

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

Diplomová práce

Fúze odhadů stavu pro stochastické dynamické systémy

PLZEŇ, 2013

Bc. Josef Trneček

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne: 16.5.2013

Bc. Josef Trneček

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu Prof. Ing. Miroslavu Šimandlovi, CSc za cenné podněty při zpracování diplomové práce. Dále bych chtěl panu Ing. Jiřímu Ajglovi za jeho ochotu odpovídat na mé dotazy a pomoc při zpracování diplomové práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá fúzí odhadů stavu pro lineární stochastické dynamické systémy. Nejprve stručně prezentuje úlohu odhadu stavu systému na lokální úrovni a představuje málo využívaný Informační filtr. Další část práce se pak zabývá základními přístupy k fúzi lokálních odhadů stavu. Ve třetí kapitole jsou pak navrženy další nové jednoduché systémy fúze. V poslední části práce jsou prezentovány dosažené výsledky simulací u všech předložených algoritmů.

Klíčová slova:

Odhad stavu stochastického systému, Kalmanův filtr, Informační filtr, Fúze lokálních odhadů, Fúze bez paměti a s pamětí.

Abstract

This master thesis deals with fusion of local track estimates for linear stochastic dynamic system. At first, it presents estimation problem and introduces rarely used Information filter. Next part of the work deals with basic approaches to the fusion of local state estimates. The new simplified fusion systems are proposed in the third chapter. The simulation results of each algorithm are presented in the last chapter.

Keywords:

Estimation problem, Kalman filter, Information filter, Fusion of local state estimates (Track to track fusion), Fusion without and with memory.

Obsah

Úvod.....	1
1. Odhad stavu stochastického systému	3
1.1. Stochastický systém	3
1.2. Kalmanův filtr	5
1.3. Informační filtr	5
2. Centralizovaná a hierarchická fúze:	9
2.1. Centralizovaný Kalmanův a Informační filtr	10
2.2. Fúze lokálních odhadů bez paměti.....	14
2.2.1. Jednoduchý algoritmus konvexních kombinací.....	14
2.2.2. Algoritmus se vzájemnou kovarianční maticí.....	16
2.3. Fúze lokálních odhadů s pamětí pro Kalmanův a Informační filtr	21
2.3.1. Časová prodleva u algoritmů s pamětí.....	23
2.4. Porovnání centralizovaného odhadu s globálními fúzními odhady	25
3. Návrhy nových jednodušších systémů fúze	25
3.1. Kombinace využívající prvky na diagonále.....	26
3.2. Kombinace využívající stopy matice	27
3.3. Kombinace využívající determinantu matice.....	28
4. Simulace a výsledky.....	28
4.1. Popis testovacího systému.....	28
4.2. Shrnutí testovaných algoritmů	30
4.3. Srovnání jednotlivých algoritmů a dosažených výsledků.....	30
Závěr	41
Literatura:.....	43

Úvod

Tato práce pojednává o odhadu stavu stochastických systémů a jeho následné fúzi s jinými odhady. Teorie odhadu se zabývá výběrem bodu z prostoru (ať již spojitého nebo diskrétního) podle jistého zvoleného kritéria [1]. Její počátky jsou spojeny s prací Pierra Laplaceho a hlavně Karla Gausse, jenž spolu s Adrienem Legendrem vynalezli způsob odhadu pohybu planet na základě nepřesného pozorování pomocí metody nejmenších čtverců. Největšího rozmachu pak následně teorie odhadu zažívala během 20. století. Během čtyřicátých let, kdy byl zformulován Wiener – Hopfův problém nebo také Kolmogorovův problém, jenž spočívá v odhadování náhodného procesu. Odhad je prováděn ve frekvenční oblasti pomocí Fourierovy transformace tak, aby byla minimalizována střední kvadratická chyba. Pravděpodobně nejdůležitější událost v teorii odhadu pak nastává v šedesátých letech, kdy Rudolf Kalman odvozuje rovnice pro dnes nejčastěji používaný filtr – Kalmanův. V současné době se rozvíjí především problém nelineární filtrace a aplikace příslušných nelineárních filtrů pro nelineární, negaussovské systémy. Teorie odhadu je v dnešní době hojně aplikována v praxi při sledování trajektorií objektů, v navigaci GPS, v detekci chyb, ve vojenství, robotice, v leectví, ekonomických oborech či při odhadování parametrů technologických procesů.

S prudkým rozvojem techniky a nástupem složitějších a důmyslnějších systémů vyvstala potřeba využívat více senzorů monitorujících stav popřípadě okolí systému. Použití většího množství senzorů oproti jedinému čidlu má mnoho výhod [2]. Například při výpadku jednoho senzoru stále dostáváme informace od ostatních čidel a vzniklá situace pak nevede ke kritické chybě systému. Další výhodou může být použití různých druhů senzorů, jejichž kombinací lze získat lepší informaci o sledovaném objektu, stavu systému či okolí. Taktéž ekonomická stránka realizace projektů, ve které je řešena úloha odhadu, není zanedbatelná, protože pro dosažení stejného výsledku s ohledem na kvalitu odhadu můžeme využít více levných senzorů, oproti jednomu preciznímu a drahému zařízení. Obecně tedy právě aplikace většího množství senzorů umožňuje vytvořit kvalitnější informaci o prostředí nebo hodnotě požadované veličiny, která pak může být použita při rozhodování či uskutečňování řídicího zásahu. Data pak mohou být použita jednotlivými lokálními filtry k produkci lokálních odhadů. Optimálním slučováním dat z jednotlivých senzorů či slučováním lokálních odhadů se zabývá fúze.

Její teoretická část byla extenzivně rozvíjena od 80. let dvacátého století, a to především Yaakovem Bar-Shalomem. Fúze dat je v hojné míře využívána například v robotice, v řízení technologických procesů, vojenství, letectví či kosmonautice.

Fúze je v dnešní době široce popsána v mnohé odborně orientované literatuře, avšak pro čtenáře pronikajícího do této problematiky může být ze začátku poměrně složité se v ní zorientovat. Motivací vzniku této práce je tedy seznámit čtenáře se základními přístupy a algoritmy, které se využívají u fúze, a poskytnout tak základ k dalšímu studiu této problematiky.

Cílem této práce je nejprve stručně nastínit problematiku úlohy odhadu stavu systému. Dále pak uvedení do problematiky fúze, a to jak jednotlivých měření, tak i lokálních odhadů stavu, a diskutovat vztah mezi odhady poskytovanými různými systémy fúze. Dalším cílem je pak navrhnout vlastní nové zjednodušující systémy fúze a zhodnotit všechny systémy představené v jednotlivých kapitolách.

V první kapitole se tato práce stručně zabývá úlohou odhadu stavu pro stochastický dynamický systém s jedním senzorem. Je představen Kalmanův filtr a také Informační filtr. Ve druhé kapitole již přecházíme k systému s více senzory. Je zde uvedeno řešení, které využívá fúze jednotlivých měření a je představena varianta Centralizovaného Kalmanova a Informačního filtru. Následně je popsána fúze lokálních odhadů, která se zabývá problémem, jakým způsobem kombinovat jednotlivé odhady z příslušných filtrů k získání jediného globálního odhadu. Ve třetí kapitole diplomové práce jsou navrženy zjednodušující systémy fúze odhadu, které by mohly být aplikovány na některých zařízeních například z důvodu úspory výpočetního času. Ve čtvrté kapitole jsou všechny představené algoritmy testovány na jednoduchém lineárním systému. Dosažené výsledky jsou následně porovnány a konfrontovány s předpoklady teoretické části práce. V závěru práce jsou shrnuty a prezentovány dosažené výsledky.

1. Odhad stavu stochastického systému

Abychom mohli přejít ke složitějším algoritmům fúze z více zdrojů, je vhodné si pro začátek definovat úlohu odhadu stavu stochastického lineárního systému. Obecná úloha odhadování se dělí na tři části [1]: filtraci, sledování a navigaci. Cílem filtrace je odhad stavu stochastického systému z měření, jež jsou zatížena šumem. Úloha sledování se zabývá odhadem stavu pohybujícího se objektu na základě měření získaných mimo tento sledovaný objekt, například sledování letadla dvěma radarovými stanicemi. Poslední možnost je navigace, čímž se rozumí odhad stavu objektu, na kterém je měřící zařízení umístěno, například GPS jednotky umístěné v mobilním telefonu. Odhad stavu systému pak může být dále rozdělen podle časového okamžiku, pro který je odhad prováděn a časového okamžiku dostupného měření:

- Filtrace – požadujeme odhad $\hat{x}(k|k)$ za předpokladu měření do současného času k .
- Predikce – požadujeme odhad $\hat{x}(k+l|k)$, kde $l > 0$
- Vyhlazování – požadujeme odhad $\hat{x}(k-l|k)$, kde $l > 0$.

V naší práci se budeme zabývat především úlohou filtrace a predikce ve spojení s lokálními filtry a následně úlohou sledování.

1.1. Stochastický systém

Stochastický systém je systém, u něhož můžeme nalézt nějakou náhodnost. Ta může být chápána jako porucha působící na systém ať již jako porucha přímo ovlivňující systém či například nepřesnost senzoru, který daný systém pozoruje či jako neurčitost umožňující pokrýt nesoulad mezi abstraktním modelem a skutečností.

Uvažujme lineární stochastický dynamický systém v diskrétní časové oblasti ve tvaru:

$$x(k) = F(k)x(k-1) + B(k)u(k-1) + G(k)w(k), \quad (1.1)$$

kde: $x(k)$ je stav systému v čase k , $F(k)$ je stavová matice, $B(k)$ je vstupní matice, $u(k)$ je vektor řízení a $w(k)$ je bílý šum s gaussovským rozložením: $w(k) \sim N(0, Q(k))$, a jeho vlastnosti jsou:

$$E[w(i)w^T(j)] = \delta_{ij}Q(i). \quad (1.2)$$

Symbol δ_{ij} je Kroneckerova funkce delta definovaná jako:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1.3)$$

Následně definujeme model pozorování:

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad (1.4)$$

kde $z(k)$ je vektor měření v čase k , $H(k)$ je matice pozorování a $v(k)$ je bílý šum s gaussovským rozložením: $v(k) \sim N(0, R(k))$, vlastnosti šumu jsou dány vztahem:

$$E[v(i)v^T(j)] = \delta_{ij}R(i). \quad (1.5)$$

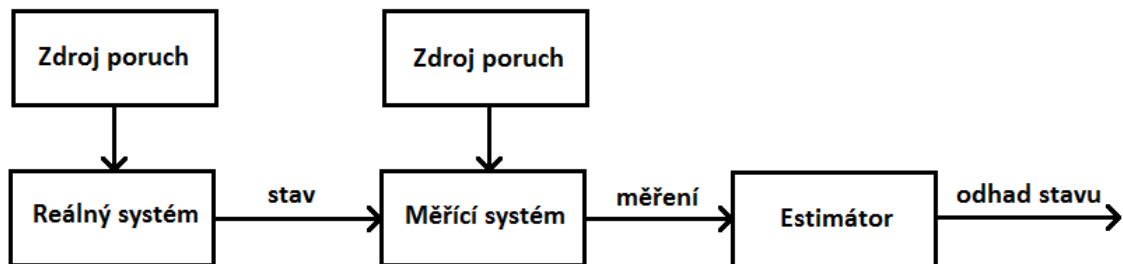
Dále pak předpokládáme, že oba šумы jsou nezávislé, tedy že platí:

$$E[w(i)v^T(j)] = 0. \quad (1.6)$$

Počáteční stav systému $x(0)$ je nezávislý na stavovém šumu $w(k)$ i šumu měření $v(k)$ a dán:

$$x(0) \sim N(0, P(0)). \quad (1.7)$$

Pro takto definovaný systém nyní chceme najít odhad stavu: $\hat{x}(k|k) = f(z^k)$, kde $z^k = [z(0), z(1), \dots, z(k)]$ a kovarianční matici chyby odhadu $P(k|k) = E\{[x(k) - \hat{x}(k|k)][x(k) - \hat{x}(k|k)]^T\}$, kde $x(k)$ je skutečný stav systému. Obecně hledáme takový odhad $\hat{x}(k|k)$, aby chyba $\tilde{x}(k|k) = x(k) - \hat{x}(k|k)$, byla minimalizována podle nějakého daného kritéria. Celé schéma estimace zobrazuje Obr. 1.1.



Obr. 1.1: Schéma odhadu stavu

1.2. Kalmanův filtr

Nejprve se věnujme jednomu z nejnámějších estimátorů – Kalmanovu filtru. Jedná se o lineární rekurzivní estimátor, který generuje optimální odhad ve smyslu střední kvadratické chyby. Jeho syntézou se zabývalo již množství literatury a my se zde již jeho syntézou nebudeme dále zabývat. Kalmanův filtr může být obecně rozdělen do dvou částí: prediktivní a filtrační. Uvedme nyní rovnice popisující lineární Kalmanův filtr.

Prediktivní část:

$$\hat{x}(k|k-1) = F(k)\hat{x}(k-1|k-1) + B(k)u(k-1), \quad (1.8)$$

$$P(k|k-1) = F(k)P(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k). \quad (1.9)$$

Dále pak definujme matice $W(k)$ a $S(k)$. Matice $W(k)$ je označována jako Kalmanův zisk, matice $S(k)$ je kovarianční matice inovace a obě matice jsou dány vztahy:

$$S(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k), \quad (1.10)$$

$$W(k) = P(k|k-1)H^T(k)S^{-1}(k). \quad (1.11)$$

Filtrační část:

$$\hat{x}(k|k) = [I - W(k)H(k)]\hat{x}(k|k-1) + W(k)z(k), \quad (1.12)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - W(k)S(k)W^T(k). \quad (1.13)$$

Symbol I značí jednotkovou matici příslušné dimenze. Je třeba poznamenat, že Kalmanův filtr generuje pro lineární systémy nejlepší odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při splnění všech výše uvedených podmínek u stochastického lineárního systému. Pro nelineární systémy je vhodné použít tzv. Rozšířený Kalmanův filtr.

1.3. Informační filtr

Tento filtr je algebraicky ekvivalentní s výše uvedeným Kalmanovým filtrem. Hlavní rozdíl mezi oběma filtry je ten, že informační filtr pracuje s odhady

v informačním prostoru, zatímco Kalmanův filtr v prostoru stavovém. Informační filtr tedy poskytuje informační vektor a informační matici místo odhadu stavu a jeho příslušnou kovarianční matici chyby odhadu. Oba dva filtry jsou však ekvivalentní a vzájemně na sebe převeditelné, jak ukážeme při odvozování rovnic informačního filtru [2].

Informační matice je dána vztahem:

$$Y(k|k) = P^{-1}(k|k). \quad (1.14)$$

Tento vztah je poměrně intuitivní, čím je větší kovarianční matice (nejistota), tím je informační matice menší a naopak. Součinem informační matice a odhadem stavu dostáváme informační vektor:

$$\hat{y}(k|k) = P^{-1}(k|k)\hat{x}(k|k) = Y(k|k)\hat{x}(k|k). \quad (1.15)$$

K dalšímu odvození informačního filtru budeme potřebovat výraz $[I - W(k)H(k)]$ z rovnice (1.12) filtrační části Kalmanova filtru, kterou budeme násobit zprava jednotkovou maticí ve tvaru: $P(k|k - 1)P^{-1}(k|k - 1)$:

$$\begin{aligned} (I - W(k)H(k)) \cdot (P(k|k - 1)P^{-1}(k|k - 1)) &= \\ &= [P(k|k - 1)P^{-1}(k|k - 1) \\ &\quad - W(k)H(k)P(k|k - 1)P^{-1}(k|k - 1)] \\ &= [P(k|k - 1) - W(k)H(k)P(k|k - 1)]P^{-1}(k|k - 1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nyní zavedeme do výrazu v závorce jednotkovou maticí $S(k)S^{-1}(k)$:

$$[P(k|k - 1) - W(k)S(k)S^{-1}(k)H(k)P(k|k - 1)]P^{-1}(k|k - 1). \quad (1.17)$$

Pro výraz v závorce ovšem platí, že: $W^T(k) = S^{-1}(k)H(k)P(k|k - 1)$ a po přepsání dostáváme tvar:

$$\begin{aligned} (I - W(k)H(k))(P(k|k - 1)P^{-1}(k|k - 1)) &= \\ &= [P(k|k - 1) - W(k)S(k)W^T(k)]P^{-1}(k|k - 1). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Výraz v závorce nyní můžeme přepsat pomocí rovnice (1.12) z filtrační části Kalmanova filtru:

$$(I - W(k)H(k))(P(k|k-1)P^{-1}(k|k-1)) = P(k|k)P^{-1}(k|k-1). \quad (1.19)$$

Po dosazení rovnice (1.10) do (1.11) dostáváme rovnici:

$$W(k) = P(k|k-1)H^T(k) [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}. \quad (1.20)$$

Tu vynásobíme zprava výrazem: $[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]$ a dostáváme:

$$W(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)] = P(k|k-1)H^T(k). \quad (1.21)$$

Roznásobením levé strany rovnice, převedením členu $W(k)H(k)P(k|k-1)H^T(k)$ na pravou stranu rovnice a následném vytknutí členu $P(k|k-1)H^T(k)$ následně dostáváme rovnice ve tvaru:

$$W(k)R(k) = [I - W(k)H(k)]P(k|k-1)H^T(k), \quad (1.22)$$

a jednoduchou úpravou dostáváme finální vzorec pro matici $W(k)$ ve tvaru:

$$W(k) = [I - W(k)H(k)]P(k|k-1)H^T(k)R^{-1}(k). \quad (1.23)$$

Substituce rovnice (1.19) do rovnice (1.23) vede k výrazu ve tvaru:

$$W(k) = P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k). \quad (1.24)$$

Dosazením rovnice (1.19) a (1.24) do rovnice (1.12) a následném vynásobení maticí $P^{-1}(k|k)$ dostáváme filtrační rovnici pro informační filtr:

$$P^{-1}(k|k)\hat{x}(k|k) = P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k). \quad (1.25)$$

Výše uvedenou rovnici následně ekvivalentně převedeme do informačního tvaru:

$$\hat{y}(k|k) = \hat{y}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)z(k). \quad (1.26)$$

Člen $H^T(k)R^{-1}(k)z(k)$ bývá označován jako informační přírůstek a označován písmenem $i(k)$:

$$i(k) = H^T(k)R^{-1}(k)z(k). \quad (1.27)$$

K následnému odvození rovnic pro informační matici využijeme rovnic (1.13) (1.11) a (1.19) dostáváme [2]:

$$P(k|k) = [I - W(k)H(k)]P(k|k-1)[I - W(k)H(k)]^T + W(k)R(k)W^T(k). \quad (1.28)$$

Dosažením rovnic (1.19) a (1.23) do rovnice (1.28) dostaneme tvar v podobě:

$$P(k|k) = [P(k|k)P^{-1}(k|k-1)]P(k|k-1)[P(k|k)P^{-1}(k|k-1)]^T + [P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k)]R(k)[P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k)]^T. \quad (1.29)$$

Následné vynásobení maticí $P^{-1}(k|k)$ zleva a zprava značně zjednoduší výsledek na tvar:

$$P^{-1}(k|k) = P^{-1}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k), \quad (1.30)$$

který formálně přepíšeme do informačního tvaru:

$$Y(k|k) = Y(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k). \quad (1.31)$$

Člen $H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$ je přírůstkovou informační maticí definovanou:

$$I(k) = H^T(k)R^{-1}(k)H(k). \quad (1.32)$$

Pokud sloučíme rovnice (1.26) s (1.27) a (1.31) s (1.32) dostáváme rovnice pro filtrační část Informačního filtru ve tvaru:

$$\hat{y}(k|k) = \hat{y}(k|k-1) + i(k), \quad (1.33)$$

$$Y(k|k) = Y(k|k-1) + I(k). \quad (1.34)$$

Rovnice popisující prediktivní část informačního filtru mají tvar:

$$\hat{y}(k|k-1) = L(k|k-1)\hat{y}(k-1|k-1) + Y(k|k-1)B(k)u(k), \quad (1.35)$$

$$Y(k|k-1) = [F(k)Y^{-1}(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k)]^{-1}. \quad (1.36)$$

Matice $L(k|k-1)$ je definována vztahem:

$$L(k|k-1) = Y(k|k-1)F(k)Y^{-1}(k-1|k-1). \quad (1.37)$$

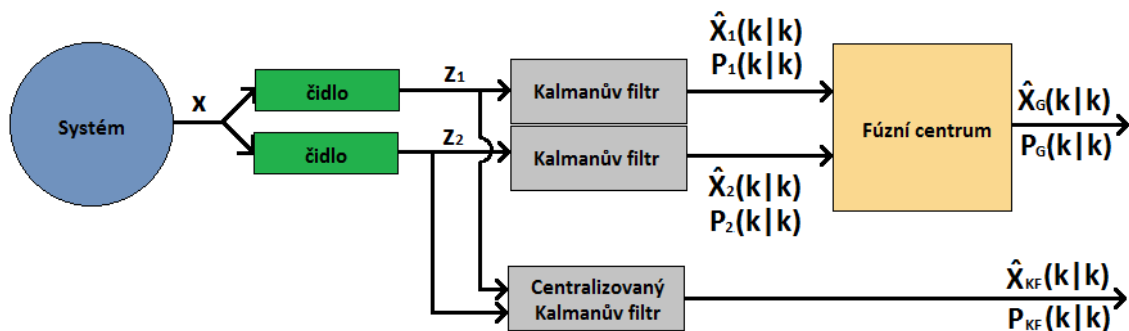
Celý Informační filtr je tedy popsán rovnicemi (1.33) - (1.37).

Výhodou využití Informačního filtru oproti Kalmanovu filtru může být jednodušší výpočetní složitost příslušného algoritmu, především u rovnic pro filtrační část. Není zde například ani žádný zisk, jako v případě Kalmanova filtru, a tedy maximální dimenze matice, kterou musíme invertovat, je rovna dimenzi stavového prostoru. Jednou z dalších výhod může být též inicializace Informačního filtru prostým nastavením počáteční informace na nulovou (respektive velmi malou hodnotu čísel na diagonále) [2]. Tyto uvedené vlastnosti pak mohou být úspěšně použity v případě více měření od různých sensorů a jejich kombinací do jediného odhadu. Pro bližší studium uvedeného filtru může posloužit například [2], [4].

2. Centralizovaná a hierarchická fúze:

Základní myšlenkou fúze je zkvalitnění získané informace o stavu systému na základě více měření různých sensorů na rozdíl od použití jediného senzoru. K této problematice existuje mnoho přístupů, založených například na Bayesově teorému nebo použití rozdílných architektur. My se budeme zabývat úlohou fúze lokálních odhadů, v cizí literatuře často označovanou jako „*Track-to-track fusion*“. Pod pojmem lokální odhad rozumíme odhad generovaný jedním příslušným filtrem. Fúze lokálních odhadů spolu s úlohou asociace „*Track-to-track association*“, která se zabývá problémem, zda-li lokální odhady sledují stejný cíl, tvoří důležitou součást vícesenzorové fúze. Celý problém fúze lokálních odhadů ilustruje Obr. 2.1. Je patrné, že jednotlivá měření vstupují do příslušných Kalmanových filtrů, které následně produkují odhady stavů označené $\hat{x}_1(k|k)$ a $\hat{x}_2(k|k)$ (v anglické literatuře označované jako „*track*“) a také

příslušné kovarianční matice $P_1(k|k)$ a $P_2(k|k)$. Tyto výsledky jsou následně vyhodnoceny příslušnými algoritmy a výsledek je tzv. globální odhad $\hat{x}_G(k|k)$ a příslušná kovarianční matice $P_G(k|k)$. Tento algoritmus tedy přímo nepracuje s měřeními. Klasickým příkladem takového uspořádání může být například pozorování letadla dvěma odlišnými radarovými stanicemi a zasílání výsledků do řídicího centra, kde jsou následně vyhodnoceny. Další možností je pohled na jednotlivé senzory jako na jediný sensor a následné využití klasických rovnic pro Kalmanův filtr, jenž následně bude produkovat globální odhady $\hat{x}_{KF}(k|k)$, respektive kovarianční matici $P_{KF}(k|k)$. Kvůli inverzi matic vyšších řádů a tedy zvýšeným výpočetním nárokům je tento postup aplikovatelný jen na malé množství senzorů. Centralizovaný Kalmanův filtr slučuje měření, a proto není fúzní algoritmus pro odhady, ale pro měření. Také nám dobře poslouží pro srovnání s algoritmy fúze lokálních odhadů, proto jej v této sekci uvádíme. Dále budeme zkoumat, zda jsou výsledky odhadů $\hat{x}_G(k|k)$ a $\hat{x}_{KF}(k|k)$ stejné či různé.



Obr. 2.1: Fúze lokálních odhadů stavů a Centralizovaný Kalmanův filtr

2.1. Centralizovaný Kalmanův a Informační filtr

Tato metoda využívá jednoho jediného centrálního Kalmanova filtru s tím, že na skupinu senzorů může být pohlíženo jako na jeden jediný sensor s velkým a komplexním modelem pozorování [3]. Tento náhled pak převádí aplikaci vícesenzorové fúze na standartní úlohu s jedním modelem pozorování a fúzi lze řešit velice jednoduchým způsobem. Bohužel tato metoda má i svá úskalí v podobě inverzí matic velkých řádů a je tedy vhodná pouze pro malé množství senzorů.

Uvažujme systém z první kapitoly definovaný vztahy (1.1), (1.2) a (1.3). Tento systém pak následně budeme chtít pozorovat N senzory, což obecně zapíšeme jako:

$$z_i(k) = H_i(k)x(k) + v_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

kde $z_i(k)$ je vektor měření v čase k , $H_i(k)$ je matice pozorování a $v_i(k)$ jsou bílé šумы s gaussovským rozložením: $v_i(k) \sim N(0, R_i(k))$, $R_i(k)$ je známé kovarianční matice definované:

$$R_{ij}(k) = \begin{cases} R_i(k), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.2)$$

Dále pak předpokládáme, že oba šумы jsou nezávislé, tedy že:

$$E[v_i(k)v_j^T(l)] = 0. \quad (2.3)$$

Je třeba zdůraznit, že všechny senzory sledují stejný stav a veškerá komunikace je synchronní bez zpoždění tzv. „full rate“.

Nyní z jednotlivých měření $z_i(k)$ složíme vektor $z(k)$, čímž převedeme problém na úlohu odhadu stavu stochastického systému pro jeden senzor.

Vektor $z(k)$ definujeme jako:

$$z(k) = [z_1^T(k) \dots z_N^T(k)]^T. \quad (2.4)$$

Dále pak definujeme matici pozorování $H(k)$ a vektor aditivního šumu $v(k)$:

$$H(k) = [H_1^T(k) \dots H_N^T(k)]^T, \quad (2.5)$$

$$v(k) = [v_1^T(k) \dots v_N^T(k)]^T. \quad (2.6)$$

Kovarianční matici $R(k)$ následně odvodíme podle vztahu:

$$\begin{aligned} R(k) &= E[v(k)v^T(k)] = E\{[v_1^T(k) \dots v_N^T(k)]^T [v_1^T(k) \dots v_N^T(k)]\} = \\ &= \text{blokdial}\{R_1(k) \dots R_N(k)\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dohromady tedy bude model pozorování vypadat jako model pozorování pro jediný senzor (1.4):

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k). \quad (2.8)$$

Následně můžeme využít rovnic (1.8), (1.9), (1.12) a (1.13) pro Kalmanův filtr z předešlé kapitoly a spolu s výše uvedeným přístupem jej nazveme Centralizovaný Kalmanův filtr.

Nyní se zaměříme na výpočetní složitost celého tohoto přístupu, analýza složitosti je uvedena v [3]. Nejprve bude analyzována výpočetní složitost rovnic pro predikci (1.12) a (1.13) pro snadnou orientaci je zde uvedeme:

$$\hat{x}(k|k-1) = F(k)\hat{x}(k-1|k-1) + B(k)u(k)$$

$$P(k|k-1) = F(k)P(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k)$$

Je zřejmé, že u těchto rovnice nedochází ke zpracování měření a jsou naprosto stejné, jako při použití Kalmanova filtru pro jeden senzor. U žádné z matic nedochází k rozšiřování jejich dimenzí. Naproti tomu u rovnic pro filtrační část filtru (1.8) a (1.9) se pracuje přímo s vektory $z(k)$, $v(k)$ a maticí $H(k)$ (jež jsou složeny z jednotlivých i -tých podvektorů a podmatic) a je tedy patrné, že výpočet bude složitější s rostoucím počtem senzorů.

$$\hat{x}(k|k) = [I - W(k)H(k)]\hat{x}(k|k-1) + W(k)z(k)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - W(k)S(k)W^T(k)$$

Kde matice I reprezentuje jednotkovou matici, matice $W(k)$ a $S(k)$ jsou dány vztahem:

$$S(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)$$

$$W(k) = P(k|k-1)H^T(k)S^{-1}(k)$$

Vektor $x(k)$ má obecně dimenzi n . Necht' počtu senzorů $i = 1, 2, \dots, N$ generujících měření $z_i(k)$ s dimenzí m_i přísluší pozorovací matice $H_i(k)$ s dimenzí $m_i \times n$. Pro jednoduchost jsme se omezili na předpoklad, že matice $H_i(k)$ má stejné rozměry

pro všechny senzory. Vektor pozorování $z(k)$ musí mít dimenzi m , kterou vypočteme jako $m = \sum_{i=1}^N m_i$. Matice $H(k)$ pak nutně musí mít dimenzi $m \times n$. Vektor aditivního šumu $v(k)$ nabývá dimenze m . Celá situace je pro přehlednost znázorněna na Obr. 2.2.

$$z = Hx + v$$

Obr. 2.2: Dimenze jednotlivých vektorů

Matice $S(k)$ bude tedy řádu $m \times m$. Dimenze této matice neustále poroste s tím, jak poroste počet jednotlivých senzorů, což následně způsobí problém při výpočtu matice $W(k)$, kde nutně potřebujeme provést inverzi $S(k)$. Obecně je inverze matice výpočetně složitá, proto se tento přístup hodí spíše pro menší systémy, tvořené malým množstvím senzorů.

V případě Centralizovaného informačního filtru využijeme naprosto totožný přístup definovaný rovnicemi (2.4) - (2.8), jako v případě Centralizovaného Kalmanova filtru. Výsledek však bude v informačním, nikoli stavovém prostoru. Jestliže obdržený výsledek přepočteme za použití úpravy vztahu (1.15), dostaneme shodné výsledky. Nicméně je nutné zdůraznit, že Centralizovaný informační filtr má jednu výhodu, a to absenci inverze matic vyšších řádů. Podíváme-li se na jednotlivé rovnice, pak prediktivní část zůstává zachována, avšak u filtrační části dojde ke zjednodušení. Uvažujme filtrační rovnice Informačního filtru (1.27) a (1.32), pokud je zkombinujeme se vztahy (2.4), (2.5) a (2.7) a omezíme se pro jednoduchost na dva lokální filtry, dostáváme:

$$i(k) = [H_1^T(k) \ H_2^T(k)]^T \begin{bmatrix} R_1(k) & 0 \\ 0 & R_2(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

a analogicky dostáváme pro rovnici:

$$I(k) = [H_1^T(k) \ H_2^T(k)]^T \begin{bmatrix} R_1(k) & 0 \\ 0 & R_2(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_1(k) \\ H_2(k) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Po roznásobení výše uvedených rovnic (2.9), (2.10) získáme následující tvary:

$$i(k) = H_1^T(k)R_1^{-1}(k)z_1(k) + H_2^T(k)R_2^{-1}(k)z_2(k), \quad (2.11)$$

$$I(k) = H_1^T(k)R_1^{-1}(k)H_1(k) + H_2^T(k)R_2^{-1}(k)H_2(k), \quad (2.12)$$

což znamená, že přidání dalšího lokálního měření ve filtrační části Centralizovaného informačního filtru znamená pouhé přičtení příslušně vynásobených lokálních matic. Výpočetní složitost Centralizovaného informačního filtru je tedy podstatně jednodušší, než v případě Centralizovaného Kalmanova filtru.

2.2. Fúze lokálních odhadů bez paměti

Na fúzi lokálních odhadů lze obecně nahlížet z mnoha úhlů pohledu, podobně jako na její samotnou realizaci. Jde o to, určit například architekturu systému, která bude fúzi provádět, zvolení kritéria podle kterého budeme posuzovat kvalitu globálního odhadu $\hat{x}_G(k|k)$, popřípadě jaké nároky chceme mít na paměť a případnou komunikaci. V této práci představíme náhledy na fúzi s pamětí a bez paměti. Pojmem „bez paměti“ rozumíme takový algoritmus, jenž nebude vyžadovat znalost výsledků předchozích globálních odhadů stavu, případně jejich kovariancí.

2.2.1. Jednoduchý algoritmus konvexních kombinací

Nejjednodušší a také často používanou metodou, jak efektivně zkombinovat více lokálních odhadů stavu „*local tracks estimates*“ k vyprodukování globálního odhadu stavu systému „*global track estimate*“ je tzv. Algoritmus konvexních kombinací „*Convex combination fusion algorithm*“. Globální odhad je určen jako lineární kombinace dvou či více lokálních odhadů, což můžeme obecně zapsat jako:

$$\hat{x}_G(k|k) = A\hat{x}_i + B\hat{x}_j, \quad (2.13)$$

kde parametry A a B jsou vybrány tak, aby minimalizovaly jisté kritérium [5]. Odhady \hat{x}_i a \hat{x}_j rozumíme odhady lokální i -tého a j -tého filtru. Aby byl výsledný získaný globální odhad $\hat{x}_G(k|k)$ nestranný, je nutné, aby byla splněna podmínka: $A + B = I$,

kde I je jednotková matice odpovídající dimenze. Pro naši situaci dvou nezávislých Kalmanových filtrů využijeme následující vzorec, který se vyskytuje v mnoha zdrojích a publikacích, například: [3], [5], [6].

Pro globální odhad stavu:

$$\begin{aligned} \hat{x}_G(k|k) = & P_j(k|k) [P_i(k|k) + P_j(k|k)]^{-1} \hat{x}_i(k|k) \\ & + P_i(k|k) [P_i(k|k) + P_j(k|k)]^{-1} \hat{x}_j(k|k), \end{aligned} \quad (2.14)$$

a jeho kovarianci:

$$P_G(k|k) = P_i(k|k) - P_i(k|k) [P_i(k|k) + P_j(k|k)]^{-1} P_i(k|k), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} P_G(k|k) = & P_i(k|k) [P_i(k|k) + P_j(k|k)]^{-1} P_j(k|k) \\ = & \left(P_i^{-1}(k|k) + P_j^{-1}(k|k) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Po roznásobení závorek následně dostáváme jednodušší výraz ve tvaru:

$$\hat{x}_G(k|k) = P_G(k|k) [P_i^{-1}(k|k) \hat{x}_i(k|k) + P_j^{-1}(k|k) \hat{x}_j(k|k)], \quad (2.17)$$

$$P_G(k|k) = \left(P_i^{-1}(k|k) + P_j^{-1}(k|k) \right)^{-1}. \quad (2.18)$$

Obecný algoritmus jednoduché konvexní kombinace pro N senzorů je pak ve tvaru:

$$\hat{x}_G(k|k) = P_G(k|k) \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k|k) \hat{x}_i(k|k), \quad (2.19)$$

respektive pro jeho kovarianci:

$$P_G(k|k) = \left[\sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k|k) \right]^{-1}, \quad (2.20)$$

kde $\hat{x}_i(k|k)$ a $P_i(k|k)$ respektive $\hat{x}_j(k|k)$ a $P_j(k|k)$ představují výstupy lokálních Kalmanových filtrů. V zahraniční literatuře tento algoritmus bývá nazýván jako „*Straight – forward track fusion algorithm*“ a pro svoji jednoduchost bývá často používán. Nenalezneme zde nějakou vazbu a algoritmus je tedy tzv. „bez paměti“ [7], kdy globální odhad stavu nezávisí na hodnotách z minulosti. Jeho největší nevýhodou je předpoklad, že oba odhady $\hat{x}_i(k|k)$ a $\hat{x}_j(k|k)$ jsou vzájemně nekorelovány, což ovšem v realitě není pravdou. Jejich korelace vychází z použití stejného modelu procesu a společné chyby predikce. Je tedy nutné do výše uvedeného algoritmu zakomponovat vzájemné kovarianční matice (zvané „*cross covariance matrices*“) mezi příslušnými odhady $\hat{x}_i(k|k)$ a $\hat{x}_j(k|k)$.

2.2.2. Algoritmus se vzájemnou kovarianční maticí

Tento algoritmus byl odvozen v [8] a od výše uvedeného jednoduchého algoritmu konvexních kombinací se liší uvažováním vzájemné kovarianční matice chyb lokálních odhadů mezi dvěma lokálními filtry. Pokud je vzájemná kovarianční matice nulová, přechází tento algoritmus v jednoduchý Algoritmus konvexních kombinací uvedený kapitole 2.1.1. Výpočet vzájemné kovarianční matice je dobře ukázán v [3] a my jej tedy dále budeme využívat.

Nejprve definujme chybu predikce jako:

$$\tilde{x}_i(k|k) = x(k|k) - \hat{x}_i(k|k), \quad (2.21)$$

a dosadíme za $\hat{x}_i(k|k)$ z filtrační části rovnic Kalmanova filtru (1.12), kde index i značí obecný i -tý filtr:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(k|k) &= x(k|k) - \hat{x}_i(k|k - 1) + W_i(k)H_i(k)\hat{x}_i(k|k - 1) \\ &\quad - W_i(k)z_i(k) \\ &= x(k|k) - \hat{x}_i(k|k - 1) \\ &\quad - W_i(k)[z_i(k) - H_i(k)\hat{x}_i(k|k - 1)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Následně dosadíme za $z_i(k)$ z modelu pozorování (2.1) pro i -tý senzor a dostáváme:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(k|k) &= x(k|k) - \hat{x}_i(k|k - 1) \\ &\quad - W_i(k)[H_i(k)x(k|k) + v_i(k) - H_i(k)\hat{x}_i(k|k - 1)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tento vzorec pak úpravou převedeme do tvaru:

$$\tilde{x}_i(k|k) = [I - W_i(k)H_i(k)]\tilde{x}_i(k|k-1) - W_i(k)v_i(k). \quad (2.24)$$

Ve výše uvedeném vzorci je prediktivní vztah pro chybu odhadu $\tilde{x}(k|k-1)$, tu definujeme jako:

$$\tilde{x}_i(k|k-1) = x(k) - \hat{x}_i(k|k-1). \quad (2.25)$$

Je třeba říci, že v úloze sledování neuvažujeme složku řízení, a proto jí při dosazení vynecháváme. Po následném dosazení za $x(k)$ a $\hat{x}_i(k|k-1)$ dostáváme tvary:

$$\tilde{x}_i(k|k-1) = F(k)x(k-1) - F(k)\hat{x}_i(k-1|k-1) + G(k)w(k), \quad (2.26)$$

$$\tilde{x}_i(k|k-1) = F(k)\tilde{x}_i(k-1|k-1) + G(k)w(k). \quad (2.27)$$

Nyní definujeme kovarianční matici mezi i -tým a j -tým senzorem $P_{ij}(k|k-1)$:

$$P_{ij}(k|k-1) = E\{\tilde{x}_i(k|k-1)\tilde{x}_j^T(k|k-1)\}, \quad (2.28)$$

za $\tilde{x}_i(k|k-1)$ pak dosadíme z rovnice (2.27) a přepíšeme na tvar:

$$P_{ij}(k|k-1) = E\left\{[F(k)\tilde{x}_i(k-1|k-1) + G(k)w(k)][F(k)\tilde{x}_j(k-1|k-1) + G(k)w(k)]^T\right\}. \quad (2.29)$$

Matici $F(k)$ můžeme následně vytknout před střední hodnotu:

$$P_{ij}(k|k-1) = F(k)E\{\tilde{x}_i(k|k-1)\tilde{x}_j^T(k|k-1)\}F^T(k) + G(k)E\{w(k)w(k)^T\}G^T(k), \quad (2.30)$$

a konečně aplikováním střední hodnoty dostáváme:

$$P_{ij}(k|k-1) = F(k)P_{ij}(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k). \quad (2.31)$$

Kovarianční matici $P_{ij}(k|k)$ definujeme jako:

$$P_{ij}(k|k) = E\{\tilde{x}_i(k|k)\tilde{x}_j^T(k|k)\}. \quad (2.32)$$

Následně za člen $\tilde{x}_i(k|k)$ dosadíme z (2.24), čímž dostáváme tvar:

$$P_{ij}(k|k) = E\left\{[(I - W_i(k)H_i(k))\tilde{x}_i(k|k-1) - W_i(k)v_i(k)][(I - W_j(k)H_j(k))\tilde{x}_j(k|k-1) - W_j(k)v_j(k)]\right\}, \quad (2.33)$$

a postupně upravujeme pravou stranu rovnice:

$$P_{ij}(k|k) = (I - W_i(k)H_i(k))E\left\{\tilde{x}_i(k|k-1)\tilde{x}_j^T(k|k-1)\right\} \cdot (I - W_j(k)H_j(k))^T + W_i(k)E\{v_i(k)v_j^T(k)\}W_j^T(k). \quad (2.34)$$

Následně využijeme předpokladu, že: $E\{v_i(k)v_j^T(k)\} = 0$ a dostáváme finální rovnici pro matici ve tvaru:

$$P_{ij}(k|k) = (I - W_i(k)H_i(k))P_{ij}(k|k-1)(I - W_j(k)H_j(k))^T. \quad (2.35)$$

Rovnice (2.31) a (2.35) dohromady udávají rekurzivní vztah pro výpočet vzájemné kovarianční matice $P_{ij}(k|k)$.

V [6] pak následně byly uvedeny rovnice pro globální odhad a globální kovarianční matici chyby odhadu:

$$\hat{x}_G(k|k) = \hat{x}_i(k|k) + P_{i|j}(k|k)P_{i+j}^{-1}(k|k)\left(\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}_i(k|k)\right), \quad (2.36)$$

$$P_G(k|k) = P_i(k|k) - P_{i|j}(k|k)P_{i+j}^{-1}(k|k)P_{i|j}^T(k|k), \quad (2.37)$$

kde matice $P_{i|j}(k|k)$ a $P_{i+j}(k|k)$ jsou definovány takto:

$$P_{i|j}(k|k) = P_i(k|k) - P_{ij}(k|k), \quad (2.38)$$

$$P_{i+j}(k|k) = P_i(k|k) + P_j(k|k) - P_{ij}(k|k) - P_{ij}^T(k|k). \quad (2.39)$$

Následným dosazením do rovnice (2.36) a (2.37) dostáváme:

$$\hat{x}_G(k|k) = \hat{x}_i(k|k) + [P_i(k|k) - P_{ij}(k|k)][P_i(k|k) + P_j(k|k) - P_{ij}(k|k) - P_{ij}^T(k|k)]^{-1}\left(\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}_i(k|k)\right), \quad (2.40)$$

$$P_G(k|k) = P_i(k|k) - [P_i(k|k) - P_{ij}(k|k)][P_i(k|k) + P_j(k|k) - P_{ij}(k|k) - P_{ij}^T(k|k)]^{-1} [P_i(k|k) - P_{ij}(k|k)]^{-T} \quad (2.41)$$

Na rovnice (2.40) a (2.41) se můžeme dívat tak, že celkový globální odhad stavu $\hat{x}_G(k|k)$ je roven lokálnímu odhadu stavu $\hat{x}_i(k|k)$ a následné korekci: $\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}_i(k|k)$, která je vážená jednotlivými kovariančními maticemi. Pokud je vzájemná kovarianční matice nulová, pak rovnice přechází do tvaru rovnic (2.17) a (2.18). Do fúzního centra musí být současně zasílány jednotlivé lokální Kalmanovy zisky W , kvůli výpočtu vzájemné kovarianční matice. To vnáší do celé úlohy nutnost další komunikace a zavádí větší míru komplexnosti do navrhovaného systému fúze.

Je však třeba zdůraznit, že i tento algoritmus je pouze suboptimální (ve smyslu minimální střední kvadratické chyby - MMSE). Důvodem je předpoklad, který byl učiněn při jeho Bayesovském odvozování, který bohužel neplatí [6]. Jinou alternativou může být pohled na lokální odhady coby na měření a využití přístupu založeném na Maximální věrohodnosti. Získaný globální odhad bude optimální ve smyslu Maximální věrohodnosti a rovnice odvozené pomocí tohoto přístupu pak budou totožné s rovnicemi pro konvexní kombinace se vzájemnou kovarianční maticí, jak ukážeme níže. V následujícím odvození nebudeme pro jednoduchost uvádět časové proměnné k .

Zavedme nejprve věrohodnostní funkci $L(x)$ a definujme jí jako podmíněnou hustotu pravděpodobnosti:

$$L(x) = -\ln p(\hat{x}_i, \hat{x}_j | x), \quad (2.42)$$

$$L(x) \propto \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{x}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} x \right)^T P^{-1} \left(\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{x}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} x \right). \quad (2.43)$$

Symbol \propto značí „proporcionální k“, I je jednotková matice příslušné velikost a kovarianční matice P odpovídá tvaru:

$$P = \begin{bmatrix} P_i & P_{ij} \\ P_{ji} & P_j \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Pro jednoduchost zapíšeme věrohodnostní funkci vektorově do tvaru:

$$L(x) = (\hat{x} - \mathbb{I}x)^T P^{-1} (\hat{x} - \mathbb{I}x), \quad (2.45)$$

kde $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{x}_j \end{bmatrix}$, $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$.

Položíme-li derivaci věrohodnostní funkce rovnou nule, dostáváme výraz ve tvaru:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{ML}} = -\mathbb{I}^T P^{-1} \hat{x} + \mathbb{I}^T P^{-1} \mathbb{I} \hat{x}_{ML} = 0, \quad (2.46)$$

a získáme globální odhad ve smyslu Maximální věrohodnosti:

$$\hat{x}_{ML} = (\mathbb{I}^T P^{-1} \mathbb{I})^{-1} (\mathbb{I}^T P^{-1} \hat{x}) = \left([I \ I]^T P^{-1} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1} [I \ I] P^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{x}_j \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Příslušnou kovarianční matici určíme dle vztahu:

$$P_{ML} = (\mathbb{I}^T P^{-1} \mathbb{I})^{-1} = \left([I \ I]^T P^{-1} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (2.48)$$

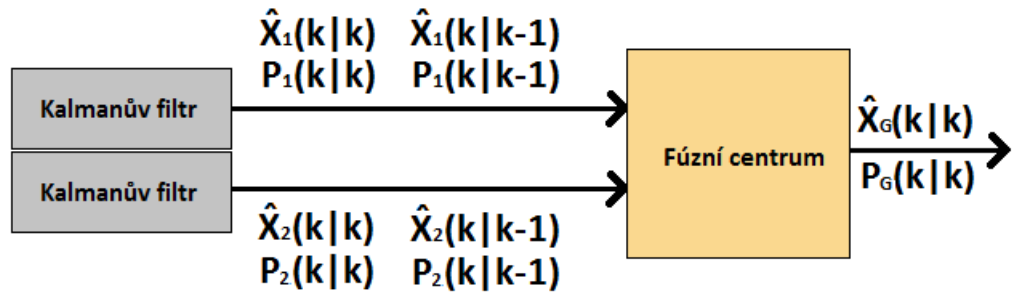
Jednotlivé submatice P_i a P_j představují důvěru v odhad jednotlivých lokálních filtrů. Matice P_{ij} a P_{ji} jsou právě vzájemné kovarianční matice mezi i -tým a j -tým odhadem a zároveň pro ně platí, že $P_{ij} = P_{ji}^T$. Pokud tyto matice položíme rovny nule, rovnice (2.47), (2.48) přechází v rovnice (2.17) a (2.18). Pokud vzájemné kovarianční matice budeme uvažovat, pak rovnice (2.47), (2.48), jsou ekvivalentní s rovnicemi (2.40), (2.41). Pokud bychom následující postup chtěli rozšířit na obecný tvar pro N senzorů, pak jednotlivé vektory a kovarianční matice budou následně vypadat takto:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \dots \\ \hat{x}_N \end{bmatrix}, \mathbb{I} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \dots \\ I \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_2 & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_N \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Pro hlubší studium tohoto problému lze doporučit především [6] a [9].

2.3. Fúze lokálních odhadů s pamětí pro Kalmanův a Informační filtr

V předchozích kapitolách byly uváděny algoritmy bez paměti, které využívaly v čase k pouze jednotlivé filtrační lokální odhady: $\hat{x}_i(k|k)$, $\hat{x}_j(k|k)$ a kovarianční matice: $P_i(k|k)$, $P_j(k|k)$. Pokud bude dostupná i informace ohledně lokální predikce odhadů: $\hat{x}_i(k|k-1)$, $\hat{x}_j(k|k-1)$, a kovariančních matic $P_i(k|k-1)$, $P_j(k|k-1)$. Můžeme použít algoritmus s pamětí, který kombinuje filtrační a prediktivní odhady lokálních filtrů a snaží se z nich vyextrahovat novou resp. přidanou informaci. Schéma přístupu je uvedeno na Obr.2.3: Fúze lokálních odhadů s pamětí pro Kalmanův filtr.



Obr.2.3: Fúze lokálních odhadů s pamětí pro Kalmanův filtr

Prediktivní globální odhad $\hat{x}_G(k|k-1)$ vypočteme jako:

$$\hat{x}_G(k|k-1) = F(k)\hat{x}_G(k-1|k-1) + B(k)u(k-1), \quad (2.50)$$

a prediktivní globální matice chyby odhadu bude ve tvaru:

$$P_G(k|k-1) = F(k)P_G(k-1|k-1)F^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k). \quad (2.51)$$

Filtrační část pro výpočet globálního odhadu bude mít tvar:

$$\hat{x}_G(k|k) = P_G(k|k) \left\{ P_G^{-1}(k|k-1)\hat{x}_G(k|k-1) + \sum_{i=1}^N e_i(k) \right\}. \quad (2.52)$$

Index i značí i -tý senzor, $\hat{x}_G(k|k-1)$ je globální prediktivní odhad, $P_G^{-1}(k|k-1)$ je globální prediktivní kovarianční matice.

Příslušnou kovarianční matici chyby odhadu vypočteme:

$$P_G(k|k) = \left[P_G^{-1}(k|k-1) + \sum_{i=1}^N E_i(k) \right]. \quad (2.53)$$

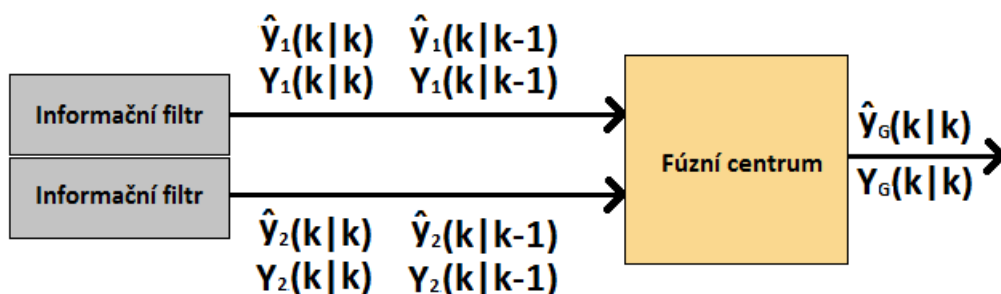
Členy $e_i(k)$ a $E_i(k)$ jsou definovány jako:

$$e_i(k) = \left(P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k) - P_i^{-1}(k|k-1)\hat{x}_i(k|k-1) \right), \quad (2.54)$$

$$E_i(k) = \left(P_i^{-1}(k|k) - P_i^{-1}(k|k-1) \right). \quad (2.55)$$

Zároveň se na rozdíl: $P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k) - P_i^{-1}(k|k-1)\hat{x}_i(k|k-1)$, uvedený v rovnici (2.54), můžeme dívat jako na snahu extrahovat novou informaci v kroku k . Pokud budeme uvažovat úlohu sledování, řízení v prediktivní rovnici (2.50) bude nulové.

V první kapitole byl uveden Informační filtr, jako jiná alternativa proti Kalmanově filtraci. Z odvození v první kapitole práce je patrné, že filtry jsou na sebe vzájemně převeditelné a algebraicky totožné. Jestliže se rozhodneme využívat Informační filtry, celková struktura fúzního systému se pak změní vůči předchozímu tvaru tím, že místo lokálních odhadů $\hat{x}_i(k|k)$, $\hat{x}_j(k|k)$ a kovariančních matic $P_i(k|k)$, $P_j(k|k)$ budou jednotlivé lokální filtry posílat informační vektory $\hat{y}_i(k|k)$, $\hat{y}_j(k|k)$ a informační matice $Y_i(k|k)$, $Y_j(k|k)$ tak, jak je naznačeno na obrázku Obr.2.4.



Obr.2.4: Fúze lokálních odhadů s pamětí pro verzi s Informačním filtrem

Rovnice prediktivní části Informačního filtru budou vypadat následovně:

$$\hat{y}_G(k|k-1) = L_G(k|k-1)\hat{y}_G(k-1|k-1) + Y_G(k|k-1)B(k)u(k), \quad (2.56)$$

$$Y_G(k|k-1) = [F(k)Y_G^{-1}(k-1|k-1)F^T(k) + Q(k)]^{-1}. \quad (2.57)$$

Matici $L_G(k|k-1)$ spočteme jako:

$$L_G = Y_G(k|k-1)F(k)Y_G^{-1}(k-1|k-1). \quad (2.58)$$

Rovnice pro filtrační část Informačního filtru budou vypadat:

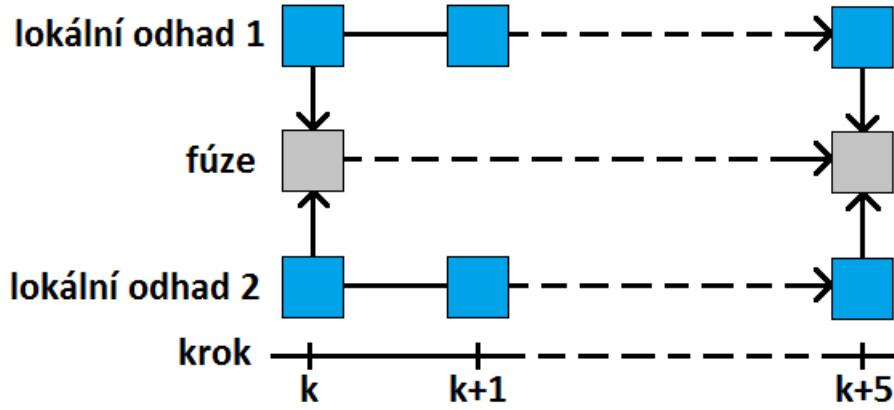
$$\hat{y}_G(k|k) = \hat{y}_G(k|k-1) + \sum_{i=1}^N y_i(k|k) - y_i(k|k-1), \quad (2.59)$$

$$Y_G(k|k) = Y_G(k|k-1) + \sum_{i=1}^N Y_i(k|k) - Y_i(k|k-1). \quad (2.60)$$

Výše uvedené algoritmy se liší od algoritmů uvedených v [2], kde byl předpoklad plně propojené sítě lokálních filtrů, kde každý lokální filtr mohl komunikovat s ostatními a nebylo zde jediné fúzní centrum. Tento předpoklad však v našem případě neplatí a rovnice tedy mají poněkud jiný tvar.

2.3.1. Časová prodleva u algoritmů s pamětí

Dosud jsme ve všech algoritmech předpokládali, že k fúzi lokálních odhadů dochází vždy při každém novém kroku k . V technické realizaci se však může vyskytnout požadavek fúzovat jednotlivé lokální odhady pouze v jistém čase za účelem ušetření výpočetní kapacity, které následně může být využita k řešení jiného problému. Obecně tedy nemusíme slučovat lokální odhady do jednoho odhadu globálního každý krok, ale například pro každý sudý, či pátý krok, jak naznačuje například Obr. 2.5. Je důležité připomenout, že předešlé algoritmy bez paměti neměly žádnou vazbu do minulosti a jejich realizace a následný výsledek v kroku fúze byl vždy stejný bez ohledu na časovou prodlevu. U algoritmů s pamětí je však vazba do minulosti právě díky přítomnosti nejen filtračních, ale také prediktivních odhadů. Je podstatný rozdíl, jestliže extrakci nové informace provádíme vždy po následujícím kroku, jak je popsána rovnicemi (2.54) a (2.55), či novou informaci extrahujeme až po několika uplynulých krocích.



Obr. 2.5: Zpoždění časové fúze o pět kroků

Výše uvedené rovnice pro Algoritmus s pamětí, konkrétně verzi s Kalmanovým filtrem, se při uvažování časové prodlevy n změní následovně:

Prediktivní globální odhad $\hat{x}_G(k|k-n)$ vypočteme jako:

$$\hat{x}_G(k|k-n) = \Phi(k|k-n+1)\hat{x}_G(k-n|k-n) + \sum_{j=1}^n \Phi(k|k-n+1+j)B(k-n+j-2)u(k-n+j-1), \quad (2.61)$$

kde matice $\Phi(k|l)$ je pro $l \leq k$ definována jako:

$$\Phi(k|l) = \prod_{i=l}^k F(i), \quad (2.62)$$

kde násobení provádíme postupně zleva, a pro $l = k+1$ jako jednotkovou matici, $\Phi(k|k+1) = I$.

Prediktivní globální matice chyby odhadu bude ve tvaru:

$$P_G(k|k-n) = \Phi(k|k-n+1)P_G(k-n|k-n)\Phi^T(k|k-n+1) + \sum_{j=1}^n \Phi(k|k-n+1+j)G(k-n+j)Q(k-n+j)G^T(k-n+j)\Phi^T(k|k-n+1+j) \quad (2.63)$$

Filtrační část rovnic Kalmanova filtru pak následně přejde do tvaru:

$$\hat{x}_G(k|k) = P_G(k|k) \left\{ P_G^{-1}(k|k-n)\hat{x}_G(k|k-n) + \sum_{i=1}^N e_i(k) \right\}, \quad (2.64)$$

$$P_G(k|k) = \left[P_G^{-1}(k|k-n) + \sum_{i=1}^N E_i(k) \right], \quad (2.65)$$

kde jednotlivé rovnice (2.54) a (2.55) se změni na tvar:

$$e_i(k) = \left(P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k) - P_i^{-1}(k|k-n)\hat{x}_i(k|k-n) \right), \quad (2.66)$$

$$E_i(k) = \left(P_i^{-1}(k|k) - P_i^{-1}(k|k-n) \right). \quad (2.67)$$

2.4. Porovnání centralizovaného odhadu s globálními fúzními odhady

V úvodu druhé kapitoly jsme zmínili, že budeme zkoumat vztah centralizovaného odhadu a globálních odhadů produkovanými výše uvedenými algoritmy. Z algoritmů fúze lokálních odhadů byl nejprve představen Algoritmus jednoduché konvexní kombinace. U tohoto algoritmu dochází k zanedbání vzájemné kovarianční matice a už z tohoto předpokladu je patrné, že jeho odhad nebude totožný s centralizovaným odhadem. Algoritmus se vzájemnou kovarianční maticí naproti tomu tuto matici uvažuje a zohledňuje ji při výpočtu. Nicméně nevyužívá odhadů z minulosti, a proto je poskytnutý odhad jiný než centralizovaný odhad. Jako poslední byl představen algoritmus s pamětí, který je založen na předpokladu nezávislých chyb měření. Tím, že zasíláme lokální filtrační i prediktivní odhady, je schopen extrahovat novou přidanou informaci. Tento jediný algoritmus produkuje odhady totožné s centralizovanými odhady. Algoritmus se zpožděním z Kapitoly 2.3.1 pak neuvažuje informaci mezi jednotlivými kroky a je tedy pouze aproximativní vůči Algoritmu s pamětí.

3. Návrhy nových jednodušších systémů fúze

Ve druhé kapitole jsme se zabývali především známými algoritmy, nyní navrheme jiné metody návrhu fúzních systémů. Pro nový systém fúze vyjdeme z lineární kombinace dvou lokálních odhadů stavu, kterou popisuje rovnice (2.13). Postupně představíme tři návrhy systémů fúze a budeme se zabývat způsobem, jakým navrhnout jednotlivé váhy příslušné k daným lokálním odhadům. Tyto postupy budou zjednodušující, oproti algoritmům z druhé kapitoly. Jako první představíme možnost sestavovat jednotlivé váhy z prvků nacházejících se na diagonále jednotlivých lokálních kovariančních matic poskytovaných lokálními filtry. Druhým přístupem bude využití stop výše uvedených matic a konečně posledním bude využití determinantů. Tyto

navržené systémy fúze pak budou konfrontovány ve čtvrté kapitole s algoritmy z druhé kapitoly a budou porovnány jejich jednotlivé výsledky ze simulací.

3.1. Kombinace využívající prvky na diagonále

Fúzní centrum dostává v každém okamžiku k lokální odhady stavu a kovarianční matice chyby odhadu, jak je patrné z Obr. 2.1. Ty jsou následně v centru zpracovány (například jednoduchým algoritmem konvexních kombinací). Kovarianční matice chyby odhadu v něm použitá má většinou všechny prvky nenulové. Některé operace s ní tak mohou být časově náročnější na výpočet, než kdybychom například z matice využili pouze prvky na diagonále. Aby byl získaný globální odhad $\hat{x}_G(k|k)$ nestranný, musí platit rovnost matic $A + B = I$, jak bylo uvedeno výše. Představme si nyní, že dostaneme dvě kovarianční matice $P_1(k|k)$ a $P_2(k|k)$ o dimenzích $n \times n$, obě ve tvaru:

$$P_1(k|k) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, P_2(k|k) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Pokud použijeme pouze prvky na diagonále, zkonstruujeme pomocné matice ve tvaru:

$$P'_1(k|k) = \text{diag}(P_1(k|k)), \quad P'_2(k|k) = \text{diag}(P_2(k|k)). \quad (3.2)$$

Nyní ještě musíme zajistit jednotkovou rovnost příslušných matic, kterou provedeme následujícím způsobem:

$$(P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})(P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} = I. \quad (3.3)$$

Matice A a B pro jednoduchý algoritmus konvexních kombinací pak bude mít tvar:

$$A = (P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} P'_1(k|k)^{-1}. \quad (3.4)$$

$$B = (P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} P'_2(k|k)^{-1}. \quad (3.5)$$

Globální odhad $\hat{x}_G(k|k)$ vypočítáme:

$$\hat{x}_G(k|k) = (P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} P'_1(k|k)^{-1} \hat{x}_1(k|k) + (P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} P'_2(k|k)^{-1} \hat{x}_2(k|k). \quad (3.6)$$

Po úpravě vytknutím můžeme globální odhad přepsat do tvaru:

$$\hat{x}_G(k|k) = (P'_1(k|k)^{-1} + P'_2(k|k)^{-1})^{-1} (P'_1(k|k)^{-1} \hat{x}_1(k|k) + P'_2(k|k)^{-1} \hat{x}_2(k|k)). \quad (3.7)$$

Teoretickou kovarianční matici chyby odhadu určíme následovně:

$$P_G(k|k) = E\{[x(k|k) - \hat{x}_G(k|k)][x(k|k) - \hat{x}_G(k|k)]^T\}, \quad (3.8)$$

kde za $x(k|k)$, můžeme dosadit výraz ve tvaru:

$$x(k|k) = Ax(k|k) + Bx(k|k), \quad (3.9)$$

protože pro součet jednotlivých vah platí: $A + B = I$.

Dále za $\hat{x}_G(k|k)$ dosadíme tvar (2.13) a po přepsání dostáváme:

$$P_G(k|k) = E\left\{[Ax(k|k) + Bx(k|k) - A\hat{x}_i(k|k) - B\hat{x}_j(k|k)][Ax(k|k) + Bx(k|k) - A\hat{x}_i(k|k) - B\hat{x}_j(k|k)]^T\right\}. \quad (3.10)$$

Po vytknutí jednotlivých vah a úpravě dostáváme:

$$P_G(k|k) = E\left\{[A(x(k|k) - \hat{x}_i(k|k)) + B(x(k|k) - \hat{x}_j(k|k))][A(x(k|k) - \hat{x}_i(k|k)) + B(x(k|k) - \hat{x}_j(k|k))]^T\right\}, \quad (3.11)$$

a po roznásobení a úpravě dostáváme:

$$P_G(k|k) = AP_iA^T + BP_jB^T + AP_jB^T + BP_jA^T. \quad (3.12)$$

V případě využití pouze jednoduchého konvexního algoritmu předpokládáme vzájemné kovarianční matice P_{ij} a P_{ji} nulové.

3.2. Kombinace využívající stopy matice

Jiný způsob, jak generovat váhy lokálních odhadů, je například využití stopy matic příslušných kovariančních matic.

Uvažujme libovolnou čtvercovou matici C s rozměry $n \times n$, pak její stopu určíme jako součet diagonálních prvků $trC = \sum_{i=1}^n c_{ii}$. Jestliže použijeme lokální kovarianční matice chyby odhadu $P_1(k|k)$ a $P_2(k|k)$, obě ve tvaru (3.1), pak stopa matice $P_1(k|k)$ bude dána $trP_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ a stopa matice $P_2(k|k)$ $trP_2 = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}$.

Zjednodušené kovarianční matice $P_1'(k|k)$ a $P_2'(k|k)$ pak následně budou vypadat:

$$P_1'(k|k) = (trP_1)I, \quad P_2'(k|k) = (trP_2)I, \quad (3.13)$$

kde I je jednotková matice odpovídající dimenze. Pro výpočet jednotlivých vah pak využijeme vztahů (3.4) a (3.5) a následně rovnici (3.7) pro výpočet globálního odhadu stavu, jako Globální teoretickou kovarianční matici chyby odhadu využijeme (3.12), za kterou dosadíme příslušné váhy.

3.3. Kombinace využívající determinantu matice

Poslední zjednodušující úpravou matic bude využití determinantu příslušné matice. Znovu uvažujme obecné lokální kovarianční matice chyby odhadu $P_1(k|k)$, $P_2(k|k)$ viz. (3.1) a provedeme výpočet jejich determinantu. Výpočet determinantu se může lišit podle rozměrů matice. Pro obecný rozměr $n \times n$ pak můžeme použít například Leibnizovu případně Laplaceovu formuli.

Zjednodušené kovarianční matice $P_1'(k|k)$ a $P_2'(k|k)$ pak budou mít tvar:

$$P_1'(k|k) = (\det P_1)I, \quad P_2'(k|k) = (\det P_2)I. \quad (3.14)$$

Následně opět k výpočtu globálního odhadu stavu využijeme vztahů odvozených dříve. I opět reprezentuje jednotkovou matici příslušné velikosti.

4. Simulace a výsledky

V této části se budeme věnovat analýze všech předkládaných algoritmů v předcházejících kapitolách. K demonstraci nám poslouží jednoduchý lineární systém s lineárním modelem pozorování. Dosažené výsledky z jednotlivých algoritmů pak budou podrobeny detailnějšímu zkoumání z hlediska kvality odhadu.

4.1. Popis testovacího systému

Uvažujme lineární systém simulující pohybující se objekt, například letadlo, s konstantní rychlostí. Pro jednoduchost se omezíme pouze na sledování jediné souřadnice.

Stavový vektor systému definujme jako:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \dot{x}_1(k) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Diferenční rovnice popisující systém bude dána ve tvaru:

$$x(k) = F(k)x(k-1) + w(k). \quad (4.2)$$

Matice dynamiky $F(k)$ můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$F(k) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Kde ΔT je časový interval a v našem modelu je položen $\Delta T = 1$, a $w(k)$ je bílý šum $w(k) \sim N(0, Q)$.

Variance Q je definována:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta T^3 & \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ \frac{1}{2}\Delta T^2 & \Delta T \end{bmatrix} \tilde{q}. \quad (4.4)$$

Model pozorování definujeme jako:

$$z_i(k) = H(k)x(k) + v(k), i = 1,2. \quad (4.5)$$

Jak již jsme uvedli, budeme chtít pozorovat celý stavový vektor, matice $H(k)$ bude ve tvaru:

$$H_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Šum měření je určen: $v_i(k) \sim N(0, R_i(k))$ s příslušnou kovariancí $R_i(k)$ ve tvaru:

$$R_i(k) = \begin{bmatrix} \sigma_{m\check{e}r}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{m\check{e}r}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

V simulaci budeme uvažovat přítomnost dvou rozdílných měřicích senzorů, generujících dvě různá měření $z_1(k)$ a $z_2(k)$ o stavu sledovaného objektu. Díky zvolení daných rozptylů je druhý senzor modelován jako přesnější.

Parametry simulace byly zvoleny následovně:

Počáteční podmínky: $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\tilde{q} = 1$,

Rozptyly: $\sigma_{pol}^2 = 1,3$, $\sigma_{rych}^2 = 1,8$, Rozptyly jednotlivých senzorů: $\sigma_{m\check{e}r_s1}^2 = 1,7$, $\sigma_{m\check{e}r_s2}^2 = 1,2$.

4.2. Shrnutí testovaných algoritmů

Na simulačním modelu budou postupně testovány všechny dosud představené algoritmy z kapitol 1, 2 a 3. Pro přehlednost je uvedeme níže:

- **Kalmanův filtr**, se v simulaci vyskytuje dvakrát jako lokální filtr a jednou jako filtr centralizovaný.
- **Informační filtr**, se v simulaci opět vyskytuje třikrát, dvakrát jako lokální filtr a jednou jako filtr centralizovaný
- **Algoritmus jednoduchých konvexních kombinací**, použijeme ke zpracování odhadů z lokálních Kalmanových filtrů. Zároveň jsou v rámci tohoto algoritmu implementovány systémy návrhu fúze z kapitoly 3 a to:
 - Využívající prvky na diagonále
 - Využívající stopu matice
 - Využívající determinant
- **Algoritmus konvexních kombinací se vzájemnou kovarianční maticí**, opět využívá odhadů z lokálních Kalmanových filtrů a Kalmanových zisků.
- **Algoritmus s pamětí pro verzi s Kalmanovým filtrem**, využívá filtrační odhady, tak i prediktivní odhady z lokálních Kalmanových filtrů. Zároveň je v rámci tohoto algoritmu implementována časová prodleva.
- **Algoritmus s pamětí pro verzi s Informačním filtrem**, využívá lokální Informační filtry.

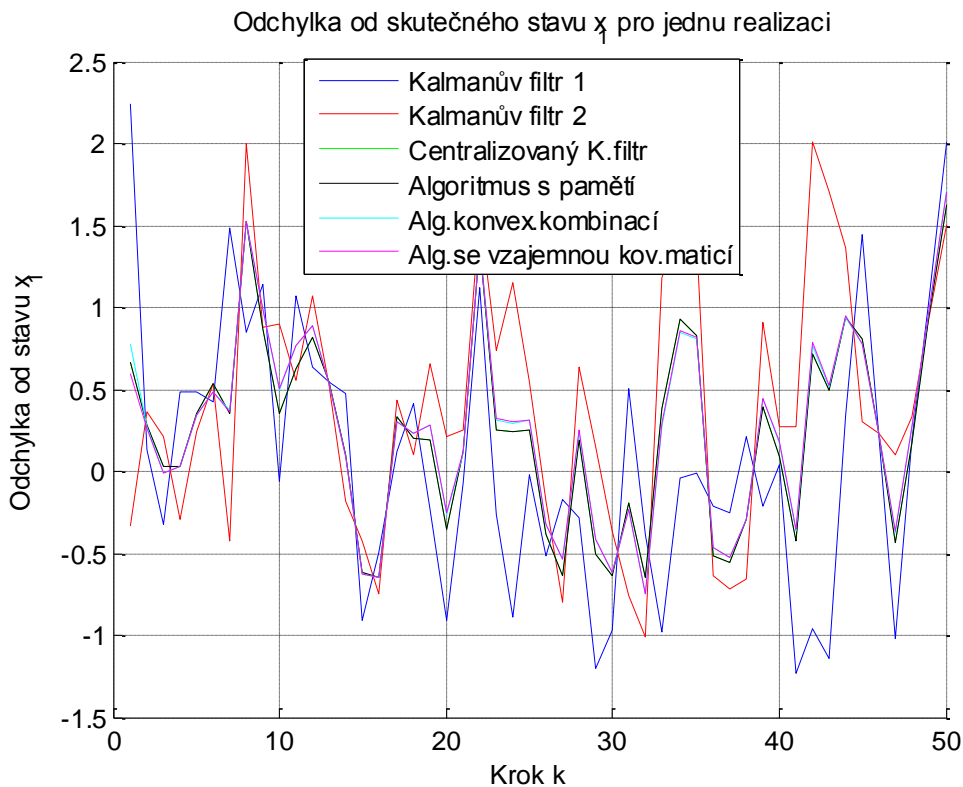
4.3. Srovnání jednotlivých algoritmů a dosažených výsledků

Testování všech algoritmů bylo provedeno metodou Monte-Carlo s opakováním 2000 kroků. Testovací objekt byl sledován dvěma odlišnými senzory po dobu 50-ti kroků systému. Jako testovací software byl použit program Matlab. Pro interpretování kvality jednotlivých odhadů (jak lokálních tak i fúzních) byla zvolena střední kvadratická chyba v čase k , která nám umožní porovnat dosažené výsledky se stopou kovariančních matic chyb odhadu. Vzorec pro odhad střední kvadratické chyby vypadá následovně:

$$MSE(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x(k, i) - \hat{x}(k, i))^2, \quad (4.8)$$

kde n je počet kroků Monte - Carlo, a k je k - tý krok simulace. Pro velké n by se $MSE(k)$ měla přibližovat ke stopě kovarianční matice chyby příslušného odhadu.

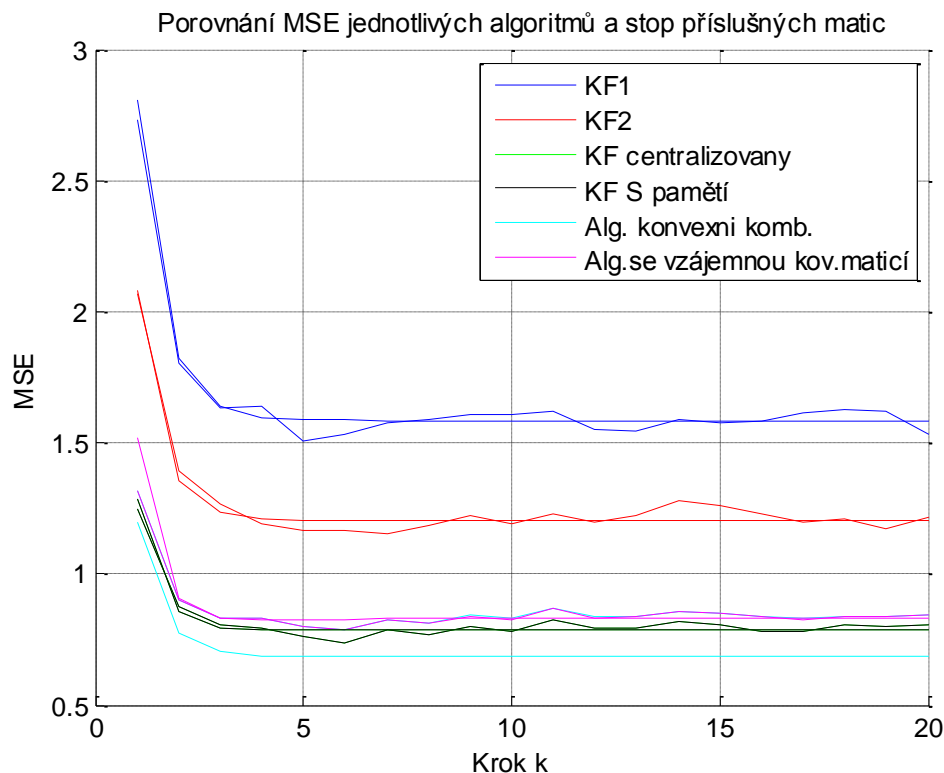
Graf Obr.4.1 zachycuje jednotlivé odchylky odhadů od skutečného průběhu systému pro jednu realizaci simulace.



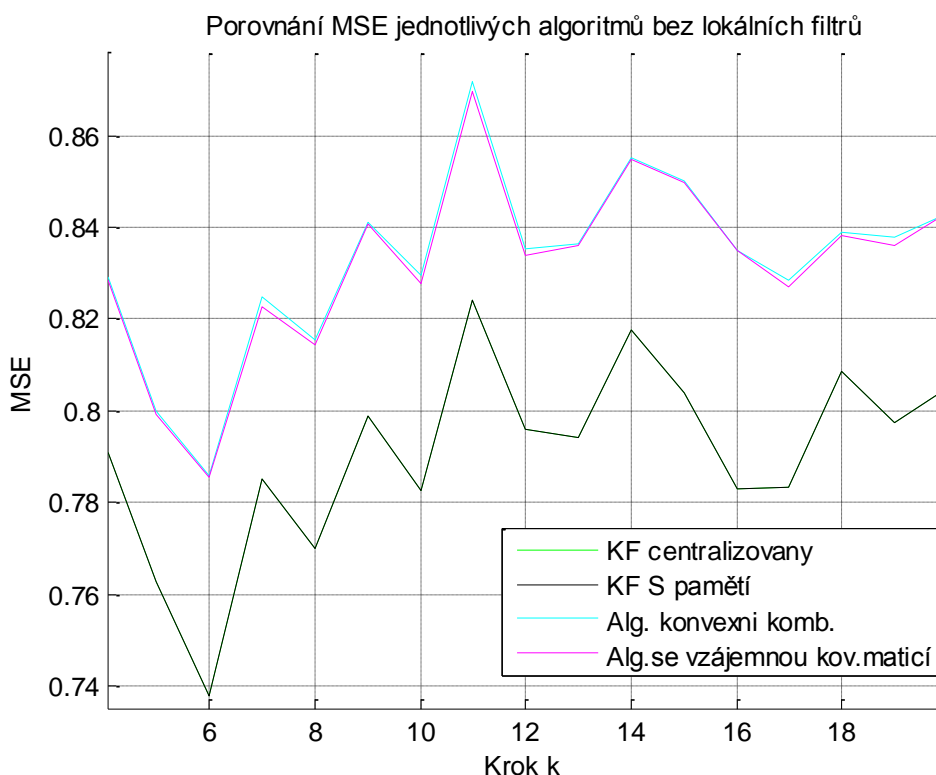
Obr.4.1: Odchylka jednotlivých algoritmů od skutečného stavu x_1

Graf Obr.4.2 ukazuje srovnání jednotlivých MSE pro základní algoritmy uvedené v předcházející sekci vyjma informačního filtru. Zhruba od šestého kroku simulace dochází k ustálení stop kovariančních matic a tento graf je omezen pro přehlednost do dvacátého kroku simulace. Jednotlivé MSE jsou navíc vždy proloženy stopou kovarianční matice chyby odhadu (vždy stejnou odpovídající barvou), ke kterým by se měla limitně MSE blížit, což je také patrné z grafu. Tento předpoklad platí, až na jedinou výjimku v případě Algoritmu jednoduché konvexní kombinace, kde dochází k zanedbání příslušných vzájemných kovariančních matic, čímž se zjednoduší výpočet poskytované kovarianční matice chyby odhadu. U Algoritmu se vzájemnou kovarianční maticí však tento jev nenastává, jak je patrné z grafu, díky započtení vzájemných kovariančních matic do výpočtu a jeho příslušná MSE koresponduje se stopou globální kovarianční chyby odhadu. Je patrné, že nejhorších výsledků dosahuje lokální Kalmanův filtr 1, který využívá měření z_1 , získaných z prvního senzoru a má tedy k dispozici „horší“ sadu dat ohledně stavu systému x_1 . Druhý Kalmanův filtr, který využívá měření druhého senzoru a je modelován jako lepší z obou senzorů, dosahuje o něco lepších výsledků. Nejlepších výsledků dosahuje Centralizovaný Kalmanův filtr. Ten využívá obou sad měření a jeho výsledek je zcela totožný s Algoritmem s pamětí.

Rozdíl v získané kvalitě výsledků mezi Algoritmem konvexních kombinací a Algoritmem se vzájemnou kovariační maticí je způsoben tím, že v prvním algoritmu jsme dané vzájemné kovarianční matice zcela vynechali. Můžeme říci, že Algoritmus konvexních kombinací je pouze aproximativní ve vztahu k Algoritmu se vzájemnou kovarianční maticí. Vypovídající hodnotu by taktéž mohla mít celková střední hodnota jednotlivých příslušných MSE, která je shrnuta v tabulce Tab. 1 Střední hodnotu počítáme od šestého do dvacátého kroku po ustálení stopy kovarianční matice chyby odhadu. Pro názornost situace je přiložen ještě graf Obr.4.3, který zachycuje přibližný předchozí graf bez lokálních filtrů a příslušných stop. Výsledek Algoritmu s pamětí má stejný průběh jako Centralizovaný KF.



Obr.4.2: MSE jednotlivých algoritmů



Obr.4.3: Detailnější pohled na MSE a vybrané základní fúzní algoritmy

Algoritmus	KF 1	KF 2	KF cent.	S paměti	Konvexních kombinací	Se vzájemnou kov. maticí
MSE po ustálení	1,5845	1,2087	0,7925	0,7925	0,8353	0,8343

Tab. 1: Shrnutí dosažených MSE

Výsledky získané z hodnot MSE jsou u fúzního algoritmu s paměti a Centralizovaného Kalmanova filtru ekvivalentní. Dále je jasně patrný mnohem lepší výsledek globálního odhadu stavu při použití fúze, než by tomu bylo při využití lokálních odhadů. Rozdíl mezi Algoritmem konvexních kombinací a Algoritmem se vzájemnou kovarianční maticí je nepatrný. Stopa matice poskytovaná fúzním centrem využívající Algoritmus jednoduché konvexní kombinace je však podstatně níže, než všechny ostatní stopy. Je to opět způsobeno neuvažováním vzájemné kovarianční matice v algoritmu. V našem případě si pak fúzní centrum věří více, než by ve skutečnosti mělo. Všechny tyto dosažené výsledky dobře korespondují s teoretickými předpoklady uvedené v Kapitole 2.4.

Pokud bychom uvažovali u našeho systému matici pozorování $H(k)$ takovou, že by umožňovala pozorovat pouze jeden stav (například polohu) pak by mohl nastat problém u Algoritmu se vzájemnou kovarianční maticí v podobě singulární matice.

Jmenovitě u inverze potřebné v rovnicích (2.40) a (2.41) ve tvaru: $[P_i(k|k) + P_j(k|k) - P_{ij}(k|k) - P_{ij}^T(k|k)]^{-1}$. Tento problém způsobuje matice H ve tvaru $H(k) = [1 \ 0]$, který analyzujeme níže.

Pokud budeme předpokládat, že oba lokální filtry i fúzní centrum mají stejné počáteční podmínky, pak vzájemná kovarianční matice v prvním kroku bude vypadat:

$$P_{ij}(1|1) = (I - W_i(1)H_i(1))P_0(I - W_j(1)H_j(1))^T. \quad (4.9)$$

Když pozorujeme pouze jeden stav systému, jmenovitě polohu x_1 , bude v našem konkrétním případě Kalmanův zisk W_i i W_j vektor o rozměrech 2×1 a prvek na pozici w_{21} bude nulový, právě díky tvaru matice $H(k)$, jak lze snadno prokázat z rovnice (1.11).

Nyní obecně vypočítáme matici $P_{ij}(1|1)$ a za P_0 dosadíme hodnoty z naší simulace:

$$P_{ij}(1|1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T. \quad (4.10)$$

Po roznásobení jednotlivých matic a vektorů dostáváme:

$$P_{ij}(1|1) = \begin{bmatrix} (10 - 10w_1)(1 - w_2) & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Při výpočtu lokální kovarianční matice chyby v prvním kroku můžeme podobně ukázat z rovnice (1.9), že matice $P_i(1|1)$ se vypočte jako:

$$P_i(1|1) = P_0 - W_i(1)S(1)W_i(1)^T, \quad (4.12)$$

kde $S(1)$ je v našem případě číslo (označme ho $s(1)$) a celkově pak matici $P_i(1|1)$ můžeme vyjádřit jako rozdíl počáteční podmínky P_0 a „korekce“:

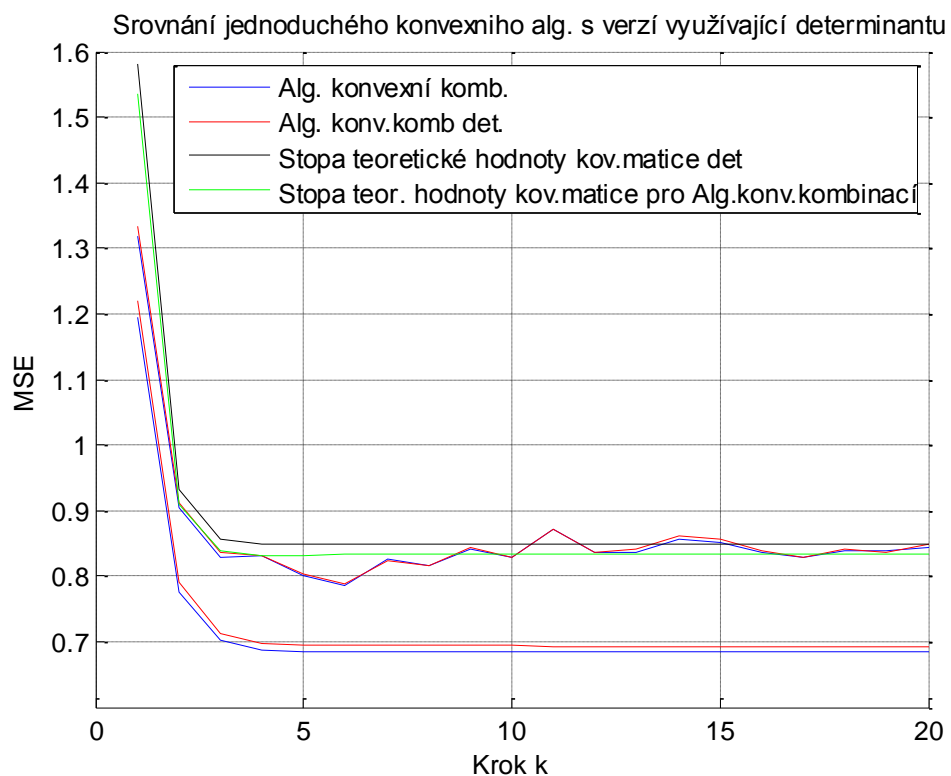
$$P_i(1|1) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} s(1) \begin{bmatrix} w_1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.13)$$

Po rozepsání matice získáme:

$$P_i(1|1) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 s(1) w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - w_1 s(1) w_1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Tytéž úpravy provedeme s maticí $P_j(1|1)$ a jestliže následně dosadíme do vztahu $[P_i(k|k) + P_j(k|k) - P_{ij}(k|k) - P_{ij}^T(k|k)]^{-1}$ z rovnic (2.40) a (2.41) vyplývá, že výsledná matice k inverzi bude mít druhý řádek nulový. Tím dostáváme singulární matici, jejíž determinant je roven nule a u které neexistuje její inverzní matice. Tento problém můžeme obejít, buď pozorováním objektu po delší dobu a z rozdílu poloh nastavit počáteční hodnotu rychlosti, nebo řešit tento problém přičtením velmi malého čísla, které by bylo zanedbatelné, na diagonálu řádku způsobujícího singularitu.

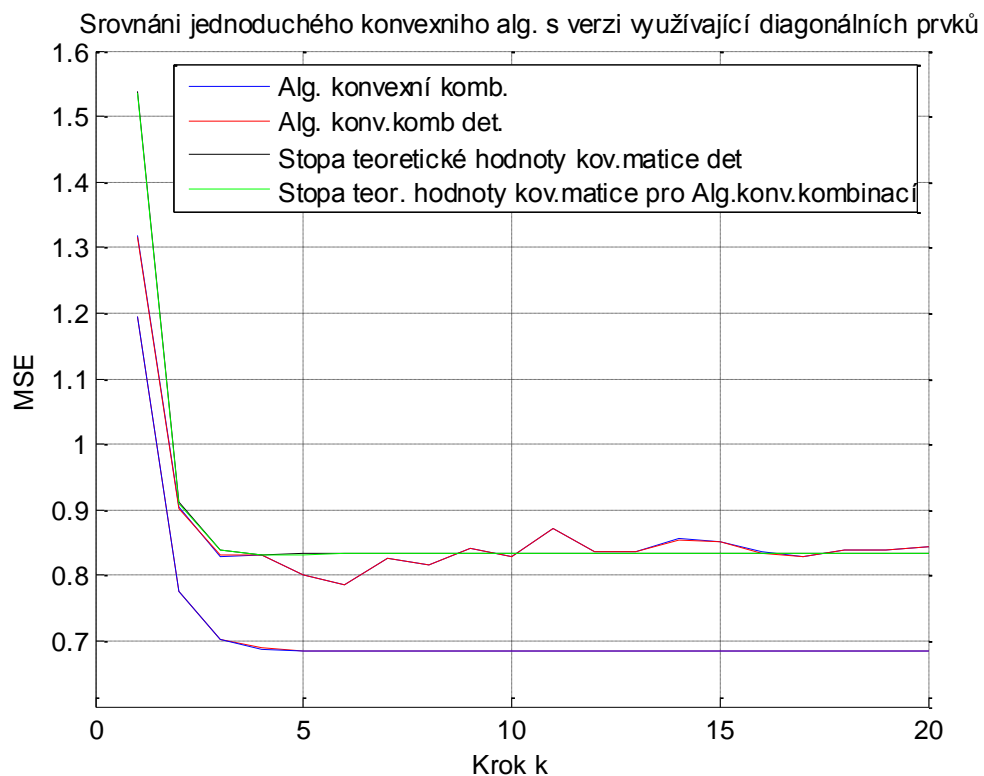
Nyní se zaměříme na analýzu kvality odhadu Systémů fúze ze třetí kapitoly a porovnáme je s Algoritmem jednoduché konvexní kombinace. Graf Obr.4.4 ukazuje dosažené výsledky při aplikaci determinantu.



Obr.4.4: Jednoduchý konvexní alg. spolu s fúzí využívajících determinantu.

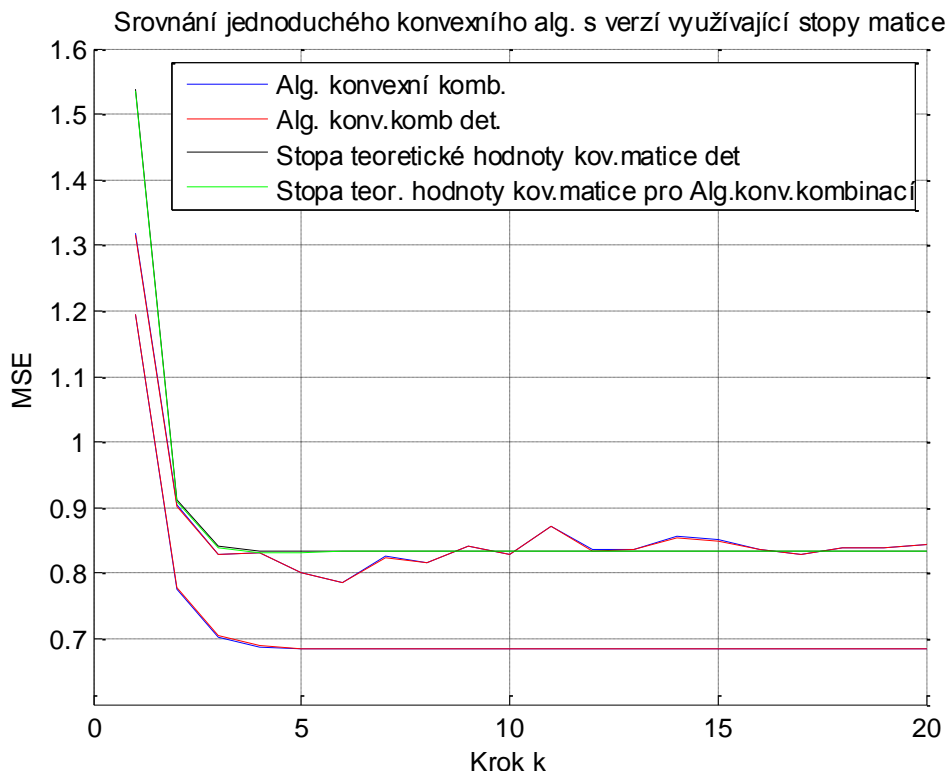
Černě je vždy zobrazena stopa teoretické hodnoty kovarianční matice, kterou uvažujeme ve tvaru (3.12). Jednotlivé stopy kovariančních matic daných filtrů jsou vyznačeny příslušnou barvou a neuvažujeme v nich vzájemné kovarianční matice.

Je patrné, že teoretická hladina je blíže průběhu MSE, než je tomu v případě stopy kovariance tak, jak je definována ve fúzním centru. Oba průběhy MSE jsou téměř totožné. Další obrázek Obr.4.5 pak zachycuje srovnání Algoritmu jednoduchých konvexních kombinací se systémem návrhu fúze, která využívá diagonálních prvků. Zde jsou dosažené výsledky téměř ekvivalentní, protože se v případě využití diagonálních prvků jedná o nejvíce aproximativní systém k Algoritmu vzájemných konvexních kombinací.



Obr.4.5: Jednoduchý konvexní algoritmus spolu s fúzním systémem využívající diagonálních prvků

Posledním systémem návrhu fúze je Algoritmus využívající stopy jednotlivých lokálních kovariančních matic. Jeho dosažené výsledky ukazuje obrázek Obr.4.6. Teoretickou hodnotou kovarianční matice je opět proložen průběh jednotlivých MSE. Jednotlivé stopy jdoucí z fúzních center jsou velice blízké, stejně tak jako průběhy příslušných MSE.



Obr.4.6: Jednoduchý konvexní alg. spolu s fúzním systémem využívající stopy matice

Výše uvedené grafy poskytují jen orientační pohled na skutečné hodnoty dosažených výsledků, jak pro MSE, tak i pro jednotlivé stopy ustálených kovariančních matic. Proto dosažené výsledky uspořádáme do přehledné tabulky Tab. 2. Opět předpokládáme ustálení od šestého kroku simulace.

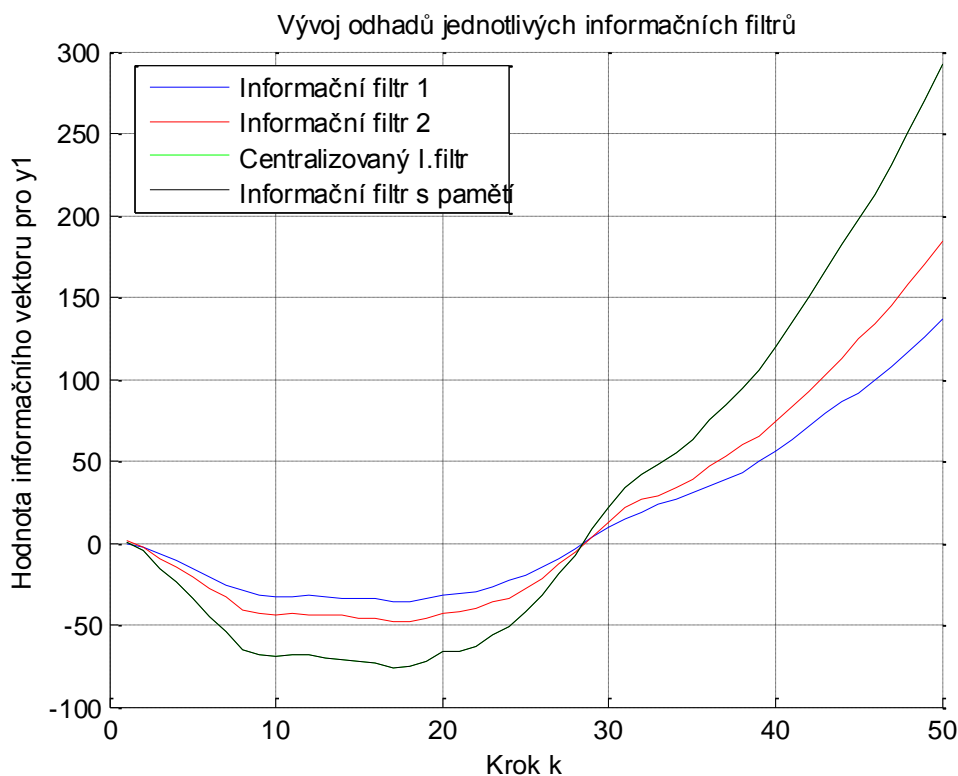
Algoritmus	KF cent.	Konvexních kombinací	Determinant	Diagonála	Stopa
MSE po ustálení	0,7925	0,8353	0.8373	0.8352	0.8350
Hodnota stopy teoretické kov.matice	0,7868	0,8326	0,8492	0,8331	0,8345
Hodnota stopy kovarianční matice	0,7868	0,6841	0,6935	0,6843	0,6849

Tab. 2: Shrnutí dosažených výsledků systémů návrhů fúze zanedbávajících vzájemnou kovarianční matici

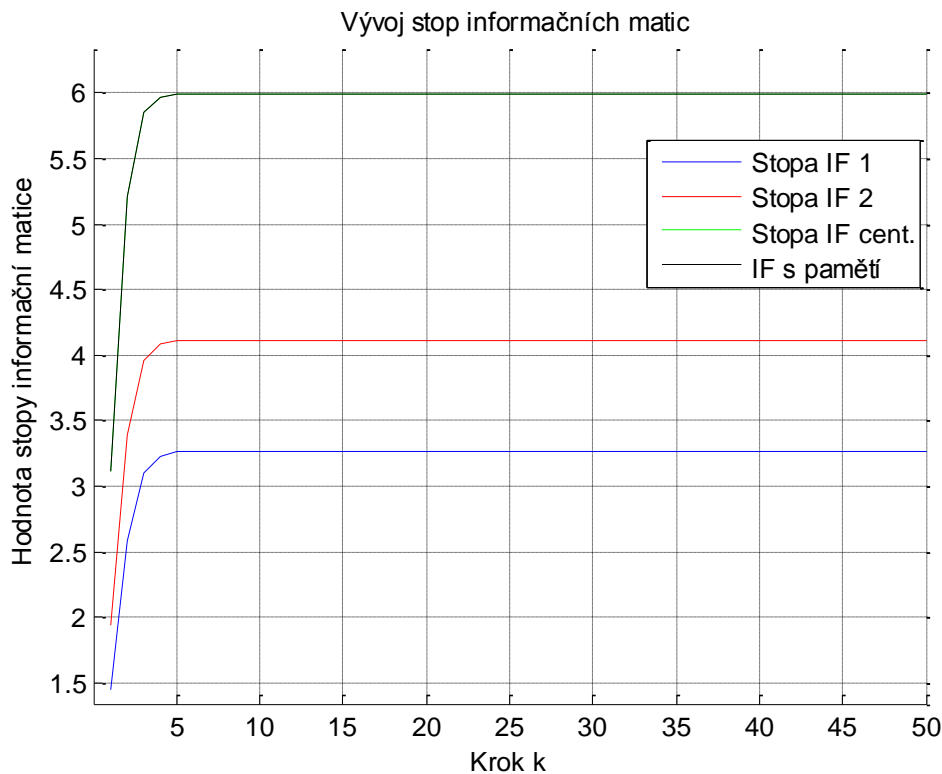
Porovnáním dosažených výsledků můžeme konstatovat, že žádný ze systémů návrhů fúze se nepřibližuje ideálním hodnotám centralizovaného Kalmanova filtru. Největší hodnoty MSE a největší stopy příslušné kovarianční matice chyby odhadu poskytovanou fúzním centrem i teoreticky vypočtenou, dosahuje varianta

s determinantem. Zbylé dva návrhy systému fúze jsou však ve dvou případech mírně lepší při pohledu na MSE, než je tomu u Algoritmu jednoduchých konvexních kombinací. Stopy poskytovaných matic a stopy teoretických hodnot by se měly k sobě ideálně blížit. Je však patrné, že u obou variant jsou teoretické i poskytované hodnoty stop vyšší než je tomu u Algoritmu jednoduchých konvexních kombinací.

Nyní se zaměříme na jednotlivé informační filtry a provedeme analýzu jejich algebraické ekvivalence s příslušnými Kalmanovými filtry. Graf Obr.4.7 zachycuje výsledek jednotlivých informačních filtrů, nicméně pro srovnání algebraické ekvivalence nás bude zajímat především graf Obr.4.8, který budeme moci porovnat se stopami jednotlivých kovariančních chyb odhadů u Kalmanova filtrů (případně s jejich inverzemi). Z grafu je patrné, že centralizovaný filtr je opět ekvivalentní s filtrem s pamětí (vyšší hodnota stopy ukazuje na věrohodnější informaci) a že oba dohromady poskytují lepší odhad stavu než příslušné lokální filtry. Pro plné srovnání uveďme ještě tabulku Tab. 3 jednotlivých stop mezi Centralizovaným Kalmanovým filtrem a Centralizovaným informačním filtrem. Je nutné podotknout, že nejprve pro srovnání provedeme inverzi kovarianční matice chyby odhadu centralizovaného Kalmanova filtru viz. (1.14) a až poté z ní počítáme stopu.



Obr.4.7: Vývoj odhadů jednotlivých informačních filtrů

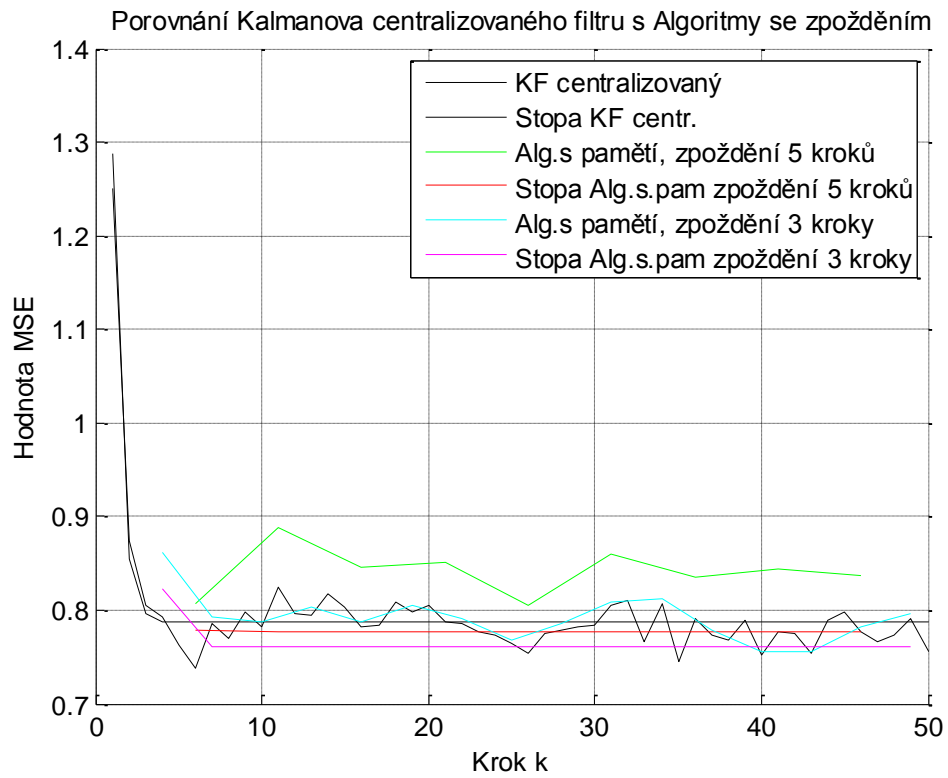


Obr.4.8: Vývoj stop informačních matic

Algoritmus	Centralizovaný Kalmanův filtr stopa kov.malice	Centralizovaný KF Stopa inverzní matice	Centralizovaný informační filtr
Stopa po ustálení	0.7868	5.9941	5.9941

Tab. 3: Srovnání centralizovaných Kalmanova a informačního filtru

Jako poslední provedeme analýzu algoritmů se zpožděním a porovnáme je s Kalmanovým centralizovaným filtrem. Pro zpoždění byly zvoleny dvě hodnoty: tři a pět kroků. Dosažené výsledky interpretuje graf Obr.4.9. Z grafu vyplývá, že zpoždění 5 kroků poskytuje při našem srovnání nejhorší výsledky, menší zpoždění je o něco lepší při srovnání s ideálními hodnotami dosaženými Kalmanovým centralizovaným filtrem. Stopy průběhu kovariančních matic chyb odhadu jsou u obou algoritmů v grafu níže, než je tomu u Kalmanova centralizovaného filtru. Je to proto, že díky chybějící informaci fúzní centrum vypočítá matici, ze které se určuje stopa, jinou, než by ve skutečnosti měla být. Algoritmy se zpožděním jsou tedy kvůli chybějící informaci aproximativní vůči Centralizovanému Kalmanovu filtru.



Obr.4.9: Srovnání MSE Kalmanova centralizovaného filtru s Algoritmy se zpožděním

Závěr

Cílem diplomové práce bylo předložit několik základních přístupů k problému fúze lokálních odhadů stavu. Nejprve byla stručně nastíněna problematika odhadu stavu stochastického lineárního systému a prezentovány dva filtry: Kalmanův a Informační. Ve druhé kapitole byly představeny základní přístupy k fúzi a to fúze jednotlivých měření a fúze lokálních odhadů stavu. Pro slučování jednotlivých měření byl představen Centralizovaný Kalmanův a Informační filtr. Pro variantu fúze lokálních odhadů byl nejprve představen Algoritmus jednoduchých konvexních kombinací. Tento algoritmus bývá často využíván v praxi pro svoji jednoduchost a snadnou aplikovatelnost. Druhým představeným přístupem založeným na Maximální věrohodnosti byl Algoritmus se vzájemnou kovarianční maticí. Ten bere v úvahu existenci závislostí mezi jednotlivými lokálními odhady plynoucí ze stejného šumu procesu. Pokud vzájemnou kovarianční maticí neuvažujeme, přechází tento algoritmus v Algoritmus jednoduchých konvexních kombinací. Bylo ukázáno, že jejich globální odhady se liší od výsledku centralizovaného odhadu. V druhé části kapitoly byly představeny algoritmy s pamětí v podobě Kalmanova a Informačního filtru. Tyto algoritmy pracují nejenom s lokálními filtračními odhady, ale vyžadují také prediktivní lokální odhady stavu. Vznášejí tedy požadavky na celkový fúzní systém, jelikož je nutné zasílat více informací do fúzního centra. Nicméně tyto algoritmy s pamětí produkují totožný odhad stavu jako centralizovaná varianta. Posledním prezentovaným přístupem byl algoritmus s pamětí s jistým časovým zpožděním, kdy se fúze dělá vždy až po určité době. Vzhledem k nedostatku informace mezi jednotlivými kroky je tento odhad pouhou aproximací odhadu Algoritmu s pamětí.

Ve třetí kapitole byly navrženy jiné systémy fúze založené na volbě odlišných vah z Algoritmu jednoduché konvexní kombinace. Byly prezentovány tři zjednodušující algoritmy, které k výpočtu vah používají pomocné matice. Ty jsou konstruované z lokálních kovariančních matic poskytovaných filtry podle různých variant. První je verze využívající prvky na diagonále, druhou pak verze počítající stopy matic a poslední pak následně verze s determinanem. Je nastíněn postup, jak volit váhy pro jednotlivé lokální odhady a ukázán postup výpočtu teoretické hodnoty kovarianční matice chyby odhadu, ve které uvažujeme vzájemné kovarianční matice. V kovarianční matici poskytovanou systémem návrhu fúze však již onu vzájemnou kovarianční maticí neuvažujeme.

Všechny tyto algoritmy jsou pak následně konfrontovány ve čtvrté kapitole při testování na jednoduchém lineárním systému. Nejlepších výsledků dosahuje Centralizovaná varianta filtru spolu s algoritmy s pamětí, jejichž výsledky jsou totožné. Následně se umístil Algoritmus se vzájemnou kovarianční maticí, nicméně rozdíl oproti Algoritmu jednoduchých konvexních kombinací je zde téměř zanedbatelný. Testované systémy návrhu fúze pak dosáhly vždy o něco větší hodnoty stop jak pro teoretickou, tak i pro poskytnutou kovarianční matici chyby odhadu, než v případě Algoritmu jednoduchých konvexních kombinací. Posléze je pak ukázán výsledek při použití Informačního filtru a jeho centralizované verze a demonstrována jeho algebraická totožnost s Kalmanovým filtrem. Posledním testovaným systémem byla fúze se zpožděním, konkrétně tři a pět kroků simulace. Dosažené výsledky jsou o něco horší, než v případě fúze v každém kroku v důsledku zanedbání měření mezi jednotlivými časovými okamžiky. Varianta se zpožděním o tři kroky ještě relativně odpovídá průběhu Algoritmu s pamětí bez zpoždění. Se vzrůstajícím zpožděním však kvalita klesá, jak je vidět u zpoždění o pět kroků.

Literatura:

- [1] **Šimandl, M.** Odhad stavu stochastických systémů, Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií, [cit. 10.3.2013]. Dostupné z WWW <http://www.crr.vutbr.cz/system/files/brozura_07_1012.pdf>, 2010
- [2] **Mutambara, A.** Decentralized estimation and control for multisensor systems. CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, USA 1998, ISBN:0849318653
- [3] **Durrant – Whyte**, Multi Sensor Data Fusion version 1.2, Australian Centre for Field Robotics, The University of Sydney, 2001
- [4] **Grocholsky, B., Durrant-Whyte D., Gibbens P.** An Information-Theoretic Approach to Decentralized Control of Multiple Autonomous Flight Vehicles, Australian Centre for Field Robotics The University of Sydney, 2006
- [5] **Chong, C.Y., Chang K.C., Barker, W.H.**, Architectures and Algorithms for Track Association and Fusion, Raytheon Systems Company, Advanced CI Systems, San Jose, CA 95126.
- [6] **Chang, K.C. Saha, R.K. Bar-Shalom, Y.**, On optimal track-to-track fusion, Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on , vol.33, no.4, pp.1271-1276, Oct. 1997
- [7] **Tian X., Bar-Shalom Y.**, Exact Algorithms for Four Track-to-Track Fusion Configurations: All you wanted to know but were afraid to ask, 12th International Conference on Information Fusion, Seattle, WA, USA, July 6-9,2009
- [8] **Bar-Shalom Y., Campo, L.**, The effect of the common process noise on the two-sensor fused track covariance, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-22, 1986
- [9] **Kwang H.K.**, Development of Track to Track Fusion Algorithms, American Control Conference, Baltimore, Maryland, USA, June 1994