O'_i

θ – Úhel mezi osami x_{i-1} a x_i

a – Vzdálenost počátků souřadnic O'_i a O_i

α – Úhel mezi osami z_{i-1} a z_i

Parametr d dále představuje posun pro translační kloub, ostatní parametry jsou pak geometrické parametry kloubu. Pro rotační kloub je θ rotace tohoto kloubu a ostatní parametry jsou geometrické parametry. Jsme-li v souřadném systému F_i a chceme přejít na známý souřadný systém F_{i+1} provedeme následující:

1. Posuneme souřadný systém podél osy z_i (osa z prvního s.s.) o vzdálenost d_i a dále jej otočíme kolem osy z_i o úhel θ_i .
2. Tento nový s.s. F'_{i+1} posuneme podél osy x'_{i+1} o vzdálenost a_i a otočíme podle osy x'_{i+1} o úhel α_i .
3. Nyní jsme již v novém souřadném systému F_{i+1}

Rotace a posuny provedeme pomocí transformačních matic. Máme-li polohu a rotaci zadanou maticí ve tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kde vektory r představují rotaci a vektor t translaci. Můžeme provést posun o vzdálenost d rotaci o úhel θ kolem a podél osy z vynásobením následující maticí:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

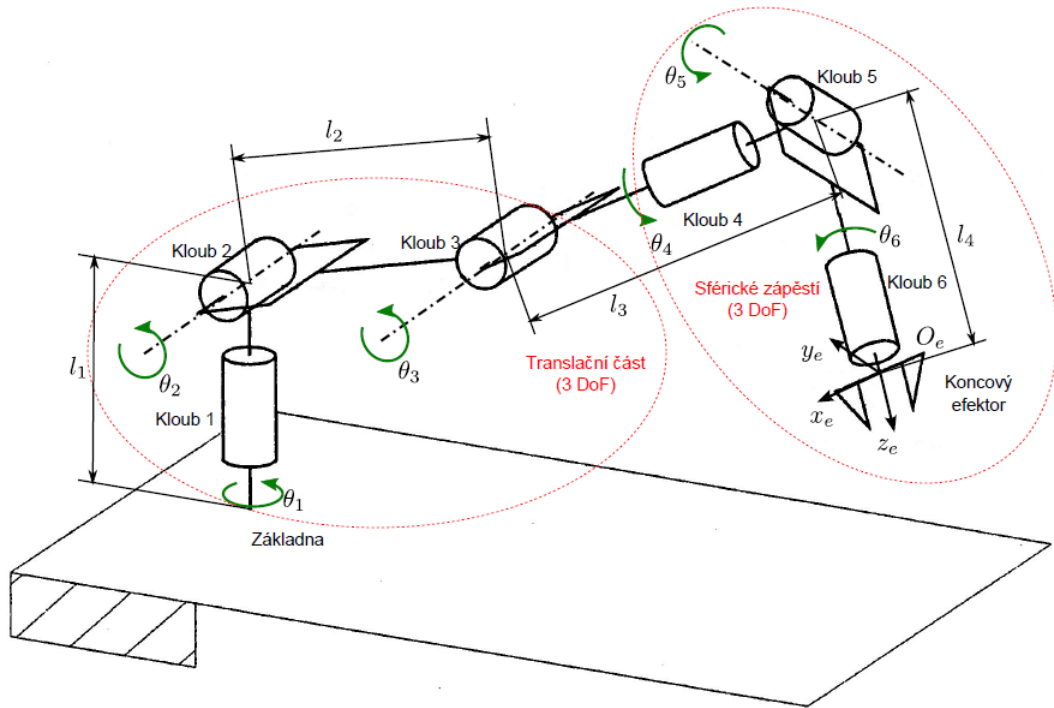
Dále posun o vzdálenost a rotaci o úhel α kolem a podél osy x vynásobením následující maticí:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tím získáváme transformační matici \mathbf{T}_{i+1}^i

$$\mathbf{T}_{i+1}^i = \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Přiřazení Denavit Hartenbergových parametrů si ukážeme na příkladu antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím. Jedná se o neredundantní manipulátor se šesti stupni volnosti. Ten je schopen polohovat svůj efektor do libovolné pozice a orientace v prostoru (v rámci konstrukčních omezení manipulátoru). Tímto typem manipulátoru se budeme podrobněji zabývat dále, jedna z jeho realizací je zde:



Obrázek 7: Manipulátor se sférickým zápěstím popsáný Denavit Hartenbergovou dohodou.

DH parametry pro tento manipulátor jsou:

kloub	d	a	α
1	l_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	l_2	0
3	0	0	$\frac{\pi}{2}$
4	l_3	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
6	l_4	0	0

Protože se jedná pouze o rotační klouby, tak parametry θ_i určují rotaci jednotlivých kloubů.

Existují případy kdy je určení některé z os nejednoznačné [1]:

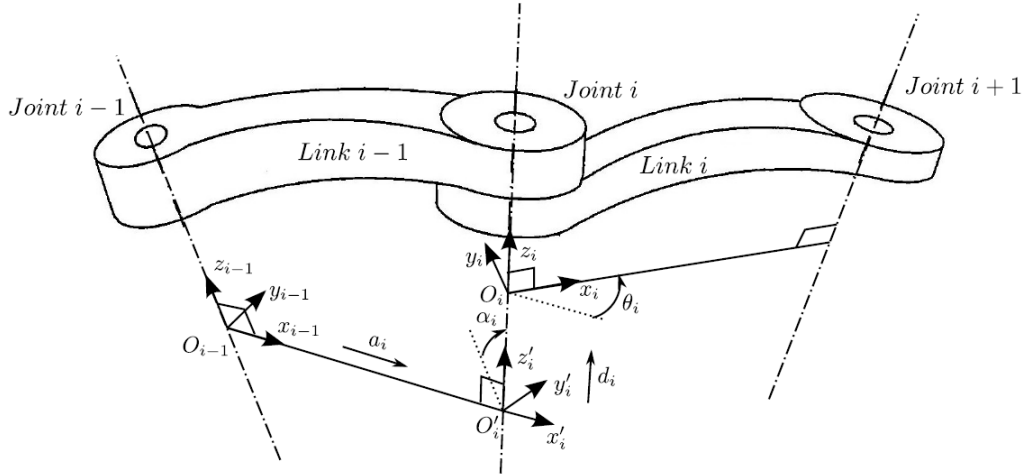
- Pro systém souřadnic prvního kloubu F_0 je jednoznačně určena pouze osa z_0 , osu x_0 a počátek souřadnic O_0 lze zvolit libovolně.
- Pro systém souřadnic posledního kloubu F_n osa z_n jednoznačně určena není, musí však platit, že osa x_n leží ve směru normály z_{n-1} a z_n .

- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy (z_{i-1}, z_i) rovnoběžné, pak jejich normála není jednoznačně definována (resp. je jich nekonečně mnoho). Je tedy možné ji nějakým způsobem zvolit tak, aby byla ve směru os kloubů.
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy (z_{i-1}, z_i) protínají, není normála definována a osu x_i je třeba zvolit kolmo na rovinu tvořenou osami (z_{i-1}, z_i) v libovolném směru.

Jak je vidět, souřadný systém F_i , který je svázán s ramenem i je umístěn v ose kloubu $i + 1$, nelze tedy popisovat rozvětvené kinematické řetězce (případ kdy jsou dva klouby svázány s jedním ramenem). Pro takové je třeba zvolit jinou metodu, například dále uvedenou Khalil-Kleinfingerovu.

5 Khalil Kleinfingerova úmluva pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil Kleinfingerova úmluva se od DH úmluvy liší v přidělení souřadných systému - s.s. F_i je umístěn v ose kloubu i , který určuje jeho pohyb. Obrázek zde [1]:



Obrázek 8: Khalil Kleinfingerova úmluva.

Pro přechod ze souřadného systému F_i do F_{i+1} je třeba postupovat následovně [1]:

- Označíme osu kloubu i jako z_i a osu kloubu $i-1$ jako z_{i-1} .
- Určíme počátek souřadnic O_i v průsečíku osy z_i s normálou os z_i a z_{i-1} .
- Osu x_i zvolíme ve směru normály os z_i a z_{i+1} tak, aby směřovala z kloubu i do kloubu $i + 1$
- Osu y_i doplníme tak, aby byl souřadný systém pravotočivý.

Opět je možné definovat parametry $\begin{bmatrix} d & \theta & a & \alpha \end{bmatrix}$ které tentokrát představují:

d – Vzdálenost počátků souřadnic O_i a O'_i

θ – Úhel mezi osami x_{i-1} a x_i

a – Vzdálenost mezi počátkem souřadnic O_{i-1} a osou z_i

α – Úhel mezi osami z_{i-1} a z_i

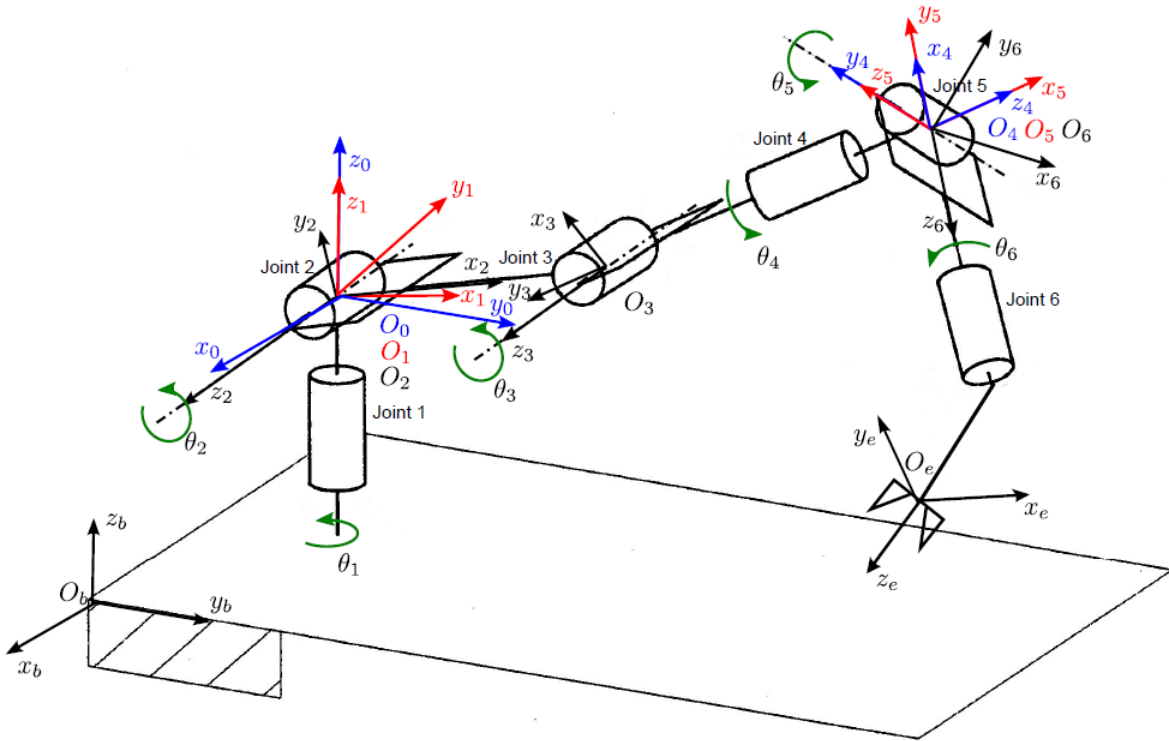
Jsmo-li v souřadném systému F_{i-1} a chceme přejít na známý souřadný systém F_i provedeme následující:

1. Posuneme souřadný systém podél osy x_{i-1} (osa z prvního s.s.) o vzdálenost a_i a dále jej otočíme kolem osy x_{i-1} o úhel α_i .
2. Tento nový s.s. F'_i posuneme podél osy z'_i o vzdálenost d_i a otočíme podle osy z'_i o úhel θ_i .
3. Nyní jsme již v novém souřadném systému F_i

Tím získáváme transformační matici \mathbf{T}_i^{i-1}

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -d_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opět si uvedeme příklad úmluvy pro antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.



Obrázek 9: Manipulátor se sférickým zápěstím popsáný Khalil Kleinfingerovou metodou.

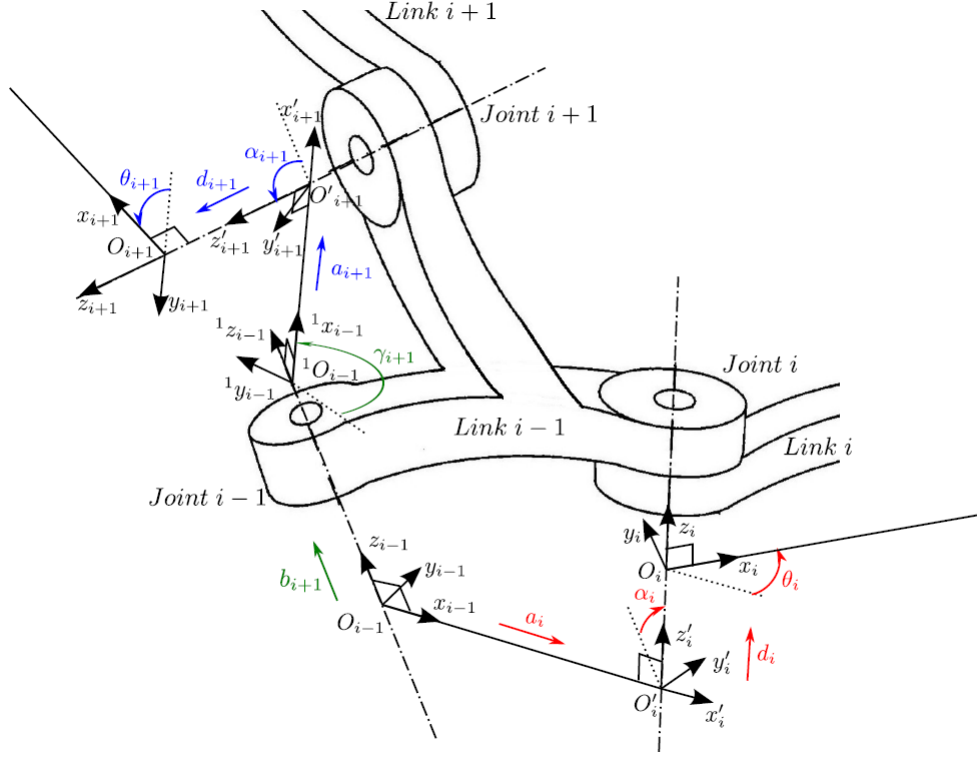
DH parametry pro tento manipulátor jsou:

kloub	d	a	α
1	0	0	0
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	l_2	0
4	l_3	0	$\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	0	$\frac{\pi}{2}$

Protože se jedná pouze o rotační klouby, tak parametry θ_i určují rotaci jednotlivých kloubů. Tentokrát

se v parametrech nevyskytují parametry l_1 a l_4 . Tyto mohou být součástí kompenzačních matic \mathbf{T}_0^b a \mathbf{T}_e^n . Velkou výhodou oproti předchozí úmluvě má KK v popisu rozvětvených architektur [5]:

Předpokládáme rozvětvený řetězec



Obrázek 10: Rozvětvený řetězec popsáný Khalil Kleinfingerovou metodou.

Vzájemná transformace mezi kloubem $i - 1$ a kloubem i je jednoznačně definována KK transformací pomocí výše uvedené transformační matice. Definujeme pomocný souřadný systém ${}^1F_{i-1}$, která má osu ${}^1z_{i-1}$ totožnou s osou z_{i-1} a osa ${}^1x_{i-1}$ je definována ve směru normály os z_{i-1} a z_{i+1} . Transformace mezi systémy F_{i-1} a ${}^1F_{i-1}$ bude popsána parametry

- γ_{i+1} - úhel mezi osami x_{i-1} a ${}^1x_{i-1}$ kolem osy z_{i-1} .
- b_{i+1} - vzdálenost mezi počátkem O_{i-1} a počátkem ${}^1O_{i-1}$.

Transformace $F_{i-1} \Rightarrow {}^1F_{i-1}$ je dána posunem s.s. F_{i-1} podél osy z_{i-1} o hodnotu b_{i+1} a otočením kolem osy z_{i-1} o úhel γ_{i+1} .

$$\mathbf{T}_{1i-1}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{i+1}) & -\sin(\gamma_{i+1}) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma_{i+1}) & \cos(\gamma_{i+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformace ${}^1F_{i-1} \Rightarrow F_{i+1}$ je pak dána známou transformační maticí

$$\mathbf{T}_{i+1}^{1_{i-1}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & -\sin(\theta_{i+1}) & 0 & a_{i+1} \\ \cos(\alpha_{i+1}) \sin(\theta_{i+1}) & \cos(\alpha_{i+1}) \cos(\theta_{i+1}) & -\sin(\alpha_{i+1}) & -d_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) \\ \sin(\alpha_{i+1}) \sin(\theta_{i+1}) & \sin(\alpha_{i+1}) \cos(\theta_{i+1}) & \cos(\alpha_{i+1}) & d_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledná transformace je tak ²

$$\mathbf{T}_{1_{i-1}}^{i-1} \mathbf{T}_{i+1}^{1_{i-1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \cos(\theta) - \sin(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\theta) & -\cos(\gamma) \sin(\theta) - \sin(\gamma) \cos(\alpha) \cos(\theta) & \sin(\gamma) \sin(\alpha) & \sin(\gamma) \sin(\alpha)d + \cos(\gamma)a \\ \sin(\gamma) \cos(\theta) + \cos(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\theta) & -\sin(\gamma) \sin(\theta) + \cos(\gamma) \cos(\alpha) \cos(\theta) & -\cos(\gamma) \sin(\alpha) & -\cos(\gamma) \sin(\alpha)d + \sin(\gamma)a \\ \sin(\alpha) \sin(\theta) & \sin(\alpha) \cos(\theta) & \cos(\alpha) & d \cos(\alpha) + b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogickým způsobem pak lze odvodit vztahy pro libovolný počet kloubů připojených na rameni $i - 1$. Khalil Kleinfingerova úmluva jednoznačně definuje kloubové souřadnice každého kloubu. Nejednoznačné stavy nastávají pro následující případy [1]:

- Systém souřadnic prvního kloubu F_0 lze zvolit libovolně.
- Pro systém souřadnic posledního kloubu F_n je jednoznačně určena pouze osa z_n , x_n může být zvolena libovolně.
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy (z_{i-1}, z_i) rovnoběžné, pak jejich normála není jednoznačně definována (resp. je jich nekonečně mnoho). Je tedy možné ji nějakým způsobem zvolit tak, aby byla ve směru os kloubů.
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy (z_{i-1}, z_i) protínají, není normála definována a osu x_i je třeba zvolit kolmo na rovinu tvořenou osami (z_{i-1}, z_i) v libovolném směru.

²pro zkrácení zápisu jsou vynechány indexy $i+1$

6 Přímá kinematická úloha

Přímá kinematická úloha představuje přechod od nastavení jednotlivých kloubů (kloubových souřadnic Q) na polohu koncového efektoru X . Tedy představuje funkci

$$X = F(Q, \xi)$$

kde ξ jsou návrhové parametry manipulátoru [1]. Dříve jsme si ukázali předpis pro přechod z jednoho ramene do dalšího pomocí transformační matice, složené z DH parametrů. Můžeme tedy jejich pomocí získat transformaci ze souřadného systému prvního ramene do souřadného systému ramene posledního:

$$\mathbf{T}_n^0 = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi)$$

Je třeba však zvážit kompenzaci polohy základny a koncového efektoru. Kompenzace polohy základny představuje umístění manipulátoru vzhledem k poloze základny, například umístění manipulátoru na výrobní lince. Kompenzace polohy koncového efektoru představuje například rozměry pracovního nástroje na koncovém efektoru.

Obě tyto kompenzace lze provést pomocí kompenzačních matic, označíme je jako \mathbf{T}_0^b pro kompenzaci základny a \mathbf{T}_e^n pro kompenzaci efektoru. Výsledná transformace tak je:

$$X = F(Q, \xi) = \mathbf{T}_0^b \cdot \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi) \cdot \mathbf{T}_e^n$$

Kompenzační matice základny a efektoru budeme považovat za předem známé a v dalším řešení se budeme zabývat pouze maticí \mathbf{T}_n^0 . Přímý kinematický model je důležitý z několika důvodů [1]:

- Zjištění koncové polohy manipulátoru ze znalosti nastavení jednotlivých kloubů - obecně je jednodušší měřit nastavení těchto kloubů než polohu v prostoru.
- Plánování trajektorie (třeba znát body trajektorie)
- Kalibrace - porovnání polohy rekonstruované z parametrů modelu a polohy změřené v prostoru. Upravení parametrů.

Nakonec je nutno poznamenat, že výše uvedené vztahy se někdy nazývají geometrickou úlohou a za kinematickou úlohu se považuje řešení vztahů mezi rychlostí, zrychlením a případnými dalšími derivacemi polohy jednotlivých kloubů a rychlostí a zrychlením koncového efektoru X . Tato práce se zabývá pouze polohou.

7 Zpětná kinematická úloha

Zpětná kinematická úloha je inverzní problém k přímé úloze, známe polohu koncového efektoru X a zajímá nás potřebné nastavení jednotlivých kloubů pro dosažení této polohy. Tedy [1]

$$Q = F^{-1}(X, \xi)$$

Na rozdíl od přímé úlohy, kde pro sériový manipulátor existuje vždy jedno analytické řešení, pro zpětnou úlohu může obecně existovat řešení několik. Tato řešení může být navíc obtížné získat, zejména při nutnosti řešení soustavy nelineárních rovnic. Některá řešení nemusí odpovídat konfiguraci manipulátoru, či mohou být nedosažitelná v důsledku jeho konstrukce. Pro manipulátory řešené v této práci, které mají 6 stupňů volnosti a 6 kloubů se obecně jedná o řešení 6 nelineárních rovnic o 6 neznámých.

Pro vyřešení zpětné kinematické úlohy některých v praxi využívaných manipulátorů lze využít dekompozice - rozdělení rovnic manipulátoru na dvě nebo více soustav s menším počtem neznámých. Podrobněji si dekompozice ukážeme dále již pro konkrétní architektury.

Opět je třeba mít na paměti kompenzaci polohy základny a koncového efektoru. Pro řešení zpětné úlohy obecně známe polohu a rotaci koncového efektoru, což se dá označit jako \mathbf{T}_e^b . Jelikož známe transformační matice pro kompenzaci základny a efektoru, můžeme získat

$$\mathbf{T}_e^b = \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_n^0 \cdot \mathbf{T}_e^n$$

Po přepsání

$$\mathbf{T}_n^0 = (\mathbf{T}_0^b)^{-1} \cdot \mathbf{T}_e^b \cdot (\mathbf{T}_e^n)^{-1}$$

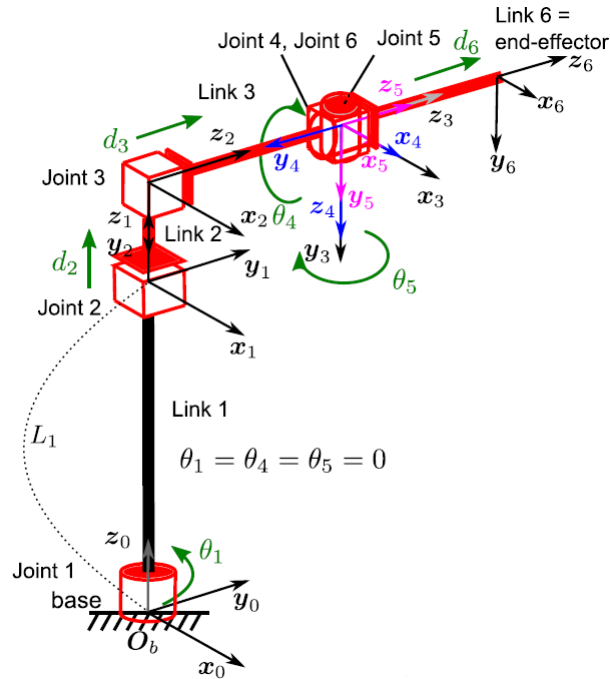
Při řešení zpětné kinematické úlohy se tedy budeme zabývat pouze řešením jednotlivých kloubů, kompenzací se nemusíme pro řešení zpětné úlohy zabývat.

Zpětná kinematická úloha je velmi důležitá pro jakýkoliv pohyb manipulátoru, většinou potřebujeme koncový efektor dostat na určitou pozici v prostoru, případně jím pohybovat po určité trajektorii. Ze znalosti tohoto bodu či trajektorie je pak nutné získat nastavení kloubů nutné pro dosažení tohoto cíle.

V dalších kapitolách se budeme zabývat řešením zpětné úlohy dvou architektur. První jsou manipulátory, které se skládají z právě tří translačních a právě tří rotačních kloubů. Tyto architektury lze dekomponovat na oddělené řešení rotace a translace. Další jsou manipulátory se šesti klouby, které mají v kterémkoliv bodě svého řetězce sférické zápěstí. Více o této architektuře a sférickém zápěstí v příslušné kapitole. Tyto manipulátory lze dekomponovat na oddělené řešení sférického zápěstí a klouby mimo sférické zápěstí. Stejně jako u přímé kinematické úlohy, i zde se sluší poznamenat, že se budeme zabývat pouze jejich polohou.

8 Manipulátory se třemi translačními a třemi rotačními klouby

V této kapitole se budeme zabývat manipulátory se třemi rotačními klouby (dále budeme značit jako typ R) a třemi translačními (typ P). Uspořádání jejich kloubů je tedy PPPRRR, PPRRRP a další, dohromady 20 kombinací. Jeden z manipulátorů, splňující tyto požadavky je například tento cylindrický manipulátor [1] s uspořádáním kloubů RPPRRP:



Obrázek 11: Cylindrický manipulátor se třemi P a třemi R klouby.

DH parametry pro tento manipulátor jsou:

kloub	d	θ	a	α
1	l_1	θ_1	0	0
2	d_2	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
3	d_3	0	0	0
4	0	θ_4	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	θ_5	0	$\frac{\pi}{2}$
6	d_6	0	0	0

l_1 je geometrický parametr, θ_i a d_i jsou pak rotace a posuny aktivních kloubů. Podíváme-li se na transformační matici libovolného kloubu typu P s využitím DH úmluvy:

$$\mathbf{T}_{i'/i+1}^{i'} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pak DH parametry θ, α, a jsou předem známé a konstantní, rotační matice je tak pro všechny translační klouby konstantní. Pokud tedy provedeme přímou kinematickou úlohu získáme

$$\mathbf{T}_6^0 = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_5 & -\cos \theta_1 \sin \theta_4 & \cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \cos \theta_5 & \star \\ \sin \theta_1 \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \cos \theta_1 \sin \theta_5 & -\sin \theta_1 \sin \theta_4 & \sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5 & \star \\ -\sin \theta_4 \cos \theta_5 & -\cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \sin \theta_5 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelikož matice \mathbf{T}_6^0 je známá matice, dostáváme soustavu rovnic

$$\cos \theta_1 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \sin \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[1, 1] \quad (1)$$

$$-\cos \theta_1 \sin \theta_4 = \mathbf{T}_6^0[1, 2] \quad (2)$$

$$\cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \cos \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[1, 3] \quad (3)$$

$$\sin \theta_1 \cos \theta_4 \cos \theta_5 - \cos \theta_1 \sin \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[2, 1] \quad (4)$$

$$-\sin \theta_1 \sin \theta_4 = \mathbf{T}_6^0[2, 2] \quad (5)$$

$$\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[2, 3] \quad (6)$$

$$-\sin \theta_4 \cos \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[3, 1] \quad (7)$$

$$-\cos \theta_4 = \mathbf{T}_6^0[3, 2] \quad (8)$$

$$-\sin \theta_4 \sin \theta_5 = \mathbf{T}_6^0[3, 3] \quad (9)$$

Vyřešíme například takto:

1. Okamžitě známe $\cos(\theta_4)$ z rovnice (8).
2. Umocněním a sečtením rovnic (7) a (9) získáváme $\sin(\theta_4)^2$, odmocněním $\sin(\theta_4)$.
3. Nyní můžeme získat úhel $\theta_4 = \text{atan2}(\sin(\theta_4), \cos(\theta_4))$, kde atan2 značí funkci arcus tangens, která respektuje znaménka u sinu a cosinu aby správně určila kvadrant do kterého výsledný úhel patří.
4. Vydělením rovnic (2) a (5) členem $\sin(\theta_4)$ můžeme získat $\theta_1 = \text{atan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1))$
5. Vydělením rovnic (7) a (9) členem $\sin(\theta_4)$ můžeme získat $\theta_5 = \text{atan2}(\sin(\theta_5), \cos(\theta_5))$

Obdržíme tak řešení

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \text{atan2} \left(\pm \sqrt{(\mathbf{T}_6^0[3, 1])^2 + (\mathbf{T}_6^0[3, 3])^2}, -\mathbf{T}_6^0[3, 2] \right) \\ \theta_1 &= \text{atan2} \left(\frac{-\mathbf{T}_6^0[2, 2]}{\sin \theta_4}, \frac{-\mathbf{T}_6^0[1, 2]}{\sin \theta_4} \right) \\ \theta_5 &= \text{atan2} \left(\frac{-\mathbf{T}_6^0[3, 3]}{\sin \theta_4}, \frac{-\mathbf{T}_6^0[3, 1]}{\sin \theta_4} \right) \end{aligned}$$

Další úhly získáme opět prozkoumáním přímé kinematické úlohy, tentokrát se zaměříme na vektor translace.

$$\mathbf{T}_6^0 = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi) = \begin{bmatrix} * & * & * & (\cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \cos \theta_5)d_6 - \sin \theta_1 d_3 \\ * & * & * & (\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5)d_6 + \cos \theta_1 d_3 \\ * & * & * & -\sin \theta_4 \sin \theta_5 d_6 + d_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Máme tak soustavu rovnice

$$\begin{aligned} (\cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \cos \theta_5)d_6 - \sin \theta_1 d_3 &= \mathbf{T}_6^0[1, 4] \\ (\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5)d_6 + \cos \theta_1 d_3 &= \mathbf{T}_6^0[2, 4] \\ -\sin \theta_4 \sin \theta_5 d_6 + d_2 + l_1 &= \mathbf{T}_6^0[3, 4] \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení:

$$\begin{aligned} d_6 &= \frac{\mathbf{T}_6^0[1, 4] \cos \theta_1 + \mathbf{T}_6^0[2, 4] \sin \theta_1}{(\cos \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 - \sin \theta_1 \cos \theta_5) \cos \theta_1 + (\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5) \sin \theta_1} \\ d_3 &= \frac{\mathbf{T}_6^0[2, 4] - (\sin \theta_1 \cos \theta_4 \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cos \theta_5)d_6}{\cos \theta_1} \\ d_2 &= \mathbf{T}_6^0[3, 4] - l_1 + \sin \theta_4 \sin \theta_5 d_6 \end{aligned}$$

Našli jsme tak dvě řešení zpětné úlohy pro tento manipulátor. Jednu polohu si vyřešíme číselně, jako l_1 dosadíme 1, všechny rotační klouby otočíme o jeden radián a translační klouby posuneme o jeden metr. Z dříve vyřešené přímé kinematické úlohy tak získáváme koncovou matici rotace a orientace

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} 0.8658 & -0.4546 & -0.209 & -1.05 \\ -0.209 & -0.7081 & 0.6745 & 1.215 \\ -0.4546 & -0.5403 & -0.7081 & 1.292 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dosazením do získaných rovnic získáváme

$$\Theta = [1, 1, 1, 1, 1, 1] \vee [-2.1416, 1, -1, -1, -2.1416, 1]$$

Toto řešení lze rozšířit na obecný manipulátor se třemi rotačními a translačními klouby. Vždy bude platit, že rotační matice u translačních kloubů jsou konstantní a můžeme tak najít 9 rovnic o třech neznámých - kloubových souřadnic θ . Pokud kloubové souřadnice označíme jako $\theta_i, \theta_j, \theta_k$, pak se dá obecná soustava rovnic zapsat jako

$$\mathbf{T}_e[1 : 3, 1 : 3] = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi)[1 : 3, 1 : 3]$$

Kde rotační matice $\mathbf{R}_6^0 = \mathbf{T}_6^0[1 : 3, 1 : 3]$, kde $[1 : 3, 1 : 3]$ značí první tři řádky z prvních tří sloupců, obsahuje pouze tři neznámé, úhly $\theta_i, \theta_j, \theta_k$. Porovnáním s prvky rotační matice koncového bodu tak získáme výslednou soustavu. Pro další práci si matici rotace a polohy koncového bodu označíme jako T_e , jedná se o transformaci, která bere úvahu pouze klouby a nezabývá se kompenzací polohy základny a koncového efektoru.

8.1 Typy rovnic

Dalším krokem je tyto rovnice prozkoumat a redukovat na tři rovnice, které bude možno efektivně vyřešit. Hned zpočátku se ukázalo, že symbolické rovnice v tomto tvaru jsou velmi složité a bez nějakého zjednodušení by bylo velmi obtížné je vyřešit. Úlohu budeme tedy řešit pouze pro případy, kdy DH parametry α a θ (v případě translačních kloubů) jsou celé násobky $\frac{\pi}{2}$, respektive takové úhly, jejichž sinus a kosinus jsou z množiny $\{-1, 0, 1\}$. To v praxi odpovídá manipulátorům, kde ramena a klouby jsou vůči sobě v pravém úhlu, či jsou rovnoběžné. Manipulátory, které toto nesplňují, nejsou v praxi příliš obvyklé.

Nyní jsou rovnice ve značně jednodušším tvaru, problém ale je, že jejich tvar závisí na konkrétní volbě DH parametrů. Pro naši potřebu nás ovšem pro každý parametr zajímají jen dva případy: když je sinus parametru 1 a kosinus parametru 0 a naopak. To, že je sinus či kosinus parametru -1 na složitost řešení vliv mít nebude. Všechny typy rovnic se tedy dají hrubou silou sestrojít a porovnat. Prozkoumáním se ukazuje, že nastávají obecně tři případy, kdy rovnice mají stejný tvar, případně se liší pouze znaménkem či záměnou funkcí sinus a kosinus. První případ je matice rotace ve tvaru

$$\mathbf{R}_6^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k) & -\sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k) & \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak je vidět, v rovnicích jsou informace pouze o součtu (pro některé DH parametry rozdílu) úhlů. Jednotlivé proměnné jsou na sobě závislé, manipulátor je špatně navržen a ztrácí některé stupně volnosti. Rovnicemi v tomto tvaru se tedy nemá cenu zabývat. Další tvar je

$$\mathbf{R}_6^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \theta_j) \cos(\theta_k) & -\cos(\theta_i + \theta_j) \sin(\theta_k) & \sin(\theta_i + \theta_j) \\ \sin(\theta_i + \theta_j) \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_i + \theta_j) \sin(\theta_k) & -\cos(\theta_i + \theta_j) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \end{bmatrix}$$

Zde nastává stejný problém, sice jen pro dva úhly, nicméně manipulátor opět ztrácí stupně volnosti a nemá cenu se jím zabývat. Třetí případ je

$$\mathbf{R}_6^0 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_i) \sin(\theta_k) + \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) \cos(\theta_k) & \cos(\theta_k) \sin(\theta_i) - \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) \sin(\theta_k) & \cos(\theta_i) \sin(\theta_j) \\ \cos(\theta_j) \cos(\theta_k) \sin(\theta_i) - \cos(\theta_i) \sin(\theta_k) & -\cos(\theta_i) \cos(\theta_k) - \cos(\theta_j) \sin(\theta_i) \sin(\theta_k) & \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \\ \cos(\theta_k) \sin(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \sin(\theta_k) & -\cos(\theta_j) \end{bmatrix}$$

Z této matice je již možno získat všechny tři úhly a značí, že manipulátor má všechny stupně volnosti. Tato soustava lze vyřešit analogickým způsobem jako úvodní příklad. Dostaneme tak dvě řešení rotačních úhlů. Pro řešení translačních úhlů můžeme porovnat zbylé části matic \mathbf{T}_6^0 a \mathbf{T}_e . Získáváme tři lineární rovnice o třech neznámých. Ty už se svým tvarem velmi liší v závislosti na parametrech DH, jejich řešení je ovšem vždy triviální. Pro mnoho kombinací DH parametrů může nastat, že tyto rovnice nemají řešení, nebo naopak mají nekonečně mnoho řešení. Takové rovnice opět značí špatně navržený manipulátor který ztrácí stupně volnosti. Obecně mají tyto translační rovnice řešení jedno, společně s rotačními rovnicemi tak získáváme dvě řešení zpětné kinematické úlohy manipulátoru.

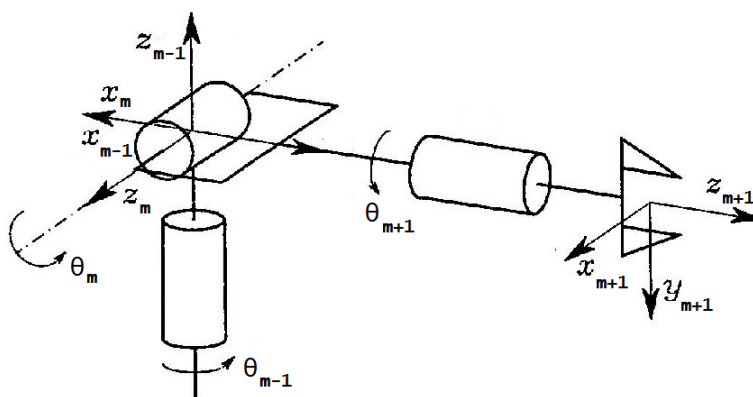
Pro rotační i translační rovnice se dále může stát, že i když obecně řešení existuje, pro konkrétní matice \mathbf{T}_e mohou být rovnice bez řešení. Na první pohled je vidět v rotačních rovnicích problém s dělením - pokud je $\sin(\theta_4)$ nula pak nastává dělení nulou. Takový problém značí, že se jedná o singularitu, kdy se lokálně ztrácí stupně volnosti.

9 Manipulátory se sférickým zápěstím

Další skupinou 6 DoF manipulátorů, jejichž řešení jde zjednodušit dekompozicí, jsou manipulátory které v jakékoliv části svého řetězce obsahují sférické zápěstí. Sférické zápěstí je série tří rotačních kloubů, konkrétní požadavky na sférické zápěstí jsou uvedeny dále. Při konfiguraci 6 kloubů se tedy jedná o manipulátory (RRR)XXX, X(RRR)XX, XX(RRR)X, XXX(RRR) kde (RRR) značí sférické zápěstí a X jsou klouby typu R nebo P. Jedná se tedy o 32 různých konfigurací.

9.1 Sférické zápěstí

Sférické zápěstí je série tří rotačních kloubů, jejichž osy pohybu (osy z) se protínají v jednom bodě. Jedna z možností uspořádání je na obrázku [3]



Obrázek 12: Sférické zápěstí.

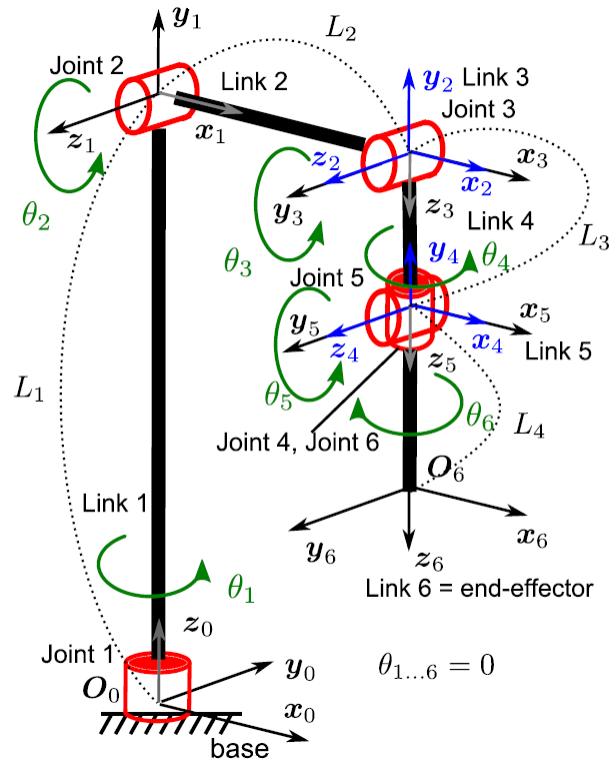
Pokud tyto klouby označíme, tak jak jdou za sebou ($m - 1, m, m + 1$), pak jsou požadavky na DH parametry následující:

kloub	d	θ	a	α
$m - 1$	d_{m-1}	θ_{m-1}	0	α_{m-1}
m	0	θ_m	0	α_m
$m + 1$	d_{m+1}	θ_{m+1}	a_{m+1}	α_{m+1}

Dále ještě musí platit, že $\sin(\alpha_{m-1}) \neq 0$ a $\sin(\alpha_m) \neq 0$.

9.2 Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.

Jeden z manipulátorů, který splňuje výše uvedené podmínky je antropomorfní (napodobující člověka) manipulátor se sférickým zápěstím, který jsme si ukázali při demonstraci úmluv pro popis manipulátoru. Jedna z jeho realizací je například tato [1]

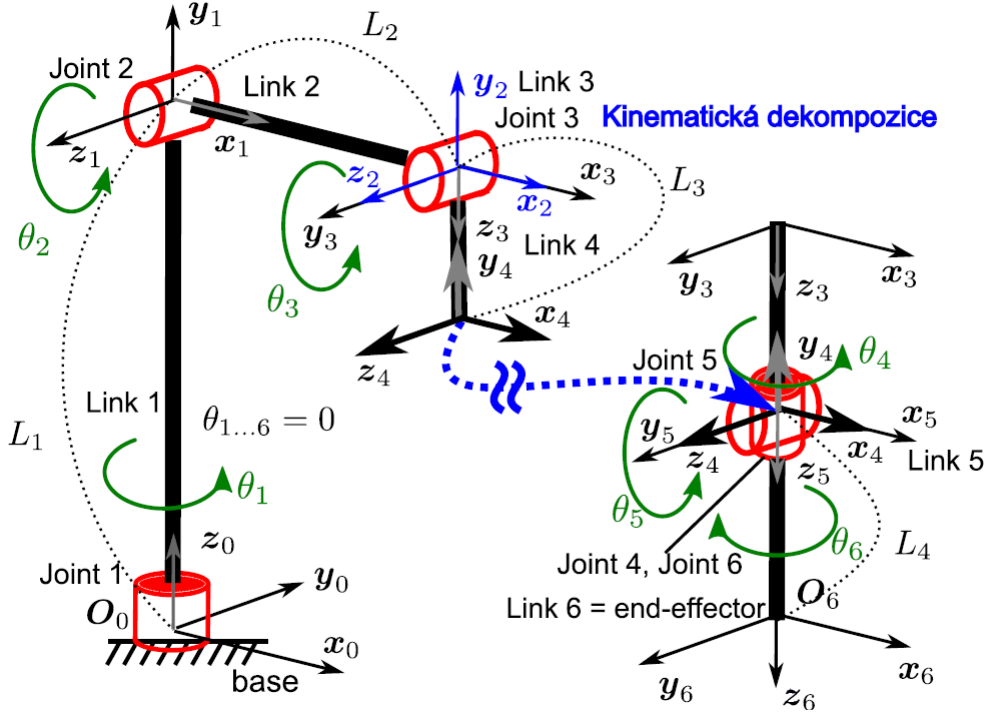


Obrázek 13: Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.

S uspořádáním kloubů RRR(RRR).
DH parametry jsou

kloub	d	a	α
1	l_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	l_2	0
3	0	0	$\frac{\pi}{2}$
4	l_3	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
6	l_4	0	0

l_i jsou geometrické parametry, definující délky jednotlivých ramen. Parametry θ nejsou uvedeny, jedná se o aktivní klouby. Tento manipulátor lze dekomponovat na sférické zápěstí a 3 DOF manipulátor [1]:



Obrázek 14: Dekompozice antropomorfního manipulátor se sférickým zápěstím.

Jak je vidět z obrázku a DH parametrů, poloha bodu O_4 nezávisí na natočení sférického zápěstí. Můžeme tedy určit

$$O_4^0 = O_6^0 - z_6^0 \cdot l_4$$

Z obrázku je dále vidět, že úhel θ_1 ovlivní pouze souřadnice x a y bodu O_4^0 . Dostáváme tak

$$\theta_1 = \begin{cases} \text{atan2}(O_4^0[2], O_4^0[1]) \\ \text{atan2}(O_4^0[2], O_4^0[1]) + \pi \end{cases}$$

kde $z_6^0 = \mathbf{T}_6^0[1 : 3, 3]$

Problém lze tedy nyní převést na řešení planárního manipulátoru se dvěma stupni volnosti, s novým koncovým bodem $X_{2d} = O_E^1 = [O_{E_x}^1 \ O_{E_y}^1 \ 0]$. Můžeme zapsat [6][1]

$$\mathbf{T}_E^1 = \prod_{i=2}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3)l_3 + \cos \theta_2 l_2 \\ -\cos(\theta_2 + \theta_3)l_3 + \sin \theta_2 l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Je možno sestavit soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} O_{E_x}^1 \\ O_{E_y}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3)l_3 + \cos \theta_2 l_2 \\ -\cos(\theta_2 + \theta_3)l_3 + \sin \theta_2 l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Umocněním a sečtením rovnic získáváme s využitím součtových vzorců

$$(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \sin \theta_3$$

Můžeme tak získat úhel θ_3

$$\begin{aligned} \sin \theta_3 &= \frac{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \\ \cos \theta_3 &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_3} \\ \theta_3 &= \text{atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3) \end{aligned}$$

poslední úhel je potom:

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{l_3 \cos \theta_3 O_{E_x}^1 + (l_2 + l_3 \sin \theta_3) O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ \cos \theta_2 &= \frac{(l_2 + l_3 \sin \theta_3) O_{E_x}^1 - l_3 \cos \theta_3 O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ \theta_2 &= \text{atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Získáváme tak čtyři řešení rovnic mimo sférické zápěstí (translačních rovnic). Můžeme tedy sestavit transformační matici

$$\mathbf{T}_3^0 = \prod_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$$

Jelikož známe i matici koncové polohy a rotace \mathbf{T}_6^0 , můžeme získat také hodnotu následující matice

$$\mathbf{T}_6^3 = (\mathbf{T}_3^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_6^0$$

Tu můžeme porovnat s maticí, sestrojenou pomocí přímé kinematické úlohy

$$\mathbf{T}_6^3 = \prod_{i=4}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 - \sin \theta_4 \sin \theta_6 & -\cos \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 - \sin \theta_4 \cos \theta_6 & \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\ \sin \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 + \cos \theta_4 \sin \theta_6 & -\sin \theta_4 \cos \theta_5 \sin \theta_6 + \cos \theta_4 \cos \theta_6 & \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ -\sin \theta_5 \cos \theta_6 & -\sin \theta_5 \sin \theta_6 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}$$

Porovnáním získáváme soustavu rovnic, která se řeší stejným způsobem jako rotační rovnice pro manipulátor se třemi rotačními a translačními klouby. Máme tedy řešení:

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \text{atan2} \left(\pm \sqrt{(\mathbf{T}_6^3[1, 3])^2 + (\mathbf{T}_6^3[2, 3])^2}, \mathbf{T}_6^3[3, 3] \right) \\ \theta_4 &= \text{atan2} \left(\frac{\mathbf{T}_6^3[1, 3]}{\sin \theta_5}, \frac{\mathbf{T}_6^3[2, 3]}{\sin \theta_5} \right) \\ \theta_6 &= \text{atan2} \left(\frac{\mathbf{T}_6^3[3, 1]}{\sin \theta_5}, \frac{\mathbf{T}_6^3[3, 2]}{\sin \theta_5} \right) \end{aligned}$$

Zpětná kinematická úloha pro tento manipulátor má tedy 8 řešení. Opět si tato řešení vyčíslíme při dosazení $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = \theta_i = 1$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Koncová poloha a rotace pak vypadá následovně:

$$\mathbf{T}_6^0 = \begin{bmatrix} 0.4897 & 0.4291 & 0.759 & 1.542 \\ -0.5335 & 0.836 & -0.1284 & 1.091 \\ -0.6896 & -0.3421 & 0.6383 & 2.896 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dosazením do získaných řešení pak dostáváme

$$Q \in \left\{ \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.1420 \\ 2.7120 \\ 1.0000 \\ -1.6980 \\ 0.7950 \\ 0.3095 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.4292 \\ 2.1420 \\ 1.4430 \\ 0.7950 \\ 0.3095 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.1420 \\ 2.1420 \\ 2.1420 \\ -2.1420 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ -2.1420 \\ -1.0000 \\ -2.142 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.1420 \\ 2.7120 \\ 1.0000 \\ 1.4430 \\ -0.7950 \\ -2.8320 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.4292 \\ 2.1420 \\ -1.6980 \\ -0.7950 \\ -2.8320 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.1420 \\ 2.1420 \\ 2.1420 \\ 1.0000 \\ -1.0000 \\ -2.1420 \end{bmatrix} \right\}$$

V další části si tento postup rozšíříme pro obecný manipulátor se sférickým zápěstím.

9.3 Obecný manipulátor se sférickým zápěstím

Manipulátor se sférickým zápěstím lze obecně dekomponovat na translační rovnice - rovnice s proměnnými nepříslušejícími sférickému zápěstí a rotační rovnice. Máme tedy manipulátor, kde sférické zápěstí je realizováno klouby $(m - 1, m, m + 1)$. Pro sférické zápěstí tedy můžeme přímou kinematickou úlohou získat následující matici:

$$\mathbf{T}_{m+1}^{m-2} = \prod_{i=m-1}^{m+1} \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$$

Jelikož známe i matici koncové polohy a rotace \mathbf{T}_6^0 , můžeme při znalosti kloubů mimo sférické zápěstí zapsat

$$\mathbf{T}_{m+1}^{m-2} = (\mathbf{T}_{m-2}^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1}$$

Porovnáním získáme soustavu rovnic ve známém, výše vyřešeném tvaru. Nejprve ovšem potřebujeme zjistit hodnoty zbylých kloubů. Upravíme předchozí rovnici [1]:

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_6^{m+1}$$

Nyní je třeba se zbavit členu \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} , který obsahuje proměnné ze sférického zápěstí. Platí:

$$\mathbf{T}_{m+1}^{m-2} = \mathbf{T}_{m-1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_{m+1}^{m-1}$$

což lze přepsat

$$\mathbf{T}_{m-1}^{m-2} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot (\mathbf{T}_{m+1}^{m-1})^{-1} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_{m-1}^{m+1}$$

Vynásobením vektorem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ získáváme z transformační matice \mathbf{T}_j^i souřadnice příslušného vektoru O_j^i . Platí tedy:

$$\begin{bmatrix} O_{m-1}^{m-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m-1}^{m-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_{m-1}^{m+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poloha bodu O_{m-1}^{m-2} je známá a závisí pouze na DH parametru d .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_{m-1}^{m+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dále díky požadavkům, které klademe na sférické zápěstí, platí:

$$\mathbf{T}_{m-1}^{m+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m-1}^{m+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Získáváme:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dále vyjádříme \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} ze vztahu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_6^0 &= \mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_6^{m+1} \\ \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} &= (\mathbf{T}_{m-2}^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} \end{aligned}$$

Dosazením do předchozí rovnice

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_{m-2}^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Drobnou úpravou tak získáváme rovnice, ve kterých vystupují pouze proměnné mimo sférické zápěstí.

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_6^0 \cdot (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Tyto rovnice budeme nazývat **první tvar rovnic** mimo SZ, pro naše potřeby bude ovšem výhodné najít další tvary této rovnice. Rovnice se obecně liší v rámci pozice sférického zápěstí, v závislosti na tom kolik mají

translačních kloubů a na jakých pozicích. Způsob jejich řešení se tak drobně liší a výslednou algoritmizaci to zbytečně rozměňuje. Určení tvaru rovnic v závislosti na pozici sférického zápěstí a počtu P kloubů nám umožňuje jejich tvary sjednotit. Například se ukázalo, že je někdy výhodnější přesunout matici \mathbf{T}_6^0 na druhou stranu, přenásobením její inverzí. Tak získáváme **druhý tvar rovnic**:

$$(\mathbf{T}_6^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dále je z tvaru rovnice vidět, že na jedné straně jsou proměnné které jsou v manipulátoru před sférickým zápěstím a na druhé straně za sférickým zápěstím. Pokud je ovšem sférické zápěstí na začátku nebo na konci řetězce, pak jsou všechny neznámé soustředěné na jedné straně rovnice. Pro další řešení bude výhodnější, aby jedna neznámá byla na jedné straně a zbytek na straně druhé. Matic \mathbf{T}_{m-2}^0 se dá rozepsat jako

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 = \mathbf{T}_1^0 \cdots \mathbf{T}_{m-2}^{m-1}$$

Pro $m > 1$ lze tedy obě strany prvního tvaru vynásobit zleva maticí $(\mathbf{T}_1^0)^{-1}$. Získáváme tak **třetí tvar rovnic**:

$$\mathbf{T}_{m-2}^1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_6^0 \cdot (\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Poslední tvar rovnic využívá stejného principu pro druhou stranu. Rozepíšeme matici $(\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1}$

$$(\mathbf{T}_6^{m+1})^{-1} = (\mathbf{T}_{m+2}^{m+1} \cdots \mathbf{T}_6^5)^{-1} = (\mathbf{T}_6^5)^{-1} \cdots (\mathbf{T}_{m+2}^{m+1})^{-1}$$

Druhý tvar rovnic tedy můžeme přenásobit zleva maticí \mathbf{T}_6^5 a tak získáváme **čtvrtý tvar rovnic**:

$$\mathbf{T}_6^5 \cdot (\mathbf{T}_6^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_5^{m+1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_{m+1} \\ -d_{m+1} \cdot \sin(\alpha_{m+1}) \\ -d_{m+1} \cdot \cos(\alpha_{m+1}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nyní můžeme přistoupit k rozboru jednotlivých kombinací architektur. Největší vliv má na řešení počet kloubů P, čím více translačních kloubů, tím je řešení jednodušší. Začneme od nejjednodušší a budeme postupovat ke složitějším.

9.4 Sférické zápěstí a tři translační klouby

Jedná se o manipulátory (RRR)PPP, P(RRR)PP, PP(RRR)P a PPP(RRR). Jedná se tedy o manipulátory se třemi klouby R a třemi klouby P, které jsme vyřešili dříve.

9.5 Sférické zápěstí, dva translační a jeden rotační kloub

V tomto manipulátoru se již vyskytuje jeden rotační kloub. Jedná se o manipulátory (RRR)XXX, X(RRR)XX, XX(RRR)X a XXX(RRR) kde XXX je z množiny $\{PRR, RPR, RRP\}$. Obecně se u všech manipulátorů bude nejprve zkoumat, zda se nejedná o speciální případ, kdy existuje v soustavě rovnice s pouze jednou neznámou. V takovém případě okamžitě získáváme jednu neznámou a problém redukuje na dvě rovnice o dvou neznámých. Zároveň se také zkoumá, zda neexistuje rovnice bez neznámých - to značí špatně navržený manipulátor a tento problém se neřeší. Již u této relativně jednoduché architektury je vhodné volit tvar rovnic v závislosti na pozici sférického zápěstí (tedy pozici kloubu m , prvního ze tří rotačních kloubů (RRR)). Vhodná volba tvaru pro některé pozice sférického zápěstí zajistí, že vždy bude v soustavě existovat rovnice s pouze jednou neznámou. Použité tvar jsou tedy:

- Sférické zápěstí na pozici 1 nebo 2 - použít druhý tvar rovnic.
- Sférické zápěstí na pozici 3 nebo 4 - použít první tvar rovnic.

Tyto volby tvaru rovnic nám zaručí, že pokud je sférické zápěstí na pozici 1 nebo 4, soustava bude vždy obsahovat rovnici s jednou neznámou (pro validní manipulátory s 6 stupni volnosti). Pokud se tedy v rovnici jako jediná neznámá vyskytuje proměnná d (posun translačního kloubu), získáváme jedno řešení. V případě že se jedná o neznámou θ , v rovnici se tedy nachází funkce sinus a cosinus. V takovém případě tedy nejprve provedeme tzv. Weierstrassovu substituci (half-angle transformation) [1][2]:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) &= x_i \\ \sin(\theta_i) &= \frac{2x_i}{1+x_i^2} \\ \cos(\theta_i) &= \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2}\end{aligned}$$

Čímž problém převedeme na kvadratickou rovnici. Po vyřešení této rovnice nám zbývají buď dvě lineární rovnice, nebo dvě rovnice kde jedna neznámá je d a druhá neznámá θ se vyskytuje v členech se sinem a cosinem. Obě lze vyjádřením jedné neznámé d z obou rovnic převést na jednu rovnici, v případě goniometrických funkcí opět aplikujeme Weierstrassovu substituci a výslednou lineární či kvadratickou rovnici vyřešíme. Nakonec dořešíme i poslední neznámou.

V případě, že se v soustavě nevyskytuje rovnice pouze s jednou neznámou (nastává v případech, kdy je sférické zápěstí na druhé nebo třetí pozici), je třeba rovnice upravit. Postup si ukážeme na konkrétním příkladě, jedná se o manipulátor RP(RRR)P, sférické zápěstí je tedy na třetí pozici. DH parametry α jsou $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$, DH parametry θ pro translační klouby jsou nulové. Rovnice mimo sférické zápěstí jsou:

$$\begin{aligned}-a_6 - a_4 \cos(\theta_6) - a_5 \cos(\theta_6) - d_{k4} \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] \\ d_{k4} \cos(\theta_6) - a_4 \sin(\theta_6) - a_5 \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] \\ d_{k6} - d_5 &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]\end{aligned}$$

kde d_i, a_i jsou příslušné DH parametry, d_{ki} značí že se jedná o parametr d pro rotační kloub, tedy známou konstantu a $\mathbf{T}_e[i, j]$ je i -tý řádek j -tého sloupce matice koncové polohy a rotace \mathbf{T}_e a nakonec \mathbf{T}_{ei} značí

invertovanou matici \mathbf{T}_e , tedy $\mathbf{T}_{ei} = (\mathbf{T}_e)^{-1}$. Nejprve upravíme rovnice tak, aby na jedné straně rovnic se členy sinus a cosinus byly pouze tyto členy. Také sjednotíme členy sinus a cosinus.

$$\begin{aligned} (-a_4 - a_5) \cos(\theta_6) - d_{k4} \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + a_6 \\ d_{k4} \cos(\theta_6) + (-a_4 - a_5) \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] \\ d_{k6} - d_5 &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] \end{aligned}$$

Zaměříme se zatím pouze na první dvě rovnice, umocníme je na druhou (pravé strany jsme pro zkrácení zápisu označili jako \star):

$$\begin{aligned} [(-a_4 - a_5) \cos(\theta_6)]^2 - d_{k4}(-a_4 - a_5) \cos(\theta_6) \sin(\theta_6) + [d_{k4} \sin(\theta_6)]^2 &= (\star_1)^2 \\ [(-a_4 - a_5) \sin(\theta_6)]^2 + d_{k4}(-a_4 - a_5) \cos(\theta_6) \cos(\theta_6) + [d_{k4} \sin(\theta_6)]^2 &= (\star_2)^2 \end{aligned}$$

a sečteme.

$$(-a_4 - a_5)^2 + d_{k4}^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2$$

kde $(\star_1)^2 + (\star_2)^2$ je součet druhých mocnin pravých stran, získáváme tak kvadratickou rovnici s jedinou neznámou d_1 . Vyřešením získáme dvě řešení neznámé d_1 . Nyní můžeme získat dvě řešení θ_6 z první rovnice (opět pomocí Weierstrassovy substituce) a d_5 z poslední rovnice. Tak získáváme 4 řešení rovnic mimo sférické zápěstí. Protože jsme však při řešení použili druhé mocniny, je nutná kontrola řešení. Ta se ve výsledné funkci provádí pomocí numerických hodnot, více o ní dále.

Díky využití různých tvarů rovnic pro různé pozice sférického zápěstí mají soustavy vždy podobný tvar (pokud jsou řešitelné) a umožní nám odstranění goniometrických funkcí umocněním a sečtením.

9.6 Sférické zápěstí, dva rotační a jeden translační kloub

Pro dva rotační klouby jsou již rovnice složitější. Opět využijeme různých tvarů soustav, ty přidělíme tímto způsobem:

- Pro sférické zápěstí na pozici 1 zvolíme čtvrtý tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 2 zvolíme druhý tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 3 zvolíme první tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 4 zvolíme třetí tvar

I zde platí jako dříve, že pokud existuje rovnice bez neznámých, nemá cenu soustavu řešit. Naopak najít rovnici s pouze jednou neznámou je výhodné, nejprve se tedy pokusíme takovou rovnicí nalézt. Řešení si opět ukážeme na příkladě, jedná se o manipulátor P(RRR)RR s parametry $\alpha \begin{bmatrix} 0 & \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
-a_6 - a_4 \cos(\theta_5 + \theta_6) - a_5 \cos(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] \\
-d_{k4} - d_{k5} - d_{k6} &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 3] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] \\
-a_4 \sin(\theta_5 + \theta_6) - a_5 \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice můžeme rovnou získat neznámou d_1 , zaměříme se na první a třetí rovnici. Opět na jedné straně ponecháme pouze goniometrické členy.

$$\begin{aligned}
-a_4 \cos(\theta_5 + \theta_6) - a_5 \cos(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + a_6 \\
-a_4 \sin(\theta_5 + \theta_6) - a_5 \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]
\end{aligned}$$

Rovnice opět umocníme na druhou, pravou stranu pro zkrácení nahradíme \star .

$$\begin{aligned}
[a_4 \cos(\theta_5 + \theta_6)]^2 + a_5 a_4 \cos(\theta_5 + \theta_6) \cos(\theta_6) + [a_5 \cos(\theta_6)]^2 &= \star_1 \\
[a_4 \sin(\theta_5 + \theta_6)]^2 + a_5 a_4 \sin(\theta_5 + \theta_6) \sin(\theta_6) + [a_5 \sin(\theta_6)]^2 &= \star_2
\end{aligned}$$

Po sečtení a použití součtových vzorců získáme

$$a_4^2 + a_5^2 + \cos(\theta_5) \cos(\theta_6)^2 - \cos(\theta_6) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6) + \cos(\theta_5) \sin(\theta_6)^2 + \cos(\theta_6) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6) = (\star_1)^2 + (\star_2)^2$$

Což lze upravit na

$$a_4^2 + a_5^2 + \cos(\theta_5) = (\star_1)^2 + (\star_2)^2$$

Jelikož neznámé z pravé strany už známe, můžeme jednoduše vyřešit a získáme θ_5 . Nyní už z jedné z rovnic stačí dopočítat poslední neznámou θ_6 . V případě, že se v soustavě nenachází rovnice pouze s jednou neznámou, bude řešení podobné, ale povede na řešení polynomu 4. stupně. Opět si ukážeme na příkladě, jedná se o manipulátor se stejným uspořádáním kloubů jako předchozí, liší se jen DH parametry α , které jsou $\left[\pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{3\pi}{2} \quad \pi \right]$. Rovnice jsou následující:

$$\begin{aligned}
d_{k4} \sin(\theta_6) - a_5 \cos(\theta_6) - a_6 + d_{k5} \sin(\theta_6) - a_4 \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] \\
-d_{k4} \cos(\theta_6) - d_{k5} \cos(\theta_6) - a_5 \sin(\theta_6) - a_4 \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] \\
d_{k6} - a_4 \sin(\theta_5) &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]
\end{aligned}$$

První dvě rovnice opět upravíme, umocníme a sečteme, dostáváme tak:

$$\begin{aligned}
-a_4^2 \sin(\theta_5)^2 + \frac{a_4^2}{2} + 2 a_4 a_5 \cos(\theta_5) + a_5^2 + d_{k4}^2 + 2 d_{k4} d_{k5} + d_{k5}^2 &= (\star_1)^2 + (\star_2)^2 \\
\mathbf{T}_{ei}[3, 4] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] &= d_{k6} - a_4 \sin(\theta_5)
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice lze vyjádřit d_1

$$d_1 = \frac{d_{k6} - a_4 \sin(\theta_5) - \mathbf{T}_{ei}[3, 4] - a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] + d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]}{\mathbf{T}_{ei}[3, 3]}$$

a dosadit do pravé strany první rovnice. Získáváme tak rovnici s neznámou θ_5 v členech $\cos(\theta_5)$, $\sin(\theta_5)$ a $\sin(\theta_5)^2$. Weierstrassovou substitucí tak dostáváme členy $\frac{1-x_5^2}{1+x_5^2}$, $\frac{2x_5}{1+x_5^2}$ a $\frac{4x_5^2}{(1+x_5^2)^2}$. Rozšířením celé rovnice $(1+x_5^2)^2$ tak máme polynom 4. řádu, který má 4 řešení. Poté můžeme dopočítat neznáme d_1 a θ_6 . Získáváme tak 8 řešení rovnic mimo sférické zápěstí, opět je tedy důležitá kontrola těchto řešení.

9.7 Sférické zápěstí a tři rotační klouby

Poslední a nejvíce komplikovaný případ nastává, pokud jsou všechny klouby v manipulátoru rotační. Všechny neznámé jsou pak úhly θ a nachází se v členech sinus a cosinus. Rovnice se velmi liší v závislosti na poloze sférického zápěstí. I přes použití různých tvarů rovnic budeme muset problém rozdělit na dva případy podle polohy sférického zápěstí. Nejprve rozdělení tvarů rovnic:

- Pro sférické zápěstí na pozici 1 zvolíme čtvrtý tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 2 zvolíme druhý tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 3 zvolíme první tvar
- Pro sférické zápěstí na pozici 4 zvolíme třetí tvar

Rozdělení je tedy shodné jako pro případ s jedním translačním kloubem. Pro všechny případy je princip řešení shodný, konkrétní postup se ale liší.

9.7.1 Sférické zápěstí na pozici 1 a 4

Jako vždy, nejprve se pokusíme nalézt v soustavě rovnic s jedinou neznámou. Řešení si ukážeme na příkladu manipulátoru (RRR)RRR s DH parametry $\alpha \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Pro zkrácení zápisu použijeme notaci $\sin(\theta_i) = s_i$, $\cos(\theta_i) = c_i$, $\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{(i+j)}$:

$$\begin{aligned} -a_5 - a_3 c_{(4+5)} - a_4 c_5 &= d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[1, 3] c_6 - \mathbf{T}_{ei}[2, 3] s_6) + a_6 c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] c_6 - \mathbf{T}_{ei}[2, 4] s_6 \\ -d_{k3} - d_{k4} - d_{k5} &= d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[2, 3] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 3] s_6) + a_6 s_6 + \mathbf{T}_{ei}[2, 4] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] s_6 \\ -a_3 s_{4+5} - a_4 s_5 &= d_{k6} + \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] \end{aligned}$$

Z druhé rovnice okamžitě získáváme θ_6 . U první a třetí rovnice přesuneme všechny členy s neznámými θ_4 a θ_5 na levou stranu, umocníme a sečteme. Dostáváme rovnici

$$a_3^2 + 2c_4 a_3 a_4 + a_4^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2$$

Kde na pravé straně je výraz obsahující známe konstanty a θ_6 , můžeme tedy vyřešit a získat θ_4 . Poslední neznámou získáme například z třetí rovnice. Nyní se podíváme na případ, kdy rovnice s jednou neznámou neexistuje. To nastává například pro DH parametry $\alpha \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & \pi & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Rovnice jsou následující:

$$\begin{aligned}
d_{k3} s_5 - a_4 c_5 - a_5 + d_{k4} s_5 - a_3 c_4 c_5 &= d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[1, 3] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[2, 3] s_6) + a_6 c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[2, 4] s_6 \\
d_{k5} - a_3 s_4 &= a_6 s_6 - d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[2, 3] c_6 - \mathbf{T}_{ei}[1, 3] s_6) - \mathbf{T}_{ei}[2, 4] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] s_6 \\
d_{k3} c_5 + d_{k4} c_5 + a_4 s_5 + a_3 c_4 s_5 &= d_{k6} - \mathbf{T}_{ei}[3, 4] - d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[3, 3]
\end{aligned}$$

Postupujeme podobným způsobem jako v předchozím případě, všechny rovnice upravíme tak, aby na levé straně byly pouze členy s neznámými θ_4 a θ_5 . Všechny rovnice umocníme na druhou, první a třetí sečteme.

$$\begin{aligned}
(a_3 c_4)^2 + \frac{a_3^2}{2} + 2 a_3 a_4 c_4 + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2 d_{k3} d_{k4} + d_{k4}^2 &= (\star_1)^2 + (\star_3)^2 \\
(a_3 s_4)^2 &= (\star_2)^2
\end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned}
(a_3 c_4)^2 &= (\star_1)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + 2 a_3 a_4 c_4 + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2 d_{k3} d_{k4} + d_{k4}^2\right) \\
(a_3 s_4)^2 &= (\star_2)^2
\end{aligned}$$

A sečteme.

$$a_3^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + 2 a_3 a_4 c_4 + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2 d_{k3} d_{k4} + d_{k4}^2\right)$$

Nyní se podíváme na výrazy, které jsme doposud nahrazovali symbolem \star . \star_3 obsahuje pouze známé proměnné, zaměříme se tedy na \star_1 , \star_2 , respektive jejich druhé mocniny.

$$\begin{aligned}
(\star_1)^2 &= [d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[1, 3] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[2, 3] s_6) + a_6 c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[2, 4] s_6 + a_5]^2 \\
(\star_2)^2 &= [a_6 s_6 - d_{k1} (\mathbf{T}_{ei}[2, 3] c_6 - \mathbf{T}_{ei}[1, 3] s_6) - \mathbf{T}_{ei}[2, 4] c_6 + \mathbf{T}_{ei}[1, 4] s_6]^2
\end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned}
(\star_1)^2 &= [(a_6 + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + \mathbf{T}_{ei}[1, 4])c_6 + (d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] + \mathbf{T}_{ei}[2, 4])s_6 + a_5]^2 \\
(\star_2)^2 &= [(a_6 + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + \mathbf{T}_{ei}[1, 4])s_6 - (d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - \mathbf{T}_{ei}[2, 4])c_6]^2
\end{aligned}$$

V druhé rovnici tedy po umocnění bude člen obsahující s_6^2 , člen s c_6^2 a člen s $s_6 c_6$. První rovnice bude navíc obsahovat člen a_5^2 a členy s první mocninou sinu a cosinu θ_5 . Po sečtení se druhé mocniny sinu a cosinu redukují na jejich čítance a členy obsahující sinus i cosinus se navzájem odečtou. Rovnice

$$(\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + 2 a_3 a_4 c_4 + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2 d_{k3} d_{k4} + d_{k4}^2\right)$$

tak tedy obsahuje členy s_6 , c_6 v nejvyšší první mocnině. Vráťme se k rovnici

$$a_3^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + 2 a_3 a_4 c_4 + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2 d_{k3} d_{k4} + d_{k4}^2\right)$$

Tuto rovnici upravíme a připojíme druhou rovnici z původní soustavy.

$$2a_3 a_4 c_4 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2d_{k3}d_{k4} + d_{k4}^2\right) - a_3^2$$

$$a_3 s_4 = \star_2$$

Druhou rovnici rozšíříme $2a_4$, obě poté umocníme a sečteme.

$$(2a_3 a_4)^2 = [(\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - \left(\frac{a_3^2}{2} + a_4^2 + d_{k3}^2 + 2d_{k3}d_{k4} + d_{k4}^2\right) - a_3^2]^2 + (2a_4 \star_2)^2$$

Po provedení Weirstrassovy substituce tak získáváme polynom 4. řádu. Získáváme 4 řešení neznámé θ_6 . Nyní můžeme získat například θ_4 z druhé rovnice a nakonec θ_5 z třetí rovnice. Dostáváme tak 16 řešení rovnic mimo sférické zápěstí, několikrát jsme ovšem mocnili, je tedy potřeba kontrola řešení - maximální možný počet řešení pro tento manipulátor je osm.

9.7.2 Sférické zápěstí na pozici 2 a 3

Pokud je sférické zápěstí na pozicích 2 a 3, je princip řešení velmi podobný, je však nutno využít některých vlastností matice rotace. Nejprve speciální případ, kdy existuje rovnice s jednou neznámou. Řešení ukážeme pro manipulátor R(RRR)RR, s parametry $\alpha = \begin{bmatrix} \pi & \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & \pi & \pi \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} -a_6 - a_5 c_6 - a_4 c_{(5-6)} &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] s_1 \\ a_4 s_{(5-6)} - a_5 s_6 &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] s_1 \\ d_{k6} - d_{k5} - d_{k4} &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] s_1 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice tedy můžeme získat θ_1 . Dále známým způsobem upravíme první a druhou rovnici, umocníme a sečteme.

$$a_4^2 + 2c_5 a_4 a_5 + a_5^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2$$

Získáváme θ_5 . Poslední neznámou určíme například z první rovnice.

Přistoupíme k poslední soustavě, případ kdy je sférické zápěstí na druhé nebo třetí pozici a v soustavě není rovnice s jednou neznámou. Takový manipulátor je například R(RRR)RR s parametry $\alpha = \begin{bmatrix} \pi & \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{2} & \pi \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} d_{k4} s_6 - a_5 c_6 - a_6 + d_{k5} s_6 - a_4 c_5 c_6 &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] s_1 \\ -d_{k4} c_6 - d_{k5} c_6 - a_5 s_6 - a_4 c_5 s_6 &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] s_1 \\ d_{k6} - a_4 s_5 &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] s_1 \end{aligned}$$

Nejprve přesuneme členy bez neznámé θ na pravou stranu.

$$\begin{aligned} d_{k4} s_6 - a_5 c_6 + d_{k5} s_6 - a_4 c_5 c_6 &= \mathbf{T}_{ei}[1, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[1, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] s_1 + a_6 \\ -d_{k4} c_6 - d_{k5} c_6 - a_5 s_6 - a_4 c_5 s_6 &= \mathbf{T}_{ei}[2, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[2, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] s_1 \\ -a_4 s_5 &= \mathbf{T}_{ei}[3, 4] + d_{k1} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] - d_{k2} \mathbf{T}_{ei}[3, 3] + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] c_1 + a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] s_1 - d_{k6} \end{aligned}$$

Všechny rovnice umocníme a sečteme.

$$a_4^2 + 2c_5a_4a_5 + a_5^2 + d_{k4}^2 + 2d_{k4}d_{k5} + d_{k5}^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2$$

Nyní prozkoumáme pravou stranu. Po umocnění bude v každé rovnici výraz obsahující s_1^2 , c_1^2 a s_1c_1 . Podíváme se nejprve na všechny výrazy s c_1^2 :

$$(a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 1] c_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 1] c_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 1] c_1)^2$$

což lze přepsat na

$$a_1^2[(\mathbf{T}_{ei}[1, 1])^2 + (\mathbf{T}_{ei}[2, 1])^2 + (\mathbf{T}_{ei}[3, 1])^2]c_1^2$$

Prostřední člen se dá také zapsat jako $[(R_6^0)^{-1}[:, 1]]^T \cdot (R_6^0)^{-1}[:, 1]$, což se rovná díky vlastnostem matice rotace jedné. Platí tedy:

$$a_1^2[(\mathbf{T}_{ei}[1, 1])^2 + (\mathbf{T}_{ei}[2, 1])^2 + (\mathbf{T}_{ei}[3, 1])^2]c_1^2 = a_1^2c_1^2$$

Podobně pro členy s_1^2 :

$$(a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] s_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] s_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] s_1)^2$$

Stejným způsobem můžeme získat

$$(a_1 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] s_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] s_1)^2 + (a_1 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] s_1)^2 = a_1^2s_1^2$$

Členy obsahující s_1^2 a c_1^2 se nám tedy redukují na a_1^2 . Dále se podíváme na členy, obsahující s_1c_1 :

$$2a_1^2 \mathbf{T}_{ei}[1, 2] \mathbf{T}_{ei}[1, 1] c_1 s_1 + 2a_1^2 \mathbf{T}_{ei}[2, 2] \mathbf{T}_{ei}[2, 1] c_1 s_1 + 2a_1^2 \mathbf{T}_{ei}[3, 2] \mathbf{T}_{ei}[3, 1] c_1 s_1$$

Tedy

$$2a_1^2(\mathbf{T}_{ei}[1, 2] \mathbf{T}_{ei}[1, 1] + \mathbf{T}_{ei}[2, 2] \mathbf{T}_{ei}[2, 1] + \mathbf{T}_{ei}[3, 2] \mathbf{T}_{ei}[3, 1])c_1 s_1$$

Prostřední člen lze zapsat jako $[(R_6^0)^{-1}[:, 2]]^T \cdot (R_6^0)^{-1}[:, 1]$ což se rovná nule. Ve výrazu $(\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2$ se tedy nebudou nacházet výrazy c_1^2 , s_1^2 ani c_1s_1 . Rovnici

$$a_4^2 + 2c_5a_4a_5 + a_5^2 + d_{k4}^2 + 2d_{k4}d_{k5} + d_{k5}^2 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2$$

Tedy můžeme umocnit a na pravé straně se budou vyskytovat goniometrické členy v nejvyšší mocnině 2. Před umocněním ale nejprve rovnici upravíme a připojíme třetí rovnici z původní soustavy.

$$\begin{aligned} 2c_5a_4a_5 &= (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - a_4^2 - a_5^2 - d_{k4}^2 - 2d_{k4}d_{k5} - d_{k5}^2 \\ -a_4s_5 &= \star_3 \end{aligned}$$

Druhou rovnici rozšíříme $-2a_5$

$$2a_4a_5c_5 = (\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - a_4^2 - a_5^2 - d_{k_4}^2 - 2d_{k_4}d_{k_5} - d_{k_5}^2$$

$$2a_4a_5s_5 = -2a_5(\star_3)$$

Po umocnění a sečtení tak získáváme rovnici

$$(2a_4a_5)^2 = [(\star_1)^2 + (\star_2)^2 + (\star_3)^2 - a_4^2 - a_5^2 - d_{k_4}^2 - 2d_{k_4}d_{k_5} - d_{k_5}^2]^2 + [-2a_5(\star_3)]^2$$

Která po Weierstarssově substituci přejde na polynom 4. řádu. Známe tak neznámou θ_1 , jako další můžeme získat θ_5 z třetí rovnice původní soustavy a nakonec θ_6

10 Implementace v Matlabu

Dalším úkolem bylo implementovat dříve uvedená řešení jednotlivých architektur jako funkci v Matlabu. Jelikož je vždy potřeba znát konkrétní tvar rovnic pro jejich vyřešení, bylo využito knihovny symbolic math toolbox [4]. Tato knihovna nám umožňuje sestavit symbolický tvar rovnic a provádět úpravy potřebné pro vyřešení.

Nevýhodou práce se symbolickým tvarem rovnic je rychlost. I při dosazení všech známých konstant bylo řešení příliš pomalé pro nasazení v reálném čase, to se zejména týká architektur, které vedou na řešení polynomu 4. řádu. Pro nasazení v reálném čase tedy funkce místo konkrétních hodnot vypíše symbolické předpisy pro jejich získání z prvků matice \mathbf{T}_e .

To ovšem vedlo na další problém, opět kvůli polynomu 4. řádu. Řešení i jednoduchého polynomu 4. řádu v symbolickém tvaru je velmi rozložitě, co se počtu znaků týče. Pokud vezmeme v úvahu, že polynomy z úloh byly rozložitě už samy o sobě a k tomu bylo navíc potřeba na závěr provést zpětnou Weierstrassovu substituci, která počet znaků řešení doslova zněkolikanásobila. Vznikala tak řešení, která měla statisíce až miliony znaků. S takovými předpisy se nejen velmi obtížně manipuluje ale navíc vznikaly neočekávané chyby.

Pokud tedy řešení vede na řešení polynomu 4. řádu, funkce nejprve vypíše (stejným způsobem jako řešení jednotlivých kloubů) předpisy pro jednotlivé členy polynomu a poté řešení samotného polynomu, nyní už značně zjednodušené. Pokud tedy máme polynom

$$x_i^4 + m_4x_i^3 + m_3x_i^2 + m_2x_i + m_1 = 0$$

kde $m_1 - m_4$ jsou složité výrazy, pak jsou nejprve vypsané předpisy pro tyto výrazy a poté řešení výše uvedeného polynomu. To nám umožnilo redukcí řešení na tisíce znaků.

Jak je vidět z řešení jednotlivých rovnic, často se využívá umocnění rovnice na druhou. To ovšem může vést ke vzniku nesprávných řešení. Na závěr je tedy třeba všechna řešení zkontrolovat. Pokud má funkce vrátit symbolické řešení, je do něj dosazeno a výsledná numerická řešení jsou porovnána se zadanou maticí \mathbf{T}_e , pomocí přímé kinematické úlohy. Pokud žádná matice \mathbf{T}_e není zadána, využije se matice polohy a rotace, která vznikne při přímou kinematickou úlohou při nastavení kloubů $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Následuje popis hlavních funkcí.

10.1 Funkce DGM

Funkce DGM (zkratka z direct geometric model - přímý geometrický model) je algoritmicizace přímé úlohy - přechodu z kloubových souřadnic na transformační matici pozice a rotace. Syntaxe volání funkce je

```
T_e = DGM(MOVE, JOINTS, DH)
```

Je třeba zadat vektor nastavení jednotlivých kloubů MOVE, typy jednotlivých kloubů (translační či rotační) JOINTS a DH parametry DH. Nastavení jednotlivých kloubů je jednoduše posloupnost rotací pro rotační klouby či translací pro prismatické klouby, v pořadí jak jsou v manipulátoru od základny ke koncovému efektoru. Typy kloubů jsou reprezentovány datovým typem string, kde R představuje rotační kloub a P kloub prismatický. Přípustné nastavení kloubů je tedy například 'PPRRRR'. Nakonec matice DH parametrů má následující tvar:

$$\text{DH} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Výstupem je matice translace a rotace \mathbf{T}_e .

10.2 Funkce IGM

Funkce IGM (Inverse Geometric Model) je hlavní náplní této práce. Vstupem jsou opět typy jednotlivých kloubů, matice DH parametrů a volitelně matice polohy a orientace \mathbf{T}_e . Výstup je podle zadání buď konkrétní, numerické, nastavení jednotlivých kloubů pro dosažení zadané matice, nebo symbolické předpisy pro získání těchto nastavení. Existuje několik možností jak funkci zavolat:

```
NUM = IGM(T_e, JOINTS, DH)
```

Vrátí matici jednotlivých řešení zpětné úlohy pro zadaný manipulátor a matici \mathbf{T}_e NUM ve formátu double. Tato matice má rozměry $k \times 6$ kde k je počet řešení. Z této matice již byla odstraněna případná nesprávná a duplicitní řešení, která vznikla v důsledku použití druhé mocniny při řešení.

```
SYM = IGM(JOINTS, DH)
```

Pokud není zadána matice \mathbf{T}_e je manipulátor vyřešen obecně - symbolicky. Jako výsledek je tedy matice předpisů pro jednotlivá řešení SYM. První sloupec této matice určuje jméno výrazu, který vyjadřují další sloupce. Rozměry se liší v závislosti na počtu řešení a na tom zda bylo nutné řešit polynom 4. řádu. Pro kontrolu se využije matice, která vznikne zavoláním funkce DGM se syntaxí `DGM([1 1 1 1 1 1], JOINTS, DH)`.

```
[SYM, NUM] = IGM(T_e, JOINTS, DH)
```

Vrací jak numerické tvary řešení, tak symbolické. Výhodné, pokud chceme znát symbolické předpisy a chceme si určit vlastní matici pro kontrolu řešení.

10.3 Interní funkce

Funkce IGM ke svému chodu využívá řadu interních funkcí, které řeší různé problémy. Krátce se zmíníme o některých z nich. Funkce IGM má jako základní požadavek takové parametry α , jejichž sinus nebo cosinus se rovná nule. To je například $\cos(\frac{\pi}{2})$. Ovšem tento výraz není v matlabu nula ale nějaké velmi malé číslo. Je tedy zapotřebí nějaká funkce pro zaokrouhlení na nulu, konkrétně v našem případě je to funkce `ROUND2ZERO(NUM, THRESH)`, která čísla blízká nule nahradí nulou. Jak blízká čísla lze definovat parametrem THRESH. Tato funkce byla později rozšířena i na zaokrouhlení čísel blízkých 1 a -1, kde opět nastával problém.

Dalším problémem bylo uchování v současnosti známých řešení. Na počátku řešení nelze jen podle tvaru rovnic odhadnout počet řešení, protože ten závisí na konkrétních DH parametrech [2]. Řešení se tedy vkládají do matice řešení pomocí funkce `ADD_SOL(SOLUTIONS, NEW_SOL, NAME)` kde SOLUTIONS je současná matice řešení, NEW_SOL je řešení, či vektor řešení které chceme přidat a NAME je jméno vyřešené proměnné. Funkce se sama postará o rozšíření současné matice řešení a duplikaci případných už existujících proměnných. Dále v případě, že řešení je ve formě struktury (jaké například solver vrací při vyřešení soustavy rovnic o několika neznámých), tak se sám postará o vložení všech řešení a jejich správné pojmenování (proměnná NAME již

tedy není potřeba). Díky tomu, že všechna řešení projdou touto funkcí tak jí lze též využít k relativně efektivnímu zpracování symbolických hodnot. Kupříkladu přejmenování některých hodnot ve finální matici řešení může trvat až desítky vteřin, pokud se však přejmenování provede v rámci `ADD_SOL` pak se jedná o v rámci celkového času běhu zanedbatelnou hodnotu.

Jako poslední funkci ještě zmíníme rozšíření funkce symbolické knihovny matlabu `SYMVAR()`, tato funkce vrací veškeré symbolické proměnné ve výrazu, pro naše potřeby bylo někdy ovšem důležité určit pouze proměnné, které splňují určité parametry, respektive obsahují nějaký znak. (například určení pouze neznámých θ nebo d). To zajišťuje funkce `D_SYMVAR(EXP, STRING)` která vrátí symbolické proměnné z výrazu `EXP`, které obsahují jeden ze znaků v `STRING`.

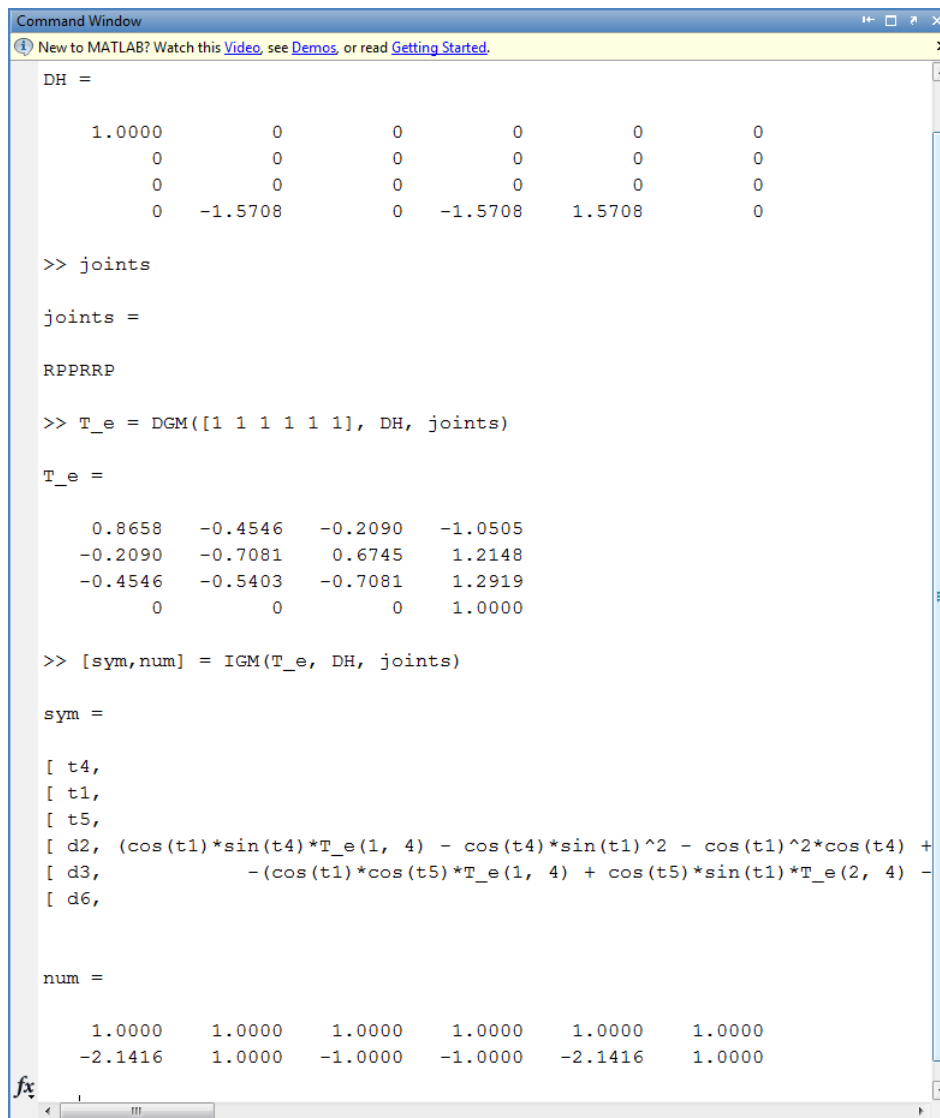
11 Zhodnocení výsledků

V této kapitole si ukážeme jak funkce pracují a porovnáme jejich výstup s již spočtenými manipulátory z předchozích kapitol. V osmé kapitole byl vyřešen manipulátor se třemi rotačními a třemi translačními klouby, nyní vyzkoušíme jeho řešení pomocí funkce. Nejprve je třeba sestavit matici konečné polohy a rotace pomocí přímé úlohy. Zavoláme tedy funkci

```
T_e = DGM([1 1 1 1 1 1], DH, JOINTS)
```

s příslušnými parametry DH a rozložením kloubů joints. Zpětnou úlohu pak vyřešíme voláním funkce `[SYM, NUM] = IGM(T_e, DH, JOINTS)`.

Ukázka volání je zde, je možno ověřit i zadané DH parametry a uspořádání kloubů.



```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

DH =

    1.0000    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0   -1.5708    0   -1.5708    1.5708    0

>> joints

joints =

RPPRRP

>> T_e = DGM([1 1 1 1 1 1], DH, joints)

T_e =

    0.8658   -0.4546   -0.2090   -1.0505
   -0.2090   -0.7081    0.6745    1.2148
   -0.4546   -0.5403   -0.7081    1.2919
    0         0         0         1.0000

>> [sym,num] = IGM(T_e, DH, joints)

sym =

[ t4,
[ t1,
[ t5,
[ d2, (cos(t1)*sin(t4)*T_e(1, 4) - cos(t4)*sin(t1)^2 - cos(t1)^2*cos(t4) +
[ d3,          -(cos(t1)*cos(t5)*T_e(1, 4) + cos(t5)*sin(t1)*T_e(2, 4) -
[ d6,

num =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
   -2.1416    1.0000   -1.0000   -1.0000   -2.1416    1.0000
```

Obrázek 15: Práce s funkcí, manipulátor se třemi P a třemi R klouby.

Jak je vidět, získali jsme dvě matice. První je matice SYM, která obsahuje symbolické předpisy pro získání

jednotlivých kloubů. První sloupec obsahuje názvy těchto kloubů, t_i představuje úhel θ_i a d_i představuje posun d_i . Další sloupce jsou pak jednotlivá řešení. Vyřešené klouby jsou v takovém pořadí, v jakém jsou vyřešeny, také symbolický zápis je přímo kompatibilní s Matlabovskou syntaxí. Čas běhu (pomocí funkcí tic a toc) je 2.8768 vteřiny. Symbolické řešení se na obrazovku celé nevešlo, jedno ze dvou řešení je zde:

```
t4 = atan2((T_e(1, 2)^2 + T_e(2, 2)^2)^(1/2), -T_e(3, 2))

t1 = atan2(-T_e(2, 2)/sin(t4), -T_e(1, 2)/sin(t4))

t5 = atan2(-T_e(3, 3)/sin(t4), -T_e(3, 1)/sin(t4))

d2 = (cos(t1)*sin(t4)*T_e(1, 4) - cos(t4)*sin(t1)^2 - cos(t1)^2*cos(t4)
      + sin(t1)*sin(t4)*T_e(2, 4) + cos(t1)^2*cos(t4)*T_e(3, 4)
      + cos(t4)*sin(t1)^2*T_e(3, 4))/(cos(t4)*cos(t1)^2 + cos(t4)*sin(t1)^2)

d3 = -(cos(t1)*cos(t5)*T_e(1, 4) + cos(t5)*sin(t1)*T_e(2, 4)
      - cos(t1)*cos(t4)*sin(t5)*T_e(2, 4)
      + cos(t4)*sin(t1)*sin(t5)*T_e(1, 4))/(cos(t4)*sin(t5)*cos(t1)^2
      + cos(t4)*sin(t5)*sin(t1)^2)

d6 = (cos(t1)*T_e(1, 4) + sin(t1)*T_e(2, 4))/(cos(t4)*sin(t5)*cos(t1)^2
      + cos(t4)*sin(t5)*sin(t1)^2)
```

Pokud máme matici T_e tak výše uvedený skript získá všech 6 kloubů. Nyní se podíváme na matici řešení pro konkrétní matici polohy a rotace, vzniklou posunem a rotací kloubů o jednu jednotku. NUM:

```
1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
-2.1416    1.0000   -1.0000   -1.0000   -2.1416    1.0000
```

Tato matice obsahuje jednotlivá řešení jako své řádky. Tyto jsou již seřazeny tak, jak vystupují v manipulátoru. Jak je vidět, nalezená řešení odpovídají našim dříve vypočteným.

Jako další je manipulátor se sférickým zápěstím z kapitoly 9. Přímo úlohu provedeme stejným příkazem, jen změníme DH parametry a uspořádání kloubů. Zpětnou úlohu tentokrát nebudeme požadovat symbolicky, výsledek je již poněkud rozložitý. Zatímco při našem výpočtu jsme mohli využít geometrický náhled a výpočet si zjednodušit, v algoritmu je třeba počítat s velmi obecným tvarem rovnic, který lze konzistentně vypočítat pro více druhů manipulátoru. Funkci pro zpětnou úlohu tedy zavoláme například příkazem

```
IGM(DGM([1 1 1 1 1 1], DH, joints), DH, joints).
```

Ukázka výstupu je zde:

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> DH

DH =

    1.0000         0         0    1.0000         0    1.0000
         0         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0         0
    1.5708         0    1.5708   -1.5708    1.5708         0

>> joints

joints =

RRRRRR

>> IGM(DGM([1 1 1 1 1 1]), DH, joints), DH, joints)

ans =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
   -2.1416    2.7124    1.0000   -1.6981    0.7950    0.3095
    1.0000    0.4292    2.1416    1.4435    0.7950    0.3095
   -2.1416    2.1416    2.1416   -2.1416    1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000    1.0000   -2.1416   -1.0000   -2.1416
   -2.1416    2.7124    1.0000    1.4435   -0.7950   -2.8321
    1.0000    0.4292    2.1416   -1.6981   -0.7950   -2.8321
   -2.1416    2.1416    2.1416    1.0000   -1.0000   -2.1416

fx >> |

```

Obrázek 16: Práce s funkcí, manipulátor se sférickým zápěstím.

Výstup je tedy matice výsledků, řádky jsou jednotlivá nastavení pro dosažení požadované polohy a rotace. Čas běhu je tentokrát 6.3804 vteřiny a hodí se poznamenat, že obecně je čas běhu velmi variabilní. Záleží na typu manipulátoru, složení kloubů, konkrétních parametrech a požadovaném výstupu. Pro nejjednodušší manipulátor se třemi P a třemi R klouby a číselný výstup je čas běhu zhruba vteřina. Pro nejobtížnější případ manipulátoru RRRRRR s takovými DH parametry, které vedou na polynom 4. řádu a symbolickým výstupem je čas chodu v řádu desítek vteřin. Největší brzdou je pak práce se samotnou maticí výsledků, která má velké množství znaků.

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ -2.1420 & 2.7120 & 1.0000 & -1.6980 & 0.7950 & 0.3095 \\ 1.0000 & 0.4292 & 2.1420 & 1.4430 & 0.7950 & 0.3095 \\ -2.1420 & 2.1420 & 2.1420 & -2.1420 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & -2.1420 & -1.0000 & -2.1420 \\ -2.1420 & 2.7120 & 1.0000 & 1.4430 & -0.7950 & -2.8320 \\ 1.0000 & 0.4292 & 2.1420 & -1.6980 & -0.7950 & -2.8320 \\ -2.1420 & 2.1420 & 2.1420 & 1.0000 & -1.0000 & -2.1420 \end{bmatrix}$$

Je třeba mít na paměti, že výstup funkce jsou jen validní výsledky, které prošly kontrolou (dosazení do přímé úlohy a porovnání výsledné matice polohy a rotace).

Na první pohled se může zdát matoucí, že v závislosti na výstupu (symbolický nebo numerický) jsou výsledky buď sloupce nebo řádky. U numerického výsledku se předpokládá okamžité další použití (například ve funkci DGM nebo nastavení polohy manipulátoru). Symbolický výstup je připraven pro použití v dalším skriptu nebo funkci. Jelikož se skript vyhodnocuje vertikálně, je lepší mít jednotlivé předpisy pod sebou.

Funkce byla otestována na několika vyřešených manipulátorech, dále se hrubou silou vygenerovalo zhruba osm tisíc architektur. Zde již nebylo možné každou podrobně zkoumat, testovalo se tedy pouze, zda funkce vrátí výsledek (díky kontrole bude tento správný) a nebo příslušné varování v případě špatně navrženého manipulátoru (při generování hrubou silou většina). Vzhledem k množství parametrů pro definici manipulátoru, kdy je několik desítek možností uspořádání kloubů, 24 DH parametrů a nespočet matic koncové polohy a rotace, je obtížně vyloučit, že se funkce někdy nebude chovat nestandardně.

Dále je většinou náročné ze symbolického výsledku určit, kdy nebude mít smysl (dělení nulou atd.). Je tedy vhodné zvláště vyřešit pro manipulátor úlohu pracovního prostoru a nalézt singulární polohy. Další možností je dosazovat do výsledku ve struktuře try/catch - případné chyby jsou způsobeny singulárními polohami.

12 Závěr

Tato práce se zabývá řešením přímé a zpětné kinematické úlohy pro sériové manipulátory, zejména pak automatizací tohoto řešení v rámci Matlabovské funkce. Cílem tedy bylo vyřešit přechod od kloubových souřadnic na polohu a rotaci koncového efektoru a zpět. Řešení se omezuje na neredundantní sériové manipulátory se šesti stupni volnosti. Konkrétně se jedná o manipulátory se třemi rotačními a třemi translačními klouby a manipulátory se sférickým zápěstím v libovolné části kinematického řetězce. V průběhu řešení se dále určilo omezení na pravoúhlé manipulátory, jejichž klouby a ramena jsou navzájem kolmé nebo rovnoběžné.

V druhé kapitole je představena struktura obecného manipulátoru a vysvětleny důležité pojmy z robotiky, se kterými tato práce pracuje. V další kapitole je zavedena notace pro reprezentaci polohy a rotace používaná pro určení jednotlivých kloubů a ramen v prostoru. Pro srovnání jsou uvedeny ještě alternativní možnosti určení rotace. Ve čtvrté a páté kapitole jsou vysvětleny úmluvy pro transformaci souřadných systémů, využívané pro popis manipulátorů. Jedná se o Khalil Kleinfingerovu úmluvu a Denavit Hartenbergovu úmluvu, která je používaná pro popis manipulátoru v této práci i ve výsledné funkci. V dalších kapitolách je pak vysvětlena přímá a zpětná kinematická úloha pro obecné manipulátory. Zpětná úloha je poté rozvedena pro konkrétní architektury, řešené ve funkci. Jsou prozkoumány všechny varianty rovnic které mohou nastat a ty, které vedou na validní manipulátory, jsou vyřešeny. V závěru práce jsou představeny funkce, které implementují uvedená řešení, v krátké uživatelské příručce. Také jsou přestaveny některé zajímavé interní funkce, důležité pro hlavní algoritmus. Nakonec je funkce otestována na dříve řešených manipulátorech, což nám umožnilo ověřit správnost řešení.

Funkce pracují uspokojivě, přímá úloha je pro sériové manipulátory triviální, nebylo s ní tedy mnoho problémů. Zpětná úloha pak vyžadovala použití postupů, které znemožňují běh funkce v reálném čase. Přistoupilo se tedy k alternativnímu výstupu, kdy funkce místo konkrétních hodnot určí předpis pro získání těchto hodnot pomocí Matlabu. Pro některé architektury je ovšem i tento výstup natolik komplikovaný, že je třeba zvážit případné nasazení numerických algoritmů pro chod v reálném čase.

A Příloha - help pro funkce IGM a DGM

DGM

DGM resi primou geometrickou ulohu pro 6 DOF manipulator s DH parametry.

$T_END = DGM(MOVE, DH, JOINTS)$ vrati matici koncove polohy a rotace T_END pro Denavit-Hartenbergovy parametry DH, nastaveni kloubu JOINTS a vektor pohybu MOVE.

Matice T_END je matice koncove polohy a rotace ve tvaru $[ROT, TRAN; 0\ 0\ 0\ 1]$ kde ROT je ortonormalni matice rotace, TRAN je vektor polohy koncoveho bodu. DH jsou Denavit-Hartenbergovy parametry ve tvaru $[DH_D; DH_THETA; DH_A; DH_ALPHA]$, jednotlivé řádky jsou parametry pro příslušné klouby 1-6. Vektor joints určuje složení jednotlivých kloubů manipulatoru, 'R' představuje rotační kloub, 'P' představuje translační kloub. Přípustné nastavení je tedy například $JOINTS = ['PPRRRR']$

Vektor pohybu MOVE je nastavení jednotlivých translačních a rotačních kloubů, například pro manipulator s klouby $['RRRRRR']$ vektor $MOVE = [\pi\ \pi\ \pi\ \pi\ \pi\ \pi]$; představuje otocení všech kloubů o úhly π .

IGM

IGM Inverzní geometrická úloha pro 6 DOF manipulator s Denavit-Hartenbergovými parametry

$IGM(T_END, DH, JOINTS)$ vrati potřebné nastavení kloubů pro dosažení koncové polohy T_end v manipulatoru s Denavit-Hartenbergovými parametry DH a uspořádáním kloubů JOINTS.

$IGM(DH, JOINTS)$ vrati symbolické předpisy pro sestavení výše uvedených nastavení. Protože je nutná numerická kontrola je jako matice T_END použita koncová poloha při nastavení kloubů $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$

$[SYM, NUM] = IGM(T_END, DH, JOINTS)$ vrací numerické nastavení kloubů NUM i symbolické předpisy SYM

Matice T_END je matice koncové polohy a rotace ve tvaru $[ROT, TRAN; 0\ 0\ 0\ 1]$ kde ROT je ortonormalní matice rotace, TRAN je vektor polohy koncového bodu. DH jsou Denavit-Hartenbergovy parametry ve tvaru $[DH_D; DH_THETA; DH_A; DH_ALPHA]$, jednotlivé řádky jsou parametry pro příslušné klouby 1-6. Vektor joints určuje složení jednotlivých kloubů manipulatoru, 'R' představuje rotační kloub, 'P' představuje translační kloub. Přípustné nastavení je tedy například $JOINTS = ['PPRRRR']$

Funkce řeší manipulatory s právě třemi rotačními a právě

tremi translacnimi klouby, nebo manipulatory obsahujici sfericke zapesti na jekekoliv pozici retezce. Sfericke zapesti jsou tri rotacni klouby $j-1$, j , $j+1$ za sebou, kde plati ze $DH_A(j-1) = 0$, $DH_A(j) = 0$, $DH_D(j) = 0$.

Uloha je obecne resitelna pro jakekoliv nastaveni parametru DH_THETA a DH_ALPHA , tato funkce ale resi pouze pripady kdy vsechny parametry theta a alpha jsou cele nasobky $\pi/2$, respektive kdyz sinus a cosinus techto parametru je z mnoziny $(-1, 0, 1)$.

Pri zadani manipulatoru, který není validní, nalezení singulární polohy nebo špatným zadáním parametru jsou vráceny prázdné proměnné a vypsáno příslušné varování.

POZOR! pro některé manipulatory může být doba chodu funkce relativně dlouhá (více než minutu). Symbolický výstup může být v řádu až tisíců znaků.

Seznam obrázků

1	Manipulátor KUKA.	7
2	Srovnání sériového a paralelního manipulátoru ABB s vyznačenými pracovními prostory. . .	8
3	Různé typy kloubů (P, R, U, S).	9
4	Přesnost (accuracy) a opakovatelnost (repeatability).	9
5	Transformace souřadných systémů.	11
6	Denavit Hartenbergova úmluva.	15
7	Manipulátor se sférickým zápěstím popsáný Denavit Hartenbergovou dohodou.	17
8	Khalil Kleinfingerova úmluva.	19
9	Manipulátor se sférickým zápěstím popsáný Khalil Kleinfingerovou metodou.	20
10	Rozvětvený řetězec popsáný Khalil Kleinfingerovou metodou.	21
11	Cylindrický manipulátor se třemi P a třemi R klouby.	25
12	Sférické zápěstí.	29
13	Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.	30
14	Dekompozice antropomorfního manipulátor se sférickým zápěstím.	31
15	Práce s funkcí, manipulátor se třemi P a třemi R klouby.	47
16	Práce s funkcí, manipulátor se sférickým zápěstím.	49

Reference

- [1] M. Švejda. *Přednášky k předmětu Úvod do robotiky a mechatroniky*. ZČU, 2012.
- [2] W. Khalil, E. Dombre. *Modelling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [3] L. Sciavicco, B. Siciliano. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, second edition, 2000.
- [4] *Matlab Symbolic Math toolbox*. <http://www.mathworks.com/products/symbolic>
- [5] M. Goubej, M. Švejda, M. Schlegel. *Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu*. ZČU, 2012.
- [6] M. Švejda. *Kinematika robotických architektur*, práce ke státní doktorské zkoušce, ZČU, 2011.
- [7] ABB Robotics. www.abb.com
- [8] KUKA Robot Group. www.kuka.com