ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYUŽITÍ PROGRAMU DYNAMICKÉ GEOMETRIE GEOGEBRA VE VÝUCE ČTYŘÚHELNÍKŮ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Anderle
Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň,20. června 2013

....

vlastnoruční podpis

Děkuji mému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za jeho cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

ÚVOD

Téma bakalářské práce jsem si vybral s ohledem na možnost uplatnit získané znalosti v praxi. Jako učitel na druhém stupni soukromé ZŠ Adélky v Mašovicích s programem GeoGebra pracuji, a ačkoliv to ode mne vyžaduje více příprav na jednotlivé hodiny, myslím, že především žákům se sníženou schopností učit se, tento program pomáhá učivo snáze pochopit, utřídit si důležité myšlenky z hodiny a pochopit její náplň. GeoGebra je dobrým pomocníkem i při výuce integrovaných žáků s poruchou motoriky, protože jsou schopni konečně stejně jako ostatní splnit zadání úkolu.

Ačkoliv je to teprve rok, co máme ve škole počítačovou učebnu, žáci se v programu velmi rychle zorientovali a jsou schopni s ní pracovat a ověřovat platnost některých zákonitostí např. platnost přímé a nepřímé úměry nebo Pythagorovy věty. Pokud pracujeme se soustavou rovnic, GeoGebra jim umožňuje zkontrolovat jejich postup a řešení navíc vidí geometricky zobrazené, tudíž je dobrým pomocníkem při výuce samotné i jako kontrola správného výpočtu.

Největší přínos však vidím v konstrukcích geometrických úloh. Sice se často musíme potýkat s chybně zadanými hodnotami a špatně zvolenými nástroji, ale pro žáky je pak konečný výsledek zajímavější. Důležitá a v praxi neocenitelná vlastnost GeoGebry je možnost výsledný geometrický objekt dynamicky měnit pouhým přetažením bodů a objevovat či ověřovat tak vlastnosti dané konstrukce, které si pak žáci snáze zapamatují.

Rozložení

Práce na téma „**Využití programu dynamické geometrie GeoGebra ve výuce čtyřúhelníků**" je rozdělena do tří částí:

1. První kapitola pojednává o historii, nastavení a nástrojích GeoGebry.
2. Druhá kapitola je věnována čtyřúhelníkům
3. Porovnání programu GeoGebra s dalšími výukovými programy geometrie je obsahem třetí části.

GeoGebra

Název tohoto programu vznikl sloučením slov ***geo***metry a al***gebra***, což nám také napovídá, že program je primárně zaměřen na zpřehlednění těchto dvou základních matematických oborů, jejichž kořeny sahají až do dávné historie k samotným začátkům věd.

GeoGebra však dnes slouží i k jiným účelům. Lze ji využívat ve statistice, v matematické analýze a stále častěji se s ní setkáme i ve výuce fyziky, chemie nebo biologie a to především v podobě animací nebo obrázků.

Práce s GeoGebrou je velmi jednoduchá a intuitivní. Především používání funkcí z panelu nástrojů přímo vybízí k vyzkoušení a i toto lze považovat za veliké plus pro práci s dětmi. První seznámení s GeoGebrou probíhalo v „mé“ třídě formou hry. Děti z páté třídy si klikáním na nástroje umisťovaly do nákresny body dle libosti, spojovaly je úsečkami a kružnicemi a velmi se od té doby těší, že o geometrii budou zase pracovat s tímto programem. Už při prvním hraní měly ode mne spuštěné algebraické okno a pozorovaly měnící se souřadnice při pohybování obrazců po nákresně. S ještě větší odezvou se setkaly body pohybující se díky posuvníku. Úkoly, které s GeoGebrou nyní vypracovávají, jsou v souladu se školním vzdělávacím plánem, nicméně i v dnešní době se ozývají hlasy, které poukazují na skutečnost, že naše děti *„budou žít v jiném technologickém světě a budou potřebovat umět se učit, chtít se učit, umět zvládat změnu, intelektuálně i emocionálně, umět komunikovat, učit, vychovávat, umět řešit problémy, budou potřebovat tvořivost, empatii a inspiraci…“* jedním z propagátorů změn ve vyučování je zakladatel společnosti SCIO Ondřej Štefl ve svých přednáškách „Je škola budoucnost vzdělávání?“. Podle této teorie by se učitelé měli nechat děti více objevovat a přemýšlet, dávat jim méně odpovědí a méně předkládat hotové závěry. Pro tento styl výuky je dynamická geometrie s GeoGebrou velmi vhodná. Například na internetových stránkách http://geotest.geometry.cz/ je možnost vypracování geometrických konstrukcí s automatickým vyhodnocením. Nechává tak děti zažít úspěch téměř okamžitě po odeslání správného řešení a žáky tyto úlohy opravdu baví.

Trochu historie

GeoGebra je dle slov autora dynamický matematický software spojující geometrii, algebru a matematickou analýzu. Tento program byl vytvořen **Markusem Hohenwarterem** na Univerzitě v Salcburku v Rakousku jako jeho závěrečná práce v roce 2001/2002 spojením programů pro geometrii (*Cabri Geometry, Geometer'sSketchpad*) a algebraických softwarů (*Derive, Maple*). Další vývoj GeoGebry byl podpořen stipendiem DOC z Rakouské akademie věd a tak byl Markus Hohenwarter schopen pokračovat ve vývoji softwaru jako součásti projektu při svém dalším studiu. V současné době je GeoGebra *Open Source* software vyvíjený za finanční podpory rakouského institutu školství, Microsoftu a mnoha dalších sponzorů, jejichž jména jsou zveřejněna v záložce „partneři“ na internetových stránkách http://www.geogebra.org/cms/cs/partners

Na vývoji se v současné době podílí skupina 15 programátorů a více než 100 překladatelů z celého světa. Českou republiku zde reprezentuje Zbyněk Konečný, o překlad verze 4.0 se postaraly studentky učitelství matematiky a informačních technologií paní Zuzana Bouchalová, Michaela Noruláková a Markéta Tomanová. Poslední vyvíjená verze se zobrazením ve 3D -GeoGebra 5 je možné stáhnout jako beta verzi na rovněž stránkách www.geogebra.org v sekci „vývoj“.

GeoGebra získala mnoho ocenění v USA i v Evropě. Na webových stránkách www.geogebra.org je možné prohlédnout tutoriály, které pomocí drobných úkolů naučí uživatele, jak využívat nástroje GeoGebry. Další pomůckou jsou instruktážní videa na www.youtube.com, která se většinou zabývají složitějšími nástroji a konstrukcemi, ale mohou zájemcům rozšířit obzory v tom, co všechno je možné v GeoGebře vytvořit a při výuce poslouží jako motivace, jsou však nejčastěji v angličtině a francouzštině.

Rady při potížích s používáním GeoGebry je možné získat i na fóru. Aktivní diskuse je bohužel také v anglickém, nebo francouzském jazyce. Přestože je ve fóru k dispozici i složka „Czech“, tak se v češtině diskuze zatím nerozběhla. Vzhledem k prudkému rozvoji takzvaných chytrých telefonů a tabletů, je vyvíjena i verze pro operační systém Android. Na tuto verzi je uspořádána sbírka po 50 dolarech. Jména přispěvatelů jsou zveřejněna v záložce „Komunita/ Tablet AppSupporters“. Přispět do sbírky, ale i nahrát vlastní konstrukci, či se jinak zapojit do rozvoje GeoGebry je možné rovněž v této záložce.

Instalace GeoGebry

Při navštívení stránky www.geogebra.org se zobrazí úvodní strana. Pokud se přihlášení provádí z české lokalizace, bude pravděpodobně v češtině. Pokud ne, v pravém horním rohu lze požadovaný jazyk nastavit. Pro spuštění GeoGebry je nutné povolit instalaci aplikace Java, která je základním stavebním prvkem programu.

Kliknete na záložku „Download“ a zobrazí se vám nová stránka s možností výběru meziWebstart, Apletstart a Offlineinstaler. „**Webstart**“ – klasické instalace do počítače,

„**Apletstart**“ – čili GeoGebra bez instalace na počítač, čímž nezatěžuje jeho paměť, nebo „**Offlineinstaler**“, který se využívá pro stažení instalačního souboru GeoGebry na přenosné médium a následné instalování na počítače bez připojení k internetu.
Po klinutí na jednu z možností váš počítač pravděpodobně zobrazí varováním o bezpečnostním riziku v zabezpečení aplikace Java. Toto varování je oprávněné, neboť firma, která v současnosti Javu vyvíjí a spravuje, prozatím opravila pouze jednu ze dvou nejzávažnějších „děr“ programu a vrátka pro nezvané návštěvníky tak zůstávají stále pootevřená. Riziko lze minimalizovat nastavením svého internetového prohlížeče dle návodu na internetové adrese http://extrawindows.cnews.cz/navody/zasuvne-moduly-na-vyzadani-spustejte-flashove-objekty-jen-rucne.
Kromě již zmíněných, existuje mnoho dalších verzí GeoGebry, jejichž velkou část lze najít a stáhnout na internetové adrese: http://code.google.com/p/geogebra/downloads/list . Pro děti na základní škole doporučuji aplikaci GeogebraPrim, protože je snazší na ovládání a nezatěžuje je, pro ně zbytečnými, nástroji.

První seznámení:

Po spuštění GeoGebry se zobrazí okno, ve kterém zvolíme jednu z pěti nastavení.

- Algebra &nákresna
- Elementární geometrie
- Geometrie
- Tabulka &nákresna
- CAS a grafika

První tři možnosti se liší jen nabídkou zobrazených geometrických nástrojů. Tabulka a nákresna je určena pro statistiku. CAS a grafika (computer algebra systems) je určena pro numerické výpočty. Například řešení rovnic. Vzhledem k zaměření této práce se budu dále zabývat funkcemi a nastavením pod možností „Algebra a nákresna“.

Po zvolení této možnosti se zobrazí hlavní menu, algebraické okno, nákresna, panel nástrojů a okno vstup.
Algebraické okno popisuje prvky konstrukce.
Nákresna je pracovní (rýsovací) plocha, v níž sestrojujeme objekty.
Pole **Vstup** nacházející se na spodní liště slouží k zadávání nových příkazů.

Hlavní menu

Obsahuje ve své rolovací nabídce nástroje pro správu nastavení a práci se soubory (uložení, export souboru do grafických formátů nebo do dynamické webové stránky, tisk…), možnost nastavení prostředí programu, volbu jazyka, přístup k nápovědě.
Z nastavení doporučuji pro ZŠ změnit: „přichytnout body“ z „automatické“ na „přichytit k mřížce“.

Algebraické okno

Zobrazuje souřadnice či rovnice bodů a objektů včetně těch, které nejsou zobrazeny na nákresně a tak lze i s těmito skrytými objekty dále pracovat. Objekty jsou rozděleny podle vlastností a způsobu vytvoření na volné, závislé a pomocné. Toto rozdělení má zásadní vliv pro pozdější dynamické manipulace.

Volné objekty

- jsou uživatelem volně vytvořené nezávisle na žádném objektu.

Závislé objekty

- jsou svázány s nějakou již existující konstrukcí, například jako bod na přímce, bod na kružnici, průsečík dvou přímek. S těmito body lze později pohybovat jen v rámci objektu, se kterým jsou svázány (s průsečíky jen pomocí pohybu prvků, jejichž průsečíkem jsou).

Pomocné objekty

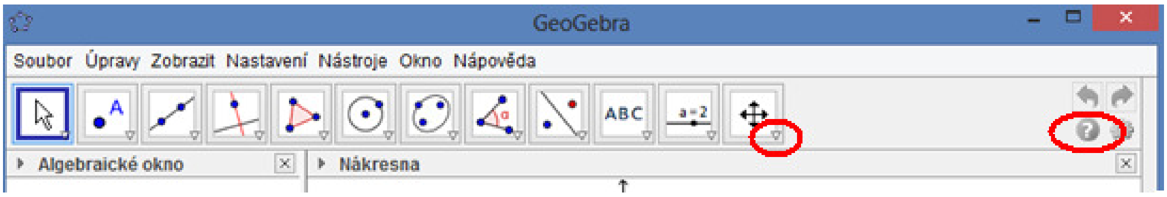
- vznikají z potřeby konstrukce, lze je plně skrýt a tím zlepšit přehlednost konstrukce. Automaticky se jako pomocné body zobrazují například vrcholy mnohoúhelníku vytvořeného příkazem „pravidelný mnohoúhelník“.

Nákresna

Je hlavní rýsovací plocha. K dispozici jsou dvě osy (x, y) a mřížka, jejichž zobrazení / skrytí se provede v kontextovém menu vyvolaném pomocí kliknutí pravým tlačítkem myši nad nákresnou. V tomto vyvolaném menu lze rychle zvolit i náhled na celou konstrukci, nastavit měřítka os a zobrazit navigační panel pro krokování konstrukce.

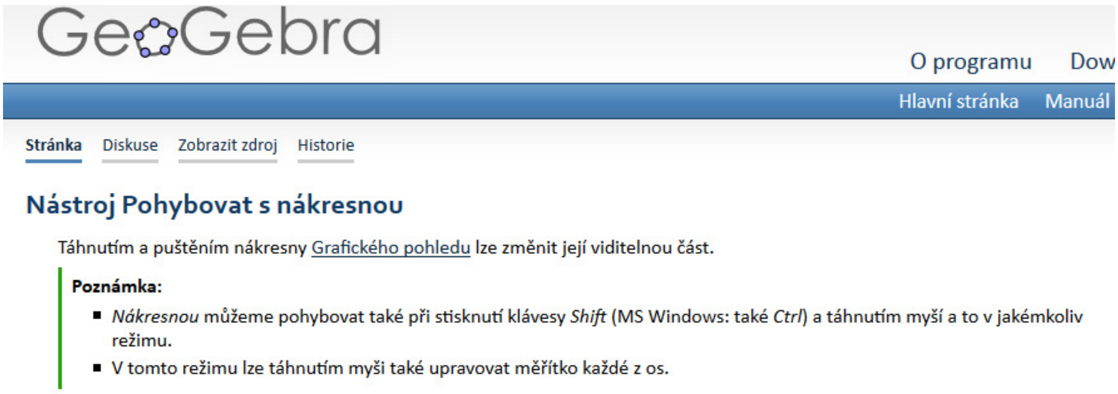
Panel nástrojů

Na panel nástrojů jsou zobrazeny nejčastěji používané geometrické příkazy (nový bod, úsečka, kružnice, osa úhlu, střed…). Tyto příkazy jsou sdruženy do sad podle typu a lze je všechny zobrazit poklepnutím myší na malý trojúhelníček v jednotlivých ikonách.



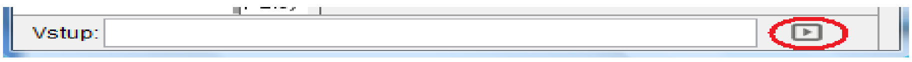
Použití příkazů je intuitivní a v případě potřeby je možnost online nápovědy kliknutím na otazník v pravém horním rohu.

Zobrazená nápověda je velmi přehledná a obsahuje i rady pro použití klávesových zkratek. Např.:



Pole „Vstup“

Zadáváním příkazů do tohoto pole lze nahradit všechny příkazy z panelu nástrojů ale i mnoho dalších, jejichž výběr můžeme provést přímo v GeoGebře kliknutím na značku vlevo od pole vstup.

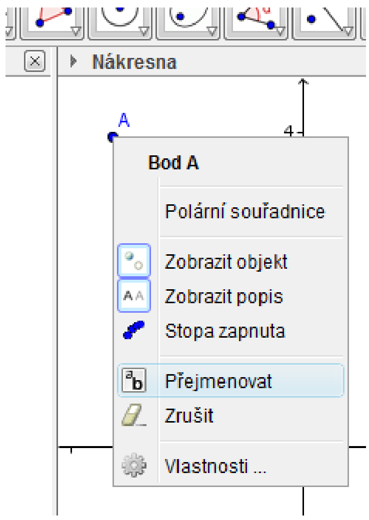


Výběr objektu:

Objekty vybíráme při aktivním režimu pro výběr (ukazovátko - označené v panelu nástrojů šipkou) kliknutím levým tlačítkem myši a to buď v nákresně, nebo v algebraickém okně. Objektů je možné vybrat i více najednou pomocí podržení tlačítka CTRL + kliknutím myši na objekt a hromadně tak upravovat jejich vlastnosti. Vybíráme-li jeden z překrývajících se objektů je tento výběr nutno upřesnit v Algebraickém okně.

Kontextové menu

V tomto menu nalezneme nástroje k rychlému použití a vyvolává se kliknutím pravým tlačítkem myši na objekt. Použití těchto nástrojů je zcela zřejmé z jejich názvu. V podokně vlastnosti lze pro všechny vybrané objekty měnit barvu, styl, podmínky zobrazení objektu a další. Najdeme zde jeden z důležitých výukových nástrojů GeoGebry a to možnost zobrazit stopu pohybujícího se objektu, vhodnou například k výuce grafů, zjišťování vlastností konstrukce a podobně.



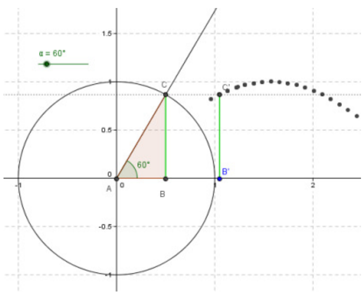
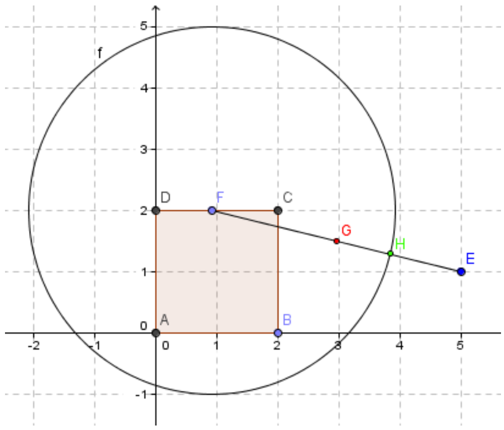


Figura č. 1 - Funkce sinus a cosinus.

Př. 1: Je dán čtverec *ABCD*. *A*[0,0]; *B*[2,0]; *C*[2,2]; *D*[0,2]. Bod *F* pohybující se po obvodu čtverce, a bod *E* [5,1] který je s bodem F spojen úsečkou. Na této úsečce jsou umístěny dva body:

- bod *G* je ve středu této úsečky,
- bod *H* v konstantní vzdálenosti 3cm od bodu *F*. (Průsečík úsečky *EF* a kružnice *f* (*F*; r = 3cm).



Určete, po jaké dráze se bude pohybovat bod *G* a bod *H* při pohybu bodu F po obvodě čtverce.

Tyto úlohy mají v žácích rozvíjet představivost. Po spuštění animace body *G* a *H* opisují stopu svého pohybu a žáci si ověří kvalitu svého úsudku.

Aby body *G* a *H* kreslili stopu, musíme kliknout v kontextovém menu na položku „stopa zapnuta“.

Zpět

Provedené úkony je možné vrátit zpět klávesovou zkratkou CTRL + Z, nebo v hlavním menu v záložce „úpravy“.

Vytvoření vlastního příkazu

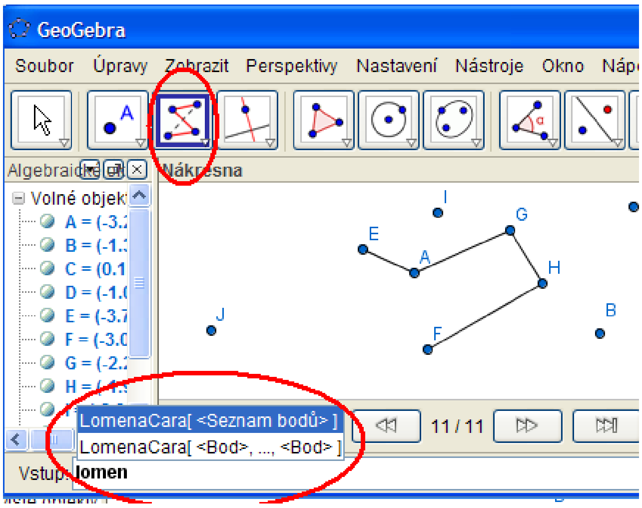
Pomocí pole „Nástroje“ v hlavním menu lze vytvořit i vlastní nástroj na provedení konstrukce. Po vytvoření figury klikneme na pole „Nástroje“ / „Vytvořit nový nástroj“. Zadáme nutné vstupní a požadované výstupní objekty. Napříště se po kliknutí na nově vytvořený nástroj (v panelu nástrojů) a po zadání vstupních údajů zobrazí výstupní objekt bez provádění konstrukce.

Čtyřúhelníky

Definice čtyřúhelníku:

Čtyřúhelníky jsou plošné obrazce definované jako mnohoúhelníky se čtyřmi vrcholy pomocí lomené čáry, jejíž definice zní: *Lomená čára je množina úseček, kde koncový bod jedné je počátečním bodem druhé úsečky.*

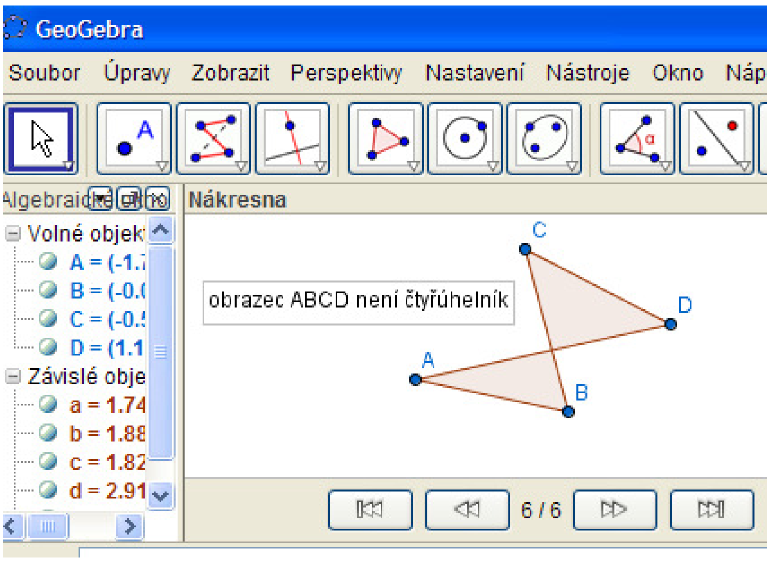
Lomenou čáru vytvoříme v GeoGebře, buď použitím ikony „lomená čára“ v poli nástrojů a následným kliknutím na body v nákresně, nebo pomocí příkazu „LomenaCara“ v poli



Vstup a zadáním názvů bodů oddělených čárkou, nebo zadáním názvu dříve vytvořeného seznamu bodů.

Mnohoúhelník je část roviny, ohraničená uzavřenou lomenou čarou, přičemž žádné dvě úsečky lomené čáry se neprotínají. (Geometrie, Slouka, Jan 1993 s. 41)

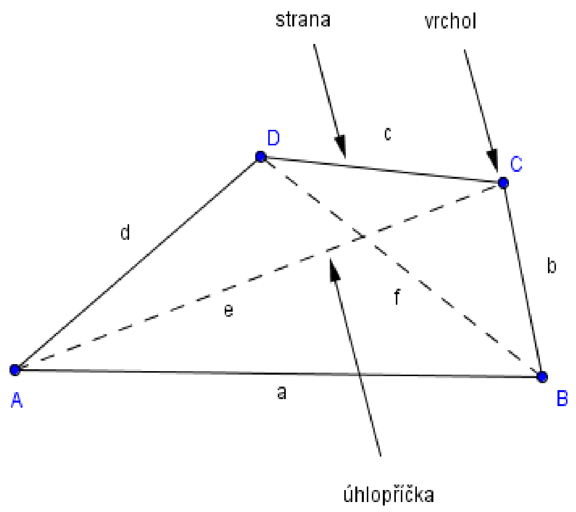
Obrazec ABCD na obrázku nevyhovuje definici mnohoúhelníku, protože úsečky BC a DA se vzájemně protínají. Tento obrazec tedy není čtyřúhelník, přestože má stejně jako čtyřúhelníky čtyři vrcholy a čtyři strany.



Čtyřúhelník ABCD – základní pojmy

Vrcholy čtyřúhelníku

Body *A,B,C,D* jsou vrcholy čtyřúhelníku *ABCD*.



Strany čtyřúhelníku

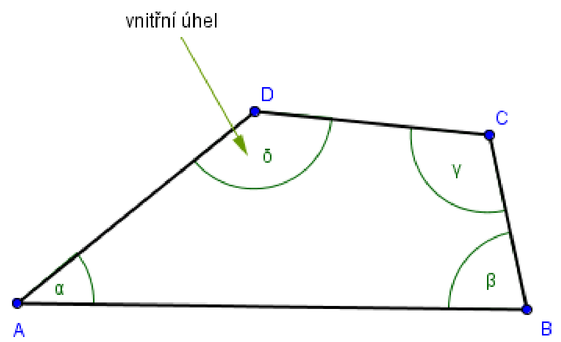
Úsečky $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ jsou strany čtyřúhelníku *ABCD*. Součet délek tří libovolných stran čtyřúhelníku musí být větší než délka čtvrté strany.

Úhlopříčky čtyřúhelníku

Úsečky $e = AC$, $f = BD$ jsou úhlopříčky čtyřúhelníku *ABCD*

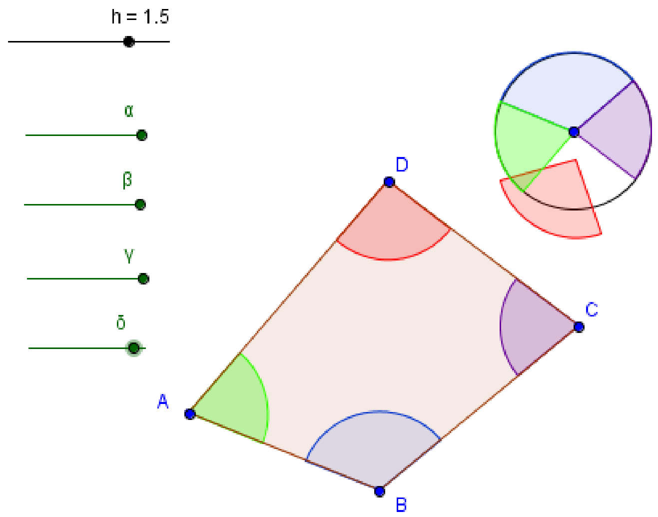
Vnitřní úhly čtyřúhelníku

Úhly α, β, γ, δ jsou vnitřní úhly při vrcholech *A, B, C, D* čtyřúhelníku ABCD.



Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

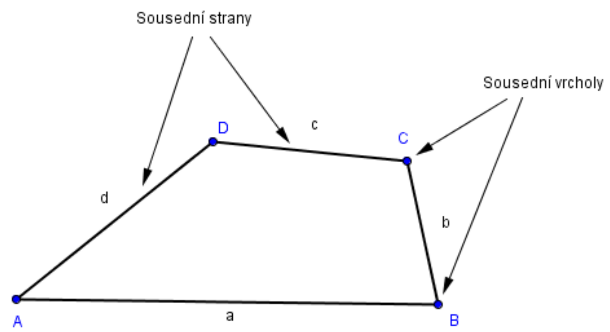


Pohybem postníků ověř, že součet všech vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°. (figura č. 2)

Sousední strany čtyřúhelníku

Sousední strany čtyřúhelníku se nazývají strany, které mají společný vrchol.

Ve čtyřúhelníku ABCD jsou sousední strany AB a BC, BC a CD, CD a DA, DA a AB.

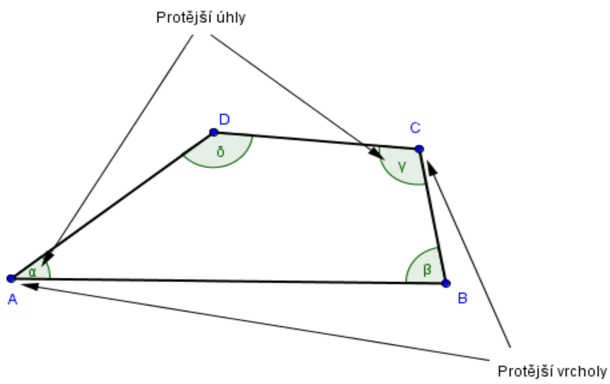


Sousední vrcholy čtyřúhelníku

Sousední vrcholy čtyřúhelníku jsou krajní body jedné strany. Ve čtyřúhelníku ABCD jsou sousedními vrcholy A a B, B a C, C a D, D a A

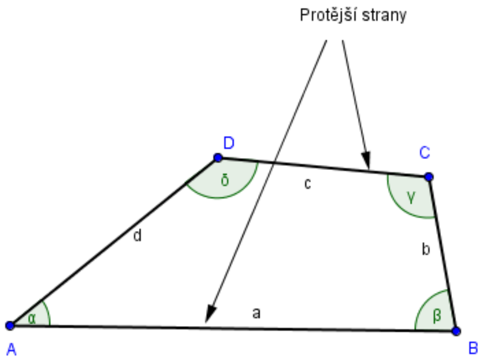
Protější úhly čtyřúhelníku

Protější úhly čtyřúhelníku se nazývají ty vnitřní úhly, jejichž ramena neobsahují tutéž stranu. Ve čtyřúhelníku ABCD jsou to úhly α a γ, β a δ



Protější vrcholy čtyřúhelníku

Protějšími vrcholy čtyřúhelníku se nazývají vrcholy, které nejsou krajními body jedné strany. Ve čtyřúhelníku ABCD jsou protější vrcholy A a C, B a D.

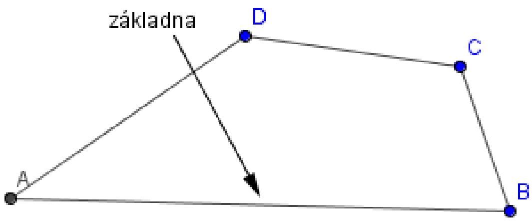


Protější strany čtyřúhelníku

Protější strany čtyřúhelníku se nazývají strany, které nemají společný vrchol. Ve čtyřúhelníku ABCD jsou protější strany AB a CD, AD a BC.

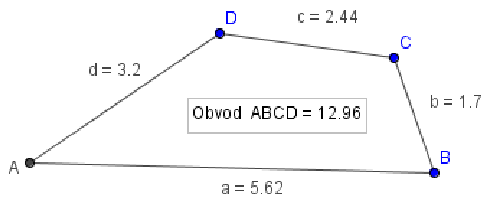
Základna

Základnou se nazývá strana, na které by, v případě, že by se jednalo o hmotný objekt, čtyřúhelník stál. V geometrickém pojetí může být základnou nazvána libovolná strana, ale zpravidla se jedná o spodní, vodorovnou a ne příliš krátkou stranu.



Obvod čtyřúhelníku

Obvod čtyřúhelníku je součet délek všech jeho stran.



O = a + b + c + d

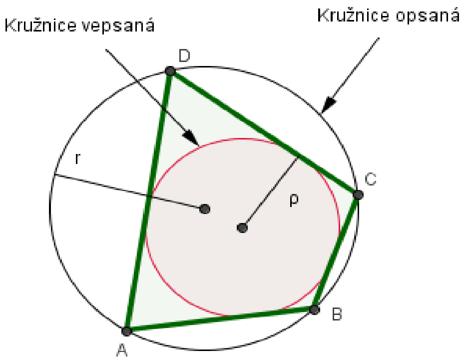
O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|

Kružnice opsaná

Kružnice opsaná čtyřúhelníku je kružnice, která prochází všemi jeho vrcholy. Obvykle se poloměr kružnice opsané značí *r*.

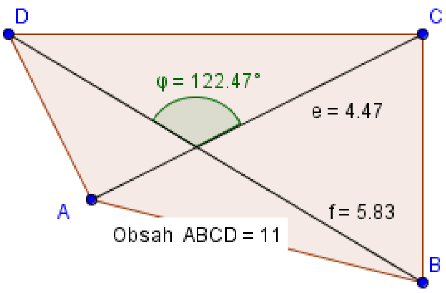
Kružnice vepsaná

Kružnice vepsaná čtyřúhelníku se dotýká všech jeho stran, její poloměr se obvykle značí řeckým písmenem ρ .



Obsah čtyřúhelníku

Obsah čtyřúhelníku je velikost plochy vymezené stranami čtyřúhelníku. Různé čtyřúhelníky mají různé vzorce pro jeho zjištění, ale pro všechny čtyřúhelníky platí, že jejich obsah lze vypočítat jako součet obsahů dvou trojúhelníků vzniklých rozdělením čtyřúhelníku. Z tohoto poznatku lze jednoduchou úpravou dospět k obecnému vzorci, platnému pro libovolný čtyřúhelník:

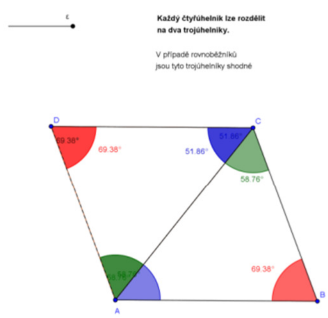


$S = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin \varphi$

Kde e, f jsou délky úhlopříček a φ je libovolný úhel, který svírají.

Nutné prvky k provedení konstrukce

Čtyřúhelník je tedy možné vyjádřit jako sjednocení dvou trojúhelníků s jednou společnou, stejně dlouhou stranou, a protože každý trojúhelník je určen třemi prvky a vzniklé trojúhelníky mají jednu stranu společnou (úhlopříčka čtyřúhelníku), stačí **k určení čtyřúhelníku znát pět prvků**.



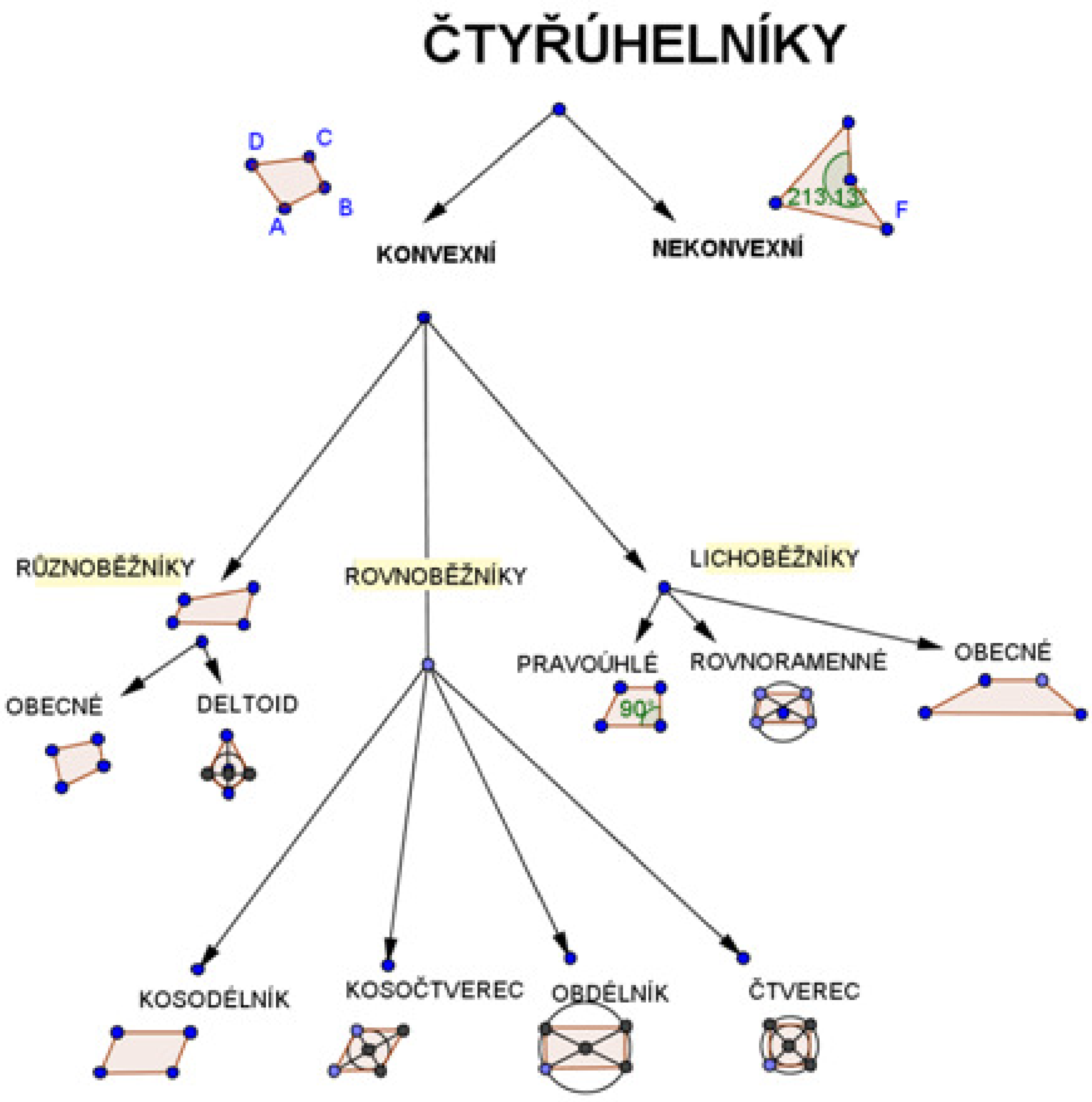
Prvky čtyřúhelníku:

- Čtyři vrcholy
- Čtyři strany
- Čtyři vnitřní úhly
- Dvě úhlopříčky

(figura č. 3)

Rozdělení čtyřúhelníků

Čtyřúhelníků je velké množství a pro zpřehlednění se rozdělují na několik skupin. Rozdělujeme je podle úhlů a podle vlastností stran vůči sobě (rovnoběžnost, různoběžnost, velikost atd.). Základní rozdělení je na konvexní a nekonvexní, dále pak na lichoběžníky, různoběžníky a rovnoběžníky a to se ještě dále dělí na jednotlivé typy např. na čtverec, obdélník, deltoid apod.



Konvexní a nekonvexní

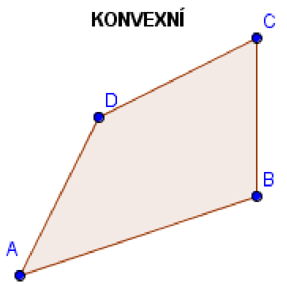
konvexní čtyřúhelník - Všechny čtyři vnitřní úhly jsou konvexní – tzn. menší než 180 °, Pro výpočet obsahu konvexních čtyřúhelníků platí Bretschneiderův vzorec

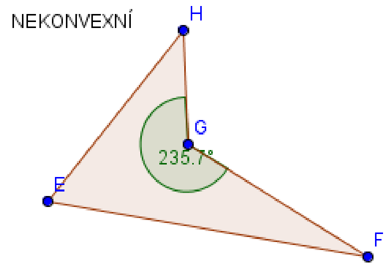
$$\mathbf{S} = \sqrt{\left((s-a)*(s-b)*(s-c)*(s-d) - \ a*b*c*d*\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)}$$

kde *a*, *b*, *c*, *d* jsou strany čtyřúhelníku, *s* je jeho poloviční obvod, α a γ jsou úhly při protilehlých vrcholech (např. při vrcholech A a C).

Každá úhlopříčka rozdělí konvexní čtyřúhelník na dva trojúhelníky.

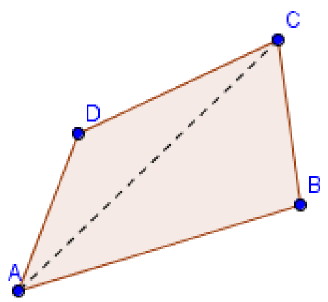
nekonvexní čtyřúhelník - má nekonvexní vnitřní úhel – tj. větší než 180 ° a menší než 360 °. V nekonvexním čtyřúhelníku jedna z úhlopříček leží vně čtyřúhelníku.

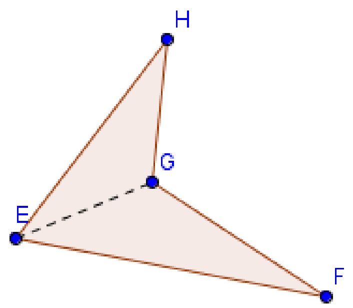


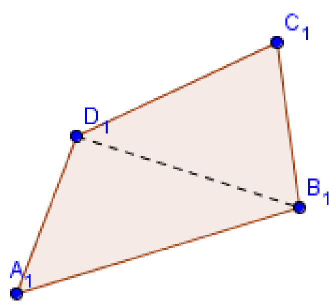


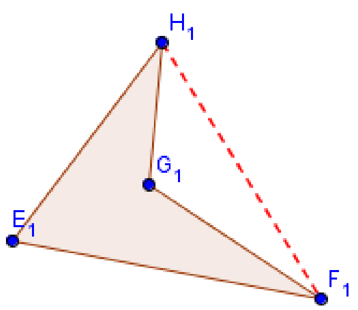
Konvexní

Nekonvexní



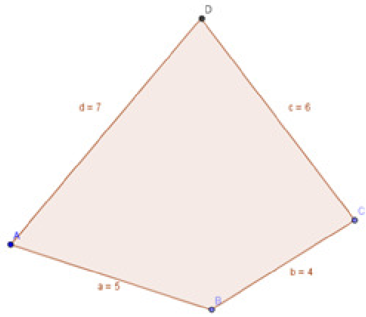


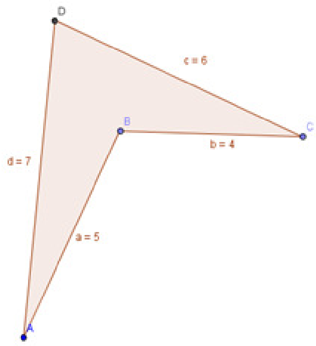




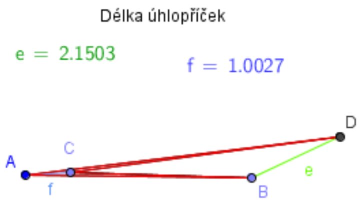
Př. 2: sestrojte čtyřúhelník, je-li dána velikost všech čtyř stran:

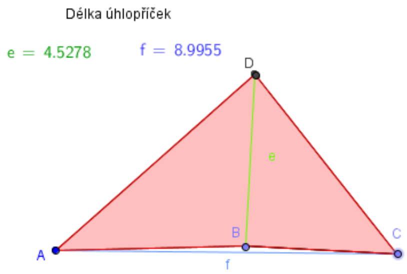
a = 5 cm, b = 4 cm, c = 6 cm, d = 7 cm

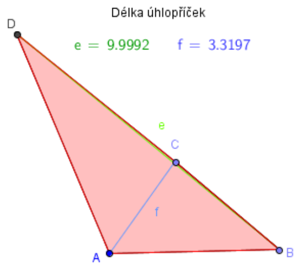




Diskuze: Protože máme zadané jen čtyři prvky, můžeme sestrojit nekonečně mnoho čtyřúhelníků, které splňují podmínku, že úhlopříčka *AC* má délku v rozmezí více než 1 cm a méně než 9 cm a úhlopříčka BD musí být v rozmezí více než 2 cm a méně než 10 cm. Toto vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti trojúhelníků ACD a ABC pro úhlopříčku AC a trojúhelníků ABD a BCD pro úhlopříčku BD.







Kdy pro úhlopříčky AC=1 cm a BD = 2 cm čtyřúhelník zanikne a horní mez úhlopříček je dána součtem stran *a* a *b* (úhlopříčka *f*), nebo *b* a *c* (úhlopříčka *e*). *Pro* vzájemný poměr délek úhlopříček musí platit kosinová věta pro čtyřúhelníky (Bretschneiderova věta)

$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cdot \cos(\alpha + \gamma)$.

V tomto případě $e^2f^2 = 1684 - 1680 \cos(\alpha + \gamma)$. *Kde* $(\alpha + \gamma)$ jsou libovolná dvojice protilehlých úhlů.

Postup konstrukce:

Úsečka *AB*; |*AB*|= 5 cm

1.) Kružnice *k* (*B*, *r* = *b* = 4 cm)

2.) *C*; bod *C* zvolíme na kružnici k tak, aby vzdálenost *AC* byla v rozmezí 1 cm až 9 cm.

3.) Kružnice *l*(*C*, *r* = *c* = 6 cm)

4.) Kružnice *m*(*A*, *r* = *d* = 7 cm)

5.) D; $D \in l \cap m$

6.) Čtyřúhelník *ABCD*

Postup konstrukce v GeoGebře: (příkazy GeoGebry jsou vyznačeny tučným písmem)

1.) Úsečka *AB* = *a* = 5 cm;

Úsečka s pevnou délkou – kliknutím na nákresnu vytvoříme bod *A*, objeví se výzva k zadání délky strany – klávesou vložíme číslo 5. Sestrojili jsme úsečku a s koncovými body *A B*.

2.) Bod *C*;

bod *C* je od bodu *B* vzdálen 4 cm = délka strany *b*. Leží tedy na kružnici se středem v bodě *B* a poloměrem = 4cm. Sestrojme kružnici se středem v bodě *B* a poloměrem 4 cm příkazem

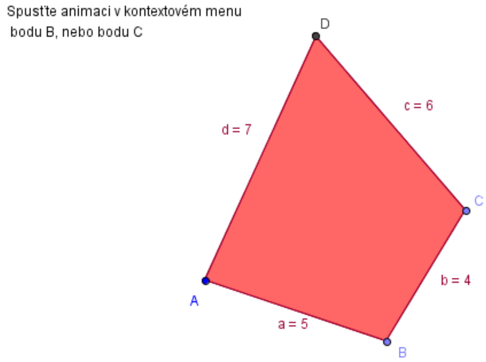
a) **Kružnice daná středem a poloměrem** – kliknutím na bod *B* zadáme střed a poloměr zadáme klávesou 4.

b) Nyní na vzniklé kružnici vytvořme bod *C* příkazem **Bod na objektu** a kliknutím na tuto kružnici.

3.) Bod *D*;

Bod *D* leží od bodu *A* vzdálen 7cm a od bodu *C* 6 cm.

Od bodu *A* je bod *D* vzdálen 7 cm = *d*. Leží tedy na kružnici se středem v bodě *A* a poloměrem = 7 cm, sestrojme kružnici příkazem:



a) **Kružnice daná středem a poloměrem** – kliknutím na bod *A* zadáme střed a poloměr zadáme klávesou 7.

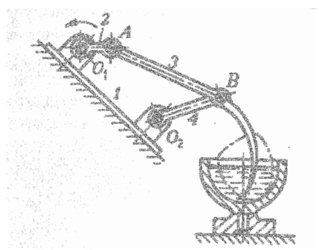
Od bodu *C* je bod *D* vzdálen 6 cm = *c*. Leží tedy na kružnici se středem v bodě *C* a poloměrem = 6 cm, sestrojme kružnici příkazem:

b) **Kružnice daná středem a poloměrem** – kliknutím na bod *C* zadáme střed a poloměr zadáme klávesou 6.

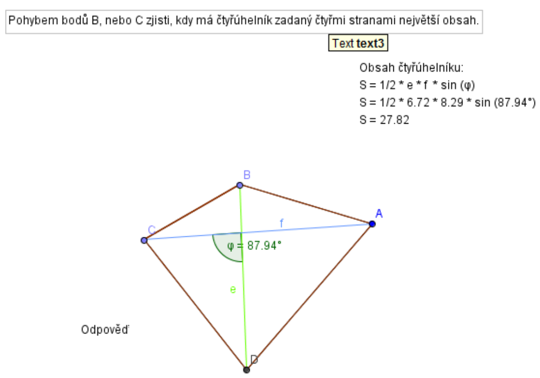
c) Příkazem „**Průsečíky dvou objektů**“ a kliknutím na jeden z průsečíků těchto dvou kružnic vytvoříme bod *D*.

4.) Čtyřúhelník *ABCD*; příkazem **Mnohoúhelník** a kliknutím na body *A, B, C, D* a znovu na bod *A* vytvoříme čtyřúhelník *ABCD,* který můžeme v rámci volnosti pohybu kolem vrcholů pohybovat a měnit jeho tvar.

S takovýmto pohyblivým čtyřúhelníkem je možné se setkat ve starších strojích využívající čtyřkloubový pohybový mechanizmus na převod rotačního pohybu o 360 ^{o} na pohyb o jiné dráze. Na obrázku je stroj na hnětení těsta.
(figura č. 4)



Jakýmkoliv dalším zadaným prvkem dojde k jednoznačnému určení čtyřúhelníku a k zastavení pohybu (důležité například pro stavbu lešení).



U takto zadaného čtyřúhelníku je neměnná velikost obvodu, ale naopak proměnlivý je obsah. Pomocí konstrukce provedené v GeoGebře (Př. 2) zkuste najít v jaké poloze má čtyřúhelník z předchozího příkladu největší obsah.

Velikost obsahu je zobrazena v algebraickém okně u názvu mnohoúhelníku, nebo ji zjistíme příkazem „**obsah**" a kliknutím na čtyřúhelník. Pro splnění úkolu připravena figura č. 5.

Řešení: největší obsah má takový tvar čtyřúhelníku, kterému lze opsat kružnici.

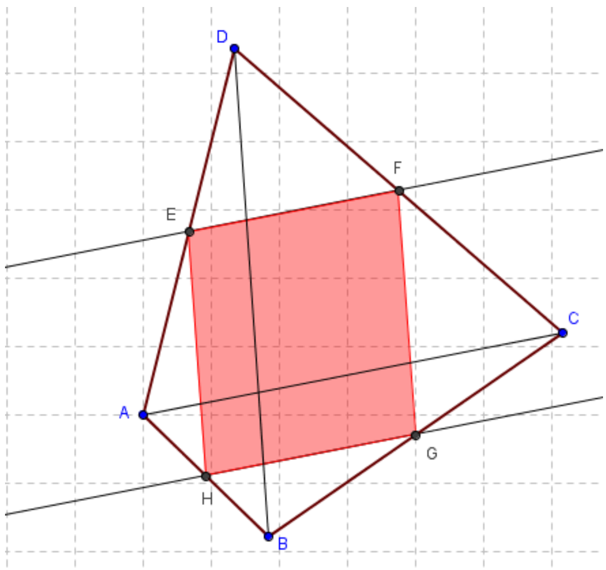
Vepsaný čtyřúhelník

Zajímavou vlastností čtyřúhelníků je, že čtyřúhelník vytvořený ze středů stran původního libovolného čtyřúhelníku je vždy rovnoběžník.

Př. 3:

Sestroj libovolný čtyřúhelník ABCD a ve středech jeho stran body EFGH. Z těchto bodů sestroj čtyřúhelník. Body EF a GH veď přímky a pozoruj, zda tyto přímky jsou rovnoběžky.

Prověř pohybem bodů A, B, C nebo D, a pokus se vysvětlit. Pro snazší pochopení rovnoběžnosti sestroj úhlopříčku AC.



Konstrukce v GeoGebře:

1.) Čtyřúhelník ABCD; příkazem „Mnohoúhelník" a kliknutím do nákresny.

2.) Body E, F, G, H; příkazem „Střed" a kliknutím na strany čtyřúhelníku.

3.) Čtyřúhelník EFGH; příkazem „Mnohoúhelník" a kliknutím na body E, F, G, H.

4.) Přímky p, q; příkazem „přímka – dva body“ a kliknutím na body E,F (G, H).

5.) Úhlopříčka AB, příkazem „úsečka daná dvěma body“ a kliknutím na body A a B.

Řešení:

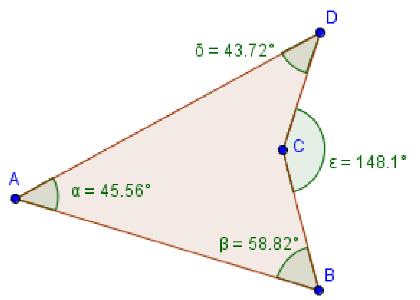
Vysvětlení plyne z rozdělení čtyřúhelníku ABCD na dva trojúhelníky – ACD a ACB.

Sestrojená střední příčka v trojúhelníku ACD vytvoří trojúhelník EFD. Tyto dva trojúhelníky (ACD a EFD) jsou si podobné a podle věty o podobnosti trojúhelníků jsou úsečky EF a AC rovnoběžné. Pokud stejný postup použijeme na trojúhelník ACB zjistíme, úsečka HG je rovnoběžná se stranou AC a protože rovnoběžnost v rovině je tranzitivní vlastností musí být úsečka EF rovnoběžná s úsečkou HG. Totéž lze odvodit i pro úsečky EH a FG. Čtyřúhelník EFGH tedy musí být rovnoběžník.

Př. 4: Součet úhlů

Volnými body v rovině A, B, C, D je zadán čtyřúhelník ABCD. Pohybuj jeho vrcholy A, B nebo D a zdůvodni proč vnější úhel BCD má stejnou velikost, jako je součet konvexních vnitřních úhlů.

$$\alpha + \beta + \delta = 45.56^\circ + 58.82^\circ + 43.72^\circ = 148.1^\circ$$



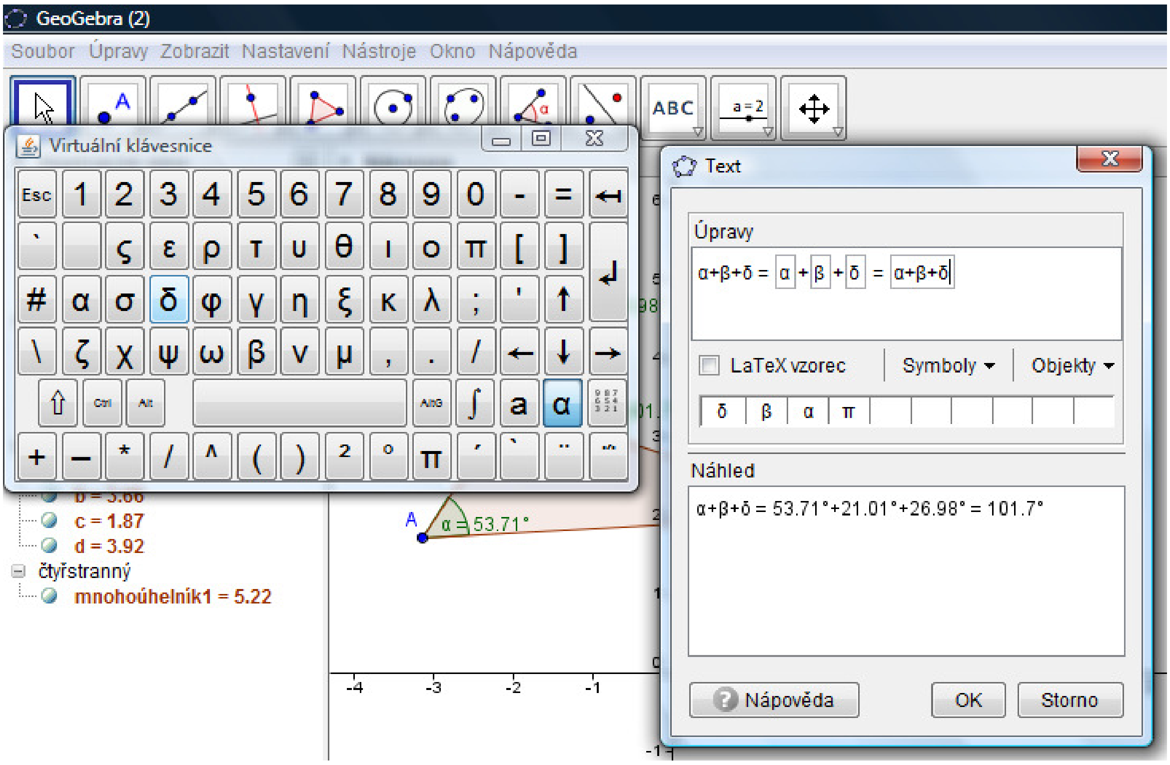
Konstrukce:

1.) Příkazem „**mnohoúhelník**“ a kliknutím do nákresny vytvoříme nekonvexní čtyřúhelník ABCD (poslední bod musíme spojit s počátečním a mnohoúhelník tak uzavřít)

2.) Příkazem „**úhel**“ a kliknutím dovnitř vytvořeného mnohoúhelníku se zobrazí všechny vnitřní úhly mnohoúhelníku.

3.) Kliknutím pravým tlačítkem myši na nekonvexní úhel vyvoláme kontextové menu a v položce **vlastnosti** nastavíme velikost úhlu mezi 0^{o} - 180^{o} .

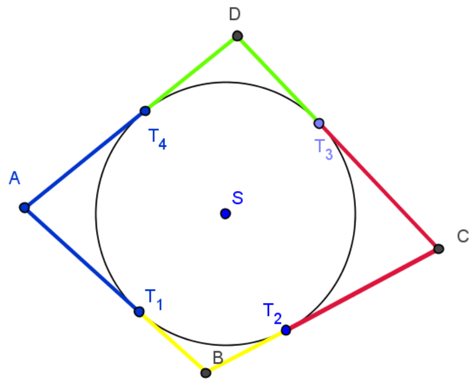
4.) Příkazem „**text**“ vložíme popis nad konstrukcí. Vložení znaků řecké abecedy je možné pomocí políčka „**symboly**“ (v menu tabulky pro text), zatímco pole „**objekty**“ vloží hodnotu vybraného objektu. Pro provedení součtu velikostí úhlů přímo v textovém poli je zvláštní postup: nejprve v hlavním menu vyvoláme zobrazení klávesnice. Do textového pole, na místo kde má být proveden součet vložíme první z objektů (pomocí políčka objekty). Nyní myší klikneme dovnitř čtverečku se zobrazeným symbolem (α) a pomocí virtuální klávesnice tam vložíme plus a další znak (v našem případě + β+δ).



Tečnové, tětivové, dvojstředové

Kromě tohoto známého rozdělení se také čtyřúhelníky dělí na **tečnové a tětivové**, které jsou odvozené od jejich vzniku – buď spojením čtyř bodů kružnice, strany čtyřúhelníku jsou pak tětivami kružnice, nebo strany čtyřúhelníku jsou vytvořeny čtyřmi tečnami kružnice.

Tečnové čtyřúhelníky



Je zajímavé, že určitým způsobem lze vždy dosáhnout pouze určitých obrazců. Např. ***tečnové čtyřúhelníky*** budou buď obecné, nebo budou mít vždy tvar jednoho z následujících obrazců: čtverce, lichoběžníku, deltoidu nebo kosočtverce**.**

Do každého tečnového čtyřúhelníku, lze vepsat kružnici.

„Každý tečnový čtyřúhelník má tu vlastnost, že součet délek dvou protilehlých stran je roven součtu délek zbylých dvou protilehlých stran“. (Hančl, J.)

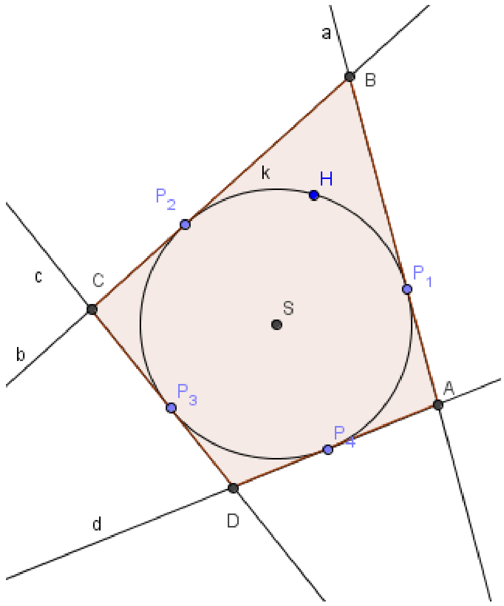
Důvod je patrný z obrázku výše. Úsečky označené stejnou barvou, mají shodnou délku a v součtu protilehlých stran se každá z nich vyskytuje právě jednou. (figura č. 6)

Př. 5: Je dána kružnice k (S; r= 3 cm). Sestrojte čtyřúhelník ABCD tak, aby jeho strany tvořily tečny zadané kružnice.

Rozbor: jediná podmínka je, že všechny čtyři strany jsou tvořeny tečnami kružnice. Na zvolené kružnici tedy libovolně umístíme čtyři body, ve kterých vedeme tečny, ty vytvoří hledaný čtyřúhelník. Z pěti nutných bodů ke konstrukci jsou zadány jen čtyři, z toho vyplývá, že bude nekonečně mnoho řešení.

Zápis konstrukce:

1. k; k (S; r = 3 cm)
2. P_1; $P_1 \in$ k
3. P_2; $P_2 \in$ k
4. P_3; $P_3 \in$ k
5. P_4; $P_4 \in$ k
6. a; a $\perp$ SP_1, $P_1 \in$ a
7. b; b $\perp$ SP_2, $P_2 \in$ b
8. c; c $\perp$ SP_3, $P_3 \in$ c
9. d; d $\perp$ SP_4, $P_4 \in$ d
10. A; A $\in$ a $\cap$ d
11. B; B $\in$ a $\cap$ b
12. C; C $\in$ c $\cap$ b
13. D; D $\in$ c $\cap$ d
14. čtyřúhelník ABCD



Postup konstrukce prováděné v GeoGebře:

1.) **Kružnice daná středem a poloměrem** – kliknutím do nákresny vytvoříme střed a zadáme poloměr**.**

Abychom splnili zadání a sestrojili jsme čtyřúhelník pojmenovaný ABCD, musíme vznikající objekty přejmenovat.

2.) Příkazem **Bod na objektu** a následným čtyřnásobným kliknutím na kružnici umístíme čtyři body - P_1 až P_4.

3.) V těchto bodech vedeme tečny ke kružnici. Vytvoříme je pomocí příkazu „**Tečny z bodu**" a kliknutím na kružnici, pak na bod $P_{1.}$ To opakujeme pro všechny čtyři body.

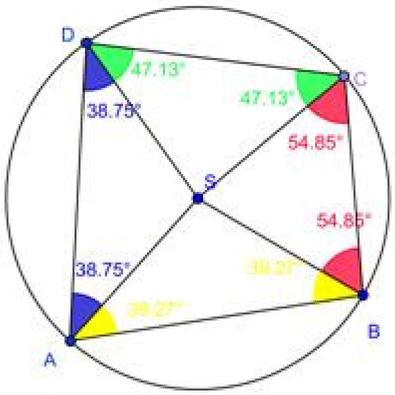
4.) Příkazem „**Průsečíky dvou objektů**" a kliknutím na průsečíky tečen sestrojíme body *A,B,C,D* – vrcholy čtyřúhelníku.

5.) Čtyřúhelník *ABCD* – sestrojíme pomocí příkazu „**Mnohoúhelník**" a kliknutím na všechny čtyři vrcholy A,B,C,D a znovu A.

6.) Všechny objekty, které nemusí být zobrazeny, skryjeme buď v kontextovém menu, nebo v algebraickém okně – více v kapitole seznámení s GeoGebrou.

Tětivové čtyřúhelníky

Tětivovými čtyřúhelníky jsou: obecný čtyřúhelník, čtverec, pravoúhlý deltoid, rovnoramenný lichoběžník, obdélník.



Součet protějších úhlů je úhel přímý.

Platí i obrácené tvrzení: pokud je součet protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku úhel přímý, pak je tento čtyřúhelník tětivový a lze mu tedy opsat kružnici. Ve čtyřúhelníku je součet vnitřních úhlů 360°. (figura č. 7)

$\alpha + \gamma$ = modrý + žlutý + červený + zelený úhel

$\beta + \delta$ = modrý + žlutý + červený + zelený úhel

Protože $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ a současně $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{\circ}$ $\longrightarrow$

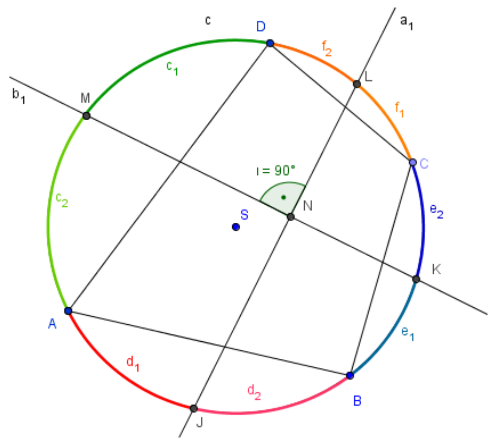
$\alpha + \gamma = 180^{\circ}$

$\beta + \delta = 180^{\circ}$

Pro všechny tětivové čtyřúhelníky platí vzorec pro vypočtení jejich obsahu:

$\boldsymbol{S} = \sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]},$ kde *s* je polovinou obvodu a *a, b, c, d* jsou strany čtyřúhelníku.

Př. 6: Sestrojte libovolný tětivový čtyřúhelník. Najděte středy oblouků nad jednotlivými stranami a protilehlými dvěma z nich veďte přímku. Zjistěte, jaký úhel svírají vzniklé dvě přímky.



Postup konstrukce v GeoGebře:

1.) Kružnice *c;* **Kružnice daná středem a bodem** (S, r = libovolný).

2.) Body A,B,C,D – **Body na objektu.**

3.) Čtyřúhelník ABCD; **Mnohoúhelník-** body A,B,D,C.

4.) Osy všech stran čtyřúhelníku; **Osa úsečky** – kliknutí na strany čtyřúhelníku.

5.) Body JKLM = **Průsečíky** os stran s kružnicí *c*.

6.) **Přímky** a_1, $b_1$určené body JL a KM.

7.) **Úhel** LNM.

Pohybem bodů čtyřúhelníku sledujte vlastnosti úhlu LNM a pokuste se je zdůvodnit.

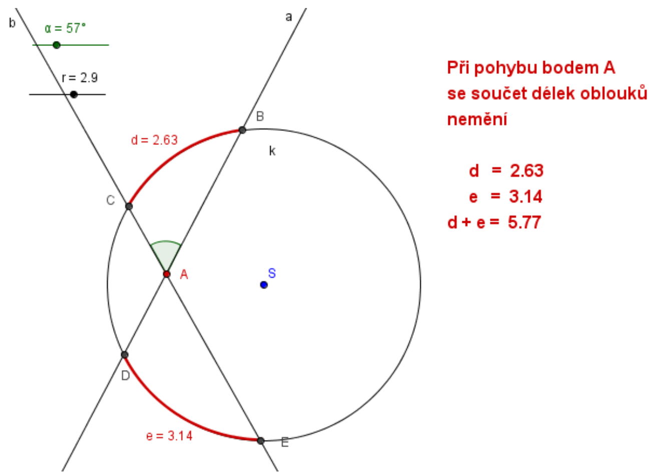
Nápovědou mohou být barevně označené úseky kružnice.

Vysvětlení:

Přímky svírají pravý úhel. V součtu protilehlých výsečí se vyskytují vždy 1 červený, 1 modrý, 1 zelený a 1 oranžový úsek. Jelikož stejné barvy, mají stejnou délku oblouku, platí, že oba součty vzájemně protilehlých úseků mají stejnou velikost a protože to jsou úhly vrcholové, musí být sevřený úhel pravý.

Potřebná znalost k vysvětlení vlastnosti:

Je-li kružnice rozdělena dvěma různoběžkami na čtyři oblouky, přičemž průsečík těchto



různoběžek (bod A) se nachází uvnitř zadané kružnice, pak platí, že i při pohybu různoběžek (pohyb bodem A) vůči kružnici je součet délek dvou protilehlých oblouků konstantní (figura č. 8)

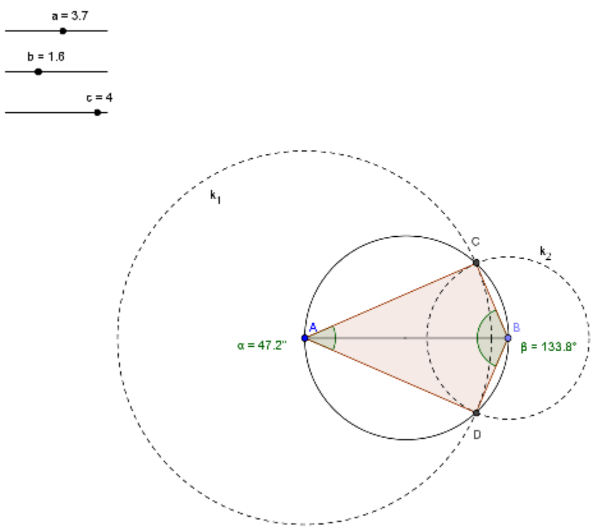
Dvojstředové čtyřúhelníky

Dvojstředové čtyřúhelníky se nazývají takové čtyřúhelníky, kterým lze opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice nemají společný střed (kromě u čtverce). Dvojstředovými čtyřúhelníky jsou: čtverec, pravoúhlý deltoid a rovnoramenný lichoběžník, který má délku ramene rovnu polovině součtu velikosti základen a obecný čtyřúhelník při splnění podmínek pro tečnové i tětivové čtyřúhelníky:

a) Dvojstředový čtyřúhelník má stejné součty délek protilehlých stran (a+c=b+d).

b) Součty velikostí protilehlých úhlů jsou stejné a to 180°(α + γ = β + δ = 180°).

Obsah: $\boldsymbol{S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}}$



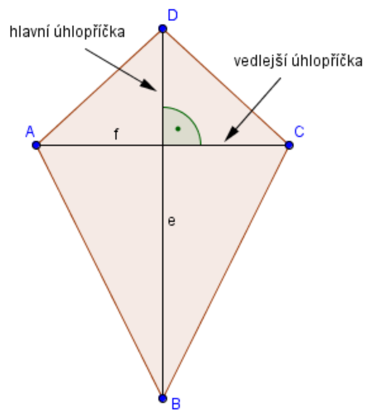
Pomocí posuvníků měňte délky stran, najděte dvojstředový čtyřúhelník a popište jeho vlastnosti. (figura č. 9)

Různoběžníky

Mezi různoběžníky patří deltoid a obecný čtyřúhelník.

Deltoid

Deltoid je jediný z různoběžných čtyřúhelníků, který má vlastní pojmenování. Má tvar klasického – papírového draka a na rozdíl od obecného čtyřúhelníku v něm vždy platí níže uvedená pravidla:

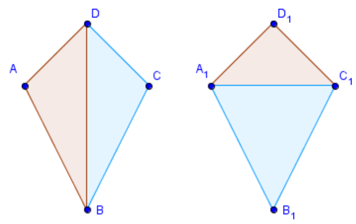


1.) Deltoid je osově souměrný podle jedné z úhlopříček. Ta se nazývá hlavní úhlopříčka a v deltoidu *ABCD* se značí *e*.

2.) Druhá úhlopříčka se nazývá vedlejší. V deltoidu *ABCD* se značí *f*.

3.) Z osové souměrnosti plyne, že jeho úhlopříčky jsou navzájem kolmé a vedlejší úhlopříčka je hlavní úhlopříčkou půlena.

4.) Hlavní úhlopříčka dělí deltoid na dva shodné trojúhelníky. Vedlejší úhlopříčka jej dělí na dva rovnoramenné trojúhelníky (podobné řeckému písmenu delta - proto název deltoid)

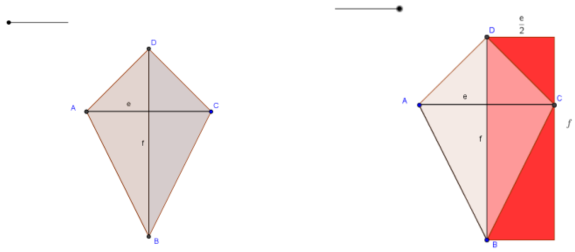


5.) Deltoidu lze vždy vepsat kružnici, je to tečnový čtyřúhelník.

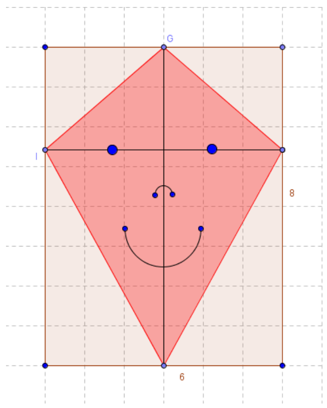
6.) Deltoid je zároveň tětivový čtyřúhelník, právě když úhly u vrcholů vedlejší úhlopříčky jsou pravé, potom je to dvojstředový čtyřúhelník.

Obsah deltoidu se vypočítá podle vzorce:

$$S = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$



(tento vzorec lze snadno odvodit – figura č. 10)



Př. 7:

Na obrázku je návrh papírového draka, který má být vystřižen z balicího papíru o rozměrech 6 x 8dm. Vypočítej obsah vystřiženého draka a obsah celého papíru.

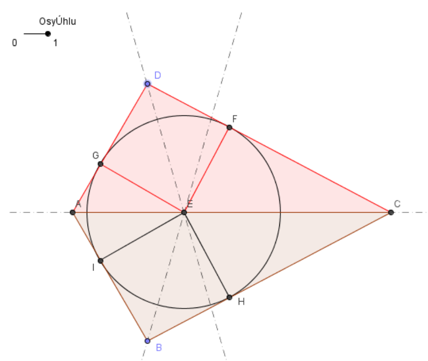
Použijeme vzorec S = $\frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, kde e = 8 cm a f = 6 cm.

Po dosazení nám vyjde obsah deltoidu 24 cm^2.

Obsah celého obdélníku je S = a · b = 48 cm^2

Při bližším prozkoumání je z obrázku zřejmé, že odstřižená část má stejný obsah jako samotný deltoid.

Př. 8: Čtyřúhelník ABCD je deltoid. Pohybem vrcholu D vyzkoušej, zda lze sestrojit takový deltoid, kterému by nešla vepsat kružnice. Závěr zdůvodni.



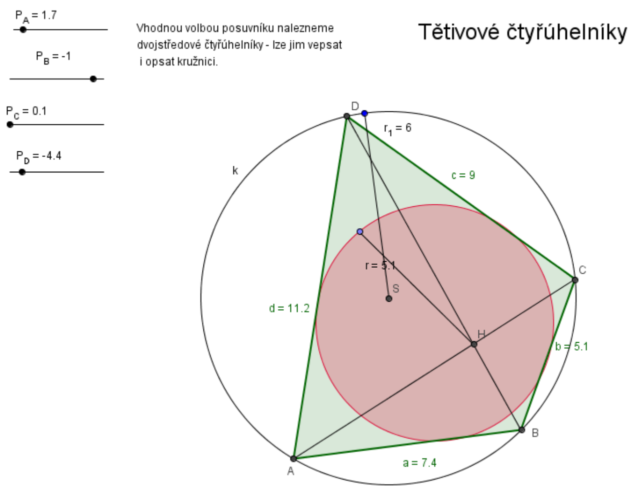
Závěr: do deltoidu lze kružnici vepsat vždy.

Odůvodnění: Pokud sestrojíme osu úhlu δ (úhel při vrcholu D) získáme bod E jako průsečík této osy a hlavní úhlopříčky. Je zřejmé, že z bodu E lze do ramen úhlu δ vepsat kružnici (bod E leží na ose tohoto úhlu). Protože je deltoid osově souměrný podle hlavní úhlopříčky a bod E leží na této ose souměrnosti, je zmíněná kružnice vepsána celému deltoidu.

Obecný čtyřúhelník

Obecným čtyřúhelníkem nazveme takový čtyřúhelník, pro který neplatí žádná pravidla pro zařazení do určité skupiny, např. do skupiny rovnoběžníků, lichoběžníků…

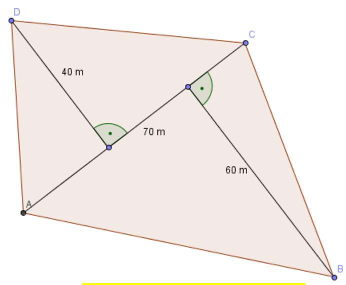
I obecnému čtyřúhelníku lze však za splnění podmínek opsat nebo vepsat kružnici. Může být i dvojstředový. (figura č. 11)



S obecnými čtyřúhelníky se běžně setkáváme u tvarů stavebních parcel, zahrad, polí a podobně, tak jako v dalším příkladu:

Př. 9: Paní zahradníková musí zaplatit daň ze zahrady. Plánek zahrady je na obrázku. Za 1m^2 zahrady se platí daň 0,20 Kč.

Vypočítejte výměru zahrady a výši daně.



Řešení:

V tomto případě je vhodné použít tu vlastnost, že každý čtyřúhelník lze rozdělit na dva trojúhelníky, kde pro každý z nich použijeme vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku: $S = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{va} \;/\; 2$

$S = 70 \cdot 40 / 2 + 70 \cdot 60 / 2$

$S = 3500 \text{ m}^2$

Daň ze zahrady:

$3500 \text{ m}^2 \cdot 0{,}2\text{Kč}/\text{ m}^2 = 700 \text{ Kč}$

Daň ze zahrady bude 700 korun.

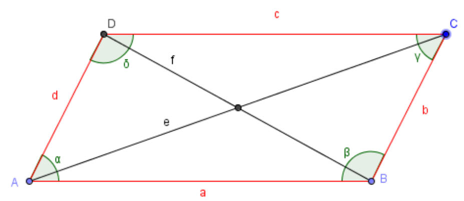
Rovnoběžníky

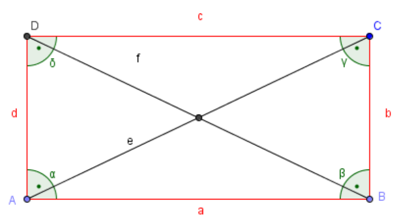
Rovnoběžníky jsou geometrické útvary, které mají tyto vlastnosti:

1. Protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejně dlouhé.
2. Úhlopříčky rovnoběžníků se navzájem půlí.
3. Rovnoběžníky jsou středově souměrné dle průsečíku úhlopříček.
4. Každé dva protilehlé úhly jsou shodné.
5. Součet úhlů při jedné straně je 180 ^{o}.
6. Jedna úhlopříčka rozdělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky.
7. Dvě úhlopříčky rozdělí rovnoběžník na čtyři trojúhelníky, z nichž každé dva protilehlé jsou shodné.
8. Výška rovnoběžníku představuje vzdálenost protilehlých stran.
9. Rovnoběžník má dvě výšky.

Rovnoběžníky jsou:

- **Kosoúhlé = kosoúhelníky** (kosodélník, kosočtverec).
- **Pravoúhlé = pravoúhelníky** (obdélník, čtverec).





(figura č. 12)

Kosoúhlé rovnoběžníky

Kosoúhelníky rozdělujeme na kosodélníky a kosočtverce.

Kosodélník

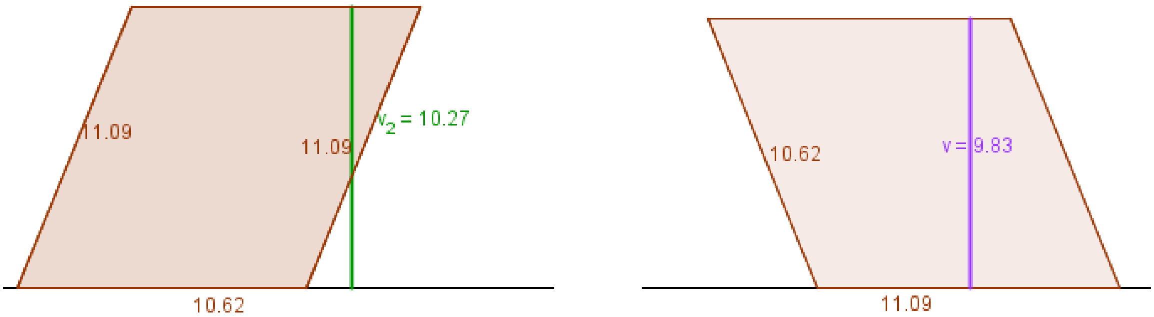
Kosodélník je nejzákladnější rovnoběžník, který má všechny výše uvedené vlastnosti rovnoběžníků.

Obvod a obsah kosodélníků se vypočítá podle následujících vzorců:

- **Obvod: $o = 2 \cdot (a + b)$**
- **Obsah: $S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = a \cdot b \cdot \sin \alpha = a \cdot b \cdot \sin \beta$**

Kde a, b jsou strany; v_a, v_b jsou výšky; α , β je libovolný vnitřní úhel rovnoběžníku.

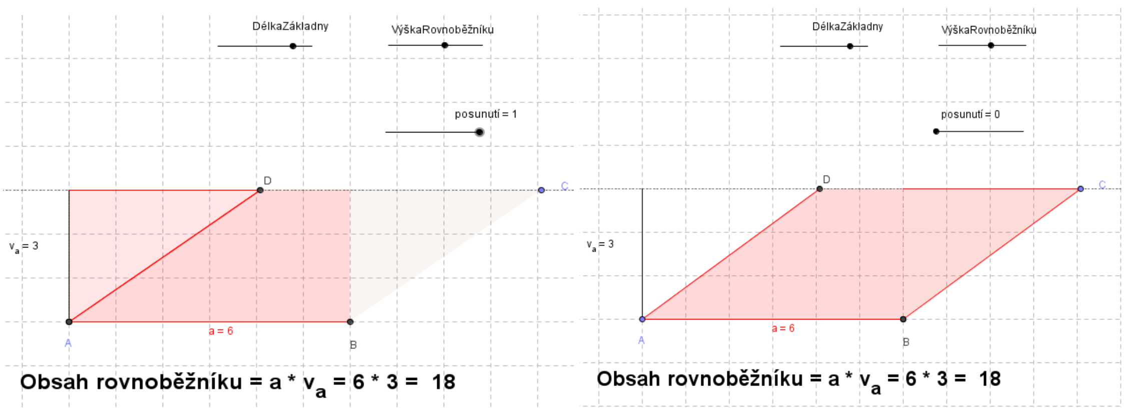
Př. 10: Porovnejte obsahy těchto dvou čtyřúhelníků.



K jakému závěru jste došli?

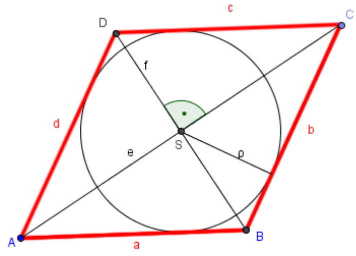
U rovnoběžníků je jedno jakou stranu a výšku na ni, si pro výpočet obsahu zvolíme, výsledek bude vždy stejný.

Rovnoběžník je možné vhodným rozdělením převést na obdélník. Z figury číslo 13 je velmi dobře patrné, že obsah rovnoběžníku nezáleží na tvaru rovnoběžníku, ale pouze na délce strany a jeho výšce ($S = a \cdot v_a$) . (figura č 13)



Kosočtverec

Kosočtverec (figura 14) je rovnoběžník, který má všech devět výše uvedených vlastností rovnoběžníků, plus navíc jen pro kosočtverec platí tučně vyznačené části textu:



1. Protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejně dlouhé.
2. Úhlopříčky rovnoběžníků se navzájem půlí.
3. Kosočtverec je středově souměrný dle průsečíku úhlopříček.
4. Každé dva protilehlé úhly jsou shodné.
5. Součet úhlů při jedné straně je 180 ^{o}.
6. Jedna úhlopříčka rozdělí kosočtverec na dva shodné **rovnoramenné** trojúhelníky.
7. Dvě úhlopříčky rozdělí rovnoběžník na čtyři **shodné** trojúhelníky.
8. Výška rovnoběžníku představuje vzdálenost protilehlých stran.
9. Kosočtverec má dvě **stejně dlouhé** výšky.
10. **Strany kosočtverce jsou všechny stejně dlouhé.**
11. **Jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé.**
12. **Má dvě osy souměrnosti, kterými jsou úhlopříčky.**
13. **Kosočtverci lze vepsat kružnici, která má střed v průsečíku úhlopříček.**

Př. 11: Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li jeho obvod o = 21,6 cm a obsah S = 21,6 cm^2 (Sbírka úloh z Matematiky I, str. 162, př. 22 c)

Výpočet strany a výšky:

Je-li obvod kosočtverce 21,6 cm, je délka jedné strany 21,6 : 4 = 5,4 cm

Obsah $S = a \cdot v_a$

$v_a = S : a$

$v_a = 21{,}6 : 5{,}4$

$v_a = 4$ cm.

Postup konstrukce:

1.) Strana a = |AB|; **úsečka s pevnou délkou.** Zadáme délku 5.4 .

2.) Přímka p; $p \perp a$; $p \in A$; **kolmice** na úsečku *a* v bodě *A*.

3.) Kružnice k; k (A; r = 4 cm); **kružnice daná středem a poloměrem** – střed A poloměr zadáme 4.

4.) P ; $P \in p \cap k$; **průsečík dvou objektů –** průsečík přímky p a kružnice k.

5.) Přímka q; $q \perp p$; $q \in P$; **kolmice** na přímku q v bodě P.

6.) Kružnice l; $l(A$; r = 5,4cm); **kružítko** – klikneme na body *A* a *B* a kružnici umístíme do bodu *A*.

7.) Kružnice m; $m(B$; r = 5,4cm); **kružítko** – klikneme na body *A* a *B* a kružnici umístíme do bodu *B*.

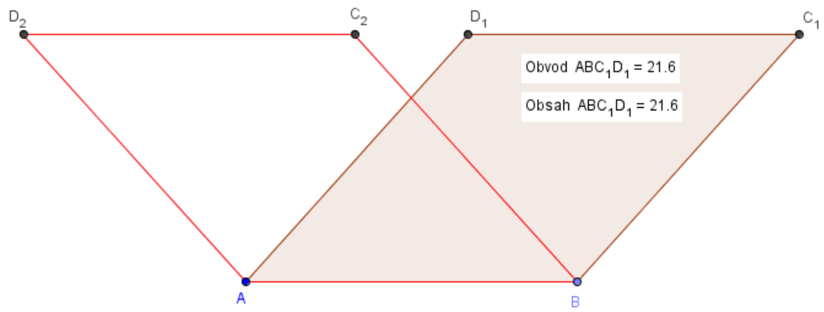
8.) C_1, C_2; $C_1, C_2 \in q \cap l$; **průsečík dvou objektů –** průsečíky přímky *q* a kružnice *l*.

9.) D_1, D_2; $D_1, D_2 \in q \cap m$; **průsečík dvou objektů –** průsečíky přímky *q* a kružnice *m*.

10.) Kosočtverec ABC_1D_1; **mnohoúhelník** – klikneme na body A, B, C_1, D_1 a znovu *A*

11.) Kosočtverec ABC_2D_2; **mnohoúhelník** – klikneme na body A, B, C_2, D_2 a znovu *A*

Úloha má v jedné polorovině dvě shodná řešení.

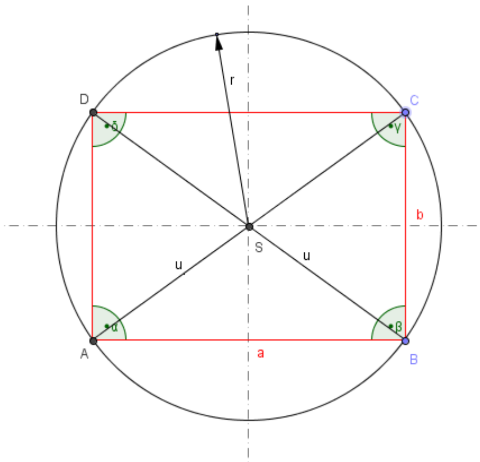


Pravoúhlé rovnoběžníky

Pravoúhlé rovnoběžníky dělíme na obdélník a čtverec.

Obdélník

Obdélník je pravoúhlý rovnoběžník (figura č. 15) pro který platí všech devět základních vlastností společných všem rovnoběžníkům plus další v textu tučně vyznačené:



1. Protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejně dlouhé.

2. Úhlopříčky se navzájem půlí.

3. Rovnoběžníky jsou středově souměrné dle průsečíku úhlopříček.

4. Je osově souměrný podle dvou os souměrnosti, kterými jsou přímky vedené protilehlými středy stran.

5. **Všechny** úhly jsou shodné – **o velikosti 90 ^{o}**

6. Součet úhlů při jedné straně je 180^{o}.

7. Jedna úhlopříčka rozdělí rovnoběžník na dva shodné **pravoúhlé** trojúhelníky.

8. Dvě úhlopříčky rozdělí rovnoběžník na čtyři **rovnoramenné** trojúhelníky, z nichž každé dva protilehlé jsou shodné.

9. Výška rovnoběžníku představuje vzdálenost protilehlých stran.

10. Rovnoběžník má dvě výšky.

11. **Každé dvě sousední strany jsou na sebe kolmé.**

12. Úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

13. **Pravoúhlému rovnoběžníku lze opsat kružnici. Poloměr kružnice opsané je roven polovině úhlopříčky** (vepsaná kružnice neexistuje).

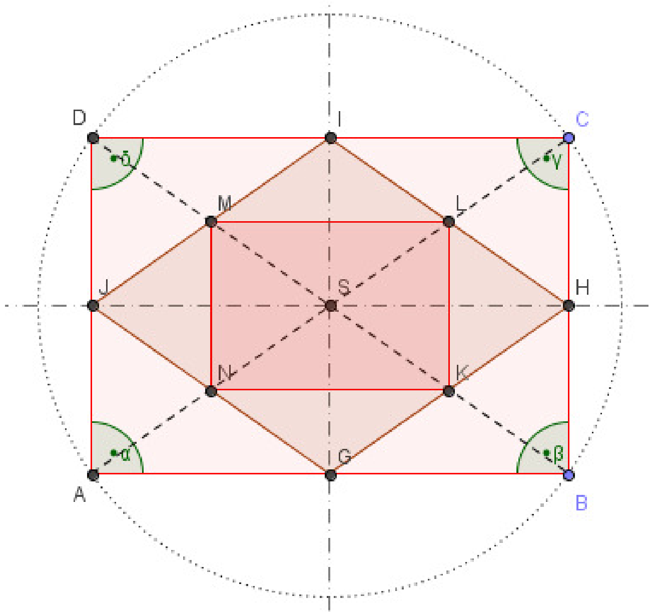
Obvod: o = 2 · (a + b)

Obsah: **$S = a \cdot b$**

Úhlopříčka: **$u = \sqrt{a^2 + b^2}$**

Poloměr opsané kružnice: **$r = u / 2$**

Př. 12: Je dán obdélník ABCD: a = 12 cm; b = 8 cm. Do něj je vepsán čtyřúhelník EFGH s vrcholy ve středech jeho stran a do čtyřúhelníku EFGH znovu s vrcholy ve středech stran čtyřúhelník KLMN. Zjistěte a zdůvodněte, o jaké čtyřúhelníky se jedná (kosodélník, kosočtverec, obdélník, čtverec). Porovnejte obsahy rovnoběžníků EFGH a KLMN s obsahem obdélníku ABCD.



Řešení:

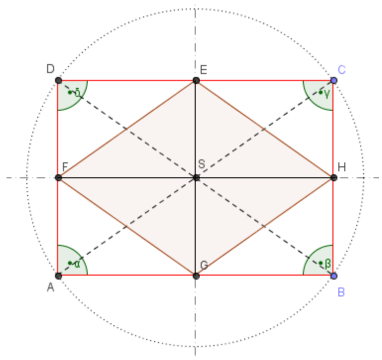
Čtyřúhelník EFGH je kosočtverec a jeho obsah je polovinou obsahu obdélníku ABCD.

Čtyřúhelník KLMN je obdélník a jeho obsah je čtvrtinou obsahu obdélníku ABCD.

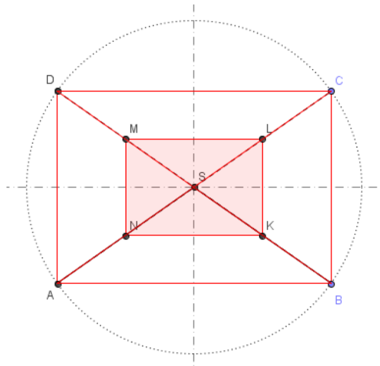
Odůvodnění:

Rozdělme obdélník ABCD na čtyři stejné obdélníky pomocí os stran s jejich průsečíkem S.

V každém z těchto čtyř shodných obdélníků je jedna úhlopříčka stranou rovnoběžníku EFGH. A protože jsou tyto obdélníky (DFSE, FAGS, ESHC, SGBH) shodné, mají jejich úhlopříčky (i strany čtyřúhelníku EFGH) shodnou délku. Rovnoběžník EFGH tedy musí být čtverec nebo kosočtverec. Protože čtyřúhelník ABCD je obdélník, nejsou vrcholové úhly rovnoběžníku EFGH shodné a čtyřúhelník EFGH je kosočtverec. Jeho obsah je polovinou obsahu obdélníku ABCD, právě proto, že v každém ze čtyř obdélníků DFSE, FAGS, ESHC, SGBH je právě polovina obsahu uvnitř kosočtverce EFGH.



Rovnoběžník KLMN je obdélník. Toto plyne z podobnosti trojúhelníků se společným vrcholem v bodě S. Například pro trojúhelník NKS platí, že je podobný s trojúhelníkem ABS. Z toho vyplývá, že strany AB a NK jsou rovnoběžné. Toto platí obdobně pro všechny čtyři strany a z toho vyplývá, že rovnoběžník KLMN je obdélník, podobný s obdélníkem ABCD. Protože body K, L, M, N jsou středy úseček AS, BS, CS, DS je obsah obdélníku KLMN přesně čtvrtina obsahu obdélníku ABCD.



Čtverec

Pravoúhlý rovnostranný rovnoběžník se nazývá **čtverec**. Má vlastnosti každého pravoúhlého rovnoběžníku (obdélníka) a navíc některé další:

1. Protilehlé strany jsou rovnoběžné a **všechny strany jsou stejně dlouhé**.
2. Úhlopříčky se navzájem půlí.
3. **Úhlopříčky čtverce stojí na sobě kolmo a půlí jeho vnitřní úhly.**
4. Rovnoběžníky jsou středově souměrné dle průsečíku úhlopříček.

5. Je osově souměrný podle **čtyř** os souměrnosti. Dvě z nich jsou přímky obsahující úhlopříčky a **druhé dvě jsou přímky vedené středy protilehlých stran**.

6. **Všechny** úhly jsou shodné – o velikosti 90 °

7. Součet úhlů při jedné straně je 180 °.

8. Jedna úhlopříčka rozdělí rovnoběžník na dva shodné pravoúhlé, **rovnoramenné**, trojúhelníky.

9. Dvě úhlopříčky rozdělí rovnoběžník na čtyři shodné, pravoúhlé, **rovnoramenné** trojúhelníky.

10. Výška rovnoběžníku představuje vzdálenost protilehlých stran.

11. Čtverec má dvě **stejně dlouhé** výšky.

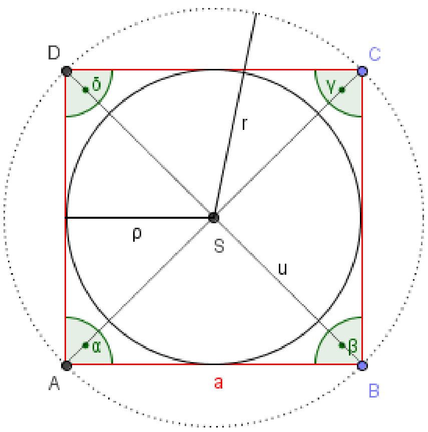
12. Každé dvě sousední strany jsou na sebe kolmé.

13. Úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

14. Bod S – průsečík úhlopříček je **středem kružnice čtverci opsané i vepsané**.

15. Poloměr kružnice opsané je roven polovině úhlopříčky.

16. Poloměr kružnice vepsané je roven polovině délky strany.



Obvod: **$o = 4 . a$**

Obsah: **$S = a^2 = ½.u^2$**

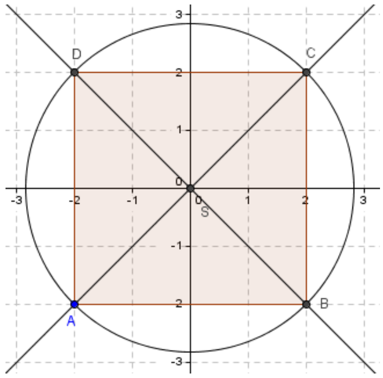
Úhlopříčka: **$u = a \sqrt{2}$**

Poloměr opsané kružnice: **$r = u / 2 = a \cdot (\sqrt{2} / 2)$**

Poloměr vepsané kružnice: **$\rho = a / 2$**

(figura č. 16)

Př. 13: Sestrojte čtverec ABCD, jestliže jeho vrchol A má souřadnice [-2; -2] a průsečík úhlopříček je v počátku soustavy souřadnic. Určete souřadnice vrcholů B, C a D. (Baloun, str. 181 /35)



Rozbor:

Využijeme vlastnost, že úhlopříčky čtverce se vzájemně půlí a jsou na sebe kolmé.

Postup konstrukce:

1.) **Bod** *A*, $A = [-2; -2]$

2.) **Bod** *S*, $S = [0; 0]$

3.) Přímka p, $p \in A$, $p \in S$, sestrojíme přímku procházející body *A* a *S* příkazem **Přímka** a kliknutím na bod *A* a *S*.

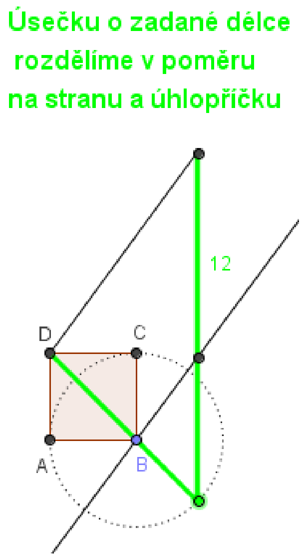
4.) Kružnice c(S, $r=|SA|$); K sestrojení kružnice využijeme příkaz **kružnice daná středem a bodem** a klikneme na *S* a *A*

5.) Přímka q; $q \perp p$; $q \in S$ – využijeme příkaz „**Kolmice**“ – klikneme na bod *S* a přímku *p*.

6.) Vrcholy *B,C,D;* průsečíky přímek *p* a *q* s kružnicí *c* jsou body *B,C,D*

7.) Čtyřúhelník *ABCD*

8.) $B=[2; -2]$; $C=[2; 2]$; $D=[-2; 2]$



Př. 14: Sestrojte čtverec KLMN, je-li dán součet délky jeho strany a délky úhlopříčky

$k + u = 12$ cm.

Rozbor: K sestrojení čtverce stačí znát délku strany. Poměr délky strany ku délce úhlopříčky je ve čtverci konstantní a je možné rozdělit zadanou 12 cm délku na část odpovídající straně a část odpovídající úhlopříčce.

Sestrojíme libovolný pomocný čtverec ABCD. Dále sestrojíme úsečku složenou z úhlopříčky a strany tohoto čtverce. Z počátku této úsečky pod úhlem asi 45° narýsujeme druhou úsečku o zadané délce 12 cm a v potřebném poměru ji rozdělíme. Nyní máme jednu stranu a můžeme sestrojit hledaný čtverec.

Pozn.: využijeme možnosti GeoGebry a délku 12 cm zadáme jako nastavitelnou posuvníkem. Vytvoříme tak univerzální model pro libovolnou takto zadanou úlohu (v konstrukci jsem volil v rozmezí 0 až 15).

Postup konstrukce v GeoGebře s využitím příkazů v panelu nástrojů:

1.) Čtverec ABCD; **Pravidelný mnohoúhelník –** kliknutím do nákresny umístíme vhodně body *A* a *B* (např. A[0,0], B[3,0]), a v okně počet vrcholů zadáme 4.

2.) **Přímka** *p* procházející body *B* a *D.*

3.) Kružnice k_1; $k_1(B,\ r = |BA|)$; **Kružnice daná středem a bodem –**střed *B*, bod A.

4.) Bod *K; Průsečíky* **dvou objektů –** klikneme na průsečík přímky *p* a kružnice k_1 vně čtverce ABCD.

5.) Přímka q; q // BC , $q \in K$; **Rovnoběžka** se stranou BC v bodě K

6.) **Posuvník**– *h*; klikneme na příkaz „P**ouvník“** a do nákresny, kde má být umístěn. Navolíme hodnoty posuvníku 0 až 15.

7.) Kružnice k_2; $k_2(K,\ r = h)$; **Kružnice daná středem a poloměrem** – střed K do poloměru zadáme název vytvořeného posuvníku –*h* ; posuvník nastavíme na hodnotu 12

8.) Bod E, $E \in q \cap k_2$; **Průsečík dvou objektů** - přímky q a kružnice k_2 (zvolíme průsečík v polorovině nad osou x).

9.) Úsečka e; e = **Úsečka daná dvěma body** - K a E

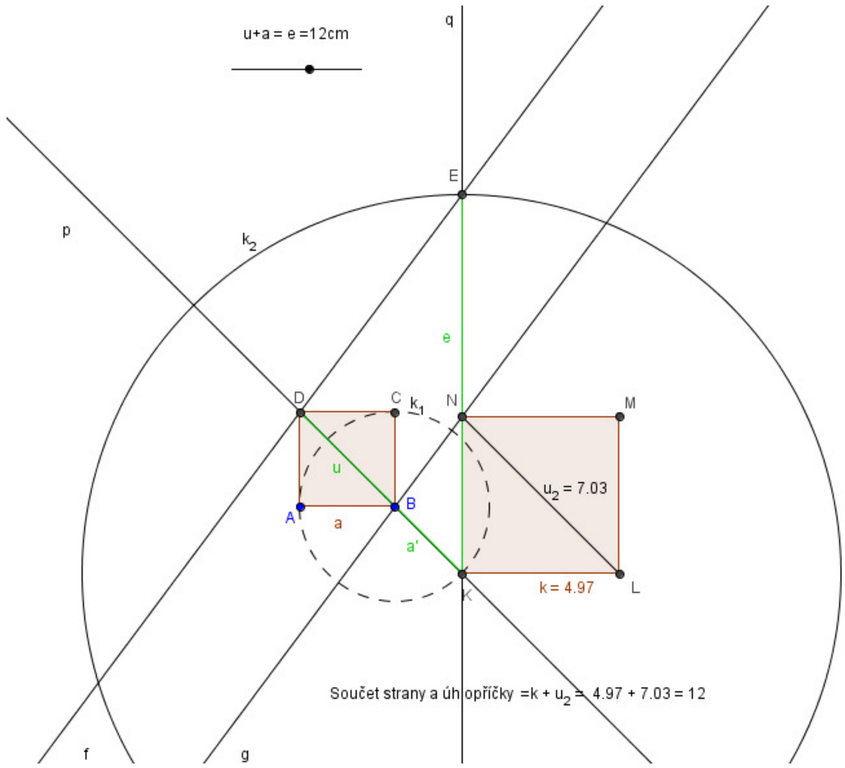
10.) Přímka *f* ; $f \in D$, $f \in E$; **Přímka –** daná body *D* a *E.*

11.) Přímka *g; g // f* ; $g \in B$; **Rovnoběžka** s přímkou *f* procházející bodem *B.*

12.) Bod N ; $N \in g \cap e$; **Průsečíky dvou objektů –**úsečky *e* a přímky *g.*

13.) Čtverec KLMN; využijeme možnosti vytvořit čtverec pomocí příkazu „**Pravidelný mnohoúhelník**“ a klikneme na bod *N* a *K.* Vrcholy vzniklého čtverce přejmenujeme na *L* a *M.*

Pokud chceme pokračovat v konstrukci názorněji, přeskočme bod 13. a pokračujeme bodem 14.



14.) Kružnice k_3; k_3 *(N, r =* |*NE*|*);* **Kružnice daná středem a bodem –**střed *N*, bod *E.*

15.) Přímka *i*; $i \perp e$; $i \in K$; **Kolmice** na úsečku *e* v bodě *K.*

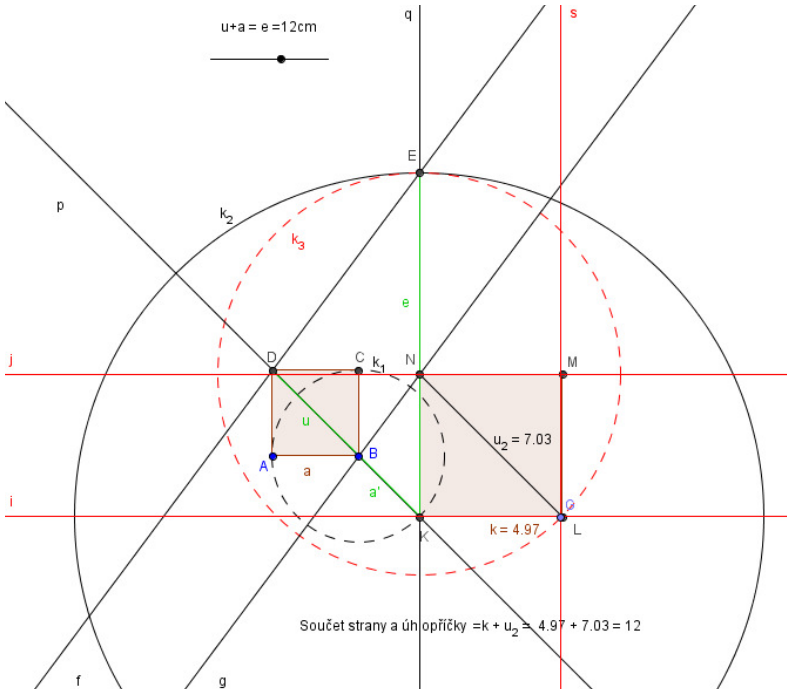
16.) Bod L; **Průsečíky dvou objektů –** *i* a k_3*.*

17.) Přímka *j;* **Kolmice** na úsečku *e* v bodě N.

18.) Přímka *s;* **Kolmice** na přímku *i* v bodě L.

19.) Bod M; Průsečík přímky *j* a přímky *s*, sestrojený bod přejmenujeme na *M.*

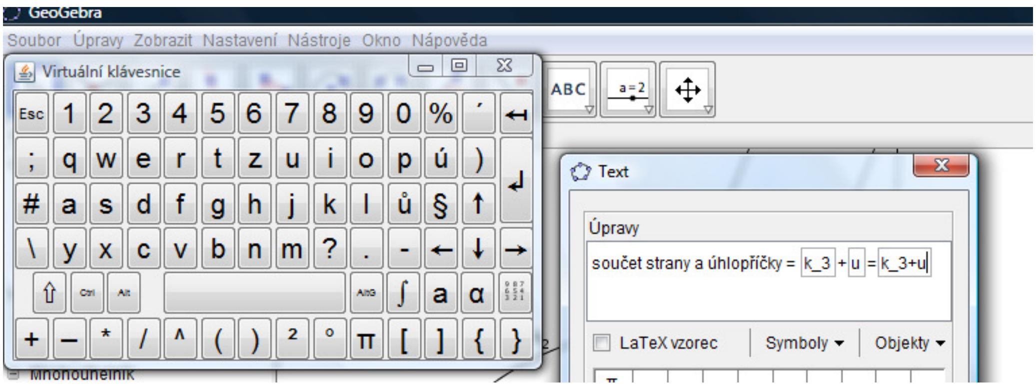
20.) Čtverec KLMN, příkazem „**Mnohoúhelník**“ a kliknutím na body K, L, M, N a znovu K sestrojíme čtverec, který má požadovaný součet délky strany a úhlopříčky.



21.) Pro kontrolu sestrojíme úhlopříčku- příkazem „**Úsečka**“ a kliknutím na body *K* a *M* v textovém okně zobrazíme součet této úhlopříčky a strany čtverce v nákresně:

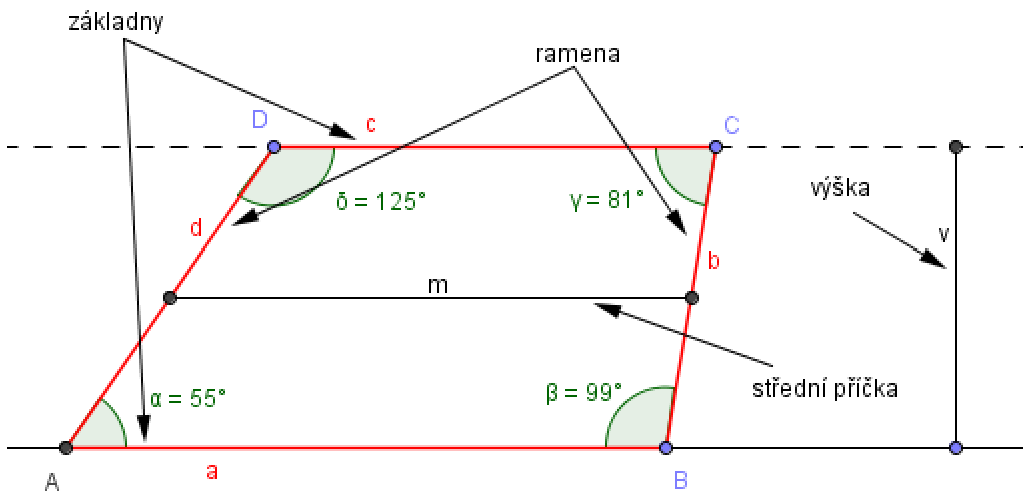
· Použijeme příkaz „**vložit text**“ a pak klikneme do nákresny na místo, kde má být text zobrazen.

· Do právě otevřeného pole s názvem „úpravy“ napíšeme „součet strany a úhlopříčky =“ pokračujeme v psaní vkládáním „objektů“ a vložíme objekt *k*, což je strana pak „+“ a znovu objekt - úhlopříčku u_2, napíšeme „=“ a ještě jednou vložíme objekt - *k.* Nyní klikneme přímo do políčka se zobrazením *k*, vyvoláme zobrazení klávesnice (v hlavním menu - zobrazit – klávesnice) a do políčka *k* dopíšeme na virtuální klávesnici „+“ a „u_2“. Tím se nám součet provede. Můžeme okno zavřít.



Lichoběžníky

Lichoběžník je čtyřúhelník, ve kterém je jedna dvojice protějších stran rovnoběžná a druhá různoběžná.



1. Dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné a nemají shodnou délku – nazývají se základny.

2. Druhé dvě strany jsou vzájemně různoběžné a nazývají se ramena.

3. Součet úhlů při jednom rameni je 180 °.

4. Vzdálenost rovnoběžek, na kterých leží základny, se nazývá výška lichoběžníku.

5. Spojnice středů ramen je stření příčka (m).

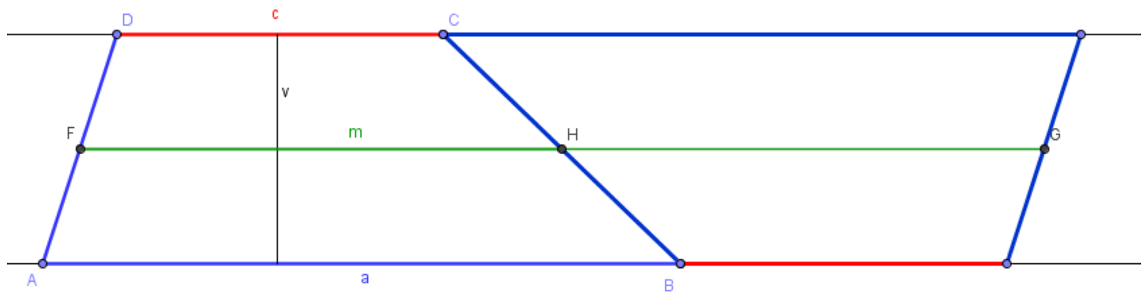
VZORCE:

Obvod: o = a + b + c + d

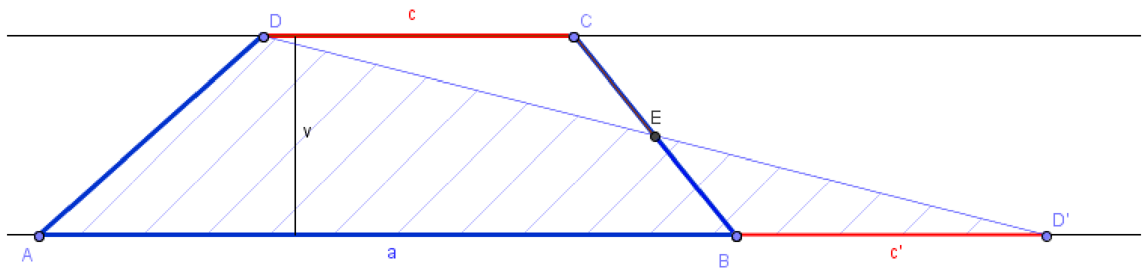
Obsah: S = (a + c) · v / 2 = m · v

Střední příčka: m = (a + c) / 2

Pro odvození vzorce na výpočet obsahu a střední příčky je použití GeoGebry opět velmi vhodné. Z níže zobrazené geometrické figury č.17 je zřejmé, že obsah lichoběžníku je polovinou obsahu rovnoběžníku o stejné výšce a straně $(a + c)$ i to, že střední příčka $m = (a + c) / 2$.

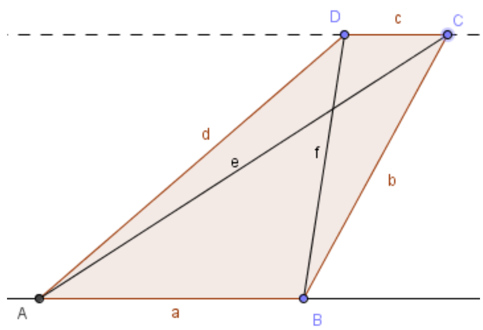


Vzorec pro výpočet obsahu $S=(a+c)/2 \cdot v$
lze odvodit i z následující figury č. 18.



Lichoběžníky rozdělujeme na obecný lichoběžník, rovnoramenný lichoběžník a pravoúhlý lichoběžník

Obecný lichoběžník



Platí pro ně všech pět předchozích bodů.

(Žádné dva vnitřní úhly nejsou shodné, úhlopříčky nejsou shodné…).

Rovnoramenný lichoběžník

Kromě pěti základních pro mají další vlastnosti:

6. Dvě strany = ramena mají shodnou délku.

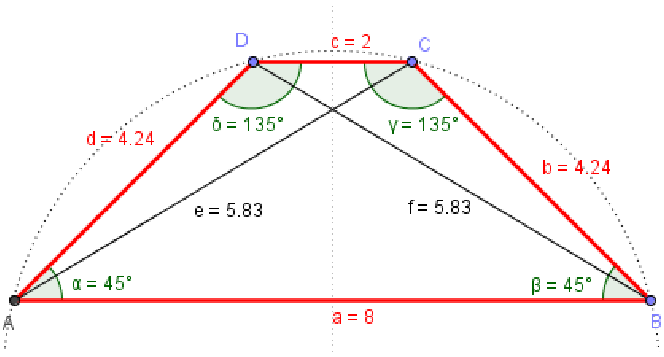
7. Úhlopříčky mají shodnou délku.

8. Úhly při základně mají stejnou velikost.

9. Součet protilehlých úhlů je 180°.

10. Lze mu opsat kružnici.

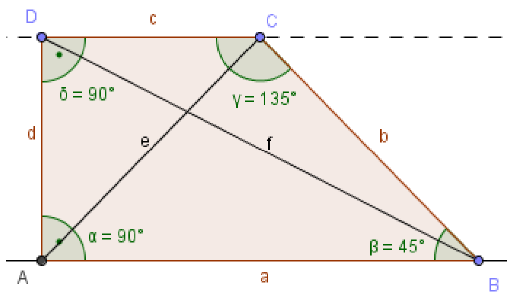
11. Je osově souměrný podle osy procházející středy základen.



Pravoúhlý lichoběžník

platí pro něj všech pět společných vlastností lichoběžníků. Navíc pouze platí, že:

6.) úhly při jednom rameni mají velikost 90°.



Př. 15: Sestrojte lichoběžník ABCD, *AB*||*CD*, je-li *a* = 8 cm, *b* = 5 cm, *e* = 7 cm, *f* = 9 cm.(Krupka, P. Geometrie str. 181 příklad 5.11.)

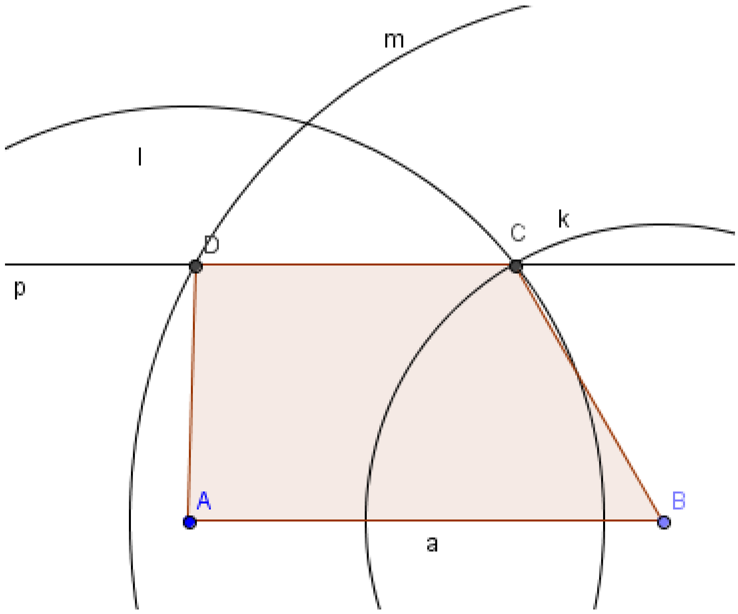
Rozbor:

1.) Strany *a*, *b* a úhlopříčka *e* tvoří trojúhelník ABC. Ten sestrojíme podle věty sss.

2.) Vrchol D leží na průsečíku přímky rovnoběžné se stranou *a* vedenou bodem *C* a kružnice k (B, r = 9cm) (úhlopříčka *f*).

Postup konstrukce:

1. Strana a; **Úsečka s pevnou délkou** – Bod A, délka 9.
2. Kružnice k (B, r = 5); **Kružnice daná středem a poloměrem**.
3. Kružnice l (A, r = 7); **Kružnice daná středem a poloměrem**.
4. Bod C; **Průsečíky dvou objektů –** průsečík kružnice *k* a *l.*
5. Přímka *p; p* || *a* ; **Rovnoběžka** – klikneme na stranu *a* a bod *C.*
6. Kružnice m(B, r = 9); **Kružnice daná středem a poloměrem**.
7. Bod D; **Průsečíky dvou objektů –** průsečík kružnice *m* a přímky *p.*
8. Lichoběžník ABCD; **Mnohoúhelník** – body A, B, C, D a znovu A.



Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

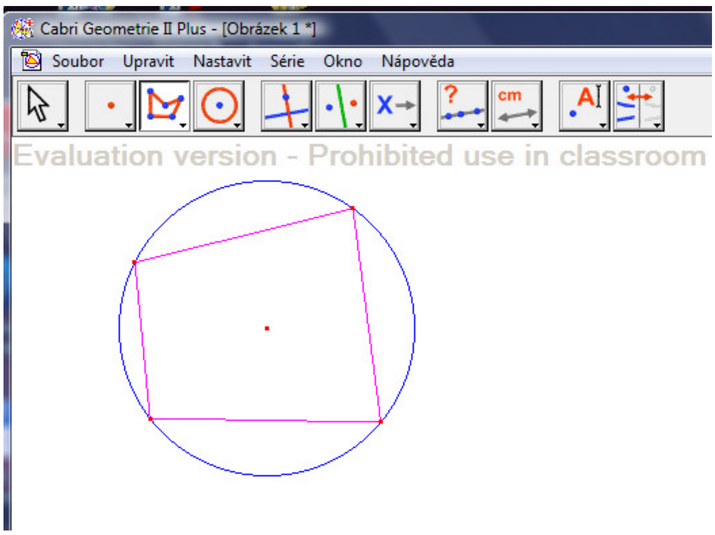
Porovnání programů Cabri II plus, GeoNext a GeoGebra

V této kapitole porovnáme výhody a nevýhody programů Cabri II Plus, GEONExT a GeoGebra,

Všechny tyto programy se řadí do softwaru dynamické geometrie, které pracují s konstrukcí v rovině a vytvořené objekty lze dynamicky měnit a libovolně s nimi pohybovat. Ovládání těchto programů není složité - spíše bychom ho nazvali intuitivní - a velmi snadno se v něm uživatel zorientuje, navíc většina nástrojů je u všech porovnávaných programů stejná nebo velmi podobná (sestrojení kružnice, bodu, přímky, úsečky, osy úhlu, středové a osové souměrnosti, mnohoúhelníku atd.), ačkoliv se mohou lišit názvy např. GEONExT – kružnice opsaná =GeoGebra –kružnice daná třemi body. Proto není potřeba zde jednotlivé nástroje rozebírat. Tyto programy bychom mohli rozdělit podle několik měřítek. Nejjednodušší dělení je na programy, které jsou placené, a na ty, které jsou zdarma. Programy: Cabri II plus je placený a GeoGebra a GEONExT jsou pro nekomerční použití zdarma.

Cabri II Plus

Patrně prvním geometrickým softwarem vytvořeným pro vzdělávání v oblasti geometrie byl program Cabri géometre (CAhier de BRouillonInformatisé) oficiálně představený učitelstvu matematiky na 6. kongresu ICME v Budapešti r. 1988. Vytvořil ho kolektiv vedený Jean-Marie Labordem z Univerzity Josepha Fouriera v Grenoble ve Franci. V minulých letech byl podporován MŠMT a jeho podporu a oblíbenost vystihují následující věty jednoho z propagátorů jeho používání ve školách: „Vzhledem ke kvalitě software dynamické geometrie nemá smysl vyvíjet žádný jejich český ekvivalent. Spíše potřebujeme metodické postupy, nápady, učebnice, jak geometrii



pomocí počítače učit. Potřebujme školení učitelů - matematiků, potřebujeme podporu ministerstva i ředitelů škol. Software i podporu dětí máme“
(doc. PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D., http://www.pf.jcu.cz/cabri/download/vyhody.htm).

Klady Cabri II plus:

- Je v češtině.
- V menu má přehledný a srozumitelný popis funkcí.
- Má velmi dobře propracovaný systém čísel, měření délek a velikostí úhlů, vepisování výrazů do obrázku, podporuje neeuklidovské konstrukce.
- Lze dosadit velikosti úhlů, délek a obsahů do vzorců přímo v programu, nebo naopak výsledek výpočtů může přímo dosadit do konstrukce.
- Pracuje s množinami bodů, které lze skupinově libovolně posouvat a měnit.
- Pod již hotovou konstrukci umí vložit pozadí a změnit tím celkový vzhled.

Nevýhody Cabri II plus:

- cena licence, která se pohybuje od 4 024,- (pro jednoho uživatele), až po 29 736,- korun (pro neomezenou licenci).
- Nemá přehledné „algebraické okno“.
- Není k dispozici nápověda k nástrojům.
- V ovládání velmi chybí kontextové menu
- Označování objektů pouze písmeny – v tomto programu nelze použít ani indexy ani písmena řecké abecedy, proto jsou např. názvy úhlu vypsány slovně a indexy mají velikost jako ostatní písmena (např. místo K_1 se zobrazí K1).
- Lze spustit pouze na jen počítači s operačním systémem Windows nebo Mac OS

Unikátní schopností tohoto programu je, že umožňuje pojmenovat v jedné konstrukci dva různé objekty stejně, což se však může stát nevýhodou při konstruování složitějších a náročnějších objektů.
K vyzkoušení si je možné stáhnou demoverzi, která je samozřejmě zadarmo, ale není povolena pro výuku, po patnácti minutách se automaticky vypne a provedené konstrukce nelze uložit.

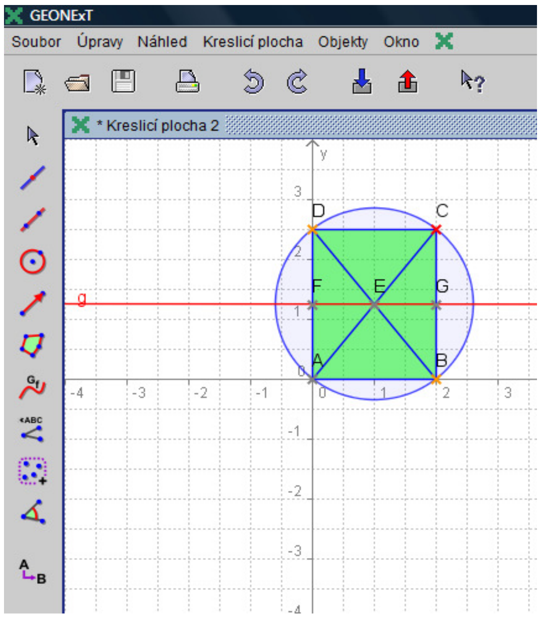
GEONExT

V několika ohledech je GEONExT velmi podobný Cabri, ale je vytvořen pomocí programovacího jazyku Java a právě proto není omezen na konkrétní operační systém. GEONExT vznikl v roce 1999 na univerzitě v Bayreuthu v Německu

Výhody:

- Má přehledný a srozumitelný popis funkcí na mnoha tlačítkách, která se nachází v menu pracovní plochy.
- Dobře propracovaný systém čísel, měření délek a velikostí úhlů.
- Vepisování výrazů do obrázku.
- Propojení s dalšími matematickými funkcemi (např. grafy)
- Podporuje tvorbu webových metodických materiálů a úloh - pro tento účel má export ve formátu SVG.
- Kvalitně je také provedeno zvýraznění – zadávání vlastností objektů jako jsou barva, tloušťka čáry apod.
- Umožňuje dobrou práci se skupinami objektů.

GEONExT má také velké množství nevýhod:



- Nemá přehledné „algebraické okno“
- Žádným jeho nástrojem není možné zjistit rovnice sestrojených objektů.
- V ovládání velmi chybí kontextové menu
- V českém jazyce není dostupná přímá nápověda
- Chybí nástroje: rotace, kruhová inverze, výpočet plochy, konstrukce pravidelného mnohoúhelníku.
- Nelze předefinovat vázané objekty.
- V osové a středové souměrnosti se nezobrazí geometrické konstrukce, ale pouze body.
- Není možné přesunout názvy objektů, složitěji se provádějí výpočty.
- Parabolu, hyperbolu a další kuželosečky můžeme vytvořit pouze zadáním rovnice.
- Při složitějších konstrukcích se program „zasekává“.

GeoGebra

Jak je napsáno v úvodních kapitolách vznikla GeoGebra spojením programů Cabri, Geometer'sSketchpad, Derive a Maple. Možná právě proto má s Cabri mnoho společného, ale rozhodně není její kopií.

Výhody GeoGebry:

- Přehledné „algebraické okno“ se zobrazením souřadnic bodů nebo rovnic všech objektů.
- Mnoho početních matematických funkcí.
- Velmi přehledné ovládání.
- Snadno dostupné kontextové menu s často používanými nástroji.
- Pro každý příkaz je zpracována přehledná nápověda v češtině.
- Ve vstupním řádku nápovědu s výběrem všech dostupných příkazů.
- Má velmi dobře propracovaný systém čísel, měření délek a velikostí úhlů.
- Lze dosadit velikosti úhlů, délek a obsahů do vzorců přímo v programu, nebo naopak výsledek výpočtů může přímo dosadit do konstrukce.

Nevýhody:

- Pomalejší reakce při složitých konstrukcích
- Nelze přímo vytvořit animace

Shrnutí:

	Cabri 2 Plus	GEONExT	GeoGebra
Licence	od 4 024,-	zdarma	zdarma
Kompatibilita s OS:			
• Windows	Ano	Ano	Ano
• Linux	Ne	Ano	Ano
• Mac OS X	Ano	Ano	Ano
Výpočty	Ano	Jednoduché ano	Ano - i složité
Makra	Ano	Ano	Ano
Stopy	Ano	Ano	Ano
Animace	Ano	Ne	Ne
Skript	Ano	Ano	Ano
Podpora pro češtinu	Ano	Ano	Ano
Algebraické okno	Ne	Ne	Ano

Závěr

Uživatelská jednoduchost a licenční dostupnost GeoGebry je ideální pro výuku na základní, střední i vysoké škole. Je to vynikající a všestranná pomůcka učitele pro moderní vyučování matematiky. Ve své bakalářské práci jsem se pokusil čtenáře seznámit s tímto volně šiřitelným zajímavým programem a jeho možném využití v hodinách geometrie. V té části práce, zaměřené na výuku čtyřúhelníků jsem se snažil co nejvíce zdůraznit výhody tohoto programu a ukázat jak některé vlastnosti čtyřúhelníků je možné žákům základní školy objasnit pomocí dynamického grafického ztvárnění. Byl bych rád, kdyby moje práce posloužila učitelům, ale i žákům jako inspirace a doplněk k vyučování čtyřúhelníků na základní škole.

Resumé

GeoGebra is user-friendly, easy accessible software suitable for all levels of education. It is a great sophisticated tool for mathematics teachers. My Bachelor thesis introduces this interesting software and provides useful implementation tips. The part dedicated to teaching quadrilaterals focuses on the software advantages like dynamic graphic design. My aim is to inspire teachers and students and provide grammar school teachers useful constructing quadrilaterals guideline.

Použitá literatura

Knižní zdroje

GERGELITSOVÁ, Šárka. *Počítač ve výuce nejen geometrie: průvodce Geogebrou*. 1. vyd. Praha: Generation Europe, 2011, 247 s. ISBN 978-809-0497-436.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8581-4.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004, 270 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6276-7.

KRUPKA, Petr. *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. : Geometrie /. diel 2 :*. Praha : Global, 1995, 299 s. ISBN 80-85870-06-01 (brož.).

VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009, 212 s. ISBN 978-807-2903-948.

POSKITT, Kjartan. *Perfektní pářeček a další vzorečky k nakousnutí*. 1. vyd. Ilustrace Philip Reeve. V Praze: Egmont, 2008, 208 s. Vražedná matematika. ISBN 978-80-252-0940-0.

KRAEMER, Emil a Josef PÍREK. *Geometrie pro 8. ročník*. 1. vyd. Praha: SPN n.p., 1963.

BĚLOUN, František… et al. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vydání. Praha: Prometheus, 2007. 256 s. ISBN 978-80-7196-104-8

SLOUKA, Jan. *Geometrie pro 5.-9. ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií: učebnice*. 1. vyd. Olomouc: Fin, 1993, 191 s. ISBN 80-855-7253-2.

Internetové zdroje

Cabri.cz: český portál pro výuku geometrie pomocí počítače. VRBA, Antonín, Jiří VANÍČEK, Milan KOMAN, Miroslav LÁVIČKA a Pavel LEISCHNER. PF.JCU. *Cabri Geometrie: Dynamická geometrie* [online]. 1999 [cit. 2013-06-18]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/cabri/

SVOBODOVÁ, Lenka. Užití programu GeoGebra ve vybraném učivu matematiky a jeho výhody [online]. 2011 [cit. 2013-06-18]. Bakalářská práce. ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI, Fakulta pedagogická. Vedoucí práce Lukáš Honzík. Dostupné z: <http://theses.cz/id/yvuica/>.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fysiků, 1903, roč. 32, č. 3. ISSN 1802-114X. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/109057

Vzdelavani.cz: Je škola budoucnost vzdělávání? ŠTEFFL, Ondřej. V*zdelavani.cz* [online]. [cit. 2013-06-18]. Dostupné z: http://www.vzdelavani.cz/media/tedx-os.asp

HOLUBOVÁ, Hana. Shodná a podobná zobrazení v interaktivních geometrických programech [online]. 2012 [cit. 2013-06-18]. Bakalářská práce. ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI, Fakulta pedagogická. Vedoucí práce Lukáš Honzík. Dostupné z: <http://theses.cz/id/7n7e27/>.

HANČL, Jaroslav. *Kružnice opsaná a vepsaná čtyřúhelníku* [online]. [cit. 2013-06-20]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/KruzniceOpsanaAVepsanaJH/KruzniceOpsanaAVepsanaJH.pdf

Přílohy

Všechny materiály k bakalářské práci jsou vypáleny na přiloženém CD, které obsahuje:

- Geometrické figury obsažené v bakalářské práci (BP).
- BP ve formátu pdf.
- BP ve formátu docx.