Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

HISTORIE MATIC

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Ivana Špírková

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma - Tchv

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 29. března 2013

……………………………….

vlastnoruční podpis

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Mgr. Lukáši Honzíkovi, za jeho mnoho cenných rad při vedení diplomové práce.

OBSAH

ÚVOD

Ve své práci bych ráda představila a prozkoumala téma Historie matic. Budeme se zde zabývat samotnou historií, dokonce i prehistorií matic až samotným vznikem tématu teorie matic a vším, co předcházelo.

Zabrousíme i do tématu determinantů, které je předchůdcem teorie matic, a objasníme si některé souvislosti s teorií matic a vzájemné návaznosti mezi těmito tématy.

Nezůstaneme ale jen u té historie, nahlédneme i do vlastností matic, praktických ukázek a příkladů. Ukážeme si také využití matic v matematice ale i v ostatních vědních disciplínách. Matice můžeme použít i ve školství a to především pro snadnější pochopení těžších témat.

Představíme si významné osobnosti, které se svými pracemi nejvíce zasloužili o vznik teorii matic a zkoumali vlastnosti teorie matic. Objeví se zde jména i jiných významných matematiků či vědců, kteří měli také velký podíl na zrodu teorie matic. Mezi nejdůležitější matematiky budeme řadit Arthura Cayleyho a Jamese Josepha Sylvestera.

Dále si ukážeme nějaké zajímavé a speciální druhy matic a jejich využití v praxi či v jiných vědních disciplínách.

1 HISTORIE DETERMINANTU

Nejprve se budeme zabývat historií determinantů, jejich prvnímu objevu a následnému používání v oblasti matematiky. Poté navážeme prehistorií matic, která vychází z determinantů.

1.1 PREHISTORIE DETERMINANTŮ

Samotné determinanty bychom mohly najít už před dvěma tisíci lety. Můžeme je srovnávat s čínskou metodou *fang čcheng* z té doby. Tehdy se ale nejednalo o koncipování pojmu determinant. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

G. Cardano popsal roku 1539 ve svém díle *Practicae aritmetice* metodu řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Jednalo se o soustavu:

$$\boldsymbol{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1,}$$

$$\boldsymbol{a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2.}$$

Návod na její řešení popsal vzorcem $\boldsymbol{x_1 = \frac{a_{22}\frac{b_1}{a_{12}} - b_2}{a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} - a_{21}}}$.

V tomto řešení můžeme vidět užití determinantu druhého řádu.

Příkladů s využitím determinantů je bezpočet, byly použity při každém řešení soustavy lineárních rovnic. Jedním z myslitelů, kteří se přiblížily pojmu determinant je japonský matematik Takakazu Šinsuke Seki Köwa, který při řešení otázek týkajících se eliminace dospěl k postupům podobným determinantům.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

1.2 HISTORIE DETERMINANTŮ

Za objevitele determinantu je považován G. W. Leibniz (1646 – 1716), německý matematik, filozof a přírodovědec. Ukázal obecný postup jak vyloučit *n* nehomogenních lineárních rovnic ze soustavy o *n + 1* rovnicích, tím dospěl k výrazu sestavenému z koeficientů rovnic, který dnes nazýváme determinant. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Celý tento postup popsal v dopise G. F. A. l´Hospitalovi v roce 1693, dospěl tím k první definici *n*–řádového determinantu. G. W. Leibniz při tomto postupu jako první využíval dvojných indexů k označování obecných čísel (11, 12, …), které dnes značíme $a_{11}, a_{12}, \dots$ [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Skutečný rozvoj determinantů začal až po zveřejnění Cramerova pravidla v roce 1750, kde byla podána jednoduchá a srozumitelná metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Později se přišlo na to, že Cramerovo pravidlo publikoval již C. Maclaurin v roce 1748, a také L. Euler (1707 – 1783) se k Cramerovu pravidlu při studiu eliminačních postupů přiblížil. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Nyní si uvedeme jeden příklad z díla *Introduction à l´analyse des lignes courbes algèbriques* z roku 1750 od G. Cramera, který se zde zabýval problematikou nalezení rovnic algebraické křivky, která je určena příslušným počtem bodů.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Hledání rovnice kuželosečky, která je dána pěti body dle G. Cramera

Uvažovaná kuželosečka má rovnici

$$\boldsymbol{A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0},$$

a je-li určena body $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b}), \dots, (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{e})$, platí pro koeficienty *A*, *B*, *C*, *D*, *E* tyto vztahy:

$$\boldsymbol{A + Ba + C\alpha + Daa + E\alpha a + \alpha\alpha = 0}$$

$$\boldsymbol{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$\boldsymbol{A + Be + C\varepsilon + Dee + E\varepsilon e + \varepsilon\varepsilon = 0}$$

Nyní se musí vyřešit soustava pěti lineárních rovnic o pěti neznámých.

Ke konci své knihy přidal G. Cramer návod na řešení *n*–lineárních rovnic o *n* neznámých.

$$\boldsymbol{A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c.}$$

$$\boldsymbol{A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c.}$$

$$\boldsymbol{A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c.}$$

$$\boldsymbol{A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c.}$$

$$\boldsymbol{\&c.}$$

$$\boldsymbol{n = 1;\ z = \frac{A_1}{Z_1}\ pro\, n = 2;\ z = \frac{A_1 Z_1 - A_2 Y_1}{Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1},}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{Z_1 A_2 - Z_2 A_1}{Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1}\ pro\, n = 3;}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{A_1 Y_2 X_3 - A_1 Y_3 X_2 - A_2 Y_1 X_3 + A_2 Y_3 X_1 + A_3 Y_1 X_2 - A_3 Y_2 X_1}{Z_1 Y_2 X_3 - Z_1 Y_3 X_2 - Z_2 Y_1 X_3 + Z_2 Y_3 X_1 + Z_3 Y_1 X_2 - Z_3 Y_2 X_1}.}$$

Z Cramerových vzorců je jasný návod pro výpočet neznáme veličiny ze soustavy lineárních rovnic.

Cramerovo pravidlo bylo zformulováno jasně, a proto bylo jeho užívání jednoduché. Díky Eulerovi a jeho Algebře došlo k rozšíření Cramerova pravidla. Cramerovo pravidlo inspirovalo mnohé matematiky ke zkoumání výrazů ve jmenovateli i v čitatelích zlomku. Od Cramerova pravidla byla rozvinuta teorie determinantů. Zájem o Cramerovo pravidlo je stále velký, a tak dochází k objevům jednoduchých důkazů a zobecnění. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

V následující kapitole se budeme zabývat významnými matematiky, kteří se determinanty zabývali. Patří mezi ně: É. Bézout, P. S. Laplace a J. L. Lagrange.

1.3 UŽITÍ DETERMINANTŮ

V důsledku rozšíření Cramerova pravidla dochází k jeho využívání dalšími významnými matematiky, mezi které se řadí É. Bézout, P. S. Laplace a J. L. Lagrange.

1.3.1 ÉTIENNE BÉZOUT

É. Bézout (1730 -1783) byl významný francouzský matematik, který se věnoval především algebře, geometrii a balistice (výuka matematiky na námořní škole). É. Bézout dospěl k determinantům při řešení problému soustav lineárních rovnic a otázek eliminace.

Ve své práci *Recherches sur le degré des équantions résultantes de l´évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu´il convient d´employer pour trouber ces équantions* z roku 1764 uvedl rekurentní způsob kombinatorických výrazů (rezultantů).

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Rekurentní způsob kombinatorických výrazů:

Pro dva prvky: ***ab – ba***

Pro tři prvky: ***abc – acb + cab – bac + bca – cba***

Pro čtyři prvky: ***abcd – abdc + adbc – dabc – acbd + acdb – adcb + dacb + cabd – cadb + cadb – cadb + cdab – dcab – bacd + badc – bdac + dbac + bcad – bcda + bdca – dbca – cbad + cbda – cdba + dcba.***

Nakonec ke všem prvkům přidal indexy a dostal výrazy:

$\boldsymbol{a_1,}$

$\boldsymbol{a_1b_2 - b_1a_2,}$

$\boldsymbol{a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3.}$

Jedná se o výsledek eliminace.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Kromě rekurentního způsobu uvedl ještě obecný způsob, kdy z prvního členu rezultantu se pomocí permutováním indexů získají všechny ostatní členy, znaménka určoval pomocí transpozic, které použil.

V roce 1779 ve své práci *Théorie générale des équations algébriques* se věnoval nejenom lineárním rovnicím, ale i determinantům. Podal zde návod na řešení soustav

n-lineárních rovnic o n neznámých vedoucích ke Cramerovu pravidlu, postup uvedl pro $n = 2, 3.$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

1.3.2 PIERRE SIMON LAPLACE

P. S. Laplace (1749 – 1827) francouzský matematik, fyzik a astronom. V oblasti matematiky se věnoval především diferenciálním a integrálním rovnicím, dále teorii potenciálu a pravděpodobnosti.

Při zkoumání problémů nebeské mechaniky se P. S. Laplace dostal k problematice lineárních rovnic, a jejich řešení pomocí determinantů. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Teorii rozvíjející determinanty uvedl ve své práci *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde* z roku 1772, ve které vysvětlil Cramerovo pravidlo, Bézoutův způsob rekurentního vytváření rezultantů, ale pozornost věnoval především znaménkům jednotlivých členů. Uvedl, že výměnou dvou písmen (záměna dvou řádků nebo sloupců) dochází ke změně znaménka rezultantu. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Dále vyšetřoval soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých, homogenní a nehomogenní, ze které pak odvodil Cramerovo pravidlo. Poté se věnoval determinantům druhého, třetího, čtvrtého, pátého a šestého stupně. Při vyšetřování těchto determinantů P. S. Laplace zformuloval speciální případy – Laplaceova věta.

<u>Rozvoj determinantu čtvrtého řádu uvedl ve tvaru:</u>

$$({}^1a\,{}^2b - {}^1b\,{}^2a) \,.\, ({}^3c\,{}^4d - {}^3d\,{}^4c) - ({}^1a\,{}^3b - {}^1b\,{}^3a) \,.\, ({}^2c\,{}^4d - {}^2d\,{}^4c) + ({}^1a\,{}^4b - {}^1b\,{}^4a) \,.$$
$$.\, ({}^2c\,{}^3d - {}^2d\,{}^3c) + ({}^2a\,{}^3b - {}^2b\,{}^3a) \,.\, ({}^1c\,{}^4d - {}^1d\,{}^4c) - ({}^2a\,{}^4b - {}^2b\,{}^4a) \,.\, ({}^1c\,{}^3d - {}^1d\,{}^3c) +$$
$$+ ({}^3a\,{}^4b - {}^3b\,{}^4a) \,.\, ({}^1c\,{}^2d - {}^1d\,{}^2c).$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

1.3.3 JOSEPH LOUIS LAGRANGE

J. L. Lagrange (1736 – 1813) byl italsko-francouzského původu. Byl to výborný matematik, fyzik a astronom. O jeho práci o šíření zvuku z roku 1759 projevil veliký zájem L. Euler, díky kterému se J. L. Lagrange stal členem akademie věd.

Ve svých pracích se věnoval především algebře, teorii čísel, diferenciálnímu a integrálnímu počtu, ale také geometrii a dalším matematickým problémům.

Mezi jeho nejvýznamnější práce se řadí *Mécanique analytique* z roku 1788, ve které ukázal využití diferenciálních rovnic popisující pohyb.

Problematikou determinantů se začal J. L. Lagrange zabývat až v roce 1773 ve třech svých pracích. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

- *Nouvelle solution du probléme du mouvement de station d´un corps de figure quelconque qui n´est animé par aucune force accélératrice* – zde nacházíme identity, v nichž figurují determinanty.
- *Solutions analytique de quelques problémes sur les pyramides triangulaires* – zde J. L. Lagrange zkoumal čtyřstěn, pomocí determinantů se snažil vyjádřit své výsledky a postupy. Používal determinanty druhého a třetího řádu, vyjádřil jejich základní vlastnosti.

J. L. Lagrange zavedl jednoduchou symboliku pro determinant třetího řádu, který zapisoval takto:

$$\textbf{Det. třetího ř.:}\ \Delta = \boldsymbol{xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''}$$

Subdeterminant pak značil velkými řeckými písmeny, znal identity:

$$\textbf{Subdeterminant:}\ \boldsymbol{x\xi + x'\xi' + x''\xi''} = \Delta, \boldsymbol{x\eta + x'\eta' + x''\eta''} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{atd.}$$

Dospěl k reciprokému determinantu a ukázal, že je roven druhé mocnině původního determinantu.

- V práci *Recherches d´Arithmetique* dospěl pomocí substituce

$\boldsymbol{y = Ms + Nx,\ z = ms + nx}$ od kvadratické formy

$\boldsymbol{f = py^2 + 2qyz + rz^2}$ k formě $\boldsymbol{F = Ps^2 + 2Qsx + Rx^2}$

a ukázal, že $\boldsymbol{PR - Q^2 = (pr - q^2) * (Mn - Nm)^2.}$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

<u>Nyní si tento postup ukážeme:</u>

Máme tento vzorec,

$$\boldsymbol{py^2 + 2qyz + rz^2}$$

kde *y* a *z* jsou čísla neznámá a *p, q, r* jsou kladná nebo záporná čísla, jak je stanoveno v těchto podmínkách:

$$\boldsymbol{pr - q^2 = a}$$

2q < *p* nebo *2q* < *r*, bez ohledu na *p, q, r*. Nyní zjišťujeme, zda tento vzorec může být přeměněn na druhý vzorec stejného druhu a zda podléhá stejným podmínkám. Další substituce jsou tyto:

$$\boldsymbol{y = Ms + Nx, \qquad z = ms + nx}$$

s, x jsou další nové neznámé a *M, N, m, n* jsou libovolná čísla, ve skutečnosti tyto substituce přeměňuje na:

$$\boldsymbol{Ps^2 + 2Qsx + Rx^2}$$

ve kterém bude:

$\boldsymbol{P = pM^2 + 2qMm + rm^2,}$
$\boldsymbol{Q = pMN + q(Mn + Nm) + rmn,}$
$\boldsymbol{R = pN^2 + 2qNn + rn^2,}$

a to uvidíme, když můžeme určit čísla *M, N, m, n*

$$\boldsymbol{PR - Q^2 = a}$$

a opět *2Q* < *P* nebo *2Q* < *R*. Pro splnění první podmínky nahradíme co nejvíce hodnot.

$$\boldsymbol{PR - Q^2 = (pr - q^2) * (Mn - Nm)^2, \qquad pr - q^2 = a}$$

Takže pro $\boldsymbol{PR - Q^2}$ platí

$$(\boldsymbol{Mn - Nm})^2 = \boldsymbol{1}$$

a z toho vyplývá

$$\boldsymbol{Mn - Nm = \pm 1}.$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Diskriminant formy F je roven diskriminantu formy f vynásobené druhou mocninou determinantu matic v substituci. Jeden ze základních poznatků v teorii invariantů. V lineární algebře se používají pro vyjádření bilineární formy ke dvěma různým bázím.

Lagrange k rozvoji determinantů ve své podstatě moc nepřispěl, spíše je omezil.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Stručnou historii determinantů a významné matematiky jsme si ve stručnosti představili a nyní se budeme zabývat pojmem teorie matic a jejich prehistorií. Představíme zde ukázky příkladů a další matematiky. L. Euler, G. F. Gauss, F. G. M. Eisenstein a Ch. Hermite používali ve svých dílech náznaky matic, které byly předchůdcem samotné teorie matic. Nyní se s nimi seznámíme.

2 TEORIE MATIC

Tématem determinantů a jejich dalším rozvojem se zabývali další významní matematici, někteří se později zabývali i maticemi: A. T. Vandermonde, C. F. Gauss, J. P. M. Binet, A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi, atd.

Nyní už se dostáváme k samotnému tématu teorie matic, sami později uvidíte souvislosti mezi determinanty a maticemi.

Počátky obou témat sahají přibližně do stejné doby i do stejné oblasti, ikdyž se rozvíjely nezávisle na sobě. A jak by se mohlo zdát, že první byla teorie matic a poté determinantů, ve skutečnosti je tomu naopak. Zazní zde jména, která se opřela o téma determinantů, ale i o téma teorie matic.

Se vznikem determinantů dochází k postupnému rozvoji v teorii matic a k jejich samotnému vzniku.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

3 PREHISTORIE TEORIE MATIC

Počátky teorie matic sahají až do 2. století př. n. l. Některé poznatky dokonce ukazují ještě mnohem dále, ba dokonce až do 4. století př. n. l. Teorie matic se však začala skutečně rozvíjet až koncem 17. století.

Rozvoj teorie matic a také determinantů začal až se studiem soustav lineárních rovnic

Už samotní Babylóňané studovali matematické problémy, které vedly k lineárním rovnicím. Některé z těchto problému se zachovaly a jsou zobrazeny na hliněných tabulkách. Starověcí čínští matematici měli téma matice prostudované mnohem lépe než Babylóňané. [dle Svršek, Jiří., Bartoš Roman. viz (1)]

Do tohoto období určitě můžeme zařadit čínský algoritmus *Fang Čcheng*, který se užíval k řešení soustav lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí, o tomto algoritmu jsem se zmínila již u determinantů, nyní si ho stručně představíme.

Hlavní složkou tohoto řešení byly úpravy v tabulce obsahující koeficienty dané soustavy, které se počítaly na počítací desce. V podstatě šlo o sloupcové úpravy matice, které jsou podobné našim úpravám při Gaussově eliminačním algoritmu s rozšířenými řádky matice ze soustavy rovnic. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Dva příklady si nyní spočítáme a ukážeme si postupně jejich úpravy.

Tato metoda vycházela z této úlohy:

Př.: *Ze 3 snopů dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 39 dou (zrna). Ze 2 snopů dobré úrody, 3 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 34 dou (zrna). Z 1 snopu dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 3 snopů špatné úrody získali 26 dou (zrna). Ptáme se, kolik dou (zrna) se získá z jednoho snopu dobré, průměrné a špatné úrody.* [dle Hudeček, Jiří. viz (8)]

Slovní úloha vede na soustavu rovnic

$$3x + 2y + z = 39,$$

$$2x + 3y + z = 34,$$

$$x + 2y + 3z = 26.$$

<u>Poté si Číňané sestavili ze zadaných čísel tabulku, kterou upravovali maticově:</u>

- Budeme eliminovat (je to odečítání do nuly, opakované odečítání celého pravého sloupce, dokud není odstraněno lepší obilí).

1. Krok – zaneseme si údaje do tabulky.
2. Krok – druhý sloupec vynásobíme číslem 3.
3. Krok – od druhého sloupce odečteme sloupec třetí.

Tabulka 1

1	2	3	=>	1	6	3	=>	1	3	3
2	3	2	=>	2	9	2	=>	2	7	2
3	1	1	=>	3	3	1	=>	3	2	1
26	**34**	**39**	=>	**26**	**102**	**39**	=>	**26**	**63**	**39**

4. Krok – opět od druhého sloupce odečteme sloupec třetí.
5. Krok – první sloupec vynásobíme číslem 3.
6. Krok – od prvního sloupce odečteme sloupec třetí.

Tabulka 2

1		3	=>	3		3	=>			3
2	5	2	=>	6	5	2	=>	4	5	2
3	1	1	=>	9	1	1	=>	8	1	1
26	**34**	**39**	=>	**78**	**24**	**39**	=>	**39**	**24**	**39**

7. Krok – první sloupec vynásobíme číslem 5.

8. Krok – od prvního sloupce odečteme 4 násobek sloupce druhého.

9. Krok – první sloupec vydělíme číslem 9 a vynulujeme si třetí pozici ve druhém sloupci tak, že druhý sloupec vynásobíme 4 a od poslední pozice odečteme 11.

Tabulka 3

		3	=>			3	=>			3
20	5	2	=>		5	2	=>		5*4	2
40	1	1	=>	36	1	1	=>	4		1
195	**24**	**39**	=>	**99**	**24**	**39**	=>	**11**	**24*4-11=85**	**39**

10. Krok – třetí sloupec vynásobíme číslem 4 a tím také vynulujeme druhou a třetí pozici. Poslední pozici opět vynásobíme 4 a poté odečteme poslední pozici v prvním sloupci (11) a 2 násobek poslední pozice sloupce druhého (17).

11. Krok – z poslední tabulky již vypočítáme neznámé.

Tabulka 4

=>			3*4
=>		4	
=>	4		
=>	**11**	**17**	**39*4-11—2*17=111**

- Je zde použita metoda paralelního ohodnocení[1].

<u>Řešení úlohy je tedy:</u>

x = 9 ¼; y = 4 ¼; z = 2 ¾

<u>Odpověď:</u> Z *1* snopu dobré úrody *9 ¼* dou,

z *1* snopu průměrné úrody *4 ¼* dou,

z *1* snopu špatné úrody *2 ¾* dou. [dle Hudeček, Jiří. viz (8)]

Př.: *Mějme 5 buvolů a 2 ovce, to má cenu 10 liangů zlata. 2 buvoli a 5 ovcí má cenu 8 liangů zlata. Ptáme se, kolik zlata má cenu buvol a ovce?* [dle Hudeček, Jiří. viz (8)]

$$5x + 3y = 10$$

$$2x + 5y = 8$$

1. Krok – údaje si zaneseme do tabulky.
2. Krok – první sloupec násobíme číslem 5 a druhý sloupec násobíme číslem 2.
3. Krok – od prvního sloupce odečteme sloupec druhý.

[1]Paralelní ohodnocení – je univerzální metoda. Ohodnocení znamená porovnání. Je to více promíchaných věci, kdy pro každou věc rozestavíme její množství a vyjádříme její celkový obsah. Každý sloupec vytvoří poměry, za dvě věci je dvojí ohodnocení, za tři věcí trojí ohodnocení …, vždy se ohodnocuje podle množství věcí. Položením rozestavěných pozic vedle sebe vytváříme sloupec „paralelní ohodnocení“. Když pravý a levý sloupec neobsahují stejné množství zároveň, poté můžeme vyjádřit neznámé. Hlavní myšlenka je stanovit, že se menší sloupec odečte od většího, budou se od sebe odečítat, dokud se první pozice nevyčerpá. Když vyrušíme první pozici, odstraníme i zespoda obsah jedné věci. Násobně odčítáme pravý a levý sloupec, pak zjistíme co je kladné a co záporné a můžeme zjistit výsledek. Hlavní myšlenka je přizpůsobit a sjednotit. [dle Hudeček, Jiří. (8)]

Tabulka 5

2	5	=>	10	10	=>		10
5	2	=>	25	4	=>	21	4
8	**10**	=>	**40**	**20**	=>	**20**	**20**

4. Krok - vynulujeme si druhou pozici ve druhém sloupci a poté už jen vypočítáme neznámé.

Tabulka 6

	10*21	=>		21
21		=>	21	
20	**20*21-80=340/10**	=>	**20**	**34**

- Je zde použita metoda paralelního ohodnocení.

<u>Řešení úlohy je tedy:</u>

x = 1 13/21; ***y = 20/21;***

<u>Odpověď:</u> Buvol má cenu *1* celý a *13 z 21* dílů liangu zlata.

Ovce má cenu *20 z 21* dílů lingu zlata. [dle Hudeček, Jiří. (8)]

Tento postup výpočtu motivoval v 17. století japonského matematika *Takakazu Šinsuke Seki Köwa* (1642 -1708), který vymyslel algoritmus pro výpočet soustavy rovnic, takový, že koeficienty soustavy zanesl do tabulky na počítací desce.

Zajímavé je, že vznik teorie determinantů je datován do roku 1750 a vznik teorie matic až do roku 1858. Dlouhou dobu trvalo, než vznikly příslušné prvky, z nichž byl počítán determinant. Rozvoj teorie determinantů se velkou měrou zasloužil o vývoj vzniku teorie matic (úpravy řádků a sloupců, věta o reciprokém determinantu – inverzní matice, …). [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

3.1 LEONHARD EULER (1707 – 1783)

Obrázek č. 1
[Indexes of Biographies viz (7)]

Leonhard Euler je švýcarský fyzik, astronom a matematik, který se narodil v Basileji 15. dubna 1707. Jeho otec měl matematické vzdělání a tak svého syna začal vyučovat matematice a jiným předmětům. L. Euler navštěvoval školu v Basileji, kde se z matematiky nic navíc nenaučil. Jeho zájem o matematiku stále rostl, bral soukromé lekce a roku 1720 ho otec poslal na univerzitu v Basileji, kde od podzimu 1723 začal studovat teologii, kterou si ale příliš neoblíbil. Naštěstí se zde setkal s Johannem Bernoullim, který jeho talent pro matematiku odhalil včas, a L. Euler přestoupil na studium matematiky. Studium úspěšně ukončil v roce 1726 a téhož roku mu vyšel první článek v odborném tisku. V roce 1727 se zúčastnil soutěže o Velkou cenu pařížské Akademie, kde obsadil druhé místo.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [Bureš, Jiří. viz (4)], [Osobnosti. viz (3)]

Pracoval v Petrohradě, kde poznal svoji ženu, věnoval se zde především matematice a fyzice, dále také astronomii a různým aplikacím matematiky. Poté následovala nabídka z Berlína, kterou nakonec přijal. L. Euler zde vypracoval na 380 článků a byl pověřen vedením berlínské Akademie. Poté se vrátil zpět do Petrohradu, kde později oslepl, ale ve své práci pokračoval. Téměř polovinu spisů vytvořil s tímto handicapem. Umírá 18. září 1783. Jeho díla byla publikována ještě 50 let po jeho smrti. Mezi nejznámější patří moment setrvačnosti, e pro přirozený základ logaritmů, π pro Ludolfovo číslo a Σ pro součet atd.

[Bureš, Jiří. viz (4)], [Osobnosti. viz (3)], [Indexes of Biographies (7)]

V práci *Problema algebraicum ob affections prorsus singulares memorabile* z roku 1771 vyšetřoval čtverce, tudíž se zabýval maticemi třetího a čtvrtého řádu, ve kterých uvažoval o magických čtvercích. Studoval ortogonalitu matic odpovídající transformacím kartézské soustavy souřadnic. Podmínka ortogonality byla vyjádřena vypsáním všech podmínek pro skalární součiny řádků matice se sloupci matice transformované. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

3.2 CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855)

Obrázek č. 2

[Indexes of Biographies. viz (7)]

Německý matematik, fyzik, geodet a astronom se narodil 30. dubna 1777 v Braunschweigu do chudé rodiny. Upozornil na sebe svým výjimečným matematickým nadáním.

Nejznámější je jeho rychlý součet čísel od *1* do *1 000* a to sestavením *50* párů čísel v dané množině, jejichž součet je roven hodnotě *101 (1 + 100; 2 + 99; 3 + 98; ...).*

[Indexes of Biographies. viz (7)]

Díky podpoře vývody z Braunschweigu odešel C. F. Gauss studovat na univerzitu v Göttingenu, a v roce 1798 odešel zpět do Braunschweigu, kde získal titul. Přijal místo profesora astronomie a ředitele hvězdárny. Zasáhl do všech věd, v matematice se zabýval především algebrou, teorií čísel, diferenciální a neeukleidovskou geometrií. Vynalezl matematickou metodu nejmenších čtverců, založil absolutní soustavu fyzikálních jednotek. Umírá 23. února 1855.

Ve svém díle *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801 dospěl k maticovému násobení, které si nyní ukážeme.

Ternární kvadratickou formu:

$$\boldsymbol{f(x, y, z) = axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'}$$

nahradil symbolem

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a,} & \boldsymbol{a',} & \boldsymbol{a''} \\ \boldsymbol{b,} & \boldsymbol{b',} & \boldsymbol{b''} \end{pmatrix}$$

a přiřadil jí výraz

$$\boldsymbol{D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b''}$$

jedná se o záporně vzatý determinant matice

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b}'', & \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{b}'', & \boldsymbol{a}', & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}', & \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{a}'' \end{pmatrix}$$

využil substituci

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha y} + \boldsymbol{\beta y'} + \boldsymbol{\gamma y'}$$

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{\alpha' y} + \boldsymbol{\beta' y'} + \boldsymbol{\gamma' y''}$$

$$\boldsymbol{x''} = \boldsymbol{\alpha'' y} + \boldsymbol{\beta'' y'} + \boldsymbol{\gamma'' y''}$$

a hodnotu

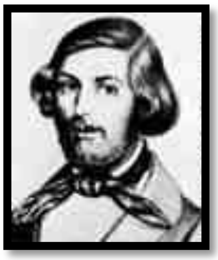
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\alpha\beta'\gamma''} + \boldsymbol{\beta\gamma'\alpha''} + \boldsymbol{\gamma\alpha'\beta''} - \boldsymbol{\gamma\beta'\alpha''} - \boldsymbol{\alpha\gamma'\beta''} - \boldsymbol{\beta\alpha'\gamma''}$$

dále také uvažoval substituci opačnou, substituci reciprokou a také substituci danou transponovanou maticí. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Těmito postupy nedospěl k reprezentaci kvadratické formy symetrickou maticí a tím pádem nedospěl ani k maticovému vyjádření transformace kvadratické formy lineární substituce, i když složení lineárních substitucí maticově vyjádřil.

V roce 1809 C. F. Gauss vydává své další dílo *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, kde se zabývá pohybem nebeských těles a výpočtem oběžné dráhy planet. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Bureš, Jiří.. viz (4)]

3.3 FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823 – 1852)



Obrázek č. 3

[dle Indexes of Biographies. viz (7)]

Německý matematik F. G. M. Eisenstein se narodil 16. dubna 1823 do židovské rodiny. Celý svůj život bojoval se špatným zdravím, a jako jediný z 6 dětí přežil. Měl velký talent pro hudbu, hrál na klavír a také skládal. V 11 letech ho rodiče poslali na vojenskou akademii u Berlína, kde se rozvinula jeho láska k matematice. Dokázal 100 základních vět. Ve 14 letech začal studovat na gymnáziu v Berlíně, kde bylo jeho matematické nadání uznáno učiteli a dále podporováno. Sám začal studovat diferenciální a integrální počet od Eulera a Lagrange. Začal navštěvovat přednášky matematiků na univerzitě v Berlíně a rozvíjel si své vědomosti. Poté odešel s rodinou do Anglie, kde podmínky byly též špatné, a tak se vrátil zpět s matkou do Německa. Po složení poslední zkoušky pracoval jako učitel na univerzitě v Berlíně. V roce 1844 se F. G. M. Eisenstein seznámil s Gaussem, poslal mu některé ze svých spisů, které Gausse velice zaujaly. Eisenstein obdržel čestný doktorát a začal přednášet na univerzitě v Berlíně. Krátce před svou smrtí se stal F. G. M. Eisenstein členem berlínské akademie věd. F. G. M. Eisenstein zemřel 11. října 1852 na tuberkulózu.

[dle Ferdinand Gotthold Max Eisenstein. viz (5)] ,[dle Indexes of Biographies. viz (7)]

V matematice se zabýval především teorií binárních a ternárních kvadratických a kubických forem, teorií čísel a teorií eliptických a abelovských transcendentních funkcí. V čtyřicátých letech 19. století se v Eisensteinových pojednáních objevily myšlenky maticového počtu. Zabýval se lineárními substitucemi, které sčítal, odčítal, skládal a invertoval.

Roku 1844 v práci *Untersuchungen über die cubschen Formen mit zwei Variabeln* se F. G. M. Eisenstein zabýval teorií binárních kubických forem s celočíselnými koeficienty. Pracoval i s lineárními substitucemi, které prezentoval čtvercovými schématy z jejich koeficientů. Uvedl zde kubickou a kvadratickou formu.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Roku 1844 označil binární kubickou formu takto:

$$\boldsymbol{f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3}$$

a ve stejném roce zapisoval kvadratickou formu takto:

$$\boldsymbol{f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'}$$

Mezi léty 1844 – 1845 pracoval F. G. Eisenstein s lineárními substitucemi ternárních kubických forem s celočíselnými koeficienty ve své práci *Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken*. Substituce považoval za samostatné objekty, které označoval čísly nebo písmeny. Jednalo se o čtvercová schémata sestavená z devíti koeficientů. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

S lineárními systémy nebo s lineárními substitucemi pracoval F. G. Eisenstein i v dalších svých pracích.

V práci Über die *Vergleichung von solchen ternären quadratischen Formen, welche verschiedene Determinanten haben* z roku 1852 F. G. Eisenstein zkoumal lineární substituci kvadratických forem, které chápal jako plnohodnotné objekty, které označoval písmeny. Takto utvořená čtvercová schémata z koeficientů uvažovaných substitucí uzavíral kulatými závorkami, které se používají u pozdějších matic.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

3.4 CHARLES HERMITE (1822 – 1901)

Obrázek č. 4

[dle Indexes of Biographies. viz (7)]

Francouzský matematik C. Hermite se narodil 24. prosince 1822 v Dieuze jako šesté dítě Ferdinandovi a Madeleine. Jeho otec byl inženýr a pracoval v solném dolu, matka pracovala v soukenickém obchodu své rodiny. C. Herite studoval na College de Nancy, poté odešel do Paříže. Matematiku ho učil Louis Richard, který učil také Galoise. Galois a Hermite si byli v mnoha směrech podobní, ale především měli stejného učitele. C. Hermite působil jako učitel na École Polytechnique, École Normale Supérieure v Paříži a dále také na Sorboně. Zemřel 14. ledna 1901 v Paříži.

[dle Charles Hermite. viz (6)] ,[dle Indexes of Biographies (7)]

V roce 1873 C. Hermite zveřejnil svůj první důkaz, a to že ***e*** je transcendentní číslo (není kořen algebraické rovnice s racionálními koeficienty). Věnoval se matematické analýze, kvadratickým formám, algebře a teorii čísel. Ve své práci při úvahách o reálnosti vlastních čísel použil Hermitovské matice čtvercové schéma prvků

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} a_{1,1-\theta} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2-\theta} & \dots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \dots & a_{n,3} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n-\theta} \end{pmatrix}$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Prehistorii matic máme za sebou a nyní se můžeme věnovat samotné historii zrodu pojmu teorie matic a jejich tvůrcům A. Cayleymu a J. J. Sylvesterovi.

4 HISTORIE MATIC – ZROD POJMU MATICE

Pojem matice se postupně rodil mezi léty 1841 – 1855 v pracích anglických matematiků A. Cayleyho a J. J. Sylvestera, kteří se během své právnické praxe poznali a později spřátelili. Jejich největším společným tématem byla matematika, nad kterou dlouhé hodiny debatovali. Díky těmto debatám dospěli k samotnému tématu matice, které se pak stalo jejich hlavním dílem.

Za vznik teorie matic se považuje zveřejnění Cayleyova článku v časopise *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* v roce 1858.

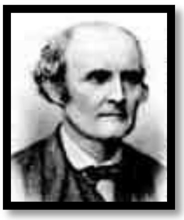
[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Podněty ke vzniku a rozvoji teorie matic byly různé problematiky a to především soustavy lineárních rovnic, determinanty, bilinerní a kvadratické formy a teorie invariantů. Problémům při zkoumání diferenciálních rovnic v nebeské mechanice velmi pomohl vznik a rozvoj teorie matic. Vznik a vývoj teorie matic se řadí do období zrodu algebry struktur (polovina 19. století), kdy se spousta matematiků zabývala otázkami rozšiřování číselných oborů, rozvíjel se také vektorový počet (permutace, substituce, transformace). Dále probíhal rozvoj aritmetických operací a jejich vlastností, které daly základ důležitým pojmům v druhé polovině 19. století (grupa, okruh, obor integrity, těleso, vektorový prostor, …). Na těchto pojmech stojí dnešní algebra.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

4.1 ARTHUR CAYLEY A JAMES JOSEPH SYLVESTER

4.1.1 ARTHUR CAYLEY (26. 8. 1821 – 26. 1. 1895)



Obrázek č. 5

[dle Quido (3)]

Otec A. Cayleyho byl Henry Cayley majitel rodinného podniku obchodníků. Celé generace Cayley žili v Yorkshire v Anglii. A. Cayley ale své dětství strávil v Petrohradě v Rusku, kam se rodina přestěhovala. Po několika letech se vrátili zpět do Anglie blízko Londýna. Už od dětství se u A. Cayleho projevovala nadání v numerických počtech. Učitelé mu doporučovali věnovat se spíše vědecké oblasti než následovat svého otce v práci obchodníka.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Osobnosti. viz (3)]

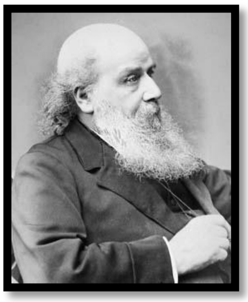
Cayley v roce 1838 začal své studium na Trinity College v Cambridge, které úspěšně absolvoval. Po studiích působil krátkou dobu jako pedagog a poté jako právník, advokát a notář v Londýně, kde se setkal s J. J. Sylvesterem. Jeho touha po matematickém poznání rostla. Zúčastnil se přednášek významných matematiků, jako jsou Hemilton, Salmon. Jeho přání se mu splnilo až v roce 1863. Kdy se stal profesorem matematiky na Cambridge. Svou matematickou práci stále rozvíjel a zabýval se především algebraickou geometrií, projektivní geometrií a algebrou. Okrajově se věnoval i diferenciálním rovnicím, eliptickým funkcím, sférické astronomii a astrofyzice.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Osobnosti. viz (3)]

Jeho nejznámější dílo obsahuje třináct svazků a nazývá se *The collected Mathematical Papers*.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

4.1.2 JAMES JOSEPH SYLVESTER (3. 9. 1814 – 15. 3. 1897)



Obrázek č. 6

[dle Osobnosti. viz (3)]

J. J. Sylvester se narodil 3. 9. 1714 do židovské rodiny. Jeho otec byl Abraham Joseph, a byl obchodníkem. Jak si můžete všimnout, příjmení jeho otce není Sylvester ale Joseph. Vysvětlení je jednoduché, příjmení Sylvester si přidal až před vstupem na vysokou školu. Důvod byl ten, že jeho bratr v té době emigroval do Spojených států amerických a podmínkou pro získání trvalého bydliště zde byly tři jména, tak si J. Joseph přidal příjmení Sylvester. Díky židovskému původu měl J. J. Sylvester řadu potíží ve svém dalším vzdělání a působení. Vystřídal dvě základní školy a po dokončení základního vzdělání začal navštěvovat střední školu královské instituce v Liverpoolu. Kde podmínkou pro absolvování bylo podepsání náboženského slibu anglikánské církve. To ale James odmítl, takže nemohl školu úspěšně absolvovat. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Osobnosti. viz (3)]

V roce 1828 vstoupil J. J. Sylvester na školu University College v Londýně, kde jeho profesor matematiky byl De Morgan. Po obvinění, že vyhrožoval spolužákům nožem, ho jeho rodina ze studií odhlásila, a J. J. Sylvester začal v roce 1831 studovat na St. John´s College v Cambridge. V roce 1837 úspěšně složil zkoušku, ale nemůžeme říct, že absolvoval. K absolvování byla nutná přísaha anglikánské církvi, což J. J. Sylvester odmítl a také nemohl podstoupit díky jeho židovskému původu.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Osobnosti. viz (3)]

Poté krátkou dobu pracoval jako advokát a od roku 1838 působil jako profesor přírodní filozofie v Londýně. V roce 1941 mu byly uděleny tituly BA a MA v Trinity College v Dublinu, šlo spíše o právní úpravu. V letech 1841 – 1843 pracoval jako profesor matematiky ve Virginii v USA, po návratu do Londýna pracoval jako pojišťovací matematik a advokát, v tu dobu se setkal s A. Cayley. Jako profesor matematiky působil na vojenské akademii ve Woolwich v letech 1855 – 1870. V této době se značně věnoval matematice a zasloužil se o vznik časopisů *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, dále založil roku 1878 časopis *American Journal of Mathematics*, který vychází dodnes. Jeho zásluhy byly veliké především v rozvoji americké matematiky, kdy v letech 1877 – 1884 působil na Johns Hopkins University v Baltimore v USA. Poté se stal profesorem matematiky v Oxfordu a o deset let později byl penzionován. Jeho nejvýznamnější práce se týkají především algebry, teorie čísel, teorie pravděpodobnosti, mechaniky a matematické fyziky. Považuje se také za tvůrce matematické symboliky a terminologie. Jako koníčka měl skládání básní a je autorem spisu *„The Laws of Verse“* z roku 1870, které pojednávají o zákonitostech veršů.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)], [dle Osobnosti. viz (3)]

Arthur Cayley a James Joseph Sylvester se poznali a spřátelili až roku 1850.

4.2 ARTHUR CAYLEY A JEHO PRÁCE V MATEMATICE

Arthur Cayley už během studií na Trinity College publikoval tři své práce v časopisu *Cambridge Mathematical Journal*, který vydával Ducan Gregory. Během dalších čtyř let publikoval celkem 28 článků. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

Ve své práci *On a theorem in the geometry of position* z roku 1841 zavedl dnešní symbol pro determinant, což je vlastně čtvercové schéma prvků ve dvou svislých rovných čarách. Tento symbol používáme dodnes.

$$|\alpha|, \qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}, \qquad \& c$$

Pro determinanty druhého a třetího řádu uvedl rozvoj podle prvního sloupce pomocí této nové symboliky. S takto rozepsanými determinanty dále pracoval.

<u>Rozepsal tvary jednotlivých determinantů:</u>

$$\alpha, \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

$$\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma, \qquad \&c$$

Tuto symboliku využil pro zkoumání vztahů mezi vzdálenostmi pěti bodů v prostoru, mezi vzdálenostmi čtyř bodů v rovině a tří bodů na přímce, respektive vzdálenost pěti bodů na sféře a vzdálenost čtyř bodů na kružnici. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

A. Cayley v roce 1843 uvažoval takovéto obdélníkové schéma pro *q + 1* řádcích a n sloupcích *(q < n);*

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, \dots & x_n \\ A_1, & A_2, \dots & A_n \\ K_1, & K_2, \dots & K_n \end{matrix} \qquad \left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, \dots & x_n \\ A_1, & A_2, \dots & A_n \\ K_1, & K_2, \dots & K_n \end{matrix}\right\| = 0$$

V tomtéž roce A. Cayley publikoval práci *On the theory of determinants*, ve které využíval symboliku determinantů. Zazní zde věta o násobení determinantů, kdy se řádky jedné matice skalárně násobí s řádky druhé matice. A roku 1845 v práci *On the theory of linear transformations* zopakoval symboliku determinantů a uvedl při násobení matic nový postup. Násobil sloupce první matice sloupci druhé matice.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

V roce 1855 použil A. Cayley ve své práci *Remarques sur la station des fonctions algébriqus* stejné označení pro matici jako dříve pro determinant.

Svůj článek začal takto:

$$"\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}', & \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\alpha}'', & \boldsymbol{\beta}'', & \boldsymbol{\gamma}'' \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}', & \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\alpha}'', & \boldsymbol{\beta}'', & \boldsymbol{\gamma}'' \end{vmatrix} \right) (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta y} + \boldsymbol{\gamma z} + \cdots,$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\acute{y} + \boldsymbol{\gamma}\acute{z} + \ldots,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}''\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}''\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\gamma}''\boldsymbol{z} + \ldots,$$

Soustava rovnic je spíše závislost veličin $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ na veličinách *x*, *y*, *z*, …

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots) = \left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}', & \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\alpha}'', & \boldsymbol{\beta}'', & \boldsymbol{\gamma}'' \end{vmatrix}^{-1} \right) (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, \ldots)$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}', & \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\alpha}'', & \boldsymbol{\beta}'', & \boldsymbol{\gamma}'' \end{vmatrix}^{-1}"$$

[dle Bečvář, Jindřich. (2)]

Jako dalším tématem se A. Cayley zabýval skládáním matic, čímž dospěl k násobení matic. V této práci již násobil řádky první matice se sloupci druhé matice. Tímto způsobem násobíme matice dnes. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

Dobře si uvědomoval, že tyto poznatky mají předcházet teorii determinantů, a začal hovořit o teorii matic. Dále se zabýval maticí forem, a reprezentoval kvadratickou formu několika proměnnými.

Reprezentace kvadratické formy pomocí několika proměnných:

$$\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + \cdots},$$

$$\left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{h}, & \boldsymbol{g}, \ldots \\ \boldsymbol{h}, & \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{f}, \ldots \\ \boldsymbol{g}, & \boldsymbol{f}, & \boldsymbol{c}, \ldots \end{vmatrix}\right) (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)^2;$$

Tento zápis ho později inspiroval k úvaze o obecnějších maticích.

V tomto roce ještě A. Cayley publikoval další dva články, ve kterých se už matice objevily. Jsou to články *Sur la transformation d´une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires* a *Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d´une seule indéterminée* z časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

Tyto články nepřinesly žádné nové poznatky, pouze jen zopakoval pojem matice, maticové vyjádření kvadratické formy a inverzní matice. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

4.3 JAMES JOSEPH SYLVESTER A JEHO PRÁCE V MATEMATICE

J. J. Sylvester použil ve své práci *On the intersections, contacts, and other correlations of two comics expressed by indeterminate coordinates* z roku 1850 Cayleyův čtvercový zápis determinantu. Tento zápis se objevoval i v jeho dalších pracích.

J. J. Sylvester se zasloužil o zavedení pojmu obdélníková matice a termín *matri*x v článku *Additions to the articles „On a new class of theorem", and „On Pascal´s theorem".* [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

Věnoval se otázkám a problémům týkajících se subdeterminantů, jejich nulovosti a nenulovosti. Zabýval se pojmem hodnost matice, který je možno vyslovit pomocí nulovosti a nenulovosti jednotlivých řádů subdeterminantů.

V roce 1851 J. J. Sylvester uvedl pojem čtvercové schéma prvků opatřených dvěma indexy ve svém článku On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions. [dle Bečvář, Jindřich. (2)]

$$\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a_1}, & \boldsymbol{a_2}, \ldots & \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{\alpha_1}, & \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{matrix} \right\}$$

J. J. Sylvester užíval Cayleyův zápis determinantu v řadě svých prací a tím přispěl k jeho rozšíření.

V roce 1853 ve své práci *On a theory of the syzygetic relations of two National integral functions, comprising an application to the theory of Sturm´s functions, and that of the greatest algebraical common measure* užíval pojem matice. V závěru své práce uvedl i slovníček pojmů – *Glossary of new or unusual terms, or of terms used in a new or unusual sense, in the preceding memoir*,vysvětluje zde pojem matice a subdeterminant.

[dle Bečvář, Jindřich. (2)]

4.4 POJEM TEORIE MATIC

Pojem matice je ve své podstatě docela mladý, i když se objevoval dříve v různých úlohách. Jeho vznik je datován až roku 1858 díky článku *A memoir on the theory of matrices* od A. Cayley. Sám A. Cayley je považován za zakladatele teorie matic a to díky výše zmíněnému článku a díky propagaci jeho výsledků J. J. Sylvesterem.

J. J. Sylvester byl ve své době velmi uznávanou autoritou v oblasti matematického zkoumání, a tím přispěl k rozvoji teorie matic. Za hlavní zakladatele teorie matic můžeme považovat A. Cayleyho a J. J. Sylvestera, kteří spolu spolupracovali a vzájemně se doplňovali.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Díky A. Cayleymu, který ve svém díle charakterizoval matici, termín *matrix* a současný symbol – kulaté závorky u prvního řádku až k poslednímu došlo k rozvoji teorie matic. Zavedení tohoto pojmu motivovalo problematiku lineárních rovnic, nehomogenní soustavy lineárních rovnic, které zapsal maticově – *„matice vynásobená vektorem neznámých dává vektor pravých stran."* [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Matice zároveň reprezentoval jako nový pojem, samostatný objekt, se kterým lze provádět aritmetické operace splňující aritmetické zákony. Označoval je velkými tiskacími písmeny. Prvky matic nijak necharakterizoval, takže nevíme, zda se jedná o racionální, reálná či komplexní čísla nebo jiné veličiny. Předpokládáme u nich, že se dají sčítat, odčítat. Definice maticových operací závisí na operacích s výchozími veličinami a vlastnosti maticových operací odvozujeme od operací s výchozími veličinami.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

A. Cayley uvedl definice a tvrzení pouze pro matice druhého a třetího řádu, zdůrazňoval jejich platnost.

A. Cayley se převážně zabýval čtvercovými maticemi, až v závěru své práce se zmínil i o maticích obdélníkových.

O zakladateli teorie matic se celá léta vedla dlouhá debata a padaly zde různé názory. Až ve 20. století se otázkami vzniku a vývoje teorie matic podrobně zabýval T. Hawkins. Na toto téma napsal sérii zasvěcených článků. Hlavní byl jeho příspěvek *The theory of matrices in the 19th century*, který prezentoval na Mezinárodním kongresu matematiků ve Vancouveru v roce 1974 a ve kterém poukázal na Cayleyův memoár o maticích z roku 1858, o kterém tvrdí, že v problematice teorie matic sehrál velmi malou roli. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Přestože dílo A. Cayleyho někteří matematici nepovažují za stěžejní, stále je A. Cayley považován za zakladatele teorie matic.

Díky zrodu pojmu teorie matic, které jsme představili v minulé kapitole, dochází k dalšímu rozvoji matic, do kterého můžeme zařadit i českého matematika E. Weyra. Velkým přínosem byla Cayleyho-Hamiltonova věta, nové maticové operace a snaha zařadit matice do výukových textů.

4.4.1 DALŠÍ ROZVOJ MATIC

Teorie matic byla stále novým tématem, a tak se na čas stávala předmětem mnoha dalších zkoumání.

V posledních dvou desetiletích 19. století teorie matice stále bojovala o svoji existenci. V té době používali maticovou řeč jen někteří matematici, mezi nimiž nesměli chybět A. Cayley a J. J. Sylvester. Dále se mezi ně řadili A. Buchheim, H. Taber,

A. R. Forsyth, T. Muir, A. Kumamoto a G. Brunel. Řada významných matematiků v té době ještě maticovou řeč neznala a velkou roli také sehrála izolace britské matematiky od matematicky kontinentální Evropy. Maticovou řeč ve svých dílech začali používat až koncem 90. let, jedním z nich byl i G. Frobenius. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

V té době se matematici věnovali spíše teorii bilineárních a kvadratických forem. Další proud zkoumání byl věnován teorii hyperkomplexních čísel, hlavní role matic ve strukturní teorii algeber nastala až později. Mezi první matematiky, kteří přijali maticový počet, můžeme řadit i českého matematika Eduarda Weyra. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

<u>Eduard Weyr (1853 – 1903)</u>

S maticemi začal pracovat velice brzy a první práci týkající se tohoto tématu vydal v roce 1884, během dalších šesti let publikoval další práce, které se také matic týkaly.

Zájem o matice vzbudil v E. Weyrovi jeho mladší kolega L. Kraus, který navštěvoval Weierstrassovy a Kroneckerovy přednášky. E. Weyr ukazoval roli matic v teorii bilineárních a kvadratických forem, a také demonstroval jejich vztah k lineárním transformacím.

V roce 1887 vydal E. Weyer práci *O binarných matricích*, která měla spíše popularizační účinek. Chtěl zde ukázat užitečnost tohoto tématu a spojení s dalšími tématy.

E. Weyr ve svých pracích uvedl základní fakta o maticích druhého řádu a o operacích s nimi. Maticové operace dal do souvislosti s lineárními transformacemi, věnoval se zde i celým číslům a kanonickým tvarům.

V roce 1889 vydala Královská česká společnost nauk spis *O theorii forem bilinearných* od E. Weyre. V tomto spisu uvedl základní poznatky o teorii matic, poprvé zde oproti svým dřívějším pracím zavádí termín matice místo matrice (matrix), které matematici používali doposud.

Hlavním cílem Weyrova spisu byla prezentace teorie kanonických tvarů matic (bilineárních forem), tomuto tématu se dále věnoval. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Postupem času se matice začaly zavádět do učebních textů, vznikaly encyklopedie, přehledové studie a bibliografie. Tento proces byl velice pomalý a hlavně opatrný. Podílela se na něm řada matematiků, z nichž si některé uvedeme.

<u>O zavedení matic do učebních textů se zasloužili:</u>

- **Ernesto Pascal** (Ital, 1865 -1940) v díle *I determinanti* matice prostupují celý textem.
- **Eugen Otto Erwin Netto** (Němec, 1848 – 1919) se maticím okrajově věnuje v učebnici *Vorlesungen über Algebra* z roku 1896, hovoří zde především o hodnosti matice (determinantu).
- **Heinrich Weber** (Němec, 1842 – 1913) vydal dílo *Enzyklopädie der Elementarmathematik* a je autorem dvoudílné učebnice *Lehrbuch der Algebra,* ve kterých se o maticích zmiňuje.
- **Peter Muth** (1860 – 1907) se ve svém díle Theorie und Anwendung der Elementartheiler se o maticích přímo nezmiňuje, ale hovoří o teorii kanonických tvarů bilineárních forem a dalších příbuzných témat. My ale tuto problematiku dnes vnímáme v maticovém tvaru.
- **Alfred North Whitehead** (1861 – 1947) o maticích a determinantech se zmiňuje ve svém díle *Principia mathematica* z roku 1910 – 1913.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

4.4.2 MATICOVÉ OPERACE

Když A. Cayley vymezil pojem matic a řádně ho definoval, pokračoval ve své práci a definoval další maticové operace.

Mezi maticové operace, které definoval, patří sčítání matic. Operaci sčítání motivoval sčítáním lineárních substitucí, uvedl také jejich základní vlastnosti, mezi které patří: komutativnost, asociativnost a existence opačné matice. Dále také definoval násobení matic skalárem a uvedl vazbu zavedených operací:

$$\boldsymbol{m(L+M)\ =\ mL\ +\ mM.}$$

Násobení matic je skládání lineárních substitucí. Mezi vlastnosti násobení matic uvedl, že násobení matic je nekomutativní operací. Zavedl násobení nulovou a jednotkovou maticí a platnost asociativity, u které důkaz neuvedl:

$$\boldsymbol{L * MN \ =\ LM * N\ =\ LMN.}$$

To vše bylo velice důležité, ale A. Cayley se snažil objevovat stále nové zákonitosti a tak definoval mocninu matice, uvedl také, že matice komutují. Definici mocniny poté rozšířil pro záporný a nulový exponent. Uvedl, že

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}', & \boldsymbol{b}', & \boldsymbol{c}', \\ \boldsymbol{a}'', & \boldsymbol{b}'', & \boldsymbol{c}'', \end{pmatrix}^{\boldsymbol{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\nabla}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\partial_a} & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_{a'}} & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_{a''}} & \boldsymbol{\nabla}, \\ \boldsymbol{\partial_b} & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_b}' & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_b}'' & \boldsymbol{\nabla}, \\ \boldsymbol{\partial_c} & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_{c'}} & \boldsymbol{\nabla}, & \boldsymbol{\partial_{c''}} & \boldsymbol{\nabla}, \end{pmatrix}$$ [2]

k tomu poznamenal: „ inverzní nebo reciproká matice nefunguje, když nemá determinant, matice je v tomto případě neurčitá“. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Algebraický doplněk k prvku a tj. $b'c''$ - $b''\ c'$ získáme jako parciální derivaci determinantu

$$\boldsymbol{\nabla\ = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''.}$$

[2] Matice na -1 se rovná matici $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nabla}}$ $(\boldsymbol{Nabla}) *$ $\boldsymbol{matice,}$ ve které se ze sloupců z první matice staly řádky, tedy jednotlivé členy z první matice se přeměnily v řádky druhé matice a to v parciální diferenciál jednotlivých členů matice vynásobený ∇.

Cayleyova-Hemiltonova věta

Nejdůležitějším výsledkem Cayleyovy práce je Cayleyova-Hemiltonova věta, kterou v dnešní matematice vyslovuje různými ekvivalentními formulacemi. Tato věta byla otištěna v roce 1858 bez jakéhokoliv důkazu. Důkaz věty A. Cayley uvedl v dopise věnovaném J. J. Sylvesterovi, a sice pro matici druhého řádu a dokázal zobecnění tohoto tvrzení. Důkaz si nyní nastíníme. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Obecnější věta, jsou-li $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ komutující respektive nezáměnné matice

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}, & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}, & \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix},$$

pak determinant $\begin{vmatrix} \boldsymbol{Qa - P\alpha}, & \boldsymbol{Qb - P\beta} \\ \boldsymbol{Qc - P\gamma}, & \boldsymbol{Qd - P\delta} \end{vmatrix}$ se rovná matici $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ ...

Podrobněji se věnoval této problematice Tony Crilly.

Odpovídající tvrzení pro kvaterniony[3] dokázal W. R. Hamilton v monografii *Lectures on quaternions* z roku 1853. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

A. Buchheim (1859 – 1888) využil reciprokou rovnici k charakteristické matici a vyjádření polynomiální matice jako maticového polynomu. V trochu pozměněném tvaru se tento důkaz objevuje v dnešních učebnicích lineární algebry a teorie matic.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Obecný důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy z roku 1884 znali již dva pražští matematici, Ludvík Kraus (1857 – 1885) a Eduard Weyr. Sám E. Weyr vystoupil 25. dubna 1884 na zasedání Královské české společnosti nauk s přednáškou O základní větě v theorii matric, která se především týkala Cayleyovy-Hamiltonovy věty. E. Weyr nejprve zveřejnil práci svého kolegy L. Krause a pak uvedl svoji modifikaci tohoto důkazu.

[3] Kvaternion = zobecnění komplexního čísla (W. R. Hamilton). Např.: ***tři imaginární jednotky***

$$\boldsymbol{i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1,}$$

$$\boldsymbol{ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j}$$

Kvaternion je čtveřice: ***q = w + xi + yj + zk (1 + 0i + 0j + 0k =*** *kvaternionová jednotka).*

[dle Kavan, Ladislav. viz (15)]

Důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty od E. Weyre byl znám již dříve, a také byl zveřejněn v několika prácích J. J. Sylvestera.

Veškerá problematika týkající se Cayleyovy-Hamiltonovy věty je stále živým tématem, stále se objevují články, které chtějí tuto problematiku objasnit.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Dnešní modifikace Cayleyovy-Hamiltonovy věty

- Každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu.
- Charakteristický polynom matice M je jejím anulujícím polynomem.
- Charakteristický polynom matice M je násobkem jejího minimálního polynomu.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

A. Cayley si tuto větu dobře uvědomoval a tento fakt zapsal ve tvaru:

$$\boldsymbol{Det.}\left(\tilde{\boldsymbol{I}}.\boldsymbol{M} - \tilde{\boldsymbol{M}}.\boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{0}.$$

Ukážeme důkaz věty: pro $n = 2$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

výpočet determinantu:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{M} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} - \boldsymbol{M} \end{vmatrix} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{2}} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d})\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc})\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{0}} = \dots = \boldsymbol{0}.$$

K matici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hledal matici L, pro kterou by platilo $L^2 = M$, při výpočtu použil Cayleyovu-Hemiltonovu větu, a došel k výsledku:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{X}} & \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{X}} \\ \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{X}} & \dfrac{\boldsymbol{d} + \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{X}} \end{pmatrix},$$

kde se $\boldsymbol{Y} = \sqrt{\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{bc}}$ a $\boldsymbol{X} = \sqrt{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{2Y}}$. Různou volbou znamének odmocnin získal hned čtyři řešení ($\sqrt{M}$ dává čtyři hodnoty), a dále počítal matici L, pro kterou určil $L^2 = M^2$. Pro tuto matici druhého řádu vypočetl druhou a třetí mocninu, která má tvar:

$$\boldsymbol{M^2 = (a + d)M - (ad - bc)},$$

$$\boldsymbol{M^3 = [(a + d)^2 - (ad - bc)]M - (a + b)(ad - bc)}.$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Z toho můžeme usoudit, že každá mocnina matice M je lineární kombinací matice M a matice jednotkové.

A. Cayley se zabýval i dalšími problémy týkajícími se teorie matic a jejich dalších vlastností. Zkoumal také, jak k dané matici *M* druhého řádu najít matici *L*, která s touto maticí bude komutovat *(LM=ML)*, tyto matice pak nazýval convertible. Řešení převádíme na homogenní soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých a výsledkem jsou matice: $\boldsymbol{L = \alpha M + \beta}$. K této matici pak hledal jinou matici, pro kterou by zase platilo *LM* = -*ML*, tyto matice nazýváme skew convertible. Stanovil také podmínky:

$$\boldsymbol{(a + d)^2\,(ad - bc) = 0}.$$

Pokud je matice regulární ($\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$) platí tyto vztahy:

$$\boldsymbol{a + d = 0, \quad a' + d' = 0, \quad aa' + bc' + b'c + dd' = 0}.$$

A. Cayley zavedl transponování matic pro matice jen druhého řádu a vyjádřil i základní vlastnosti této operace:

$$\boldsymbol{(tr.M)^p = tr.(M^p), \quad (tr.M)^{-1} = tr.(M^{-1}), \quad tr.(LM) = tr.M tr.L} \ldots$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Definoval symetrické a asymetrické matice tím, že každá matice se dá vyjádřit jako součet symetrické a asymetrické matice.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{h+v} & \boldsymbol{g-\mu} \\ \boldsymbol{h-v} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{f+\lambda} \\ \boldsymbol{g+\mu} & \boldsymbol{f-\lambda} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

Tím dokázal, že matice M a transponovaná matice jsou symetrické a zároveň, že jsou nezáměnné. Studoval i charakteristický polynom matice M, vlastní čísla atd., především se ale věnoval vztahu $M^n - E = 0,$ kde E je jednotková matice.

Uvádí se, že A. Cayley uvedl ve své práci *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858 první reprezentaci jedné algebraické struktury v druhé struktuře.

L, M jsou symetrické a asymetrické matice řádu dva a jestliže matice

$$\boldsymbol{L^2 = -1}, \quad \boldsymbol{M^2 = -1}\, potom\, \boldsymbol{N = LM = -M}$$

$$\boldsymbol{L^2 = -1}, \quad \boldsymbol{M^2 = -1}, \quad \boldsymbol{N^2 = -1},$$

$$\boldsymbol{L = MN = -NM}, \quad \boldsymbol{M = NL = -LN}, \quad \boldsymbol{N = LM = -ML}, \quad položme$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-i} \end{pmatrix}.$$

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Dáme-li každému kvaternionu $(a + bi + cj + ck)$ lineární kombinaci komplexních matic $aE + bL + cM + dN$, pak tomuto kvaternionu můžeme přiřadit komplexní matici:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a + di} & \boldsymbol{b + ci} \\ \boldsymbol{-b + ci} & \boldsymbol{a - di} \end{pmatrix}.$$

Jedná se o izomorfismus tělesa kvaternionu na množinu komplexních matic, jedná se tedy o bijekci, která zachovává binární sčítání, násobení, násobení skalárem.

Další problém, kterým se A. Cayley zabýval, byly obdélníkové matice a jejich náležitosti. V závěru své práce se o nich letmo zmínil. Obdélníkové matice nazýval široké (broad) a hluboké (deep). Zároveň uvedl, že sčítat a odčítat matice je možno pouze stejného typu a dále také, že je možno násobit je skalárem, ale nelze mezi sebou násobit dvě libovolné matice. Přesněji uvedl příklady, kdy to možné je:

A jsou to matice typu $\boldsymbol{2x3}$, dále $\boldsymbol{3x4}$ a také tedy i $\boldsymbol{3x2}$ a$\boldsymbol{4x3}$.

Zdůraznil také, že pojmy jako jsou: záměnnost matic, inverzní matice, mocnina matice, symetrická a asymetrická matice nemají pro obdélníkové matice smysl.

Hlavním důvodem zavedení obdélníkových matic byla asi možnost, jak chápat vektor. N-tici prvků může proto napsat jako soustavu n lineárních rovnic o m neznámých za pomoci součinu matice typu *nxm* a matice typu *mx1*… A. Cayley totiž ukázal, že skalární součin vektorů můžeme uvést jako součin dvou matic: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{tr}.(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}')$.

A. Cayley po svém díle *A memoir on the theory of matrices* z 1858 publikoval mnoho dalších prací, ve kterých se zaobíral problematikou matic. Ve stejném roce uvedl další své dílo *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function*, ve které prezentoval maticové vyjádření bilineární formy a zabýval se zde řadou transformací, která byla dána nějakou lineární transformací:

jestliže je $\boldsymbol{A}$ matice bilineární formy na prostoru $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke dvojici bází $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}'$, potom je $\boldsymbol{B^T A C}$ matice této formy vzhledem k bázím $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{L}'$, kde $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou matice přechodu mezi bázemi $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$, resp. $\boldsymbol{K}'$ a $\boldsymbol{L}'$.

A. Cayley tento problém řešil pouze pro ternární bilineární formy. Matice se snažil prosadit i v anglické encyklopedii, kde řadu pojmů a termínů, které se v jeho době začaly v matematice hojně využívat, vysvětlil a jednalo se o pojmy: grupa, determinant, matice, rezultant, invariant, kovariant, lineární transformace… Důležitý pojem bylo *matrix*, kterým motivoval problematiky soustav lineárních rovnic a užití inverzní matice pro řešení soustav s regulární maticí. Po těchto pracích se A. Cayley na chvíli od tématu matic distancoval a roku 1866 publikoval *A supplementary memoir on the theory of matrices*, toto dílo ale už žádné nové poznatky nepřineslo. Další jeho práce je z roku 1880 *On the matrix* $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ *and in connection therewith the function* $\frac{ax+b}{cx+d}$, ve které rozvíjel vztah mezi lineárními substitucemi a maticemi druhého řádu. Využil Cayleyovu-Hamiltonovu větu, že *n*-tá mocnina matice *M* je lineární kombinací matice *M* a jednotkové matice, snažil se ji vyjádřit pomocí vlastních čísel α, β a jejich poměr λ.

V roce 1885 řešil další problematiku, především rovnici $qQ - Qq' = 0$, kde q a q' jsou kvaterniony (matice), a *Q* je neznámý kvaternion (matice), tímto chtěl ukázat blízký vztah mezi maticemi a kvaterniony.

O maticích se zmínil i ve svém článku *On multiple algebra* z roku 1887, ve které pojednává o teorii komplexních čísel, matice zde zapisoval jako determinanty.

Jeho poslední poznámka je z roku 1891 *Note on a theorem in matrices*, studoval v ní symetrické matice, které mají dvojnásobné nulové vlastní číslo.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

<u>Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898)</u>

C. L. Dodgson také rozvíjel některé maticové úvahy, které uvedl ve své knize *Elementary treatise on determinants* z roku 1867, kde se zabýval definicí bloků. Tvořil tedy subdeterminanty z obdélníkové matice a dále také definoval determinant čtvercové matice. Matice zapisoval jako čtvercová schémata do závorek a determinanty značil podle A. Cayleyho. Prvky determinantu zapisoval pomocí indexů.

Základní vlastnosti determinantů uvedl pomocí matic.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

<u>Edmond Nicolas Laguerre (1834 – 1886)</u>

E. N. Laguerre se věnoval především diferenciální a projektivní geometrii a diferenciálním rovnicím. V roce 1867 vydal práci *Sur le calcul des systèmes linéaires*, ve které se věnoval maticovému počtu. Cayleyovu práci zřejmě neznal, protože na ni nikdy nereagoval. Definoval zde sčítání a násobení matic, dále skalární a transponované matice, symetrické a asymetrické matice i reciprokou matici.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

S historií zrodu pojmu teorie matic, základními informacemi a významnými matematiky jsme se už seznámili. Nyní se zaměříme na základní vlastnosti matic s uvedením praktických příkladů.

5 VLASTNOSTI MATIC – PŘÍKLADY

5.1 PRVNÍ POZNATKY

Vlastnosti matic se začaly hojně rozvíjet po uvedení definice matice od J. J. Sylvestera a vydání práce od A. Cayleyho zaměřené na teorii matic, ve které uvádí i základní vlastnosti pro operace s maticemi.

Matice

Pojem matice a jeho první definování zaznělo v roce 1850 od J. J. Sylvestera. Ten matici definoval jako zkrácené uspořádání výrazů a prohlásil, že může vést k různým determinantům.

- Maticí rozumíme obdélníkové schéma čísel o m řádcích a n sloupcích. Značíme matice typu *(m, n)*.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}}, & \dots, & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}}, & \dots, & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \boldsymbol{a_{m1}}, & \dots, & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{A_{jk}}]$$

pro indexy ***j = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, n,***

$\boldsymbol{A_j} = [\boldsymbol{A_{j1}}, \boldsymbol{A_{j2}}, \dots, \boldsymbol{A_{jm}}]\ j - \text{tý řádek matice } A,$

$\boldsymbol{A_k} = [\boldsymbol{A_{1k}}, \boldsymbol{A_{2k}}, \dots, \boldsymbol{A_{mk}}]\ k - \text{tý sloupec matice } A\ ,$

$\boldsymbol{0_{mn}} - \text{ nulová matice.}$ [dle Holenda, Jiří. viz (10)]

Jako další byla práce A. Cayleyho z roku 1858, který ve své práci definoval sčítání matic, násobení matic, násobení matic skalárem a inverzní matici. Popsal zde i přesnou konstrukci inverzní matice pomocí determinantu a dále uvedl Cayleyho-Hamiltonovu větu. Nyní si ukážeme násobní matic dle A. Cayleyho.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

<u>Násobení matic</u>

Nechť jsou dány čtvercové matice $A, B, C \in R^{nxn}$. Součinem matici A a B rozumíme matici C (označujeme $C = AB$), jejíž libovolný prvek c_{ij} se vypočítá:

$$\boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.}$$

Tímto způsobem definoval násobení Cayley v roce 1858.

[dle Kapitola 1. viz(14)]

M. E. C. Jordan v roce 1870 ve své práci *Pojednání o substitucích a algebraických rovnicích* definoval kanonickou formu matice.

V roce 1878 definoval F. G. Frobenius řád matice a také ortogonální matici v práci *O lineárních substitucích a bilineárních formách.*

Ani J. J. Sylvester se nepřestal zabývat maticemi a v roce 1884 definoval *nulitu* čtvercové matice. Zabýval se také invarianty matic (vlastnostmi). [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

K. T. W. Weierstrass používal axiomatickou definici determinantu ve svých přednáškách. To ale bylo publikováno v práci *O teorii determinantů* vydané po jeho smrti. V tomtéž roce 1903 byly publikovány *Kroneckerovy přednášky o determinantech* rovněž po autorově smrti. Tyto práce položily základy teorii determinantů a teorie matic byla také přijata sice trochu později. V roce 1955 publikoval Mirsky knihu *Úvod do lineární algebry*, která zveřejnila teorii matic všem. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

5.2 VLASTNOSTI MATIC

Rovnost matic

Řekneme, že dvě matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, téhož typu (m, n) jsou si rovny, jestliže prvky ve stejných pozicích si jsou rovny, platí rovnost.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Transponování matic

Je-li dána matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu (m, n), potom je matice $\boldsymbol{B} = (b_{ji})$, typu (n, m), pro jejíž prvky platí

$$b_{ji} = a_{ij} \text{ pro každé } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$$

se nazývá transponovaná matice k matici $\boldsymbol{A}$ a značí se $\boldsymbol{A}^T$.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Význačné matice

- Nulová matice má všechny prvky nulové, značí se 0.
- Čtvercová matice je matice, jejíž počet řádků je stejný jako počet sloupců v opačném případě mluvíme o obdélníkové matici. Počet řádků u čtvercové matice nazýváme řád matice.
- Diagonální matice je čtvercová matice, jejíž prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou nulové. Zvláštní případ je jednotková matice (I), která má na diagonále samé prvky rovny 1.

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \text{ pro každé } \boldsymbol{i \neq j, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n,}$$
$$\boldsymbol{a_{ii} = 1} \text{ pro každé } \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n.}$$

- Symetrická matice je čtvercová matic, pro kterou platí, že prvky

$$\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}} \text{ pro každé } \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n.}$$

- Pro symetrickou matici je $\boldsymbol{A^T = A}$;
- každá diagonální matice je symetrická;
- jednotková matice je symetrická.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

- Horní trojúhelníková matice $\boldsymbol{U = (u_{ij})}$, je čtvercová matice, pro kterou platí, že prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové

$$u_{ij} = 0 \text{ pro } i > j.$$

- Dolní trojúhelníková matice $\boldsymbol{L = (l_{ij})}$ je čtvercová matice, pro kterou platí, že prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové

$$l_{ij} = 0 \text{ pro } i < j.$$

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

5.3 ARITMETICKÉ OPERACE S MATICEMI

5.3.1 SOUČET MATIC

Pro matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, téhož typu (m, n) můžeme definovat:

- součet matic jako matici $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{s_{ij}})$ typu (m, n) pro jejíž prvky platí

$$\boldsymbol{s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

- rozdíl matic jako matici $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r_{ij}})$ typu (m, n) pro jejíž prvky platí

$$\boldsymbol{r_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}$$

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{10} \\ \mathbf{7} & \mathbf{10} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

Sčítáme čísla z matic, které jsou na stejných pozicích.

5.3.2 NÁSOBENÍ MATIC ČÍSLEM

Pro libovolnou matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) definujeme jako r-násobek matice $\boldsymbol{A}$ jako matici typu (m, n), jejíž prvky jsou r-násobky prvků a_{ij}

$$\boldsymbol{rA = (r.aij), pro\ i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.}$$

Platí zde distributivní zákon. [dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\mathbf{3}\,.\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{15} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{18} & \mathbf{21} \\ \mathbf{12} & \mathbf{24} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Číslem *3 (r)* násobíme všechny členy matice.

5.3.3 SOUČIN MATIC

Zásady pro součin matic *A* a *B*:

- Součin dvou matic ***A*** a ***B***, počet sloupců matice ***A*** musí být stejný jako počet řádků matice ***B***, je-li matice ***A*** typu ***(m, n)***, matice ***B*** musí být typu ***(n, p)***

$$A_{(m,\ n)} \cdot B_{(n,\ p)} = C_{(m,\ p)}.$$

- Prvek c_{ij} výsledné matice $C = A \cdot B$ je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

- Výsledná matice ***C*** je typu ***(m, p).***

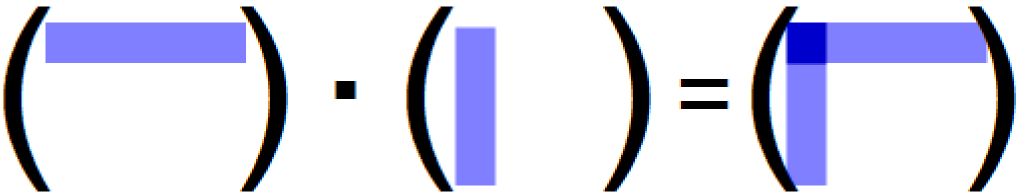
[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Vlastnosti součinu matic *A* a *B*:

- Násobení matic není obecně komutativní. Pokud jsou součiny ***AB*** a ***BA*** definovány, stejně nemusí platit ***AB = BA***. V některých případech tato vlastnost může platit.
- Pro libovolnou matici ***A*** platí ***0A = 0*** a ***A0 = 0***, kde ***0*** je nulová matice.
- Pro libovolnou matici ***A*** platí ***IA = A*** a ***AI = A***, kde ***I*** je jednotková matice.
- Součin dvou nenulových matic může být nulová matice. Z rovnosti ***AB = 0*** nevyplývá, že matice ***A*** nebo ***B*** musí být nulová matice.
- Asociativní zákon ***A (BC) = (AB)C.***
- Distributivní zákon ***(A + B)C = AC + BC.***
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- ***r (AB) = (rA)B = A(rB),*** *r* je libovolné číslo.
- Pomocí součinu můžeme definovat mocninu čtvercové matice:
  - $A^1 = A$;
  - $A^n = A^{n-1} A$, pro $n \in N, n \geq 2$;
  - $A^0 = I$.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Obrázek 7



[dle Havrlant, Lukáš. viz (17)]

Př.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1+10+12} & \mathbf{4+35+12} & \mathbf{6+10+20} \\ \mathbf{2+12+9} & \mathbf{8+42+9} & \mathbf{12+12+15} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{23} & \mathbf{51} & \mathbf{36} \\ \mathbf{23} & \mathbf{59} & \mathbf{39} \end{pmatrix}$$

Při násobení matic násobíme:

1. První řádek první matice s prvním sloupcem druhé matice a vše sčítáme.
2. Druhý řádek první matice s prvním sloupcem druhé matice a vše sčítáme.
3. První řádek první matice s druhým sloupcem druhé matice a vše sčítáme.
4. Druhý řádek první matice s druhým sloupcem druhé matice a vše sčítáme.
5. První řádek první matice s třetím sloupcem druhé matice a vše sčítáme.
6. Druhý řádek první matice s třetím sloupcem druhé matice a vše sčítáme.

Násobíme mezi sebou prvky jednotlivých řádků s příslušnými prvky jednotlivých sloupců a pak tyto součiny sčítáme.

5.3.4 DETERMINANT

Determinantem čtvercové matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1k_1}})$ řádu n nazýváme číslo

$\boldsymbol{det\,A} = \sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1k_1}}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{2k_2}} \dots \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{nk_n}}$, kde sčítáme přes všechny permutace $\boldsymbol{P}$ množiny $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$. Veličina ***Z (P)*** je tzv. znaménko permutace *P*. [dle Determinant matice. viz (16)]

Determinant 2. řádu

Je dána čtvercová matice 2. řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{22}} \end{pmatrix},$$

pak číslo $\boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$se nazývá ***determinant matice A*** a značí se:

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{22}} \end{vmatrix}, det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{22}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{det\,A}.$ [dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{6} & \boldsymbol{9} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{det\,A = 1.9 - 6.5 = 9 - 30 = -21}$$

Determinant 3. řádu

Je dána čtvercová matice 3. řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix},$$

pak číslo $\boldsymbol{a_{11}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{12}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{13}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{vmatrix}$ se nazývá determinant matice A a značí se

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}, det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{det\,A}.$ [dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{det\,A} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.(28 - 15) - 2(63 - 9) + 1(45 - 12) = 13 - 108 + 33 =$$

$$= -62$$

Počítáme podle rozvoje prvního řádku.

Determinant *n*-tého řádu

Determinant čtvercové matice n-tého řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

je číslo označované ***det A*** a je definován takto:

- ***Pro n = 1 je det A =*** a_{11}
- ***Pro n = 2 je det A =*** $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- ***Pro n > 2 je***

Rozvoj determinantu podle i-tého řádku:

$$\boldsymbol{det\,A} = (-1)^{i+1}a_{i1}detA_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}detA_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}detA_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}detA_{ij}.$$

Rozvoj determinantu podle j-tého sloupce:

$$\boldsymbol{det\,A} = (-1)^{1+j}a_{1j}detA_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}detA_{2j} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}detA_{nj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}detA_{ij}.$$

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Matice A_{ij} je matic řádu *n – 1* vzniklá z původní matice A vynecháním *i*-tého řádku a *j*-tého sloupce, *i =1, 2, …, n; j = 1, 2, …, n.*

$\boldsymbol{D_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}}$, je algebraický doplněk prvku a_{ij}.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{det\,A} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} == (\mathbf{-1})^{\mathbf{2+4}} . \mathbf{1} . \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{vmatrix} =$$

$$(\mathbf{-1})^{\mathbf{1+3}} . (\mathbf{-1}) . \begin{vmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = = \mathbf{-(-56+42)} = \mathbf{14}.$$

Výpočet determinantu čtvercové matice 4. řádu.

<u>**Postup výpočtu:**</u>

1. Výhodný pro nás bude rozvoj podle čtvrtého sloupce, tak druhý řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme k třetímu řádku, a druhý řádek přičteme k čtvrtému řádku. První a druhý řádek jen opíšeme.
2. Nyní uděláme rozvoj podle třetího sloupce, první řádek vynásobíme číslem -1 a přičteme k řádku druhému a opět první řádek vynásobíme číslem 2 a přičteme k řádku třetímu. První řádek opět opíšeme.
3. Nyní už jednoduše vypočítáme determinant matice A.

Předpis pro určení **determinantu 3. řádu** se nazývá **Sarrusovo pravidlo:**

$$\boldsymbol{det\,A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33-} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Vlastnosti determinantu

- Pro libovolnou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{det\ A^T = det\ A.}$
- Zaměníme-li v matici pořadí dvou řádků, změní se znaménko determinantu.
- Má-li matice dva řádky stejné, je determinant matice roven nule.
- Z definice determinantu plyne, je-li jeden řádek matice $\boldsymbol{A}$ nulový je determinant matice $\boldsymbol{A}$ roven nule.
- Vznikne-li matice $\boldsymbol{B}$ z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením jednoho řádku číslem $\boldsymbol{k}$, je

$$\boldsymbol{det\ B = k\ det\ A.}$$

- Vznikne-li matice $\boldsymbol{B}$ z matice $\boldsymbol{A}$ přičtením k-násobku ***i-tého*** řádku k ***j-tému***, je

$$\boldsymbol{det\ B = det\ A.}$$

- Jsou-li $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ čtvercové matice téhož řádu, pak $\boldsymbol{det\ AB = det\ A\ det\ B}$.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

5.3.5 INVERZNÍ MATICE

Čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly, se nazývá regulární matice.

Čtvercová matice, jejíž determinant je roven nule, se nazývá singulární matice.

- Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární matice, $\boldsymbol{I}$ jednotková matice. Jestliže pro matici $\boldsymbol{X}$ platí

  $\boldsymbol{AX = XA = I,}$ nazývá se matice $\boldsymbol{X}$ inverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$ a značí se $\boldsymbol{A^{-1}}$.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Vlastnosti inverzní matice

- Ke každé čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.
- Ke každé regulární matici existuje právě jedna inverzní matice.
- $\boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}$.
- $\boldsymbol{I^{-1} = I}$.
- $\boldsymbol{(AC)^{-1} = C^{-1} A^{-1}}$, pokud je definována jedna strana rovnosti.
- $\boldsymbol{(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}}$.
- $\boldsymbol{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$.
- Inverzní matice $\boldsymbol{X}$ k diagonální matici $\boldsymbol{D = (d_i)}$, $\boldsymbol{d_i \neq 0}$, je opět diagonální matice $\boldsymbol{X = D^{-1} = (\frac{1}{d_i})}$.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

Př.

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 3.3 - 2.1 = 9 - 2 = 7}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}}$$

K výpočtu inverzí matice nejdříve musíme zjistit determinant matice a poté jeho převrácenou hodnotou násobit matici.

5.3.6 HODNOST MATICE

W. K. Clifford (1845 – 1879)

Ve svých pracích se věnoval především algebře, neeukleidovské a projektivní geometrii a popularizaci matematiky a fyziky. V práci z roku 1882, která byla publikována po smrti autora, se nachází náznaky k pojmu hodnost matic. Singulární matice třetího řádu zde klasifikoval jako matice *„indeterminate in the first degree.“* [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

G. F. Frobenius (1849 – 1917)

G. F. Frobenius se v matematice věnoval především oblasti algebry. V mnoha pramenech se můžeme dočíst, že pojem hodnost matice zavedl v roce 1879 právě Frobenius, někdy se také hovoří o Sylvestrově pojmu nulity z roku 1882. G. Frobenius začal maticovou symboliku používat docela pozdě. V jeho práci *Über homogene totale Differentialgleichungen* najdeme definici hodnosti determinantu. V pojednání z roku 1879 *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* hovoří o hodnosti obdélníkového systému prvků. Je zde skryta hodnost čtvercové a obdélníkové matice.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

J. J. Sylvester (1814 – 1897)

J. J. Sylvester dospěl nezávisle na G. Frobeniovi k pojmu nulita, kterým můžeme hodnost matice nahradit. Roku 1882 v práci *On the properties of a split matrix* ve které se věnoval součinu matic, nejprve definoval nulitu matic.

Jeho zásadní výsledek je formulace o nulitě součinu matic: *„Nulita součinu matic je větší nebo rovna nulitě každého z činitelů a menší nebo rovna jejich součtu.“*

V roce 1884 J. J. Sylvester ve své práci *Lectures on the principles of universal algebra*, vysvětluje základní pojmy týkající se teorie matic (pojem matic, maticové násobení, nulitu, …). [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

L. Kronecker také přispěl k šíření pojmu hodnost matice, který ve svých pracích využíval. V roce 1884 definoval pojem hodnost systému reálných čísel v práci *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen*. Významný přínos do matematiky je jeho symbol z roku 1866, $\boldsymbol{\delta_{ih}}$ $\boldsymbol{Kroneckerovo\ delta}$.

[dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Eduard Weyr (1852 – 1903)

E. Weyr byl autorem několika učebnic. Se svým bratrem Emilem sepsali třídílnou knihu *Základové vyšší geometrie*, dále je autorem *Projektivní geometrie* a také *Počet differenciálný*. V své práci *Sur la théorie des matrices* z roku 1885 zveřejnil nulitu součinu dvou matic. Ve svých dalších dílech se věnoval otázkám nulity matic a často citoval Sylvesterovy práce.

Max Koecher v knize *Lineare Algebra und analytische Geometrie uvedl Weyrovu-Frobeniovy nerovnost*, které se týkaly nulity matic.

Důkaz Weyrova tvrzení týkající se nulity matic uvedl ve své práci *Sur les matrices singuliéres* z roku 1936 Otakar Borůvka. O tomto problému se v roce 1953 zmínil i Günter Pickert. [dle Bečvář, Jindřich. viz (2)]

Hodnost matice

Hodností dané nenulové matice ***A*** rozumíme přirozené číslo ***h = hod A*** takové, že existuje nenulový minor řádu ***h***, zatímco každý minor řádu ***h + 1*** je roven nule.

Hodností matice ***A*** rozumíme přirozené číslo ***h = hod A***, které udává maximální počet lineárně nezávislých řádů (sloupců) matice ***A***. Je-li ***A*** nulová matice, pak ***hod A = 0***.

[dle Ježek, František, Míková, Marta. viz (9)]

$$\boldsymbol{P\check{r}.\ A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-13} & \mathbf{-22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-18} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{hod\,(A) = 3}$$

Úprava matice:

1. První řádek vynásobíme číslem -2 a přičteme k druhému řádku.
2. První řádek vynásobíme číslem -6 a přičteme k třetímu řádku.
3. Druhý řádek vynásobíme číslem -13 a přičteme k dvojnásobku třetího řádku.

Pro zjištění hodnosti matice musíme matici převést do tvaru, kdy prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové. Hodnost matice je pak počet řádku v matici.

Veškeré základní informace o historii matic a jejich základních vlastností jsme již uvedli. V poslední kapitole ukážeme využití matic a maticového počtu v matematice a ostatních vědních disciplínách a dále uvedeme některé speciální druhy matic.

6 VYUŽITÍ MATIC A MATICOVÉHO POČTU

Využití matic není jen v matematice, ale sahá i do ostatních vědních disciplín. Některá využití ať už v matematice nebo v jiné vědě si nyní ukážeme.

Maticový počet se dnes využívá v elektrotechnice, mechanice, statice, optice, nukleární fyzice, při výpočtech ekonomického charakteru a v řadě dalších oborů. Maticový počet se v aplikované matematice využívá mnohem častěji.

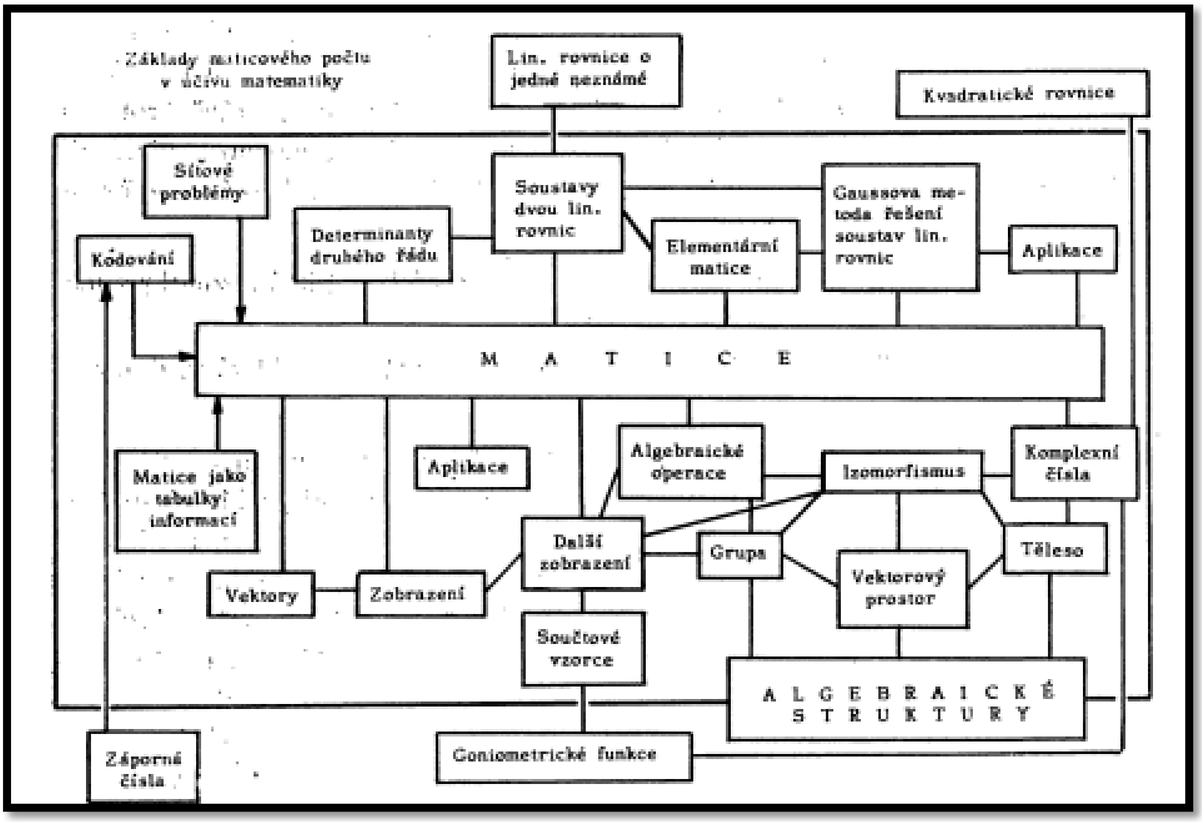
[dle Říha, Ota. viz (11)]

Díky maticím můžeme objasnit mnoho, na první pohled odlišných témat.

Matice nám umožňují:

- Seznámit žáky s nekomutativní operací, násobením.
- Ukázat existenci dělitelů nuly.
- Využít matic při probírání vektorového prostoru.
- Souvislost geometrických zobrazení, skládání s maticemi a násobení.
- Odvození součtového vzorce pro sinus a kosinus, který dostaneme složením dvou rotací se středem v počátku o úhel α, β.
- Seznámení s pojmy grupa a izomorfismus grup.
- Řešení soustav lineárních rovnic.
- Pomocí matic zavést komplexní čísla, protože těleso komplexních čísel je izomorfní s tělesem matic $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, kde\ a, b\ jsou\ reálná\ čísla.$
- Užití matic v pravděpodobnosti.

[dle Říha, Ota. viz (11)]



[dle Říha, Ota. viz (11)]

Obrázek 8

Matice nám mohou posloužit jako model struktury nejdříve s jednou operací a později se dvěma operacemi. Od tématu matice se můžeme dostat až k tématu algebraických struktur. Funkce matic je v použití u ostatních témat důležitá a je dobrým způsobem jejich znázornění. [dle Říha, Ota. viz (11)]

Využití matic ve školské matematice:

- Matice se uplatňují v aplikované matematice a toto využití můžeme ukázat v některých aplikacích do učiva matematiky.
- Díky maticím můžeme spojit různá témata v učivu.
- Matice nám umožňují získat řadu příkladů různých algebraických struktur.
- Díky maticovému počtu si vytvoří základy pro další rozvoj lineární algebry, analytické geometrie a ostatních disciplín. [dle Říha, Ota. viz (11)]

Existuje celá řada různých druhů matic nebo speciálních matic, které se uplatňují v praxi. Můžeme mluvit o maticích stochastických, monotónních, unimodulárních a dalších. Právě stochastické matice patří mezi nejpoužívanější v praxi.

[dle Říha, Ota. viz (11)]

Stochastická matice

Stochastická matice je taková matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ik}})$ řádu $\boldsymbol{n}$, právě když pro její prvky platí $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{a_{ik}} \leq \mathbf{1}$ a zároveň $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{ik}} = \mathbf{1}$ *, pro i = 1, 2, …, n.* [dle Holenda, Jiří. viz (10)]

Mocniny stochastických matic se používají k vyšetřování stochastických procesů za použití Markovových řetězců, ty se využívají především v teorii pravděpodobnosti. Dále se stochastické matice využívají především v různých modelech ekonomických jevů. Jejich význam je, že modelují reálné procesy probíhající za přítomnosti náhodných vlivů v přírodě, technice či ekonomii. [dle Holenda, Jiří. viz (10)], [dle Stuchlíková, Radka. viz (12)]

Unimodulární matice

Totálně unimodulární matice je taková matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, jestliže platí.

- $\boldsymbol{a_{ij}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{-1}\}$
- determinant každé čtvercové podmatice matice A je roven 0 nebo ± 1.

[dle Holenda, Jiří. viz (10)]

Totálně unimodulární matice se používají především v úlohách celočíselného programování, kde se pro výpočet používají jednodušší algoritmy obecného programování.

[dle Holenda, Jiří. viz (10)], [dle Ryjáček, Zdeněk. viz (13)]

Hurwitzova matice a stabilní mnohočleny

V technických úlohách je důležité mít informace o počtu kořenů mnohočlenů, které leží v dané oblasti Gaussovy roviny. Jedná se o řešení otázek stability, kdy je důležité vědět, kde se kořen daného mnohočlenu nachází.

Mnohočlen stupně alespoň 1 se nazývá **Hurwitzův** nebo **H-mnohočlen**, má-li každý jeho kořen zápornou reálnou část.

Je-li $a\,(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_{n,}$ *H*-mnohočlen stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$, pak tyto koeficienty jsou všechny kladné.

Každý mnohočlen stupně *n* < *3* se všemi koeficienty kladnými je nutně *H*-mnohočlen.

Př.

Uvažujme mnohočlen $\boldsymbol{a\,(z) = z^4 + 5z^3 + 4z^2 + 3z + 2}$.

Hurwitzova matice je zde:

$$\boldsymbol{H\,(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \text{ a její hlavní minory jsou } \boldsymbol{det}\,(\mathbf{5}) = \mathbf{5}, \boldsymbol{det} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \mathbf{17}$$

$$\boldsymbol{det} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{det} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \mathbf{2}$$

Tyto hlavní minory jsou kladné, takže daný mnohočlen je Hurwitzův.

[dle Holenda, Jiří. viz (10)]

7 ZÁVĚR

Ve své práci jsem se zabývala historií matic. Začala jsem samotnými předchůdci matic a to determinanty. Na první pohled je divné, že matice vycházely z determinantů, i když tomu tak skutečně bylo.

Na začátku své práce jsem zkoumala historii determinantů, jejich základní využití, a významné matematiky, kteří k rozvoji determinantů přispěli.

Poté jsem se začala věnovat stěžejnímu tématu, a to historii matic. Začala jsem prvními zmínkami o maticích až po jejich skutečný rozvoj. Z dostupných zdrojů jsme, že samotné matice využívali matematici již v 2. století př. n. l., a uvedla jsem příklady, které to dokazují. Samotný příklad si převedli to tabulky a prováděli úpravy, které se podobají úpravám dnes, metoda, kterou pro řešení používali, byla metoda paralelního ohodnocení.

Dále jsem postupovala významnými matematiky, kteří ve své práci uváděli nějaký náznak teorie matic a tím přispěli k jejich rozvoji. Psala jsem zde např.: o L. Eulerovi, C. F. Gaussovi. Tímto jsem se dostala k samotnému jádru teorie matic a jejich zakladatelům. Nejprve jsem se zabývala samotnými zakladateli teorie matic. Zkoumala jsem život a díla A. Cayleyho a J. J. Sylvestera, kteří byli dobrými přáteli. Tyto články dovedly A. Cayleyho k sepsání díla A memoir on the theory of matrices z roku 1858, které je považováno za zrod teorie matic. Toto dílo dalo podnět ostatním matematikům k dalšímu zkoumání a rozvoji teorie matic. Za zmínku stojí E. Weyr český matematik, který se teorií matic zaobíral.

V závěru své práce jsem uvedla základní vlastnosti matic s názornými příklady a praktické využití matic i v ostatním vědních disciplínách.

V práci historie matic jsem se snažila zachytit základní informace o vzniku teorie matic i prvních zmínkách jejich použití. Uvedla jsem zde spoustu významných matematiků, kteří se podíleli nemalou měrou na jejich rozvoji. Názorné příklady a ukázka využití matic v ostatních vědních disciplínách nám může ukázat důležitost jejich objevu.

8 SEZNAM LITERATURY

1. SVRŠEK, Jiří., BARTOŠ, Roman. *Z historie matematiky a fyziky (4): Matice a determinanty*[online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://natura.baf.cz/natura/2001/9/20010903.html>
2. BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry*. 1. vyd. V Praze: Matfyzpress, 2007, 519 s. Dějiny matematiky, sv. 35. ISBN 978-807-3780-364.
3. *Osobnosti* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www.quido.cz/osobnosti/index.htm>.
4. BUREŠ, Jiří. *Slavní fyzici: životopisy* [online]. 2002 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www.converter.cz/fyzici/index.htm>.
5. *Ferdinand Gotthold Max Eisenstein* [online]. 2006 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www2.stetson.edu/~efriedma/periodictable/html/In>.
6. *Charles Hermite* [online]. 2006 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/263303/Charles-Hermite>.
7. *Idexes of Biographies* [online]. 2005 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html>.
8. HUDEČEK, Jiří. Matematika v devíti kapitolách: *sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfega a dalších z doby Tang*. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2008, 244 s. Dějiny matematiky, sv. 37. ISBN 978-80-7378-046-3.
9. JEŽEK, František a Marta MÍKOVÁ. *Maticová algebra a analytická geometrie*. 2., přeprac. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, 2003, 167 s. ISBN 80-708-2996-6.
10. HOLENDA, Jiří. O maticích. Vyd. 1. Plzeň: Vydavatelský servis, 2007, 227 s. ISBN 978-80-86843-16-2.
11. ŘÍHA, Ota. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie: Základy maticového počtu v moderním pojetí vyučování matematice*[online]. 1970 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/137840/PokrokyMFA_15-1970-5_2.pdf>.
12. STUCHLÍKOVÁ, Radka. *Využití stochastických matic* [online]. Brno, 2009 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://is.muni.cz/th/150529/prif_m/diplomka.pdf>.

13. RYJÁČEK, Zdeněk. *Teorie grafů a diskrétní optimalizace 2: Pracovní texty přednášek* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <//www.cam.zcu.cz/~ryjacek/students/ps/TGD2.pdf>.

14. *Kapitola 1: Rychlé násobení matic a Strassenův algoritmus ve Winogradově úpravě* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://people.fjfi.cvut.cz/pelanedi/TEMA/SkriptaTEMAKonecSemestru/StrassenZvonik.pdf>.

15. KAVAN, Ladislav. *Kvaterniony a interpolace* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <https://cent.felk.cvut.cz/predmety/39PHA/data/prednasky/5/pha5quat.pdf>.

16. *Determinant matice* [online]. 2009 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://artemis.osu.cz/mmmat/txt/la/mde.htm>.

17. HAVRLANT, Lukáš. *Matematika polopatě: Matice* [online]. 2006 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z WWW: <http://www.matweb.cz/matice>.

9 SEZNAM OBRÁZKŮ

10 SEZNAM TABULEK

11 RESUMÉ

My degree thesis deals with the history of matrices. The thesis is opened with the predecessors of matrices – determinants. At first sight it seems strange that matrices issued from determinants, although the reality is completely opposite.

At the beginning of my thesis I have explored the history of determinants, their basic use, and significant mathematicians who contributed to development of determinants.

The following pages are dedicated to the cardinal topic – history of matrices. I have begun with the first mentions of matrices followed by the development thereof. Available resources confirm that the matrices themselves were used by mathematicians already in the 2nd century BC and I have given examples proving the same. The mathematicians translated the problem into a table and made adjustments similar to those made today, using the method of solution known as parallel evaluation.

I further mentioned significant mathematicians who referred to any traces of theory of matrices, thus contributing to their development. I have written, for example, about L. Euler and C. F. Gauss. Through them I approached the very core of the theory of matrices and their founders. At first I was concerned with the founders of the theory of matrices. I investigated the life and work of A. Cayley and J. J. Sylvester who were good friends. In 1858 A. Cayley wrote A memoir on the theory of matrices, today considered to be the inception of the theory of matrices. His work was an impulse for the other mathematicians to investigate and develop the theory further. Worth mentioning is the Czech mathematician E. Weyr who was engaged in the theory of matrices, too.

At the end of my degree thesis I presented the basic properties of matrices with illustrations and practical use of matrices in other disciplines.

In my degree thesis titled History of Matrices I attempted to present basic information on the formation of the theory of matrices as well as the first mentions of their use. I have quoted many significant mathematicians who largely participated in development of matrices. Ilustrative examples and demonstration of the use of matrices in other disciplines can show us the significance of their discovery.