

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky
Program/Obor: Matematika/Matematika

Diskrétní reprezentace ploch volného tvaru v architektonické geometrii

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracovala: Adéla Vytisková
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Rok: 2012

vložíte zadání práce

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Chomutově dne

.....
Adéla Výtisková

Poděkování

Děkuji Doc. RNDr. Miroslavu Lávičkovi Ph.D. za vedení mé diplomové práce, trpělivost, ochotu při řešení problémů a cenné rady.

Adéla Vytisková

Název práce:

Diskrétní reprezentace ploch volného tvaru v architektonické geometrii

Autor: Adéla Vytisková

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce se zaměřuje na diskrétní plochy volného tvaru a jejich využití v architektonické geometrii. Jsou zde obsaženy různé způsoby, jakými lze aproximovat hladké plochy volného tvaru, za použití sítí s pouze jedním typem stěn. Jedná se konkrétně o trojúhelníkové, čtyřúhelníkové a šestiúhelníkové stěny. Je zde také představen problém paralelních sítí a tzv. polodiskrétních sítí. Druhé zmíněné se skládají ze stěn, které jsou hladké, ale navzájem diskrétně spojeny. Na konci této práce je představen algoritmus zabývající se tvorbou polodiskrétních ploch s předem danými typy stěn. Tento algoritmus se snaží dosáhnout nejmenší možné výsledné ceny.

Klíčová slova: diskrétní plochy volného tvaru, trojúhelníkové sítě, geodetické sféry, čtyřúhelníkové sítě, PQ-sítě, šestiúhelníkové sítě, P-Hex sítě, paralelní sítě, diskrétní ofset, polodiskrétní sítě, D-strip model

Title:

Discrete representation of freeform shapes in architectural geometry

Author: Adéla Vytisková

Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Department of Mathematics

Abstract: This thesis focus on the way how discrete freeform surfaces can be used in architectural geometry. It contains different ways how to approximate smooth freeform surfaces mainly by meshes containing only one type of faces, in particular triangular, quadrilateral and hexagonal faces. It also deals with the problem of parallel meshes and special cases of freeform surfaces called semidiscrete. The later consists of faces that are smooth but discretely connected. At the end of this thesis algorithm for creating semidiscrete meshes with certain types of faces is introduced. This algorithm tries to reach minimum possible cost.

Key words: discrete freeform surfaces, triangular mesh, geodetic sphere, quadrilateral mesh, PQ-mesh, hexagonal mesh, P-Hex mesh, parallel meshes, discrete offset, semidiscrete mesh, D-strip model

Obsah

Úvod	8
1 Mnohostěny a plochy volného tvaru	11
1.1 Mnohostěny	11
1.2 Hladké plochy volného tvaru	15
2 Základní pojmy architektonické geometrie	19
2.1 Typy sítí	19
2.2 Paralelní a polodiskrétní plochy	23
3 Typy diskrétních sítí	26
3.1 Trojúhelníkové sítě	26
3.1.1 Obecně o trojúhelníkových sítích	26
3.1.2 Geodetické sféry a geodetické kopule	28
3.2 Čtyřúhelníkové sítě	35
3.2.1 Obecně o čtyřúhelníkových sítích	35
3.2.2 Čtyřúhelníkové sítě s rovinnými stěnami	35
3.3 Šestiúhelníkové sítě	42
3.3.1 Rovinné šestiúhelníkové sítě	42
3.3.2 Fulereny	46
4 Paralelní sítě	48
4.1 Obecně o paralelních sítích	48
4.2 Hranové ofsety	50
4.3 Vrcholový a stěnový ofset	51
5 Polodiskrétní sítě	52

5.1	D-strip modely	53
5.2	PS-modely	54
5.3	Další typy D-strip modelů	55
5.3.1	Geodetické strip modely	56
5.3.2	Válcové strip modely	56
6	Algoritmus pro diskrétní realizaci ploch volného tvaru	58
7	Závěr	63
	Literatura	68

Úvod

V oborech pracujících s trojrozměrnými objekty je zapotřebí, aby se s těmito objekty dalo snadno manipulovat. Do určité míry to umožňují „jednoduché“ plochy, jako jsou sférické plochy, válcové a kuželové plochy, nebo například přímkové plochy, ale v dnešní době se využívá mnohem komplikovanějších tvarů, než jakých je možno dosáhnout pomocí těchto jednoduchých objektů. Odpovědí na tento problém jsou hladké *plochy volného tvaru* (anglicky *freeform surfaces*), mezi které patří například *B-spline plochy* nebo *Bézierovy plochy* a jejich racionální analogie. Pro práci s těmito objekty se využívá převážně CAD systémů.

Prvním odvětvím, ve kterém se začaly tyto plochy cíleně využívat a dále rozvíjet, byla počítačová animace, ale jejich využití se rozšířilo i do dalších odvětví, mezi které patří i architektura. Plochy, o kterých byla řeč, byly hladké plochy, což ale pro účely architektury není vhodné kvůli finančním požadavkům i nárokům při konstrukci. Došlo tedy k přechodu k jejich diskrétním a polodiskrétním variantám. Právě *diskrétní plochy volného tvaru* jsou předmětem této diplomové práce.

Přestože se jedná o mladé odvětví geometrie, objevovaly se takovéto plochy v architektuře už podstatně dříve. Nicméně až v minulém století došlo k jejich bližšímu zkoumání a dnes se jedná převážně o moderní budovy stavěné z oceli a skla, jak bude později ukázáno.

Nejstarší známé stavby, které by se do této kategorie daly zařadit, se datují až 400 000 let do minulosti. Šlo o přístřeší s téměř kopulovitým tvarem, která byla postavena ze dřeva a větví. Dokonce i *dvojnásobně zakřivené plochy* (*double-curved surfaces*), které kvůli své náročnosti na realizaci představují jeden ze současných otevřených problémů, se v průběhu času v architektuře vyskytovaly a to především jako v sochařství.

Ale až 19. století přineslo spolu s industrializací pro architekty značnou svobodu a nové možnosti při realizaci jejich představ. Důležitou úlohu zde hrály nové stavební materiály jako například železo, ocel a železobeton. V raném 20. století bylo objevení metod pro výrobu skleněných panelů dalším důležitým milníkem, který přinesl velké změny. Příkladem stavby, při jejíž konstrukci bylo využito těchto nových možností, je *Sagrada Família* (viz obrázek 2.1) od Antonia Gaudiho (1852–1926). Její stavba byla zahájena roku 1882, ale nebyla dosud dokončena.

Železobeton se dočkal svého největšího rozmachu v 60. letech 20. století. Nejprve se zdál jako vhodná cesta, ale brzy se ukázala jeho značná omezení, mezi které patří jeho váha, cena a pracovní síla. Snaha o zredukování jeho váhy vedla k seg-

mentaci požadovaného povrchu pouze na konstrukční a obvodové prvky. Roku 1914 použil německý architekt Bruno Taut (1880–1938) železobetonové příčky jako konstrukční prvky pro svůj *Skleněný pavilon* (viz obrázek 2.1) společně s luxferskými skleněnými cihlami. Sklo mělo symbolizovat „plynulost a třpyt“ a „nejvyšší symbol čistoty a smrti“. Dalším příkladem prefabrikace jsou kulovité lastury, které tvoří střechu *Opery* v Sydney (viz obrázek 2.1) od Jorna Utzena (1918–2008).



(a) Skleněný pavilon [7]



(b) Sagrada Familia [26]



(c) Opera v Sydney [31]

Obrázek 1: Budovy dvacátého století

Vývoj od železa k oceli nabídl nové možnosti prefabrikace stejně jako nové montážní logistiky a materiálové kompozice geometricky náročných lehkých (ve smyslu váhy) struktur. Za průkopníky lze označovat Bruckminstra Fullera, který je známý především díky svým geodetickým sférám, Vladimira Grigorjeviče Šuchova a Freie Otta s jejich visutými konstrukcemi, a dále například i dvojici Schober a Slaich. Obecně se dá říci, že znalost geometrie v kombinaci s novými metodami stavebních výpočtů

otevívají nové přístupy průmyslové výroby a konstrukce ploch volného tvaru (historie byla převzata z [20]).

Ve své práci si kladu za cíl představit problematiku diskretních ploch a s nimi spojenou náročnost jejich vytváření. Jelikož není dostupná žádná literatura v českém jazyce, je také mým cílem přinést tuto problematiku do českého prostředí. Z tohoto důvodu jsem byla nucena pro některé anglické pojmy, jejichž český ekvivalent neexistuje, najít česká pojmenování.

Ještě před tím, než se budeme moci zabývat diskretními plochami volného tvaru, jsou v kapitole 1 pro připomenutí uvedena dvě témata, která s nimi úzce souvisí. Jedná se o geometrii mnohostěnů a o hladké plochy volného tvaru. Zmíněno je i několik pojmů z diskretní diferenciální geometrie. Na tuto kapitolu dále navazuje seznámení s pojmy a definicemi, které budou zapotřebí v dalších sekcích.

Třetí kapitola se věnuje konkrétním typům sítí diskretních ploch volného tvaru, jež jsou rozděleny na základě typů stěn, ze kterých se skládají. Hlavním předmětem této kapitoly jsou ovšem sítě s rovinnými stěnami. V případě trojúhelníkových sítí je tento předpoklad automaticky splněn, nicméně pro sítě s n -úhelníkovými stěnami, kde $n > 3$, se situace značně komplikuje.

Dále se zabírám převedením dvojrozměrných sítí na trojrozměrné modely. K tomu je zapotřebí zabývat se paralelními sítěmi a teorií ofsetů pro diskretní plochy. Ofsety v diskretním případě jsou komplikovanějším problémem než v hladkém a dělí se na tři typy: vrcholový, hranový a stěnový ofset. Pro architektonickou geometrii je nejvýhodnější využití ofsetu hranového, kterému je také věnován největší prostor. Protože z designového hlediska pouze diskretní plochy často nestačí, jsou předmětem zájmu i tzv. polodiskretní sítě. Jedná se o sítě s hladkými stěnami, které jsou ale na sebe diskretně napojeny. Mohou to být jednoduše nebo dvojnásobně zakřivené plochy, i když v případě dvojnásobně zakřivených ploch k tomu dochází jen ojedinele.

Poslední kapitola je věnována algoritmu pro diskretní realizaci ploch volného tvaru. Tento algoritmus negeneruje sítě s pouze jedním typem stěn, ale snaží se o co největší možné opakování stejných stěn pro snížení nákladů výsledné stavby.

Kapitola 1

Mnohostěny a plochy volného tvaru

Problematika diskretních ploch volného tvaru v sobě kombinuje teorii hladkých ploch volného tvaru s teorií týkající se mnohostěnů a diskretních ploch. Při jejich zkoumání je zapotřebí vlastnosti hladkých ploch, kterými se zabývá diferenciální geometrie, definovat i pro plochy diskretní. Zde přichází na řadu diskretní diferenciální geometrie.

1.1 Mnohostěny

Mnohostěny jako takové úzce souvisí s teorií grafů. Jejich grafové reprezentace nazýváme polytopické grafy, a jejich vrcholy a hrany mají mezi sebou stejné vztahy incidence jako jim odpovídající vrcholy a hrany mnohostěnu. Pro účely této práce ale není nutné se těmito polytopickými grafy zabývat. Touto problematikou jsem se zabývala ve své bakalářské práci [35], kde je možné nalézt podrobnější popis.

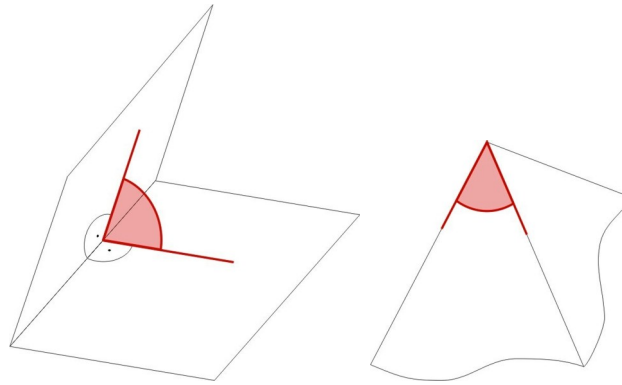
Definice 1.1.1 *Mnohostěn je trojrozměrné těleso, které je ohraničeno rovinnými mnohoúhelníky (konvexními i nekonvexními), které nazveme stěny. Průnikem těchto stěn je buď prázdná množina, bod (vrchol), nebo úsečka (hrana).*

Množinu všech stěn pak označíme f , množinu hran e a množinu vrcholů v .

Následující definice udává vlastnost, podle které lze mnohostěny rozdělit do dvou skupin. A to na *konvexní* a *nekonvexní*. Nejdříve je ale nutné definovat *stěnové* a *hranové úhly*.

Definice 1.1.2 *Mějme dvě polopřímky, které náležejí dvěma sousedním stěnám a které jsou zároveň kolmé na společnou hranu těchto stěn. Potom úhel, který tyto dvě polopřímky svírají, nazveme stěnový úhel.*

Úhel, který svírají hrany náležející jedné stěně a vycházející ze stejného vrcholu, se nazývá hranový úhel.



Obrázek 1.1: Stěnový úhel a hranový úhel

Definice 1.1.3 *Mnohostěn je konvexní právě tehdy, když všechny jeho stěnové úhly mají velikost menší než 180° .*

Mnohostěn je nekonvexní právě tehdy, když není konvexní.

Pokud vrcholy jednoho mnohostěnu odpovídají stěnám jiného, potom se jedná o *duální* mnohostěny. Tato vzájemná vlastnost je symetrická, takže pokud je jeden mnohostěn duální k druhému, je potom i tento druhý duální k prvnímu.

Další vlastnost, která nás u mnohostěňů často zajímá, je uvedena v následující definici.

Definice 1.1.4 *Mnohostěn je vepsán do kulové plochy, pokud všechny jeho vrcholy leží na jedné kulové ploše. Tuto kulovou plochu nazveme opsanou kulovou plochou.*

Neméně důležitou vlastností mnohostěňů je hodnota jejich *Eulerovy charakteristiky*.

Definice 1.1.5 *Eulerova charakteristika χ je hodnota, která je dána vztahem*

$$\chi = v - e + f \tag{1.1}$$

Následující věta udává vztah mezi konvexností mnohostěňů a hodnotou χ . Tato věta se nazývá Eulerova a existuje pro ni mnoho důkazů. Díky provázanosti s teorií grafů platí tato věta i pro rovinné polytopické grafy.

Věta 1.1.1 (Eulerova věta) *Máme dán konvexní mnohostěn P . Nechť v je počet vrcholů, e je počet hran a f je počet stěn. Potom platí*

$$\chi = v - e + f = 2. \tag{1.2}$$

Důkaz: K důkazu použijeme jednu z možných formulací Descartovy věty:

$$\sigma = 2\pi(v - 2), \quad (1.3)$$

kde σ je součet velikostí všech hranových úhlů. Přesné znění Descartovy věty společně s jejím důkazem lze nalézt v [35].

Povrch mnohostěnu tvoří f_i různých i -úhelníků. Platí

$$\sum_i f_i = f \quad (1.4)$$

$$\sum_i i f_i = 2e. \quad (1.5)$$

Využijeme vztahu (1.3)

$$\sigma = 2\pi(v - 2) = \pi \sum_i (i - 2) f_i. \quad (1.6)$$

Ze vztahů (1.4) a (1.5) vypočítáme

$$2e - 2f = \sum_i (i - 2) f_i \quad (1.7)$$

a po dosazení do (1.6) dostaneme

$$v - e + f = 2.$$

□

Eulerova věta ovšem platí i pro některé z nekonvexních mnohostěnů. Existuje i zobecněná verze Eulerovy věty, pomocí níž lze určit velikost Eulerovy charakteristiky χ pro jakýkoli mnohostěn. Tato věta se nazývá Euler-Poincarého věta. Další důkazy Eulerovy věty společně s její zobecněnou verzí jsou k nalezení v [35].

Mezi mnohostěny existují dvě podmnožiny mnohostěnů, které mají speciální vlastnosti. Jsou to pravidelné a polopravidelné mnohostěny. K jejich definici budeme potřebovat pojem *valence vrcholu*.

Definice 1.1.6 *Hodnotu, která určuje počet hran vycházejících z vrcholu, nazveme valencí.*

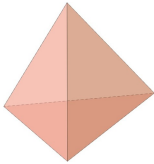
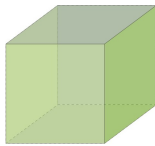
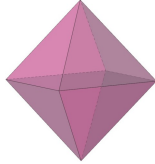
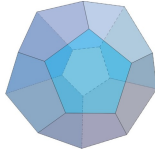
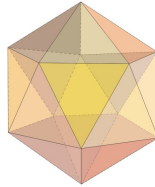
Nejprve zmíníme pravidelné mnohostěny:

Definice 1.1.7 *Pravidelné mnohostěny jsou tělesa, jejichž stěny jsou všechny shodné pravidelné mnohoúhelníky a jejichž všechny vrcholy mají stejnou valenci.*

Pravidelné mnohostěny pak rozdělujeme na konvexní a nekonvexní. Ty konvexní nazýváme *platónské mnohostěny* a je jich celkem pět, a nekonvexní *Kepler-Poinsotovy mnohostěny*, které jsou celkem čtyři. Každý z nich lze jednoznačně určit pomocí tzv. *Schläfliho symbolů*.

Definice 1.1.8 Valence vrcholu je počet hran (stěn), které vycházejí z tohoto vrcholu, a označíme ji q . Stupeň stěny nazýváme počet hran (vrcholů), které náležejí jedné stěně, a označíme ho p . Dvojice čísel $\{p, q\}$ se nazývá Schläfliho symbol.

Tabulka 1.1: Přehled platónských mnohostěňů





	čtyřstěn	krychle	osmistěn	dvanáctistěn	dvacetistěn
					
v	4	8	6	20	12
f	4	6	8	12	20
e	6	12	12	30	30
typ stěny	trojúhelník	čtverec	trojúhelník	pětiúhelník	trojúhelník
Schläfliho symbol	$\{3,3\}$	$\{4,3\}$	$\{3,4\}$	$\{5,3\}$	$\{3,5\}$
duál	čtyřstěn	osmistěn	krychle	dvacetistěn	dvanáctistěn

Dalším významným typem mnohostěňů jsou polopravidelné, nebo také *archimedovské mnohostěny*. Tyto mnohostěny jsou konvexní a lze je sestavit z platónských mnohostěňů.

Definice 1.1.9 Konvexní mnohostěny, jejichž stěnami jsou pouze pravidelné mnohoúhelníky a ve všech vrcholech mají stejné uspořádání stejných typů stěn, nazýváme archimedovské mnohostěny.

Celkem se jedná o 13 mnohostěňů společně se dvěma nekonečnými množinami prizem a antiprizem. Tyto mnohostěny lze popsat pomocí posloupnosti (a_1, a_2, \dots, a_k) stěn v každém z vrcholů. Čísla a_i pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ představují a_i -stranné mnohoúhelníky. Toto označení lze použít i pro platónská tělesa, ale zde se nepoužívá, protože se dává přednost Schläfliho symbolům.

Tabulka 1.2: Přehled Kepler-Poinsotových mnohostěnů

	velký dvanáctistěn	velký dvacetistěn	velký hvězdicovitý dvanáctistěn	malý hvězdicovitý dvanáctistěn
				
v	12	12	20	12
f	12	20	12	12
e	30	30	30	30
typ stěny	pětiúhelník	trojúhelník	pentagram	pentagram
Schläfliho symbol	$\{5, \frac{5}{2}\}$	$\{3, \frac{5}{2}\}$	$\{\frac{5}{2}, 3\}$	$\{\frac{5}{2}, 5\}$
χ	-6	2	2	-6
duální mnohostěn	malý hvězdicovitý dvanáctistěn	velký hvězdicovitý dvanáctistěn	velký dvacetistěn	malý dvanáctistěn

1.2 Hladké plochy volného tvaru

Jedná se plochy, které jsou určeny řídicí sítí a jejími vrcholy a umožňují popsat plochy, které jsou tvarově složité. Patří sem především *Bézierovy plochy*, *B-spline plochy* a *NURBS* (Non-uniform rational B-spline) *plochy*.

K zadání Bézierových ploch stačí pouze řídicí síť o $(m + 1) \times (n + 1)$ vrcholech. Tyto vrcholy jsou uspořádány v matici

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \dots & \mathbf{V}_{0,n} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \dots & \mathbf{V}_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{V}_{m,0} & \mathbf{V}_{m,1} & \dots & \mathbf{V}_{m,n} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{V}_{i,j}$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, m$ a $j = 0, 1, \dots, n$ jsou polohové vektory vrcholů řídicí sítě. Potom Bézierovy plochy můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{V}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

Tabulka 1.3: Přehled 13 archimedovských mnohostěnů

Název	Uspořádání ve vrcholu	v	f	e
zkosený čtyřstěn	(3,6,6)	12	8	18
zkosená krychle	(3,8,8)	24	14	36
zkosený dvanáctistěn	(3,10,10)	60	32	90
zkosený osmistěn	(4,6,6)	24	14	36
zkosený kuboektaedr	(4,6,8)	48	26	72
zkosený ikosododekaedr	(4,6,10)	120	62	180
zkosený dvacetistěn	(5,6,6)	60	32	90
prizma	(4,4, n)	$2n$	$n+2$	$3n$
kuboektaedr	(3,4,3,4)	12	14	24
rombokuboektaedr	(3,4,4,4)	24	26	48
romboikosododekaedr	(3,4,5,4)	60	62	120
ikosododekaedr	(3,5,3,5)	30	32	60
antiprizma	(3,3,3, n)	$2n$	$2n+2$	$4n$
osekaná krychle	(3,3,3,3,4)	24	38	60
osekaný dvanáctistěn	(3,3,3,3,5)	60	92	150

kde $u \in \langle 0, 1 \rangle$, $v \in \langle 0, 1 \rangle$ a hodnoty $B_i^k(u)$ jsou hodnoty *Bernsteinových polynomů* stupně k . Mluvíme o Bézierově ploše stupně (m, n) . Bézierovy plochy procházejí rohovými vrcholy sítě a jejich okrajové křivky jsou Bézierovy křivky. O Bernsteinových polynomech se lze dočíst v [15] a více o Bézierových plochách a křivkách nalezneme v [13, 15, 19]. Příklad racionální Bézierovy plochy viz obrázek 1.2.

Obecná B-spline plocha je opět určena řídicí sítí V , ale zde je navíc zapotřebí stupňů k, l pro parametry u, v a vektory parametrizace pro parametry u, v . Její explicitní vyjádření je následující:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{V}_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v).$$

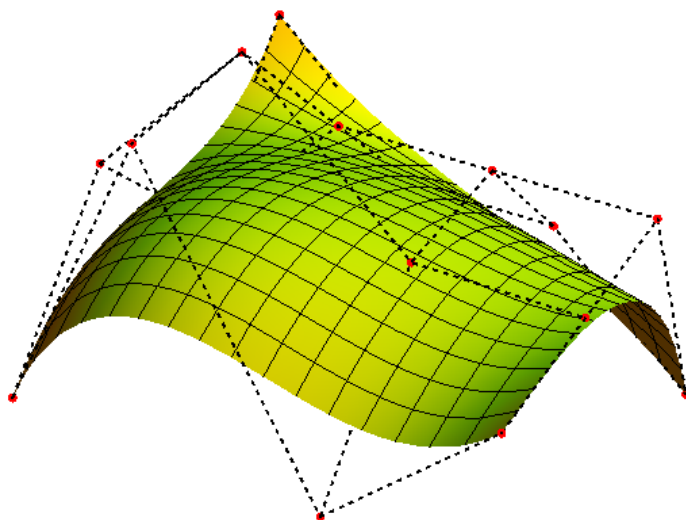
Zde veličiny $N_i^k(u)$ zastupují báze spline funkce, tedy funkce, které jsou po částech polynomicke a mají derivaci „co do nejvyššího řádu“. Hodnota k zastupuje jejich stupeň a dále zavádíme *vektor parametrizace* $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_m)$, pro který platí:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$$

Samotné báze funkce můžeme nyní definovat následovně:

- pro $k = 0$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Obrázek 1.2: Příklad racionální Bézierovy plochy

- pro $k > 0$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)$$

Analogicky platí, že hraničními křivkami B-spline ploch jsou B-spline křivky. O problematice B-spline křivek a ploch se lze více dočíst v [13, 15, 19].

Racionálním zobecněním B-spline ploch jsou NURBS plochy. Jedná se o racionální plochy a jednou z jejich výhod je, že jimi lze popsat také kvadriky. Ale na rozdíl od B-spline ploch se při práci s nimi pohybujeme v homogenních souřadnicích. Čtvrtá souřadnice má vždy význam váhy daného vrcholu řídicí sítě. Opět se o nich můžeme více dočíst v [13, 15, 19].

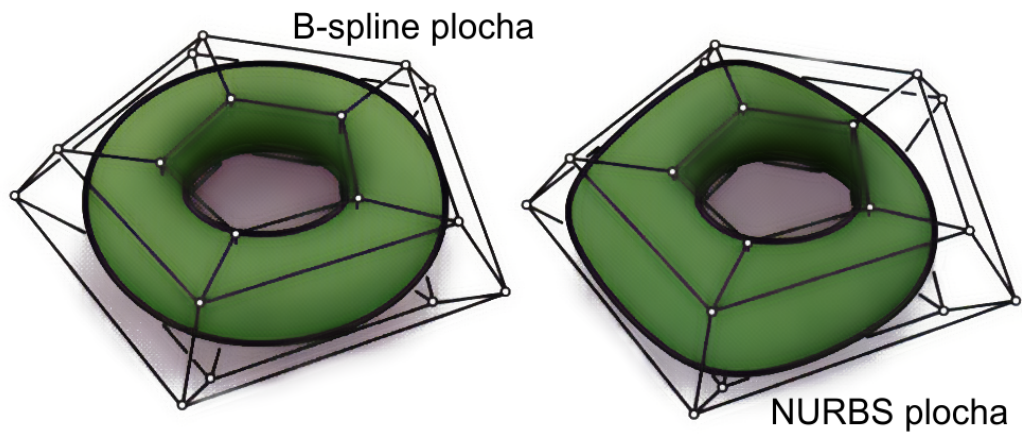
Při zkoumání vlastností ploch nás nejvíce zajímají především jejich křivosti, které se ale u hladkých a diskrétních ploch počítají jiným způsobem. V následujícím textu nás budou zajímat především *Gaussova křivost* a *hlavní křivosti*.

Hlavní křivost je extrémní normálová křivost v daném bodě. Může dojít pouze ke dvěma situacím. Buď v daném bodě jsou všechny normálové křivosti hlavní, nebo jsou právě dvě – maximální k_{max} a minimální k_{min} hlavní křivosti. Navíc vektory těchto dvou křivostí jsou na sebe kolmé.

Gaussova křivost se v hladkém případě počítá následovně:

$$K = k_{min} \cdot k_{max}.$$

Pokud je Gaussova křivost nulová ve všech bodech plochy (tj. $K = 0$), potom se jedná o rozvinutelnou plochu, čehož využijeme v kapitole 5. Diferenciální geometrií hladkých ploch se více zabývá [13, 14]. V diskrétním případě se Gaussova křivost počítá jako *úhlový defekt* ve vrcholu v diskrétní plochy:



Obrázek 1.3: Rozdíl mezi B-spline plochou (vlevo) a NURBS plochou (vpravo), která má v každém bodě jinou váhu (viz [19]).

$$G(v) = 2\pi - \sum \alpha_i,$$

kde α_i jsou hranové úhly u tohoto vrcholu. Takto zadaná Gaussova křivost se nemění ani při aplikaci izometrických zobrazení. Gaussova věta *Theorema Egregium* (viz [27]) je tedy splněna i v diskrétním případě.

Kapitola 2

Základní pojmy architektonické geometrie

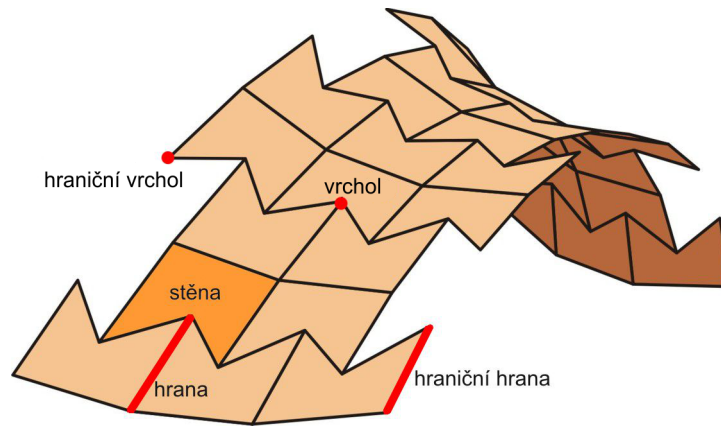
V této kapitole zavedeme všechny potřebné pojmy pro další kapitoly. Jejich výskyt není striktně daný rozdělením podle podkapitol zde uvedených, ale odpovídá místům v textu, kde je jich nejvíce využíváno. Převážnou většinu těchto pojmů je možné nalézt v [19]. U ostatních je jejich zdroj uveden přímo u jejich definice.

2.1 Typy sítí

K základní reprezentaci povrchů v architektonické geometrii se využívají takzvané *sítě* (meshes) s rovinnými stěnami, což jsou vlastně diskrétní (polyedrické) plochy, které je možno definovat následujícím způsobem (viz [16]).

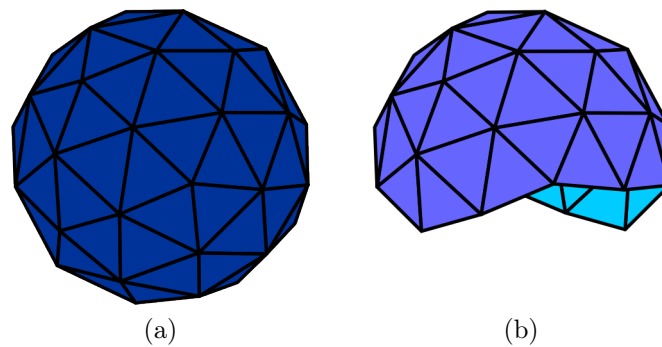
Definice 2.1.1 *Uvažujeme tři navzájem disjunktní množiny V , E a F , jejichž prvky po řadě nazýváme vrcholy, hrany a stěny, kde hrany jsou úsečky a stěny jsou mnohoúhelníky. Diskrétní plochou rozumíme sjednocení $E \cup V \cup F$ spolu se vztahy incidence, pro něž platí následující vlastnosti:*

1. Žádné dva prvky ze stejné množiny nejsou incidentní.
2. Vztahy incidence jsou symetrické (tj. pokud je jeden prvek incidentní s jiným prvkem, potom je i tento prvek incidentní s prvkem prvním).
3. Pokud vrchol $v \in V$ inciduje s hranou $e \in E$ a zároveň hrana e inciduje se stěnou $f \in F$, potom je incidentní i vrchol v se stěnou f .
4. Každá hrana inciduje se dvěma vrcholy.
5. Každá hrana inciduje s nejvýše dvěma stěnami.
6. Pro každý incidentní pár v, s existují právě dvě hrany, které incidují s oběma prvky v a s .
7. Každý vrchol a každá stěna incidují s alespoň jedním dalším prvkem.



Obrázek 2.1: Příklad diskrétní plochy

Takto definovaná plocha je *uzavřenou plochou* a jedná se o povrch nějakého mnohostěnu. Ve většině případů ale nepracujeme s uzavřenými plochami a je třeba doplnit definici 2.1.1 o speciální případy vrcholů a hran. O těchto speciálních případech mluví následující definice. Příklady uzavřených a otevřených ploch jsou geodetické sféry a geodetické kopule, kterými se budeme zabývat v kapitole 2.

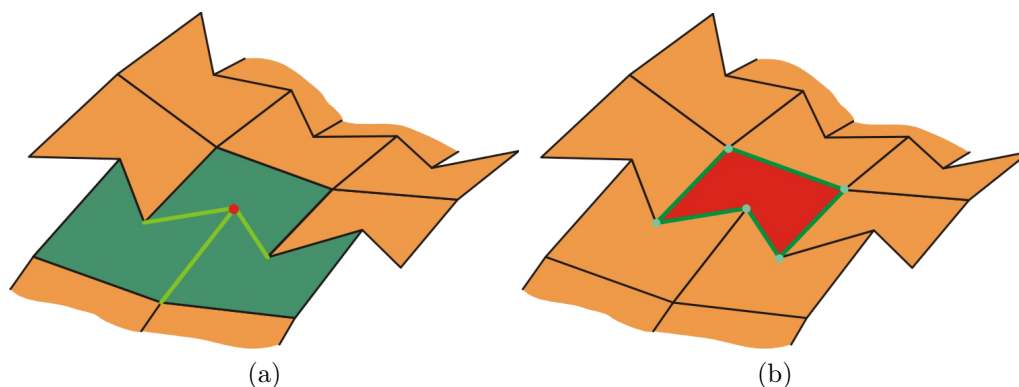


Obrázek 2.2: Příklad a) geodetické sféry, b) geodetické kopule.

Následující definice udávají několik pojmů, pomocí kterých můžeme mluvit o vlastnostech jednotlivých ploch a jejich částí. Protože každá hrana, stěna a vrchol vždy inciduje s dalšími prvky, zavádíme pojem *okolí*. Příklady takovýchto okolí jsou vidět na obrázku 2.3.

Definice 2.1.2 Okolí vrcholu je množina hran a stěn, které s tímto vrcholem incidují. Analogicky okolí stěny je množina vrcholů a hran, které jsou s touto stěnou incidentní, a okolí hrany je množina vrcholů a stěn, které jsou s touto hranou incidentní.

Poznámka 2.1.1 Pokud se omezíme pouze na toto okolí, potom každá hrana sousedí právě se dvěma stěnami.



Obrázek 2.3: a) Zvýrazněný vrchol (červeně) a jeho okolí (zeleně). b) Zvýrazněná stěna (červeně) a její okolí (zeleně).

Definice 2.1.3 *V případě otevřeného povrchu se hrany, které incidují pouze s jednou stěnou, nazývají hraniční hrany a vrcholy, které jsou incidentní s těmito hranami, se nazývají hraniční vrcholy.*

Důležitým pojmem, který budeme dále potřebovat, je pojem *valence vrcholu*, který byl definován v definici 1.1.6 v kapitole 1. Valence vrcholu pomáhá u různých typů sítí určovat jejich pravidelnost.

Nejjednoduššími příklady diskretních ploch jsou diskretní válcová a diskretní kuželová plocha. Jedná se o elementární plochy a lze je odvodit z hladkých válcových a hladkých kuželových ploch, jejichž definice je zde pro připomenutí uvedena:

Definice 2.1.4 *Válcová plocha je dána tzv. řídicí křivkou a směrem nenáležícím do vektorového zaměření roviny řídicí křivky. Válcovou plochu potom tvoří všechny přímky, které mají daný směr a protínají řídicí křivku.*

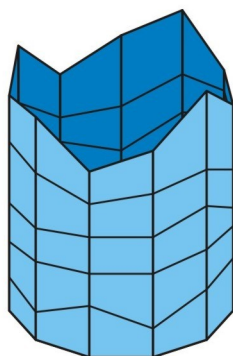
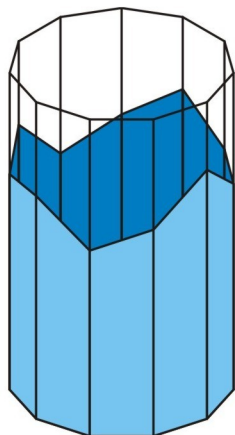
Kuželová plocha je dána řídicí křivkou a vrcholem T , který neleží v rovině této řídicí křivky. Kuželovou plochu tvoří všechny přímky, které prochází vrcholem T a protínají řídicí křivku.

Diskretní válcové a kuželové plochy fungují jako aproximace jejich hladkých variant. Jejich odvození spočívá v rozdělení hladkého povrchu pomocí površek na segmenty, které se dále rozdělí na rovinné čtyřúhelníky (viz obrázek 2.4).

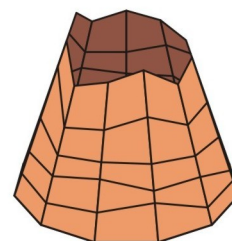
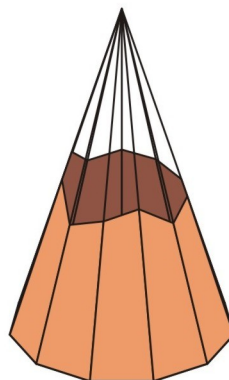
Příkladem takové aproximace je střecha nad nádvořím v opatství v Neumunsteru, která vznikla složením jedné válcové a dvou kuželových ploch. V tomto případě byly kuželové plochy aproximovány pomocí trojúhelníků. Podrobnosti lze nalézt v [19]. Dalším příkladem stavby, kde je využita kombinace diskretních válcových a kuželových ploch viz obrázek 2.5.

Diskretní plochy se ale nevyužívají pouze v architektuře, ale například i v počítačové grafice jako aproximace hladkých ploch. Sítě mohou být tvořené vždy pouze jedním typem stěn nebo se různé typy stěn mohou kombinovat. Existují algoritmy, které jsou

Diskrétní válcová plocha



Diskrétní kuželová plocha



Obrázek 2.4: Ukázka aproximace válcové a kuželové plochy



Obrázek 2.5: Čistička odpadních vod v Droužkovicích u Chomutova. Snímek pořízen 21.7.2009



Obrázek 2.6: Nádvoří v opatství v Neumunsteru (viz [19])

schopny aproximovat jakýkoli tvar pomocí různých typů mnohoúhelníků (viz [6]), ale v architektuře je tento přístup zpravidla nevhodný. Výroba takovýchto ploch by byla náročná a finančně nákladná.

2.2 Paralelní a polodiskrétní plochy

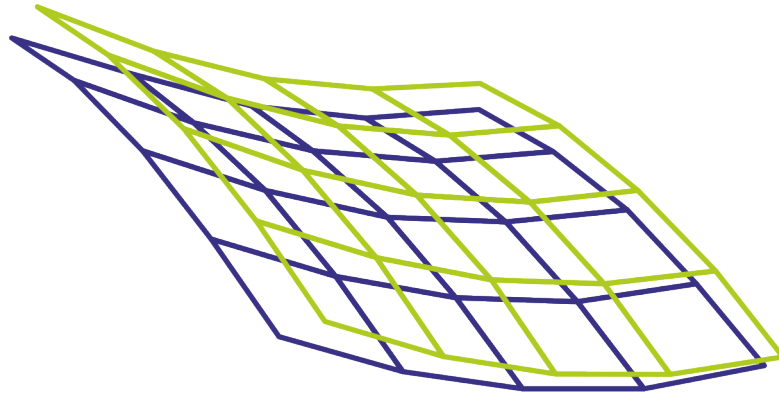
Využití diskretních ploch značně zjednodušuje realizaci obzvláště v případě, kdy je nutno vytvořit paralelní plochy (viz definice 2.2.1). Takovéto plochy by v některých případech nebylo možno v nediskretním (tedy hladkém) provedení vytvořit. Nicméně i diskretní plochy přinášejí mnohá omezení.

Definice 2.2.1 *Dvě plochy nazýváme paralelní, pokud mezi jejich vrcholy, hranami a stěnami existuje vzájemně jednoznačné přiřazení, a pokud jsou zároveň odpovídající si hrany rovnoběžné.*

Poznámka 2.2.1 *Plochám se vzájemně jednoznačným přiřazením vrcholů, hran a stěn se říká kombinatoricky ekvivalentní plochy.*

Pro paralelní plochy platí, že jsou-li stěny jedné plochy rovinné, budou rovinné i stěny plochy s ní paralelní. Navíc roviny, ve kterých tyto stěny leží, jsou rovnoběžné. Proto plocha složená z rovinných čtyřúhelníků bude mít jako plochu k ní paralelní opět plochu složenou z rovinných čtyřúhelníků.

S paralelními plochami úzce souvisí i teorie ofsetů. Je zde uvedena definice ofsetu pro hladké plochy, ale pro diskretní plochy je situace komplikovanější, jak uvedeme v kapitole 3.



Obrázek 2.7: Paralelní síť

Definice 2.2.2 (Ofset pro hladké plochy) *Body ofsetu plochy leží v konstantní normálové vzdálenosti od této plochy.*

Avšak analogická definice pro diskrétní plochy není korektní: *Ofset sítě je k této síti paralelní a leží od ní v konstantní vzdálenosti.* Není zde uvedeno jakým způsobem se má vzdálenost mezi sítěmi měřit. Tento problém lze řešit následujícími způsoby:

- *Vrcholový ofset* - vzdálenost mezi každými dvěma odpovídajícími si vrcholy je konstantní.
- *Hranový ofset* - vzdálenost mezi každými dvěma odpovídajícími si rovnoběžnými hranami je konstantní.
- *Stěnový ofset* - vzdálenost mezi každými dvěma odpovídajícími si stěnami je konstantní.

V architektuře je žádoucí používání také zakřivených ploch, a to zejména z estetických důvodů. V praxi se jako řešení tohoto problému využívají tzv. polodiskrétní plochy. Tyto plochy by se daly definovat analogicky k definici 2.2.3, stačí upustit od požadavku, aby stěny byly rovinné a hrany byly úsečky.

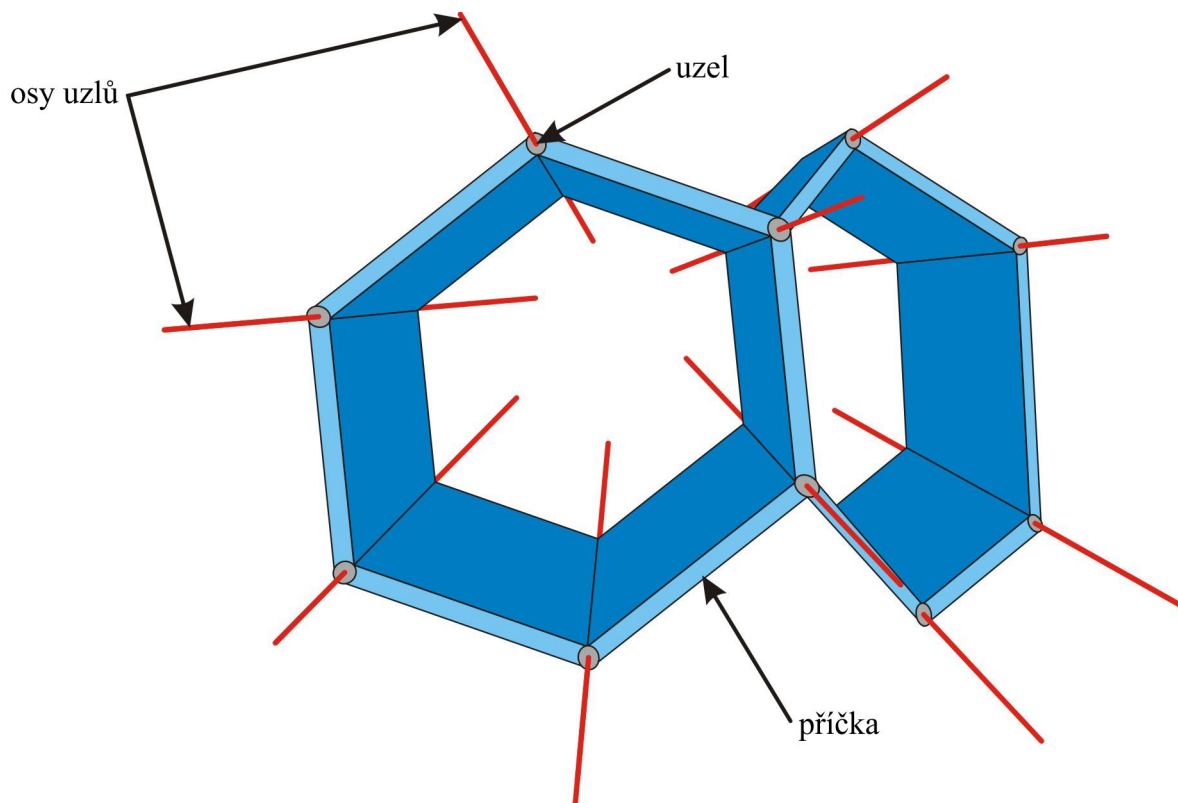
V architektonické geometrii se vyskytují dva typy polodiskrétních ploch:

1. *SC-plochy* (z anglického *single-curved surfaces*) viz definice 2.2.3
2. *DC-plochy* (z anglického *double-curved surfaces*)

V této práci se budeme více zabývat SC-plochami, protože DC-plochy se využívají jen zřídka kvůli vysokým (především finančním) nárokům na jejich realizaci.

Definice 2.2.3 *SC-plochy jsou polodiskrétní plochy, jejichž stěny jsou izomorfní s rovinou a mají nulovou Gaussovu křivost.*

Plochy, ať už diskrétní nebo polodiskrétní, jsou ale pouze dvojrozměrnou reprezentací výsledného trojrozměrného tělesa a v architektonické geometrii se pro ně používá termín *sítě*. Jejich výslednou realizací je opět trojrozměrný objekt, který je nejčastěji vytvořen ze skleněných panelů a ocelových příček. K realizaci rozšíření sítě na trojrozměrnou je zapotřebí mít k dané síti i síť paralelní.



Obrázek 2.8: Paralelní sítě a na nich vyznačené osy uzlů a příčky

Při přechodu k trojrozměrnému modelu dvě navzájem si odpovídající paralelní hrany určují rovinu, kterou nazveme *centrální rovinou*. Potom trojrozměrný ekvivalent hrany nazveme *příčka* (*beam*). Jedná se o hranol, je symetrický podle centrální roviny. Vrcholům odpovídají *uzly* (*nods*) a zachovává se u nich valence jako u původních vrcholů. Stěnám pak odpovídají *panely* (*panels*).

Zůstává ale otázkou, zda je vůbec možné toto rozšíření realizovat. Platí, že pokud je každý uzel *optimalizovaný* (viz následující definice), potom lze konstrukci vytvořit.

Definice 2.2.4 (viz [19]) *Budeme uvažovat pevně danou přímku procházející vrcholem sítě a tuto přímku pak nazveme osou uzlu. Optimalizovaný uzel je pak takový uzel, jehož osou prochází centrální roviny vycházejících příček.*

Kapitola 3

Typy diskrétních sítí

Síť je soubor bodů, které jsou uspořádané takovým způsobem, že tvoří stěny. Tyto stěny jsou ohraničené mnohoúhelníky. Často dominuje jeden typ mnohoúhelníků – trojúhelník, čtyřúhelník nebo i šestiúhelník. Jsou spojeny společnými hranami a blíží se hladkému povrchu (který ale může mít nehladké části, jako například ostré hrany nebo rohy). V architektuře je snaha přiblížit se těmto hladkým plochám s předem danou chybou.

Sítě se nevyžívají pouze v architektuře. Téměř všechny zdánlivě hladké plochy objevující se v animacích a počítačových hrách jsou ve skutečnosti jen hladce vy-renderované sítě. Hojně se jich využívá rovněž pro simulace ve strojírenství.

Samotná výroba ploch volného tvaru přináší jistá omezení na síť, která ji reprezentuje. Jsou to například:

- rovinné stěny
- vrcholy nízké valence
- omezení na uspořádání podpůrných příček
- statické vlastnosti

Hlavním předmětem zájmu jsou především tři typy sítí: trojúhelníkové, čtyřúhelníkové a šestiúhelníkové. Důvod pro to je takový, že v dvojrozměrném případě jsme schopni rozdělit rovinu na pravidelný vzor z jednoho typu mnohoúhelníku pouze v případě trojúhelníků, čtyřúhelníků a šestiúhelníků. Podle těchto rozdělení určíme, kdy jsou dané sítě pravidelné.

3.1 Trojúhelníkové sítě

3.1.1 Obecně o trojúhelníkových sítích

Přestože trojúhelníkové sítě je relativně snadné vytvořit a dobře se s nimi pracuje, v architektuře jejich využití přináší jisté komplikace. Těmito sítěmi se zabývají au-



Obrázek 3.1: Fontána na Náměstí Míru v Teplicích. Snímek pořízen 24.7.2009

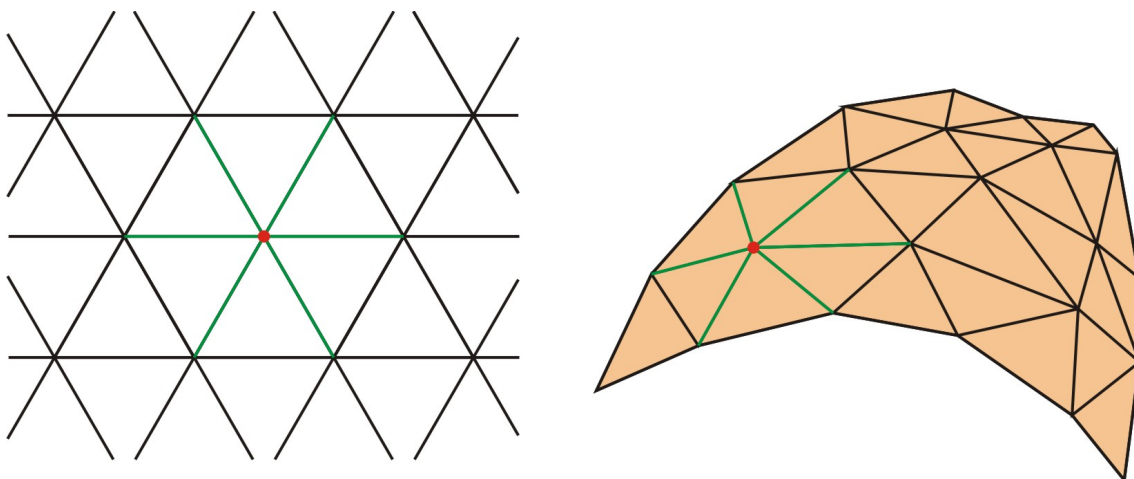
toři [19], kde jsou také řešeny geodetické sféry jako konkrétní příklad trojúhelníkových sítí.

Nejjednodušší plocha, kterou lze pokrýt trojúhelníky je rovina. Nejsnazším způsobem, jak ji převést na trojúhelníkovou síť, je použít rovnostranné trojúhelníky a do jednoho vrcholu jich umístit šest. Vnitřní vrcholy sítě, které mají valenci šest, se nazývají *pravidelné vrcholy*. Vnitřní vrcholy s jinou valencí jsou nepravidelné.

Algoritmů generujících trojúhelníkové sítě je relativně hodně. Patří mezi ně například některé subdivision metody, Delaunayho triangulace nebo algoritmy pro vytvoření geodetických sfér, které jsou řešeny dále v této kapitole. Nicméně vytvoření sítě, která by měla všechny vrcholy pravidelné, je značně obtížný úkol a existuje jen málo typů sítí, které tuto vlastnost splňují.

Protože tři body vždy určují rovinu, je automaticky zaručena rovinnost všech stěn trojúhelníkových sítí. Navíc je manipulace s těmito sítěmi snadná a je tedy možné dosáhnout aproximace požadovaného tvaru s předem danou přesností. Ze stejného důvodu je i snazší splnit estetické požadavky. Další výhodou je i určování statiky výsledné stavby, které je jednodušší při použití trojúhelníkových panelů spíše než u jiných typů.

Přestože je už od počátku zaručena rovinnost stěn, výpočetní složitost řešení aproximace hladké plochy se nijak nesnižuje. Může za to velký počet stěn trojúhelníkových sítí. Navíc při snaze dosáhnout vysokého počtu pravidelných vrcholů roste valence vrcholů. To vede k vyšším stavebním nákladům při konečné konstrukci a také tím



Obrázek 3.2: Rovina rozdělená rovnostrannými trojúhelníky a trojúhelníková síť s pravidelnými vrcholy

roste váha budovy, protože je nutno použít více oceli. V neposlední řadě je obrovským problémem při použití těchto sítí nalezení k nim paralelních sítí (viz definice 2.2.1). Kromě velmi jednoduchých případů, tyto sítě nemají *stěnové* ani *hranové offsety* v konstantní vzdálenosti (viz kapitola 3).

V architektuře ve většině případů nevýhody trojúhelníkových sítí převáží nad výhodami, a pokud je možné dosáhnout požadované plochy volného tvaru pomocí sítí z n -úhelníků pro $n \geq 4$, dává se přednost spíše těmto typům sítí. V jiných odvětvích, jako je například počítačová grafika, jsou naopak tyto sítě, díky jejich snadné modifikaci, velmi vítané.

3.1.2 Geodetické sféry a geodetické kopule

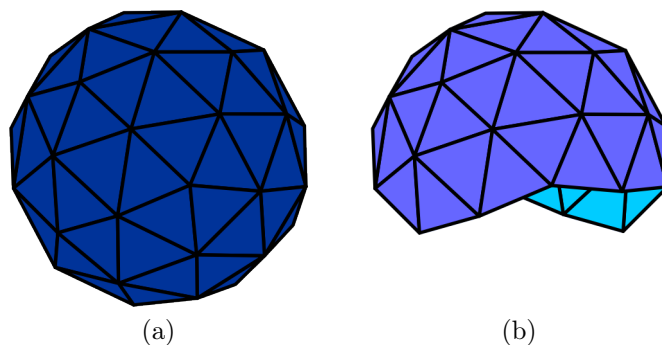
Tato část bude věnována geodetickým sférám a algoritmům pro jejich vytvoření. Těmito plochami se zabývá [19], kde je možné se o nich dozvědět více.

Definice 3.1.1 Geodetickou sférou se nazývá každá diskrétní plocha, která má následující vlastnosti:

1. Všechny její vrcholy leží na jisté kulové ploše.
2. Posloupnosti vybraných vrcholů leží na hlavních kružnicích výše uvedené kulové plochy.

Název geodetická sféra je odvozen od geodetických křivek, což jsou křivky s nulovou geodetickou křivostí v každém svém bodě. Jejich tvar je různý a závisí na tvaru plochy, na které se vyskytují. Na kulové ploše jsou geodetikami hlavní kružnice. V architektuře se ale v praxi geodetické sféry nevyskytují, místo nich se staví *geodetické kopule*.

Definice 3.1.2 Geodetickou kopulí *chápeme každou souvislou diskrétní plochu, která je podmnožinou geodetické sféry.*



Obrázek 3.3: Příklad a) geodetické sféry, b) geodetické kopule.

Algoritmy pro vytvoření geodetických sfér

Základem pro konstrukce geodetických sfér jsou platónská tělesa. Konkrétně se jedná o pravidelný čtyřstěn, pravidelný osmistěn a pravidelný dvacetistěn. Nejčastěji se využívá dvacetistěn, který se svým tvarem nejvíce blíží kouli. Metody pro odvození geodetických sfér vycházejí ze dvou kroků:

1. Rozdělení stěny dvacetistěnu na pravidelný vzor z trojúhelníků, kde každý vrchol nových trojúhelníků bude vzorem pro vrchol geodetické sféry.
2. Středové promítání se středem v těžišti dvacetistěnu vrcholů nových trojúhelníků na kulovou plochu opisující dvacetistěn.

Metody se od sebe liší pořadím, v jakém dochází k dělení stěn a promítání na kulovou plochu.

Algoritmus 1

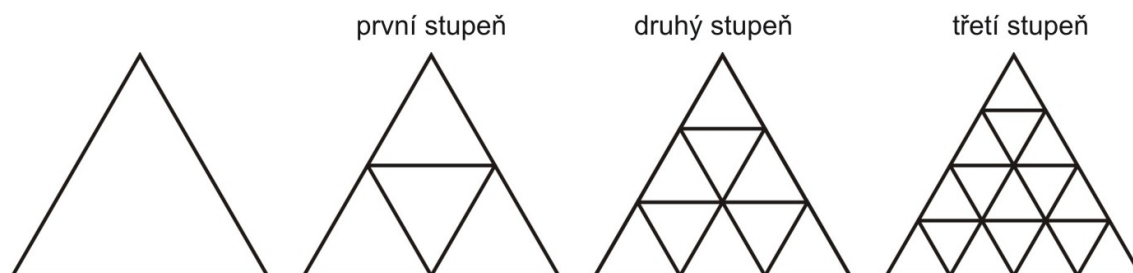
VSTUP: Dvacetistěn (vrcholy spolu s informací o jejich vzájemné poloze), stupeň geodetické sféry

- 1: Rozdělení hran stěny na n shodných částí (vznik nových vrcholů)
- 2: Spojení nových vrcholů pomocí úseček (nové hrany) rovnoběžných s hranami stěny
- 3: Vznik dalších nových vrcholů jakožto průsečíků sestavených úseček
- 4: Opakujeme od prvního kroku, dokud neprojdeme všechny stěny dvacetistěnu
- 5: Středová projekce všech nových bodů na sféru opisující dvacetistěn (vznik vrcholů geodetické sféry)
- 6: Spojení zobrazených bodů úsečkami podle příslušnosti k hranám před projekcí

VÝSTUP: Geodetická sféra

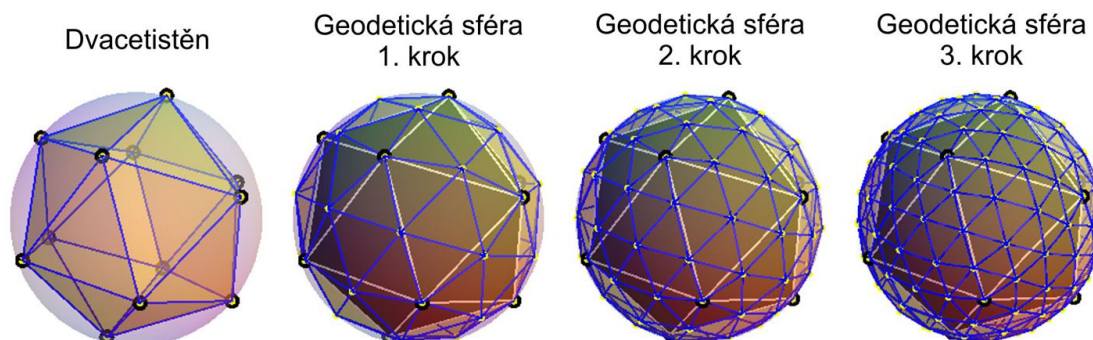
V prvním kroku se hrany rozdělí na shodné úsečky. Jejich počet závisí na stupni geodetické sféry, kterou chceme vytvořit. Pro geodetickou sféru n -tého stupně bude takových částí na každé hraně $n + 1$. Protože stěny pravidelného dvacetistěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, budou mít všechny nově vzniklé hrany shodnou délku.

Následně pak nové trojúhelníky najdeme tak, že hraniční body nových úseček spojujeme úsečkami rovnoběžnými s hranami příslušné stěny. Vzniknou tak rovnostranné trojúhelníky s délkou strany shodnou s délkou jednotlivých částí rozdělených hran (viz obrázek 3.4). Pro geodetickou sféru n -tého stupně vznikne na každé stěně dvacetistěnu $(n + 1)^2$ nových rovnostranných trojúhelníků.



Obrázek 3.4: Rozdělení stěn při konstrukci geodetické sféry pomocí algoritmu 1

Nakonec se nové body promítnou na kulovou plochu, čímž ovšem není zajištěna rovnostrannost všech trojúhelníků. Konkrétně při vytváření prvního stupně vzniknou dva typy stěn - shodné rovnostranné trojúhelníky a shodné rovnoramenné trojúhelníky. U druhého stupně budou všechny stěny rovnoramenné trojúhelníky, nebudou ale všechny shodné. Výsledné geodetické sféry jsou zobrazeny na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Geodetické sféry vytvořené algoritmem 1

Tabulka 3.1: Hodnoty pro geodetické sféry vytvořené algoritmem 1

	počet stěn	počet hran	počet vrcholů
dvacetistěn	20	30	12
1. stupeň	80	120	42
2. stupeň	180	270	92
3. stupeň	320	480	162
...			
n -tý stupeň	$20 \times (n + 1)^2$	$30 \times (n + 1)^2$	$12 + (n \times 30) + (20 \times \sum_{k=1}^n (k - 1))$

Způsobů, jakými lze geodetické sféry vytvořit je více. Dalším možným přístupem k vytváření geodetických sfér může být tento:

Algoritmus 2

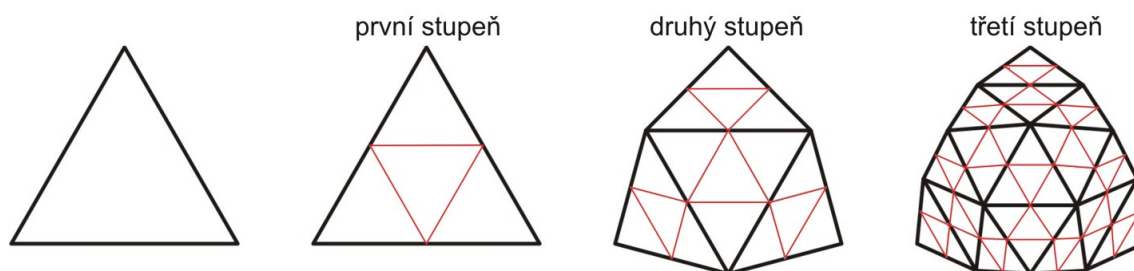
VSTUP: Dvacetistěn (vrcholy spolu s informací o jejich vzájemné poloze), stupeň geodetické sféry n

- 1: Nalezení středů hran stěny (nové body)
- 2: Spojení nových bodů úsečkami (nové hrany)
- 3: Opakujeme od kroku 1, dokud neprojdeme všechny stěny mnohostěnu
- 4: Středová projekce nových bodů na sféru opisující dvacetistěn
- 5: Spojení zobrazených bodů úsečkami podle příslušnosti k hranám před projekcí
- 6: Opakujeme celé, dokud algoritmus neproběhne n -krát

VÝSTUP: Geodetická sféra

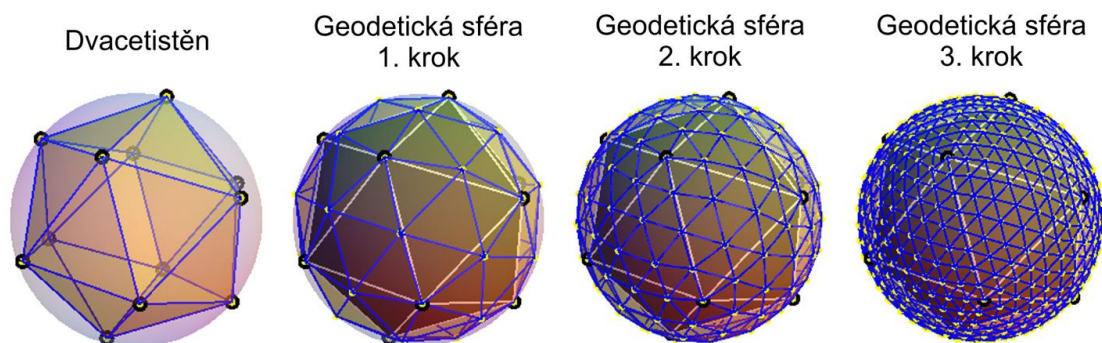
Protože od vytváření druhého stupně geodetické sféry se nebude vycházet z dvacetistěnu, ale z geodetické sféry nižšího stupně, nebude už dále pravidlem, že hrany (a tedy i jejich části) budou mít všechny shodnou délku.

V tomto algoritmu rozdělení stěn proběhne vždy stejně. Trojúhelníky vytvoříme spojením středů hran, které jsme našli v 1. kroku. Tyto trojúhelníky už nebudou obecně rovnostranné (viz obrázek 3.6).



Obrázek 3.6: Rozdělení stěn při konstrukci geodetické sféry pomocí algoritmu 2

U tohoto algoritmu bude s postupujícími stupni geodetické sféry přibývat počet stěn výrazně rychleji, než v předchozím případě. První stupeň bude ale v obou případech stejný (viz obrázek 3.7).

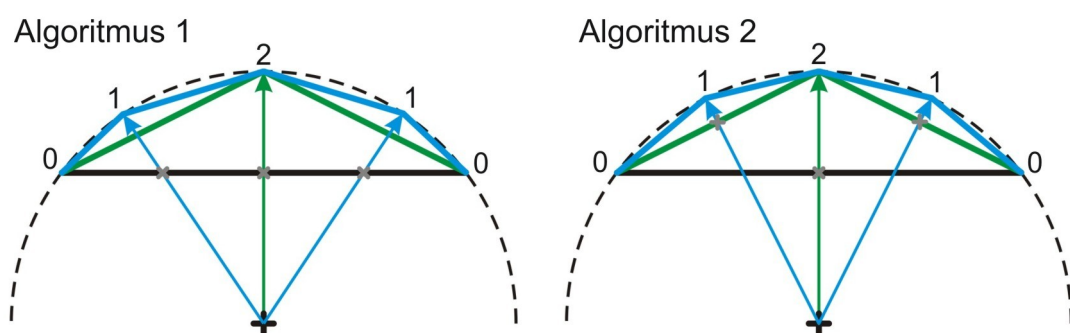


Obrázek 3.7: Geodetické sféry vytvořené algoritmem 2

Tabulka 3.2: Hodnoty pro geodetické sféry vytvořené algoritmem 2

	počet stěn	počet hran	počet vrcholů
dvacetistěn	20	30	12
1. stupeň	80	120	42
2. stupeň	320	480	162
3. stupeň	1280	1920	642
...			
n -tý stupeň	20×4^n	30×4^n	$12 + (\sum_{k=1}^n (30 \times 4^{k-1}))$

Poznámka 3.1.1 Přestože počet stěn geodetické sféry druhé, třetí a čtvrté úrovně generované druhým algoritmem je shodný s počtem stěn třetí, sedmé a patnácté úrovně vytvořené prvním algoritmem, výsledné geodetické sféry nejsou shodné, jak je ukázáno na obrázku 3.8.



Obrázek 3.8: Rozložení vrcholů při vytvoření geodetické sféry pomocí algoritmů 1 a 2

Poznámka 3.1.2 Vrcholy původního dvacetistěnu jsou vždy incidentní s pěti stěnami, ostatní vrcholy jsou incidentní se šesti stěnami.

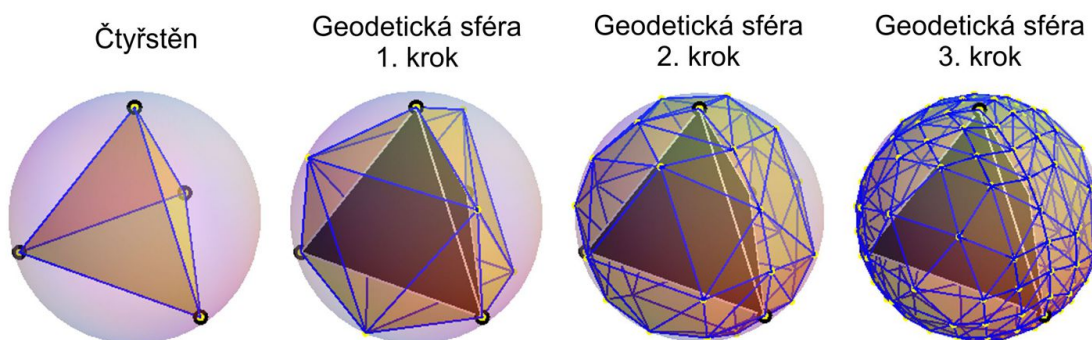
Nyní zopakujeme první algoritmus, ale tentokrát budeme vycházet z osmistěnu (resp. z čtyřstěnu). Rozdělíme stěny na požadovaný počet trojúhelníků a nové vrcholy pak promítneme na kulovou plochu opisující osmistěn. Geodetické sféry prvního až třetího stupně jsou znázorněny na obrázcích 3.10 a 3.9.

Algoritmus 3

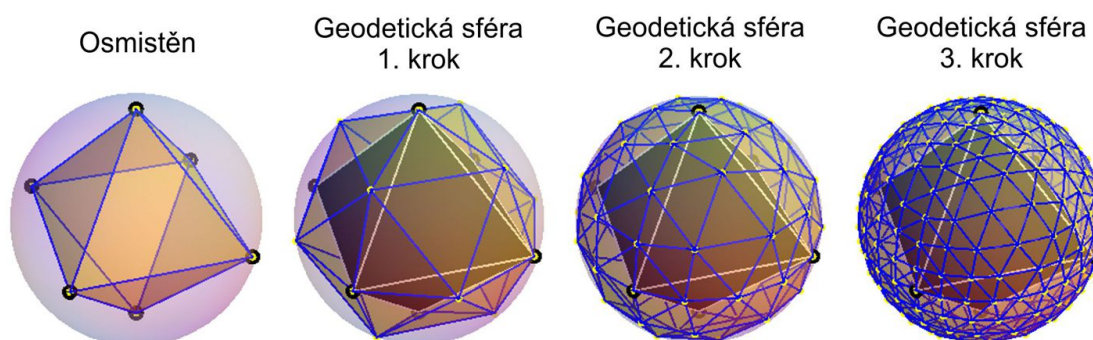
VSTUP: Čtyřstěn/osmistěn (vrcholy spolu s informací o jejich vzájemné poloze), stupeň geodetické sféry

- 1: Rozdělení hran stěny na n shodných částí (vznik nových vrcholů)
- 2: Spojení nových vrcholů pomocí úseček (nové hrany) rovnoběžných s hranami stěny
- 3: Vznik dalších nových vrcholů jakožto průsečíků sestavených úseček
- 4: Opakujeme od kroku 1, dokud neprojdeme všechny stěny čtyřstěnu/osmistěnu
- 5: Středová projekce všech nových bodů na sféru opisující čtyřstěn/osmistěn (vznik vrcholů geodetické sféry)
- 6: Spojení zobrazených bodů úsečkami podle příslušnosti k hranám před projekcí

VÝSTUP: Geodetická sféra



Obrázek 3.9: Geodetické sféry vytvořené algoritmem 3 pro čtyřstěn



Obrázek 3.10: Geodetické sféry vytvořené algoritmem 3 pro osmistěn

Při vytváření geodetických sfér není nutné omezovat se pouze na platonské mnohostěny s trojúhelníkovými stěnami. U krychle a dvanáctistěnu je jen nutné stěny

Tabulka 3.3: Hodnoty pro geodetické sféry vytvořené algoritmem 3

	počet stěn	počet hran	počet vrcholů
osmistěn	8	12	6
1. stupeň	32	48	18
2. stupeň	72	108	56
3. stupeň	128	192	108
...			
n -tý stupeň	$8 \times (n + 1)^2$	$12 \times (n + 1)^2$	$6 + (n \times 12) + (8 \times \sum_{k=1}^n (k - 1))$
čtyřstěn	4	6	4
1. stupeň	16	24	10
2. stupeň	36	54	20
3. stupeň	64	84	34
...			
n -tý stupeň	$4 \times (n + 1)^2$	$6 \times (n + 1)^2$	$4 + (n \times 6) + (4 \times \sum_{k=1}^n (k - 1))$

nejdříve na trojúhelníky rozdělit nalezením těžiště každé stěny a následným propojením s příslušnými vrcholy. Vzniknou tak rovnoramenné trojúhelníky, se kterými se dá pak už pracovat stejně jako se stěnami čtyřstěnu, osmistěnu nebo dvacetistěnu. Aplikaci tohoto postupu je možné nalézt na přiloženém CD, spolu s ostatními algoritmy pro geodetické sféry zde zmíněnými.

Geodetické kopule se často využívají v architektuře, ale kvůli různým délkám hran dochází ke zjednodušení, takže výsledkem není přesná geodetická kopule, ale jenom nějaká její aproximace, kdy vrcholy neleží přímo na kulové ploše. Mezi dobré vlastnosti takovýchto struktur patří jejich vynikající stabilita, snadná konstrukce a úspora materiálu, odolnost vůči přírodním vlivům, jako je například vítr, sněhové pokrývky, zemětřesení nebo dokonce i tornáda. V grafice se geodetické sféry používají místo kulových ploch díky jejich snadné modifikaci na jiný tvar.

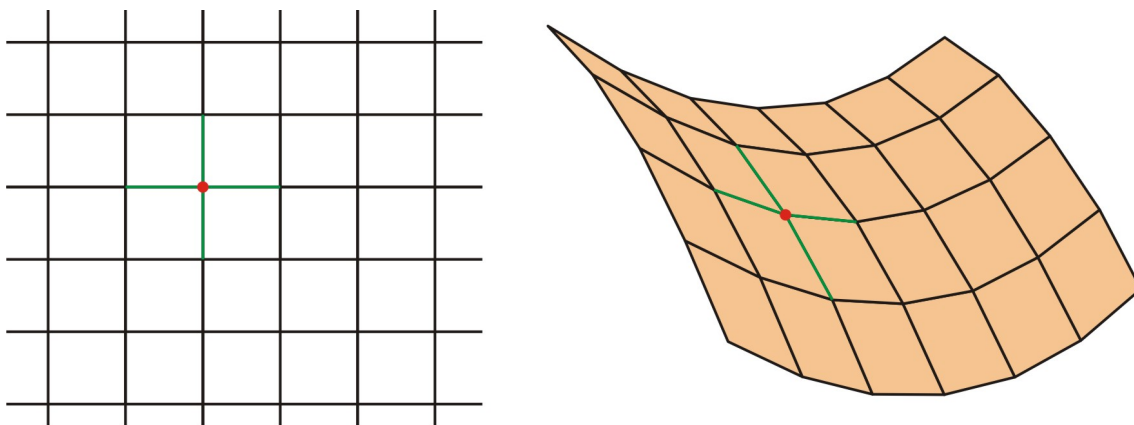


Obrázek 3.11: Montreal: Biosphere (viz [9])

3.2 Čtyřúhelníkové sítě

3.2.1 Obecně o čtyřúhelníkových sítích

Pokud stejně jako u trojúhelníkových sítí budeme dělit rovinu, je přirozené rozdělit ji na čtverce nebo obdélníky tak, aby každý vrchol měl valenci čtyři. Takovému uspořádání se říká *pravidelné* a vrcholy s touto valencí nazýváme *pravidelné*. Dobře sestrojená síť je právě síť s valencí 4.



Obrázek 3.12: Rovina rozdělená čtverci a čtyřúhelníková síť s pravidelnými vrcholy

Nejjednodušší čtyřúhelníkovou sítí je plášť krychle. Nicméně jelikož má každý vrchol valenci tři, nemá tato síť žádné pravidelné vrcholy a není proto dobře uspořádaná. Tato skutečnost není ale příliš překvapivá vzhledem k faktu, že povrch krychle se neřadí mezi dobré aproximace hladkých ploch.

Obecně nemusí být čtyřúhelníky v čtyřúhelníkové síti rovinné. Přestože v architektonické geometrii je tato vlastnost velice výhodná.

3.2.2 Čtyřúhelníkové sítě s rovinnými stěnami

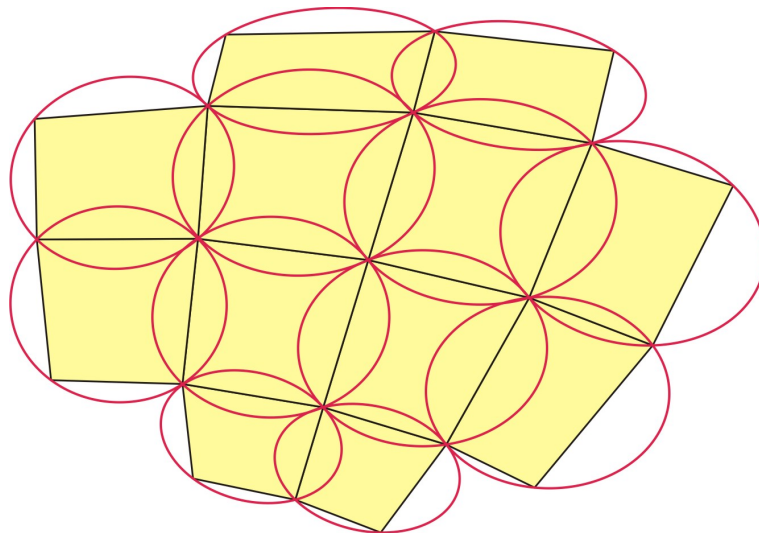
Dále v tomto textu budou tyto sítě označovány jako *PQ-sítě*, což vychází z jejich anglického pojmenování: *planar quad meshes*. Jak už název napovídá, jedná se o sítě, jejichž všechny stěny jsou rovinné čtyřúhelníky. O jejich vlastnostech se lze více dočíst v [22, 19]. V této práci se pro algoritmy vytváření těchto sítí vycházelo z [30], kde je možno nalézt další odkazy pro hlubší studium těchto metod.

Obrovskou výhodou PQ-sítí je jejich aplikovatelnost na velké množství různých ploch volného tvaru. Jejich aplikace přináší také širší možnosti při tvorbě paralelních sítí. Navíc usnadňuje dosažení optimalizovaných uzlů.

Speciální typy PQ-sítí, které se v praxi často využívají, jsou *kruhové* (circular) a *kuželové* (nebo také jinak *kónické*) (conical) PQ-sítě. Výhoda těchto PQ-sítí je v tom, že pro ně vždy existuje paralelní síť, což pro obecné PQ-sítě obecně neplatí.

Definice 3.2.1 Pokud pro všechny čtyřúhelníky v PQ-sítích existuje opsaná kružnice, potom tyto sítě nazýváme kruhové.

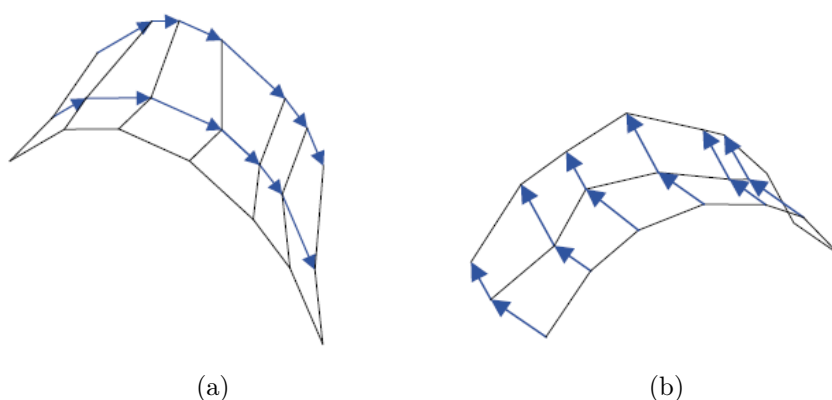
Pokud jsou stěny incidentní s vrcholem tečné k rotačnímu kuželu, jehož osou je osa uzlu daného vrcholu, nazýváme tyto plochy kuželové.



Obrázek 3.13: Příklad kruhové sítě

Paralelní sítě se dají pro kruhové PQ-sítě najít pomocí vrcholového ofsetu a pro kónické PQ-sítě pomocí stěnového ofsetu. Problematika ofsetů bude více diskutována v kapitole 5.

Existují jednoduché způsoby vytvoření PQ-sítí. Nicméně tyto metody lze použít jen ve speciálních případech a nejsou tedy univerzální. Následující tři příklady ukazují, jak PQ-sítě snadno sestrojít:

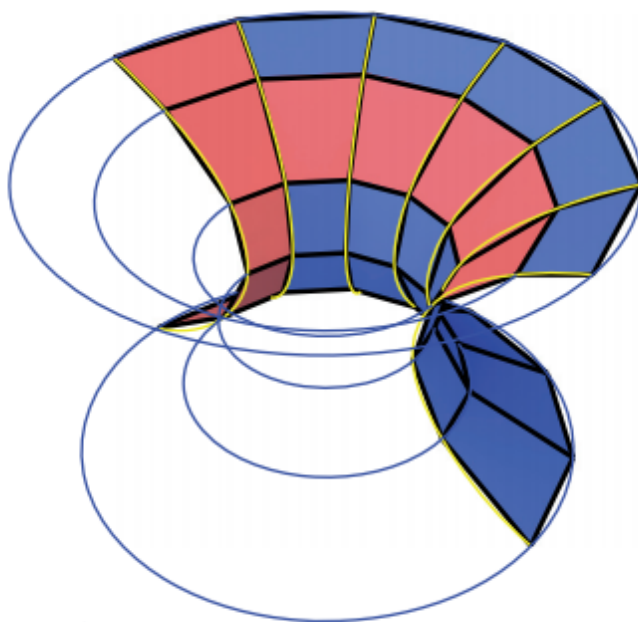


Obrázek 3.14: Paralelní vektory při tvoření PQ-sítí (viz [12])

1. Využijeme faktu, že v prostoru dva rovnoběžné vázané vektory, náležející dvěma různým rovinám, určují rovinu. Jejich počáteční a koncové body jsou

vrcholy rovinného čtyřúhelníku. Provedeme řez referenční plochou a průřezovou křivku převedeme na lomenou čáru. Podle typu referenční plochy pak chceme dosáhnout jedné ze dvou situací zobrazených na obrázku 3.14. Buď rovnoběžné vektory budou rovnoběžné k segmentům lomené čáry (obrázek 3.14a) nebo se bude jednat o vektory příčné k rovině řezu (obrázek 3.14b).

2. Ke konstrukci se použije jednoduchých geometrických operací, s jejichž pomocí lze vytvořit působivou stavbu, jakou je například budova *The Sage Gateshead*, jejíž autorem je Norman Foster (viz obrázek 3.16a). Příkladem takového postupu je například rotační PQ-síť, která vznikne rotací mnohoúhelníku kolem osy rotace (viz obrázek 3.15).



Obrázek 3.15: Rotační PQ-síť jednodílného hyperboloidu (viz [29])

3. Kombinace trojúhelníkové sítě s PQ-sítí a to takovým způsobem, že se vytvoří trojúhelníková síť a tam, kde jsou sousední trojúhelníky komplanární, tam se spojí a vytvoří jeden rovinný čtyřhranný panel. Příkladem takto vytvořené konstrukce je budova *Milánský veletrh* navržený Massimilianem Fuksasem. Viz obrázek 3.16b.

Byly vytvořeny i univerzálnější algoritmy na vytvoření PQ-sítí, nicméně i tyto algoritmy v sobě skrývají jistá úskalí. Další metoda kombinuje algoritmus vytvořený Yangem Liu na převedení obecné čtyřúhelníkové sítě na PQ-síť se subdivision algoritmy. Jiný využívá vztahu mezi PQ-sítěmi a tzv. sítě sružených křivek (anglicky *conjugate curve network*), což jsou dvě třídy parametrických křivek na hladké ploše.



(a)



(b)

Obrázek 3.16: a) The Sage
Gateshead (Velká Británie) od Normana Fostera (viz [1]) b) Milánský veletrh
(Itálie) od Massimiliana Fuksase (viz [18])

Algoritmus 4

VSTUP: Hrubá počáteční síť

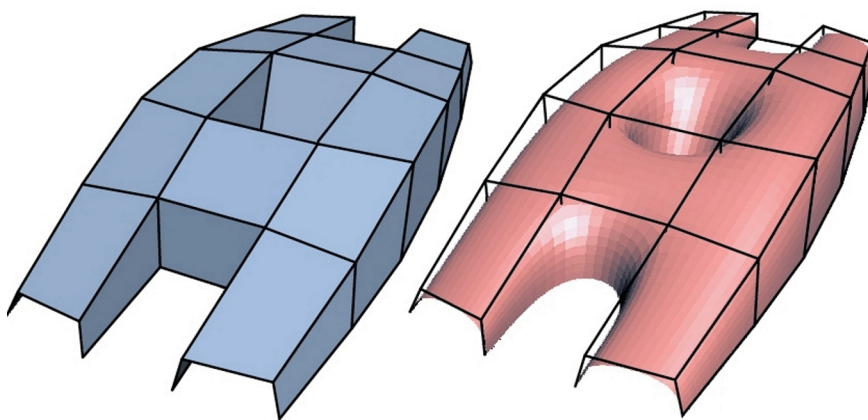
- 1: Použití subdivision metody, jež vede na čtyřúhelníkové síť.
- 2: Provedení planarizace nové sítě, aby výsledné stěny byly rovinné.
- 3: Opakování kroků 1 a 2 dokud se nedosáhne požadovaného zjemnění.

VÝSTUP: PQ-síť s požadovaným zjemněním

Algoritmus 4 vychází z hrubé sítě, která aproximuje požadovaný tvar. Jedná se o co nejjednodušší síť, kterou lze vytvořit, aby stále zachycovala základní tvar aproximované plochy.

Na typu použité subdivision metody nezávisí, jediný požadavek, který je na ní kladen je ten, aby výsledkem byla čtyřúhelníková síť. Výsledkem nebudou rovinné stěny, protože subdivision metody obecně na rovinné stěny nevedou. Počet těchto stěn bude záviset na zvolené metodě.

Planarizace sítě znamená transformace vrcholů tak, aby všechny stěny byly rovinné. Algoritmus probíhá tak dlouho, dokud nedosáhneme sítě s požadovanou velikostí panelů (požadovaného zjemnění). Důležitou úlohu zde hraje i požadavek, aby výsledná síť nepřesáhla předem zadanou hodnotu ε , která představuje vzdálenost od referenčního tvaru.



Obrázek 3.17: Vlevo: Počáteční síť; Vpravo: Počáteční síť s náhledem s nerovinnými stěnami po aplikaci subdivision metody (viz [30])

Do algoritmu je možné také pro větší optimalizaci přidat další kroky, které také pomohou k dosažení požadovaného tvaru a mohou ovlivnit i výsledný estetický dojem. Jsou to následující:

- Přidání nové posloupnosti vrcholů před proběhnutím subdivision algoritmu. Tento krok ovlivňuje výsledný počet panelů.
- Měření diagonální vzdálenosti jednotlivých stěn.

- Omezení na umístění vrcholů v předem daných rovinách. Roviny mohou být určeny například rovinami souměrnosti. Tento krok má vliv především na výslednou estetiku.

Na obrázku 3.18 je možno vidět kancelářskou budovu v Abu Dhabi, jejíž koncept byl představen v roce 2007, ale dosud nebyla dostavěna. Pro vytvoření fasády této budovy byl použit algoritmus 5.



Obrázek 3.18: *The Opus* od Zaha Hadid (Spojené arabské emiráty), viz [33]

Algoritmus 5

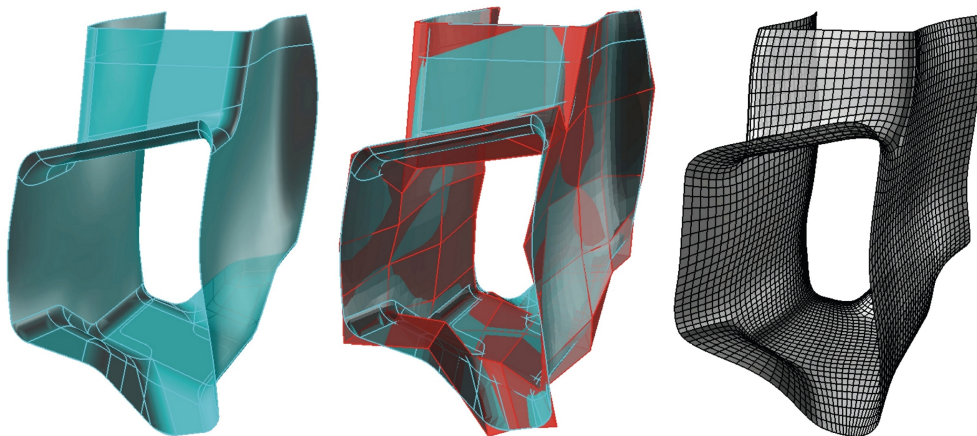
VSTUP: Hrubá počáteční síť

- 1: Analýza toku křivostí dané referenční plochy
- 2: Vytvoření sítě sdružených křivek na referenční ploše
- 3: Odvození čtyřúhelníkové sítě ze sítě sdružených křivek
- 4: Planarizace sítě

VÝSTUP: PQ-síť s požadovaným zjemněním

Úskalí tohoto algoritmu spočívá v jeho třetím kroku. Toto odvození je možné provést ručně anebo s využitím počítače.

Při ručním vytváření sítě je snaha se co nejvíce přiblížit dané ploše pomocí předchozího algoritmu 4. Nicméně počáteční hrubá síť musí mít tu vlastnost, že rozmístění jejích vrcholů se po prvním subdivision kroku bude blížit referenční ploše s maximální možnou přesností. Poté proběhne algoritmus tak, jako v předchozím případě. Nevýhodou této metody je fakt, že existuje nekonečně mnoho možností, jak počáteční síť vytvořit.



Obrázek 3.19: Vlevo: Tvar, kterého se chce dosáhnout; Uprostřed: Počáteční síť, která se ručně sestaví podle požadovaného tvaru; Vpravo: Konečný výsledek (viz [30])

Použití automatického vytváření sítě tento problém zmírní. Je dána velice hrubá počáteční síť, na kterou se použije nějaký optimalizační postup na vypočtení přesného umístění vrcholů, tak aby po provedení subdivision kroku se výsledek blížil referenční ploše a stěny byly téměř rovinné. Nicméně počáteční hrubá síť musí být vytvořena ručně. I když v tomto případě se jedná o mnohem snazší úkol než v předchozím, protože síť je mnohem hrubší a zároveň není nutno se příliš zabývat pozicemi vrcholů. Důvodem je, že první subdivision krok vrcholy umístí do požadovaných pozic. Tímto vznikne síť, ze které se bude vycházet při dalších krocích.

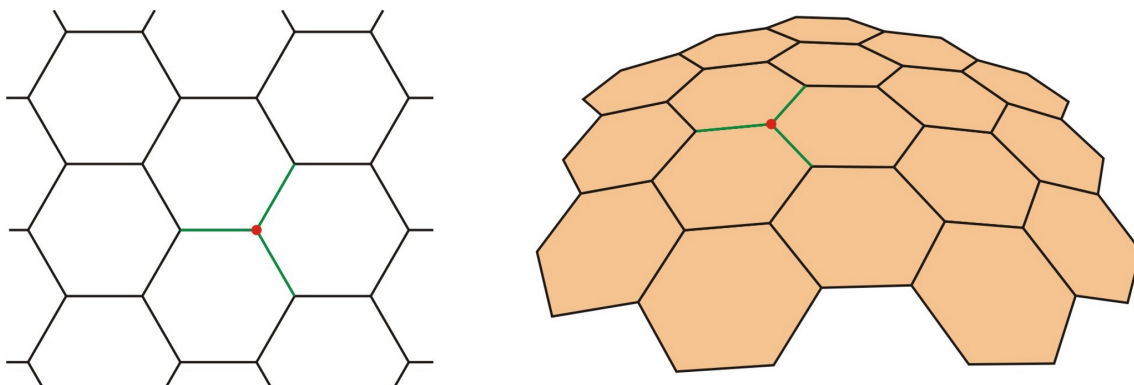
Tento způsob ale také skrývá velký problém. V oblastech s velkou křivostí má tendenci docházet k většímu seskupení vrcholů. Tímto způsobem dochází ve výsledku k velkým rozdílům ve velikostech panelů, což velmi komplikuje využití v architektuře. Tomuto se lze částečně vyhnout při vytváření počáteční sítě umístěním většího počtu vrcholů do oblastí s velkou křivostí. Může se ale stát, že tento postup povede ke stejnému efektu v jiných oblastech.

Do budoucna zbývá ještě vyřešit několik problémů. Například je nutno nalézt způsob, jak by se daly počáteční sítě generovat automaticky. V současnosti je snaha tento problém řešit pomocí databáze, ve které by byly vyřešené určité tvary a následně by se konstrukce sestavovaly pouze z tvarů v této databázi. Mimoto se dají také použít metody parametrizace ploch.

Sestrojení PQ-sítí, které by odpovídaly všem požadavkům na estetiku a které by byly dostatečně blízko k požadované ploše, je dosud otevřený problém architektonické geometrie.

3.3 Šestiúhelníkové sítě

Problematika aproximace libovolného tvaru pomocí šestiúhelníkových sítí byla doposud zkoumána spíše teoreticky. Je možno se o ní dočíst v [2, 36]. Byly také vytvořeny algoritmy na jejich generování, o kterých pojednávají [34, 37]. Stejně jako u čtyřúhelníkových sítí, ani zde není rovinnost stěn předem zaručena. Rovinné šestiúhelníkové sítě se označují jako *P-Hex sítě* (z anglického Planar Hexagonal Meshes). Pokud jako v předchozích příkladech budeme chtít rozdělit rovinu na vzor z pravidelných šestiúhelníků, potom každý vrchol bude mít valenci tři. Pravidelné sítě budou tedy v tomto případě sítě s vrcholy s valencí tři.



Obrázek 3.20: Rovina rozdělená šestiúhelníky a šestiúhelníková síť s pravidelnými vrcholy

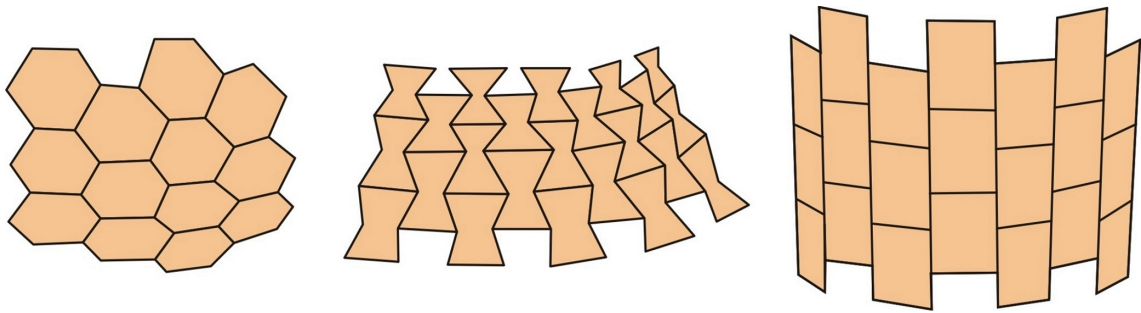
3.3.1 Rovinné šestiúhelníkové sítě

Výhodou P-Hex sítí je nízká valence jejich vrcholů spolu s faktem, že se jedná o kónickou síť a tedy existuje její stěnový ofset. Jejich využití ale také splňuje estetické nároky, jelikož v přírodě se často tento vzor vyskytuje (například ve včelích plástvích) a působí tedy přirozeně. V neposlední řadě P-Hex sítě také poskytují snazší práci v rámci diskrétní geometrie.

Na druhou stranu při zajišťování rovinnosti a přibližně stejných velikostí stěn, roste výpočetní složitost. Metody jejich vytváření, které jsou zde zmíněny, vycházejí z duality mezi pravidelnými trojúhelníkovými a pravidelnými šestiúhelníkovými sítěmi.

Za předpokladu, že chceme zachovat pravidelnost P-Hex sítě, je na rozdíl od PQ-sítí výsledkem ne vždy síť z konvexních mnohoúhelníků. Konkrétně konvexnost šestiúhelníků závisí na lokální Gaussově křivosti dané hladké plochy volného tvaru:

- Pokud je Gaussova křivost kladná, potom je síť z konvexních šestiúhelníků.
- Pokud je Gaussova křivost záporná, potom je síť z nekonvexních šestiúhelníků.
- Pokud je Gaussova křivost nulová, a jedná se tedy o rozvinutelnou plochu, potom šestiúhelníky degenerují na obdélníky.



Obrázek 3.21: Zleva: Část šestiúhelníkové sítě s kladnou Gaussovou křivostí, zápornou Gaussovou křivostí a nulovou Gaussovou křivostí

Pokud tedy dochází ke změně v Gaussově křivostí, potom může i síť obsahovat jak konvexní, tak i nekonvexní stěny. Dosud patří výpočet P-Hex sítí mezi otevřené problémy. Převážná většina staveb s touto strukturou jsou tzv. fulereny, o kterých je zmínka na konci této podkapitoly.

Prvním způsobem vytváření P-Hex sítí, kterým se budeme zabývat, je tzv. průnik tečných rovin (z anglického tangent plane intersection). Tato metoda se skládá ze dvou částí:

1. Výpočet trojúhelníkové sítě.
2. Nalezení průniků tečných rovin referenční hladké plochy ve vrcholech každého z trojúhelníků.

K vytváření trojúhelníkové sítě se využívá Delaunayho triangulace vycházející z Voroného diagramu (viz [4]). Nicméně použití klasické Delaunayho triangulace není ideální a je nutné ji upravit. O tomto problému se lze více dozvědět v [34]. Takto vytvořená trojúhelníková síť se ale musí skládat pouze z pravidelných vrcholů.

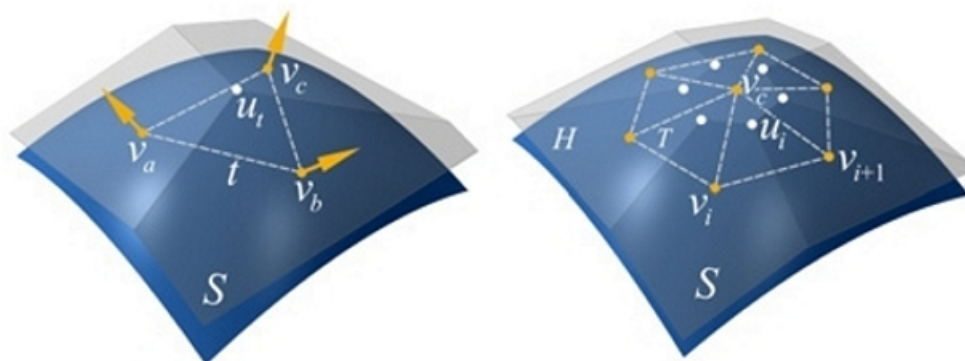
Vezmeme-li nějaký trojúhelník této sítě, potom se tečné roviny zadané hladké plochy ve všech jeho vrcholech protnou v jednom bodě. Tento bod přiřadíme k tomuto trojúhelníku. Stejně tak najdeme body ke všem ostatním trojúhelníkům a následně spojíme body náležející k sousedním trojúhelníkům. Tímto způsobem vzniknou stěny, které budou šestiúhelníkové. Samotný algoritmus pak bude vypadat následovně:

Algoritmus 6

VSTUP: Referenční plocha volného tvaru

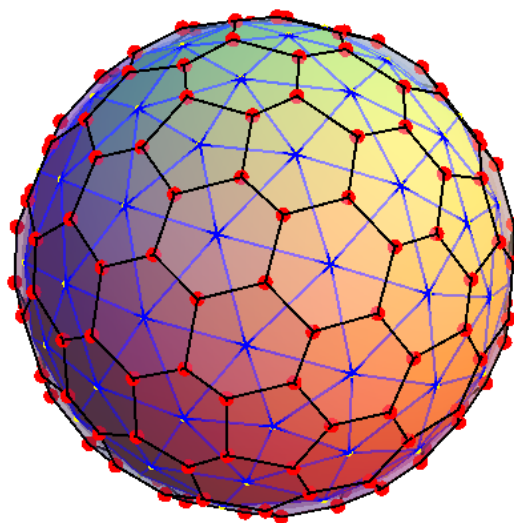
- 1: Výpočet trojúhelníkové sítě pomocí upravené Delaunayho triangulace
- 2: Nalezení tečných rovin ve vrcholech trojúhelníkové sítě
- 3: Výpočet bodů průniku tečných rovin ve vrcholech každého z trojúhelníků
- 4: Spojení nalezených průniků hranami vždy pro sousední trojúhelníky

VÝSTUP: P-Hex síť



Obrázek 3.22: Vlevo: Bod, který je dán průnikem tečných rovin ve vrcholech jednoho z trojúhelníků; Vpravo: Šest takových bodů, které vytvoří jednu šestiúhelníkovou stěnu (viz [37])

Na přiloženém CD lze nalézt aplikaci tohoto algoritmu na geodetickou síť vytvořenou z dvacetistěny, na kterou lze nahlížet jako na triangulaci. Nicméně, protože tato geodetická sféra má kromě pravidelných i vrcholy nepravidelné s valencí pět, vznikly u těchto vrcholů pětiúhelníky. Přestože se to na první pohled může tak jevit, nejedná se v tomto případě o fuleren (viz dále). Tuto síť je možné vidět na obrázku 3.23.



Obrázek 3.23: Mnohostěn vytvořený pomocí algoritmu 6

Otázkou ale zůstává, jak zajistit, aby daná triangulace vygenerovala požadovaný výsledek. Může se stát, že stěny výsledných šestiúhelníků se budou navzájem protínat. Dalším problémem je určení trojúhelníkové sítě tak, aby výsledná P-Hex síť měla stěny požadované velikosti. Navíc pokud tři tečné roviny jsou téměř rovnoběžné, ať už z důvodu, že jim odpovídající vrcholy jsou příliš blízko u sebe, nebo že je křivost zadané hladké plochy příliš malá, tak tuto metodu nelze použít.

Na tyto problémy částečně odpovídá následující metoda. Jedná se o *Dupinovu dualitu*, která je vlastně aproximací předchozí metody. I zde se vychází ze vzájemné

duality trojúhelníkové a šestiúhelníkové sítě a lze ji použít pro hledání šestiúhelníkových stěn v problematických bodech referenční sítě:

Algoritmus 7

VSTUP: Referenční plocha volného tvaru

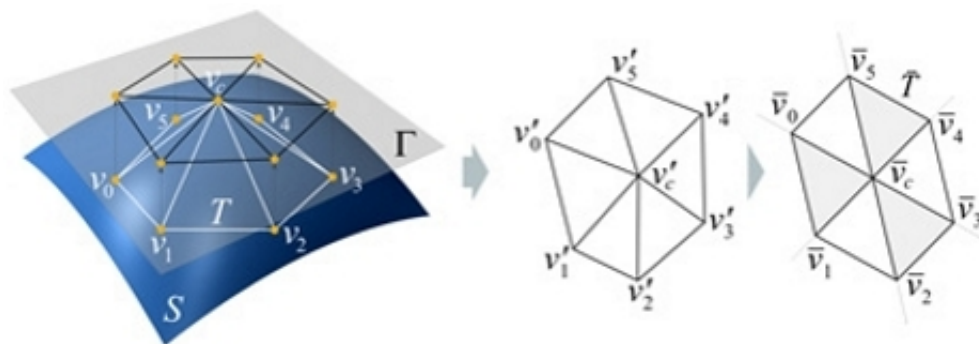
- 1: Vytvoření výchozí trojúhelníkové sítě
- 2: Nalezení tečné roviny v jednom z vrcholů trojúhelníkové sítě
- 3: Zobrazení trojúhelníků incidentních s tímto vrcholem do nalezené tečné roviny
- 4: Převedení zobrazených trojúhelníků na shodné
- 5: Nalezení Dupinovyho středů u shodných trojúhelníků
- 6: Spojení Dupinových středů

VÝSTUP: Rovinná šestiúhelníková stěna

Název tohoto algoritmu vychází z názvu metody, které se zde využívá - Dupinovy indikatrix (viz [27]). Jedná se o metodu, která pomocí Gaussovy křivosti určuje lokální tvar plochy.

Nalezení vhodné triangulace, ze které se bude vycházet, je komplikovanější než u předchozího algoritmu. Je nutné zohlednit, jakou Gaussovu křivost má daná plocha. K největším problémům dochází v případě, že se jedná o parabolické body, tj. když je Gaussova křivost nulová.

Vybereme trojúhelník, pro který v jednom jeho vrcholu nalezneme tečnou rovinu. Všechny trojúhelníky, které mají jako jeden z vrcholů právě vybraný vrchol, zobrazíme do této tečné roviny. Těchto trojúhelníků bude celkem šest. Na základě jejich velikosti se pak určí odchylka, o kterou je možné jejich vrcholy (s výjimkou vrcholu všem společného) v rámci tečné roviny posunout, aby všech šest trojúhelníků bylo shodných. V těchto trojúhelnících se pak pomocí Dupinovy indikatrix naleznou speciální bod, který se nazývá Dupinův střed (více o tomto bodě a způsobu jeho nalezení se lze dočíst v [23]). Vztahu mezi původními trojúhelníky a Dupinovy středy se říká Dupinova dualita. Spojením Dupinových středů vznikne jedna ze stěn výsledné P-Hex sítě.



Obrázek 3.24: Vytvoření šestiúhelníkových stěn pomocí algoritmu 7 (viz [37])

Stejně jako u předchozí metody problém nastává u parabolických bodů, kde se tato metoda stává nepoužitelnou. Nicméně tomuto problému se lze vyhnout, pokud použijeme aproximovanou Dupinovu dualitu, kdy nejdříve převedeme triangulovanou síť na téměř rovinnou šestiúhelníkovou síť, kterou následně optimalizujeme na rovinnou.

Kompletní popis tohoto algoritmu je možné nalézt v [37], a to včetně algoritmů na nalezení vhodné trojúhelníkové sítě, ze které je možno vycházet. Dále je tento algoritmus zmíněn také v [36].

Ani jeden ze zmíněných algoritmů nemá univerzální použití. Důvod je takový, že existují plochy, které nelze aproximovat pomocí pravidelných P-Hex sítí, tj. sítí s valencí všech vrcholů rovnou třem.

3.3.2 Fulereny

Někteří autoři řadí fulereny mezi geodetické kopule, zatímco jiní je zmiňují pouze jako duální mnohostěny ke geodetickým sférám odvozeným od dvacetistěnu. Jsou pojmenovány po architektu Brukminsteru Fullerovi.

Mezi jejich stěny patří dvanáct pětiúhelníků a zbytek jsou šestiúhelníky. Nejjednodušším a zároveň i nejnámějším fulerem je zkosený dvacetistěn (fotbalový míč), který se zároveň řadí i k archimedovským mnohostěnům.

Největší význam mají v chemii, kde název fulereny označuje skupinu molekul uhlíku. Nicméně, jak je vidět na obrázku 3.25, své místo mají i v architektuře.



(a)



(b)

Obrázek 3.25: Projekt Eden, Cornwall, Velká Británie (a) viz [32] a b) viz [3])

Kapitola 4

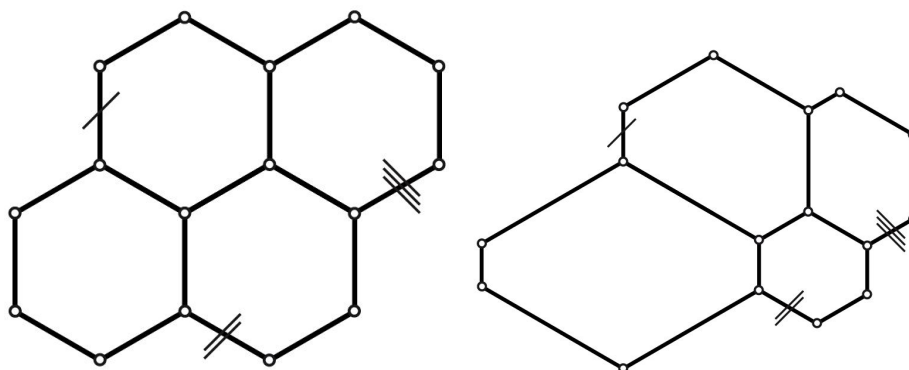
Paralelní sítě

Informace pro tuto kapitolu jsem čerpala z [19, 24], kde je možné se dočíst jak obecně o paralelních sítích, tak se zde autoři zabývají hranovými ofsety. Dále pak vrcholovým a stěnovým ofsetům se věnuje [25], nicméně jen okrajově, jelikož hlavní důraz je kladen na kruhové a kónické sítě. O vrcholových ofsetech je možné se dále dočíst v [17].

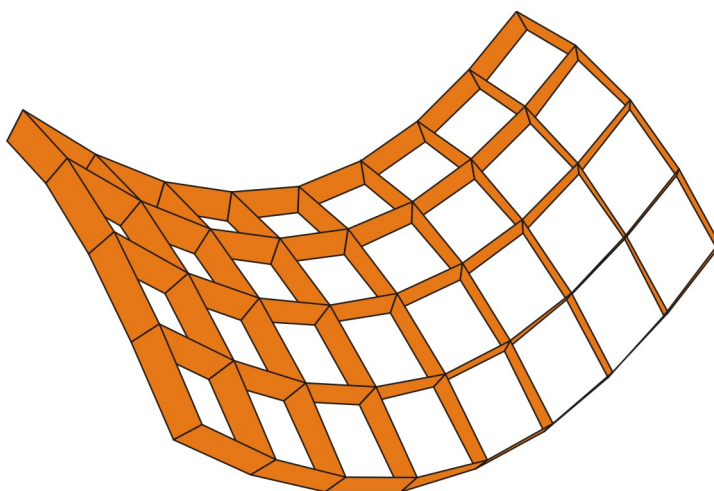
4.1 Obecně o paralelních sítích

Definice paralelních sítí byla uvedena už v kapitole 2 (viz definice 2.2.1). K jedné síti je možné najít nekonečně mnoho paralelních sítí. Protože jediný požadavek, který máme, je na rovnoběžnost hran, stěny paralelní sítě se tvarově původním stěnám nemusí podobat, jak je vidět například na obrázku 4.1. Přirozeně ale musí být zachován typ odpovídajících si stěn. Není například možné, aby paralelní s PQ-sítí byla síť, kde se vyskytují trojúhelníky.

Existuje dvoje základní využití paralelních sítí. Je to buď při přechodu ze dvou do tří rozměrů, nebo pokud samotná stavba vyžaduje, aby se vyskytovaly dvě a více vrstev nad sebou jako vnější a vnitřní plášť stavby.



Obrázek 4.1: Příklad dvou paralelních sítí



Obrázek 4.2: Geometrická nosná konstrukce

Pokud budeme mít dvě paralelní sítě můžeme definovat tzv. *geometrickou nosnou konstrukci* (*geometric support structure*), což je vlastně schéma zobrazující „vztah“ paralelních sítí. Taková geometrická nosná konstrukce je zobrazena na obrázku 4.3. Tato konstrukce zjednodušuje nosnou reálnou konstrukci pouze na čtyřúhelníky ležící v centrálních rovinách ohraničených hranami paralelních sítí a osami uzlu (za předpokladu, že jsou vrcholy optimální).

Speciálním případem paralelních sítí jsou tzv. *offset meshes* neboli *ofsetové sítě*. Jak už bylo řečeno v kapitole 2, jsou to sítě, které jsou od dané sítě v konstantní vzdálenosti, a v praxi se jich hojně využívá.

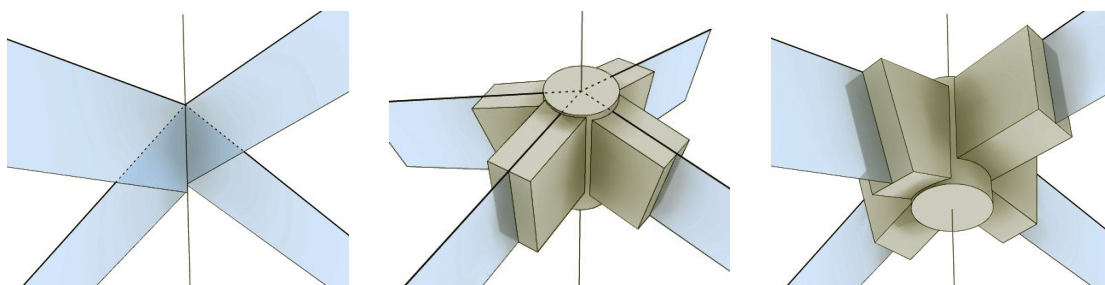
Pro připomenutí, jedná se o tři typy ofsetů, podle toho, jakým způsobem je zajištěna konstantní vzdálenost. Jsou to vrcholový, hranový a stěnový ofset (viz str. 24).

Obecně nelze pro každou síť vytvořit její ofset, který by bylo možné v praxi použít. Příkladem takové sítě může být síť trojúhelníková, pro kterou existují ofsety pouze za předpokladu, že osy všech uzlů jsou rovnoběžné nebo se všechny sbíhají v jednom bodě. V obou případech lze vytvořit ofset hranový.

Následující tvrzení nám říká, kdy se jedná o jaký typ diskrétního ofsetu. Pro účely tohoto tvrzení se se sítěmi pracuje jako s množinami úseček, které se po zobrazení opět převedou na sítě.

Tvrzení 4.1.1 (viz [24]) *Budeme-li mít síť S a její ofset S' ve vzdálenosti d a definujeme-li si síť Z jako zobrazení $Z = \frac{S' - S}{d}$, potom platí následující:*

- S je vrcholový ofset S' právě tehdy, když vrcholy Z všechny leží na jednotkové kulové ploše se středem v počátku. Pokud je Z čtyřúhelníková síť a žádná ze hran nedegeneruje, potom S má vrcholový ofset právě tehdy, když je S kruhová síť.
- S' je hranový ofset S právě tehdy, když hrany Z jsou tečné k jednotkové kulové ploše mající střed v počátku.



Obrázek 4.3: Vrchol paralelní sítě s hranami v pouze přibližně stejné vzdálenosti [24]

- S' je stěnový ofset S právě tehdy, když stěny Z jsou tečné k jednotkové kulové ploše. Síť má stěnový ofset právě tehdy, když jsou její stěny kónické.

V [25] lze nalézt analogickou variantu předchozí věty pro kruhové a kuželové sítě, společně s příslušným důkazem. Při dokazování se využívá Gaussova zobrazení na jednotkovou sféru. Hranovému ofsetu se věnuje [24].

Poznámka 4.1.1 Pokud pro nějakou síť bude platit, že existuje její ofset, potom to bude platit i pro každou s ní paralelní síť.

4.2 Hranové ofsety

V architektonické geometrii se nejvíce využívá sítí s hranovým ofsetem. Důvod je zcela praktický. Při konstrukci je žádoucí, aby všechny příčky měly stejnou (nebo alespoň hodně podobnou) výšku. V opačném případě by jejich navazování v uzlech bylo problematické. Tato vlastnost je už z definice zaručena u hranových ofsetů.

S pomocí vrcholových a stěnových ofsetů jsme schopni aproximovat libovolné tvary, nicméně hranové ofsety toto neumožňují. Tento fakt je značně omezující. Popis možných tvarů, kterých je možno dosáhnout pomocí sítí, pro než existuje hranový ofset, je problém, který dosud nebyl vyřešen.

Pro P-Hex sítě s hranovými ofsety sice existuje postup pro jejich vytvoření, vyvstává zde ale jiný problém. Není možné předem zaručit, že výsledná síť nebude sama sebe nikde protínat. Ostatně stejně je tomu tak i u ofsetů hladkých ploch.

Kvůli obtížné dosažitelnosti hranových ofsetů se povoluje předem daná tolerance na vzdálenost hran paralelních sítí. Problém se tak sice stává snadněji řešitelným, ale optimalizačně se jedná o velmi náročný problém, ve kterém se musí zohlednit i tvar, který chceme aproximovat. Vychází se ze sítě sdružených křivek referenční hladké plochy, kdy je nejdříve nutno takovou vhodnou síť křivek nalézt. Tento problém také úzce souvisí s diskrétní diferenciální geometrií, konkrétně s výpočtem křivosti na diskrétních plochách.

4.3 Vrcholový a stěnový ofset

S vrcholovými a stěnovými ofsety se sice lépe pracuje, ale otázka jejich nalezení je značně komplexní. Jak už bylo řečeno, problematika vrcholových ofsetů souvisí s kruhovými sítěmi a problematika stěnových ofsetů s kuželovými sítěmi. Ani jeden ze zmíněných ofsetů nelze studovat samostatně bez znalosti jim odpovídajících sítí. V obou případech jsou zkoumány především PQ-sítě s danými vlastnostmi, protože u nich už byly nalezeny algoritmy pro jejich vytvoření.

Nejjednodušší způsob, jak vytvořit vrcholové ofsety, je použít jednoduché posunutí o daný vektor pro všechny vrcholy. Tímto způsobem lze nalézt nekonečně mnoho vrcholových ofsetů a současně bude i zajištěna rovnoběžnost odpovídajících si hran, ale pro praktické účely jsou tyto ofsety v drtivé většině případů nevhodné. Vzdálenost odpovídajících si hran se může značně lišit a zároveň nelze předejít průnikům ofsetu s původní sítí. Proto se tato možnost jako možnost vrcholového ofsetu nezařazuje a jsou zde uvažovány pouze kruhové sítě, u kterých lze s těmito problémy pracovat.

Oproti tomu je stěnový ofset vždy jen jeden, pokud existuje. Při hledání stěnového ofsetu u obecné diskrétní plochy narážíme na problém, kdy se při více jak třech stěnách v jednom vrcholu u paralelních sítí nemusí odpovídající stěny protnout v jednom bodě, kde by měl vzniknout nový vrchol. U kuželových sítí je tato vlastnost splněna. Podle definice 3.2.1 ke každému vrcholu kuželové sítě náleží rotační kužel, jehož osa prochází tímto vrcholem a stěny náležející tomuto vrcholu jsou na něj tečné. Potom pro stěny a vrcholy ofsetu platí ta samá vlastnost (jsou tedy také kuželové) a navíc osa rotačního kuželu v daném bodě je identická s osou rotačního kuželu procházejícího odpovídajícím vrcholem.

Kapitola 5

Polodiskrétní síť

Jak již bylo zmíněno v kapitole 2, existují i takzvané polodiskrétní síť, které se skládají z hladkých zakřivených ploch, které jsou navzájem diskrétně spojeny. Tyto hladké plochy se opět nazývají stěnami, jejich spoje hranami. Na rozdíl od diskrétního případu, jsou tyto hrany obecně hladkými křivkami. Polodiskrétní síť umožňují přiblížení k referenčnímu tvaru s lepší přesností než diskrétní síť, a tím splňují i vyšší estetické nároky. Na druhou stranu se ale zvyšuje finanční a výpočetní náročnost.

V architektonické geometrii se převážně používají síť, jejichž stěny jsou rozvinutelné plochy: *SC-plochy* (tzv. jednoduše zakřivené plochy). Z těchto typů sítí se budeme v této kapitole zabývat tzv. D-strip modely. Na obrázku 5.1a je nádraží TGV ve Štrasburku, kde bylo těchto sítí využito.

Dále existuje i další typ sítí, který se ale využívá jen sporadicky, protože je náročný na výrobu jak finančně, tak výpočetně. Jedná se o *DC-sítě* (z anglického double curved meshes, tzn. dvojnásobně zakřivené plochy). Příkladem takové budovy je Kunsthaus Graz (viz obrázek 5.1b), kde ovšem DC-sítě byly použity pouze jako dekorativní prvek.

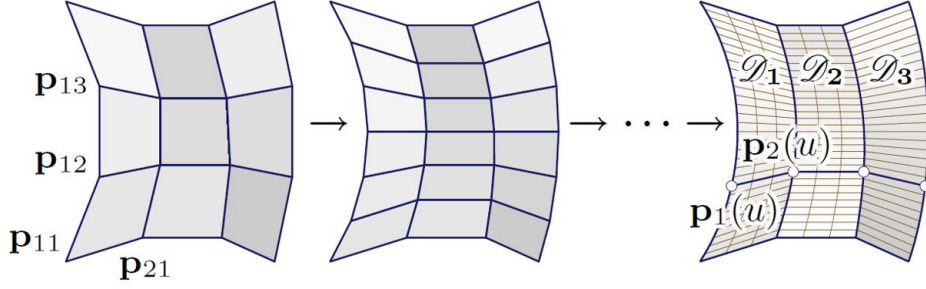


(a) Nádraží TGV ve Štrasburku



(b) Kunsthaus Graz (Rakousko)

Obrázek 5.1: Příklady budov tvořených polodiskrétními plochami



Obrázek 5.2: Zjemňování PQ-sítě na D-strip model (viz [23])

5.1 D-strip modely

Jak již bylo řečeno, SC-plochy jsou plochy, jejichž stěny jsou částí rozvinutelných ploch (developable surfaces). Mezi hladkými plochami jim odpovídají plochy s parametrizací danou sítí sdružených křivek (viz str. 37) a v diskrétním případě jsou jejich ekvivalentem PQ-sítě s pravidelným uspořádáním stěn. Pokud o systému hran PQ-sítě budeme uvažovat jako o „sloupcích“ a „řádcích“, potom se na D-strip modely můžeme dívat jako na limitní případ zjemňování PQ-sítě podél těchto „řádků“, zatímco „sloupce“ zůstanou. Pokud by došlo současně i ke zjemňování podél „sloupců“, vytvořili bychom tzv. síť sdružených křivek hladké plochy.

Abychom mohli D-strip modely parametrizovat, budeme požadovat, aby křivky, které tvoří hrany byly B-spline křivky. Stěny těchto modelů budou potom přímkové B-spline plochy, které můžeme parametrizovat následujícím způsobem:

$$\mathbf{p}_i(u) := \sum_j N^3(u-j)\mathbf{b}_{i,j},$$

$$\mathbf{x}_i(u, v) := (1-v)\mathbf{p}_i(u) + v\mathbf{p}_{i+1}(u),$$

kde $\mathbf{x}_i(u, v)$ je parametrické vyjádření D-strip modelu, $\mathbf{p}_i(u)$ jsou hrany, N^3 jsou kubické B-spline báze a $\mathbf{b}_{i,j}$ řídicí body. Díky vztahu mezi D-strip modely s PQ-sítěmi a se sítěmi sdružených křivek, je z nich možné vybrat počáteční řídicí body.

Jeden ze způsobů, jak nalézt řídicí body B-spline plochy, je využít souvislosti mezi PQ-sítěmi a D-strip modely. Aproximujeme referenční plochu vhodnou PQ-sítí a její vrcholy pak zvolíme jako hledané řídicí body. Tyto body je ale nutné optimalizovat, a to minimalizováním následujícího výrazu:

$$\lambda_1 f_{dev} + \lambda_2 f_{prox} + \lambda_3 f_{prox}^\delta + \lambda_4 f_{fair/edge} + \lambda_5 f_{fair/ruling}. \quad (5.1)$$

Jednotlivé členy výrazu popisují následující charakteristiky:

- f_{dev} – rozvinutelnost jednotlivých „pásů“

$$f_{dev} = \sum_i \int \|\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{i+1}\| \times \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|^2 du$$

- f_{prox} – vzdálenost vybrané množiny bodů \mathbf{x}_k na „pásu“ a tečných rovin T_k v bodech referenční plochy nejbližše těmto bodům

$$f_{prox} = \sum_k dist(\mathbf{x}_k, T_k)^2$$

- f_{prox}^δ – vzdálenost od tečen hraničních křivek referenční plochy t_k

$$f_{prox}^\delta = \sum_k dist(\mathbf{x}_k, t_k)^2$$

- $f_{fair/edge}$ a $f_{fair/ruling}$ – jakost hraniční křivky a tvořícího polygonu

$$f_{fair/edge} = \sum_i \int \|\ddot{\mathbf{p}}_i(u)\|^2 du$$

$$f_{fair/ruling} = \int \left(\sum_i \|\mathbf{p}_{i+1} - 2\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i-1}\|^2 \right) du$$

- λ_i – váhy jednotlivých členů

Podrobnější informace včetně způsobu výpočtu lze nalézt v [28].

Podobnost mezi PQ-sítěmi a D-strip modely lze využít k rozšíření teorie paralelních sítí i na polodiskrétní případ:

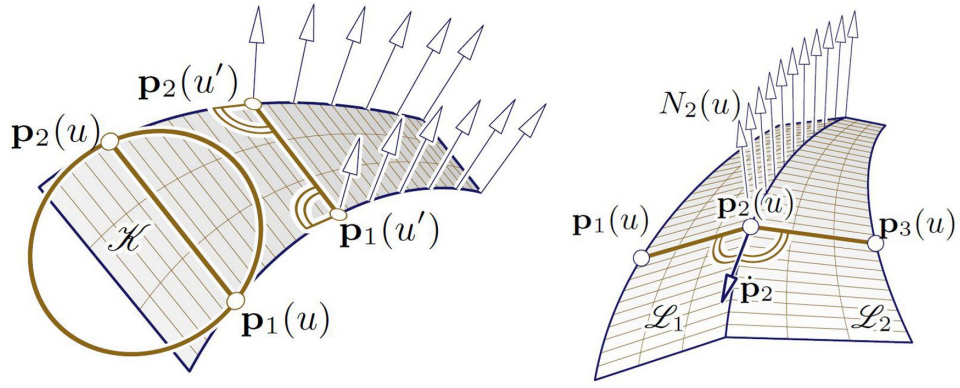
Definice 5.1.1 *Mějme dvě polodiskrétní sítě, které jsou navzájem kombinatoricky ekvivalentní, tak aby parametry navzájem ekvivalentních křivek procházely stejným intervalem. Tyto dvě polodiskrétní sítě budou paralelní, pokud*

1. *odpovídající si řídicí přímky jsou rovnoběžné a*
2. *hraniční křivky mají v odpovídajících si bodech rovnoběžné tečny.*

Příslušná PQ-síť se pak využije k vytvoření nosné konstrukce a D-strip model k vytvoření panelů. *PS-modely* (z anglického *principal strip models*) v tomto případě usnadňují výpočty, protože jejich vlastnosti umožňují snadno vytvořit ofsety v konstantní vzdálenosti.

5.2 PS-modely

Při aproximaci plochy pomocí D-strip modelu je přirozené nechat pohyb hranové křivky kopírovat křivku maximální hlavní křivosti a tvořící přímku umístit podél směru minimální hlavní křivosti (Odtud vznikl anglický název těchto D-strip modelů, podle *principal curvatures*, neboli česky *hlavních křivostí*). Dále rozdělíme PS-modely na kruhové a kuželové, které jsou polodiskrétním ekvivalentem kruhových a kuželových PQ-sítí.



Obrázek 5.3: Vlevo: Kruhový strip model; Vpravo: Kónický strip model (viz [23])

Kruhové strip modely mají tu vlastnost, že pro každý index i a parametr hodnoty u existuje kružnice tečná ke křivkám \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_{i+1} v bodech $\mathbf{p}_i(u)$ a $\mathbf{p}_{i+1}(u)$. Úhly, které svírá tvořící přímka a tyto dvě křivky, jsou shodné.

Pro *kuželové strip modely* platí, že pro každý bod $\mathbf{p}_i(u)$ na hraně, která je společná pro pásy L_{i-1} a L_i existuje rotační kužel, který se dotýká povrchů L_{i-1} a L_i podél tvořících křivek vycházejících z bodu $\mathbf{p}_i(u)$. Tečna hrany, které náleží bod $\mathbf{p}_i(u)$, svírá s oběma tvořícími přímkami stejný úhel.

Aby bylo možné tyto modely vytvořit, ať už kruhové nebo kónické, je zapotřebí při optimalizování řídicích bodů přidat do vztahu 5.1 další člen. Pro kruhové strip modely je to člen f_{circ} a pro kuželové člen f_{cone} , které se vypočítají následujícím způsobem:

$$f_{circ} = \sum_i \int \left\langle \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i, \frac{\dot{\mathbf{p}}_i}{\|\dot{\mathbf{p}}_i\|} + \frac{\dot{\mathbf{p}}_{i+1}}{\|\dot{\mathbf{p}}_{i+1}\|} \right\rangle^2 du,$$

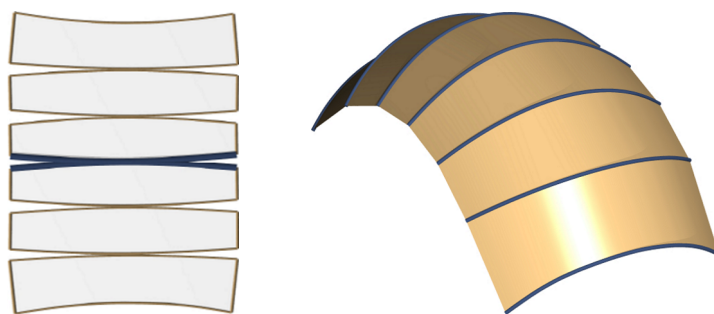
$$f_{cone} = \sum_i \int \left\langle \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|} - \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|}, \dot{\mathbf{p}}_i \right\rangle^2 du.$$

Pro ofsety kuželových a kruhových PS-modelů platí, že konstantní vzdálenost musí být zachována:

- u kruhových D-strip modelů mezi odpovídajícími si body na hranových křivkách
- u kuželových D-strip modelů mezi odpovídajícími si řídicími přímkami a jejich tečnými rovinami

5.3 Další typy D-strip modelů

Kromě PS-modelů stojí za zmínku i geodetické a válcové modely (viz dále). Dalším speciálním případem D-strip modelů, jsou takové, jejichž hranové křivky jsou ro-



Obrázek 5.4: Příklad geodesického strip modelu spolu s jeho rozvinutím do roviny

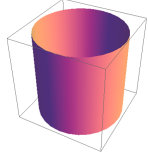
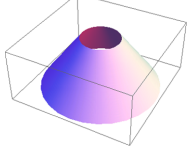
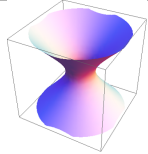
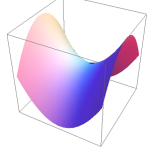
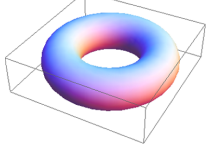
vinné. Není zde tedy dán požadavek na vlastnost stěny, ale hran. Do této kategorie mohou spadat i plochy náležející do jiné skupiny modelů, které byly v této práci zmíněny.

5.3.1 Geodetické strip modely

Tento typ D-strip modelů se využívá převážně na práci se dřevěnými panely. Je vhodný pro ohýbání úzkých dlouhých pásů materiálu, jako jsou například dlouhá dřevěná prkna. Princip těchto modelů by se dal přirovnat ke slepování pruh papíru k sobě, jak je to ukázáno na obrázku 5.4. Problematika těchto modelů ale nebyla dosud důkladně prozkoumána, a proto zde neexistuje algoritmus, pomocí kterého by se daly tyto modely vytvořit.

5.3.2 Válcové strip modely

Jak už název napovídá, jedná se o polodiskrétní plochy, které mají jako všechny své stěny části válcových ploch. Jsou tedy všechny rozvinutelné a jejich povrchové přímky jsou všechny rovnoběžné. Výhodou těchto modelů je jejich nízká cena.

SC-plochy		
Válcové plochy	části povrchů rotačních válců	
Kuželové plochy	části povrchů rotačních kuželů	
Obecné SC-plochy	části povrchů rozvinutelných ploch	
DC-plochy		
Obecné přímkové plochy	generované pohybující se přímkou	
Translační plochy	generované posunem jedné křivky po druhé	
Rotační plochy	generované rotací křivky kolem osy	
Obecné DC-plochy	-	

Kapitola 6

Algoritmus pro diskrétní realizaci ploch volného tvaru

Problém, který nebyl dosud v této práci řešen, je samotná konečná diskrétní realizace ploch volného tvaru. Zde je nutné, kromě geometrických a statických charakteristik, vzít v úvahu i finanční nároky výsledné stavby. S tímto problémem úzce souvisí už samotné dělení plochy na panely, u kterých se stává klíčovým, aby mezi nimi bylo co nejvíce skupin shodných tvarů. Obzvláště je tomu tak u zakřivených panelů, k jejichž výrobě je zapotřebí používat speciální formy, protože výroba těchto forem je sama o sobě dražší než výroba jednotlivých panelů.

V nedávné době byl představen algoritmus, který řeší problematiku rozložení panelů v závislosti nejen na kvalitě aproximace dané plochy, ale také na výsledné ceně stavby, kde je brána v úvahu velikost a počet panelů, možnost znovu využití použitých forem a i geometrická složitost výsledné plochy. Tento algoritmus se zkouší především na rozsáhlých stavbách čítajících tisíce panelů, kde ruční optimalizace je neproveditelná, a zabývají se jím autoři v [11].

Tento algoritmus pracuje s pěti typy panelů: části rovin, paraboloidů, válcových ploch, anuloidů a obecných kubických ploch. Rovinné panely jsou nejsnazší a nejlevnější na výrobu, nicméně nedosahují tak dobrých výsledků při aproximaci. Válcové panely patří do skupiny SC-panelů (analogie k SC-sítím) a je jich využíváno, pokud má referenční plocha jednu z hlavních křivostí malou. Zbývající tři typy se řadí mezi DC-panely. Paraboloidy a anuloidy obsahují skupiny shodných řezů (paraboly a kružnice), což zjednodušuje výrobu forem. Poslední kubické plochy jsou na výrobu finančně nejnáročnější, ale na druhou stranu poskytují nejlepší možnosti aproximace referenční plochy.

Zatímco pokud jde o stěny, jsme v tomto případě omezeni pouze na pět již zmíněných typů panelů, tak na systém křivek, které jsou na rozhraní sousedních panelů, nejsou kladena žádná omezující požadavky na jejich vlastnosti. Tento systém křivek je často součástí původního návrhu a úzce souvisí s budoucím umístěním nosné konstrukce.

Problém by se dal formulovat následovně: *Aproximujte zadanou plochu volného tvaru souborem panelů vhodných typů tak, aby výrobní cena byla minimální při dodržení požadovaných geometrických vlastností.* Při řešení vyvstanou tři skupiny problémů:

- Určení počtu a typů forem, které je nutno vytvořit.
- Nalezení optimální funkce, která určí, jaký panel je vhodné vyrobit pomocí jaké formy
- Výpočet optimálního tvaru pro každý panel a jejich optimální rozmístění tak, aby byla referenční plocha aproximována dle daných požadavků.

První dva body se týkají celkové ceny výroby, a dávají důraz na použití co nejjednodušších panelů a jejich časté opakování. Poslední bod ale řeší celkovou geometrii budovy a snaží se o co nejpřesnější aproximaci zadaného návrhu. To ovšem vede k více složitým tvarům panelů a tím i snižuje možnost jejich opakování. Tento algoritmus hledá takové řešení, které by zohledňovalo všechny aspekty.

Pro samotný algoritmus je důležité, aby se s hranami sítě nepracovalo jako s hranicemi jednotlivých panelů, resp. jako s průniky rovin sousedních panelů, ale jako s lomenými čarami. Tyto lomené čáry reprezentují referenční plochu a samy jsou zadány svými vrcholy. Síť zadaná pomocí lomených čar přináší mnohé výhody:

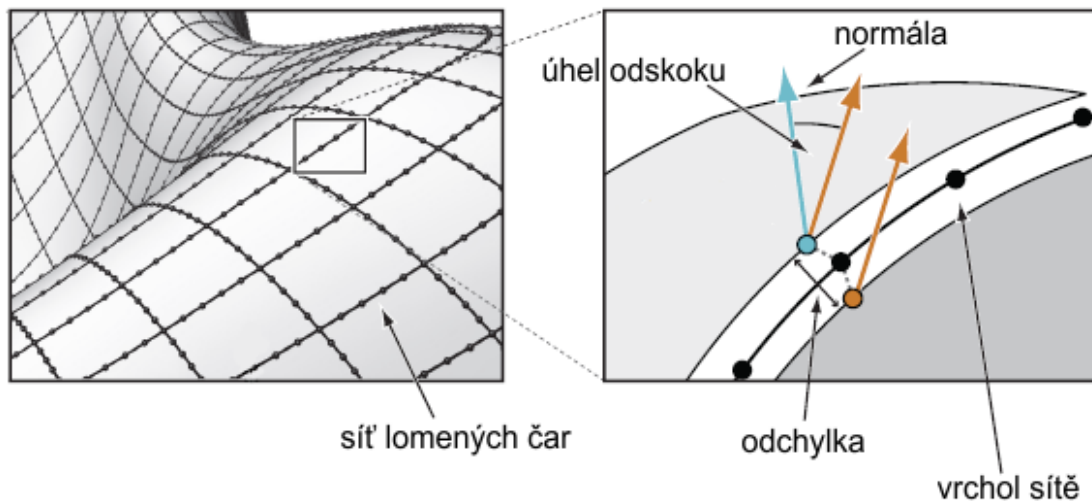
- Výpočet průniku panelů, které v místě, kde na sebe navazují, mají společnou tečnou rovinu, už nadále nepřináší nestabilitu v numerických výpočtech.
- Dochází ke zjednodušení při určování vzájemné návaznosti sousedních panelů.
- Povolení vrcholům lomených čar nebýt přímo na referenční ploše přináší lepší kontrolu nad výsledným tvarem a tím i snížení výsledné ceny.

Tolerance, které chceme při aproximaci dosáhnout, je určena dvěma základními parametry. Jedná se o *odchylku* sousedních panelů (*divergence*) ϵ a tzv. *úhel odskoku* (*kink angle*) δ . Konkrétně v případě odchylky ϵ se jedná o velikost mezery mezi sousedními panely a v případě úhlu odskoku δ o velikost normálového úhlu, který svírají sousední panely. V průběhu algoritmu dochází k minimalizaci těchto dvou veličin, dokud se nedosáhne jejich požadované velikosti.

V průběhu algoritmu dochází ke dvěma typům optimalizací. Jsou to diskrétní a spojitá optimalizace. *Diskrétní optimalizace* řeší problém celkového počtu a typů jednotlivých forem potřebných pro tvorbu výsledných panelů a následně i funkci, která jednotlivé panely přiřazuje k nim odpovídajícím formám. *Spojité optimalizace* se zabývá spojitými proměnnými, kterými jsou parametry určující tvar forem a pozice vrcholů sítě lomených čar.

Algoritmus je iterační, kdy v každém iteračním kroku dojde ke změně tolerance u odchylky ϵ a úhlu odskoku δ . Na začátku si zvolíme tuto toleranci vyšší než je požadovaná a následně ji postupně zmenšujeme, dokud nedojdeme k její požadované velikosti. Autoři [10] na začátku zvolili počáteční hodnoty pro odchylku ϵ' a úhel odskoku δ' :

$$\epsilon' = \epsilon + 10 \text{ mm}, \quad \delta' = \delta + 5^\circ$$



Obrázek 6.1: Znázornění jednotlivých použitých pojmů (viz [11])

V každém iteračním kroku se hodnota ϵ' snížila o 1mm a hodnota δ' o $0,5^\circ$. Iteračních kroků tak proběhlo celkem deset. Algoritmus by se dal zjednodušeně napsat následovně:

Algoritmus 8

VSTUP: Referenční plocha, ϵ , δ

- 1: Inicializace
- 2: Spojitá optimalizace
- 3: **if** $\delta' \neq \delta \wedge \epsilon' \neq \epsilon$ **then**
- 4: Diskrétní optimalizace
- 5: Spojité optimalizace
- 6: Re-inicializace
- 7: Úprava hodnot ϵ' a δ'
- 8: **end if**
- 9: Diskrétní optimalizace

VÝSTUP: Optimální aproximace referenční plochy

V **inicializačním kroku** začneme nejjednodušším pokrytím referenční plochy shodnými rovinnými stěnami. Máme tedy k dispozici pouze jednu rovinnou formu. Následně určíme, ve kterých místech nejsou splněny počáteční podmínky na (ϵ, δ) . Panely, které toto nesplňují, nahradíme nejlevnějšími typy forem, které budou odpovídat hodnotám (ϵ', δ') .

Cílem **spojité optimalizace** je pomocí změny již zmíněných spojitých proměnných co nejvíce minimalizovat odchylku ϵ a úhel odskoku δ . Jedná se vlastně o redukcii odklonu aproximační plochy od plochy referenční.

Odchylka se měří nepřímo jako vzdálenost vrcholů sítě lomených čar od k nim nejbližších bodů povrchů sousedních panelů. Je reprezentována hodnotou vypočtenou následujícím způsobem:

$$E_{div} = \sum_{l=1}^L \|\mathbf{c}_l - \mathbf{x}_{i(l)}\|^2 + \|\mathbf{c}_l - \mathbf{x}_{j(l)}\|^2,$$

kde L je počet vrcholů sítě, \mathbf{c}_l jsou jednotlivé vrcholy sítě a $\mathbf{x}_{i(l)}$ a $\mathbf{x}_{j(l)}$ jsou body na povrchu panelů, jejichž vzdálenost je od vrcholů sítě nejmenší.

Úhly odskoku jsou reprezentovány výrazem

$$E_{kink} = \sum_{l=1}^L \|\mathbf{n}(\mathbf{x}_{i(l)}) - \mathbf{n}(\mathbf{x}_{j(l)})\|^2,$$

kde $\mathbf{n}(\mathbf{x}_{i(l)})$ a $\mathbf{n}(\mathbf{x}_{j(l)})$ jsou normálové vektory v nejbližších bodech povrchu panelů k vrcholům sítě lomených čar.

Minimalizováním hodnoty E_{div} docílíme toho, aby mezi jednotlivými panely nevznikaly příliš velké mezery, a v kombinaci s minimalizováním hodnoty E_{kink} na sebe jednotlivé panely budou navazovat takovým způsobem, že výsledný estetický dojem bude působit spojitě. Obě tyto hodnoty mají i své váhy α_{div} a α_{kink} , jejichž vzájemný vztah je dán následujícím výrazem:

$$\alpha_{kink} = \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^2 \alpha_{div}$$

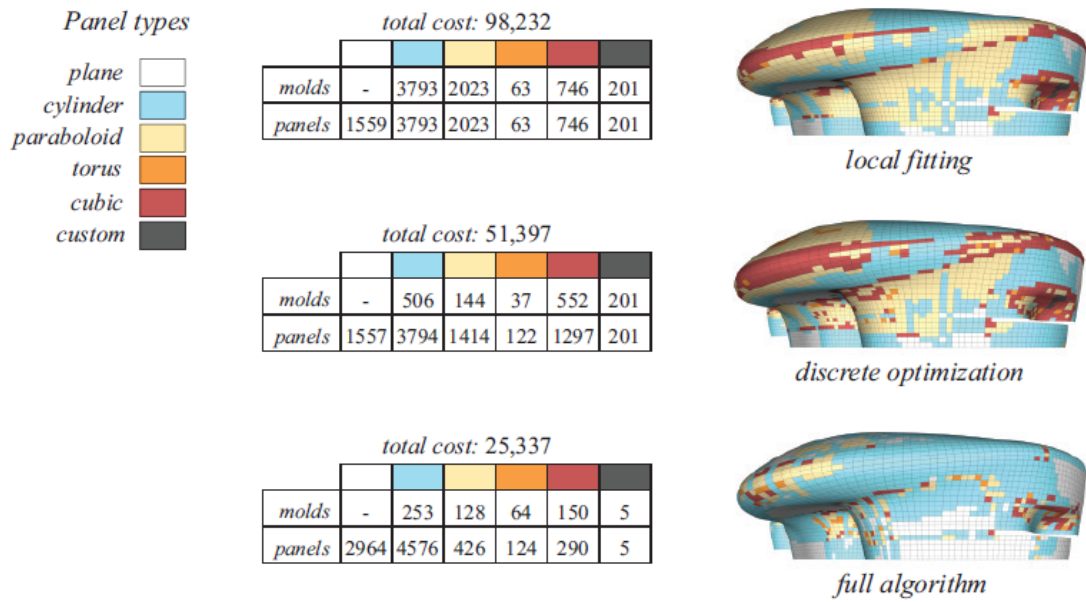
O spojitě optimalizaci je možno více se dočíst v [10]. Zde je možno nalézt více faktorů, které se na ní podílejí.

Diskrétní optimalizace nemění tvar jednotlivých panelů ani samotnou síť lomených čar. Jejím cílem je nalézt všechny použité tvary forem a jejich celkový počet. Současně vytváří funkci, která přiřazuje jednotlivé panely k odpovídajícím formám.

K reprezentaci jednotlivých částí povrchu se zde využívá vrcholů sítě lomených čar a v nich daných normálových vektorů. Tyto normálové vektory vzniknou zprůměrováním normálových vektorů sousedních panelů v nejbližších bodech příslušných bodů sítě.

Během diskrétní optimalizace dochází k tomu, že ze vstupní sady dosud použitých forem hledáme nějakou její podmnožinu tak, aby při zachování odchylky ϵ a úhlu odskoku δ bylo použito méně typů forem. Dochází tedy k redukci velikosti této sady forem. V případě, že by došlo k situaci, kdy by pro nějakou část plochy bylo možno použít více typů panelů se stejným finančním hodnocením, volíme ten, který se nejvíce blíží referenční ploše (ve smyslu nejmenší maximální vzdálenosti od sítě křivek).

Poslední krok diskrétní optimalizace, která během algoritmu proběhne, už dá výslednou sadu všech forem, včetně hledané funkce pro jejich přiřazení k jednotlivým



Obrázek 6.2: Srovnání použitého počtu a typu forem v porovnání s výslednou cenou (převzato z [11])

panelům. Pokud by algoritmus nebyl schopen pro nějakou část plochy nalézt jednu z pěti typů stěn, které používáme, nahradí se tato část vhodným DC-panelem.

Tento algoritmus předem předpokládá, že celá referenční plocha byla hladká. Není proto možné jej použít na plochy, které mají jako svou součást ostré hrany. Kvůli takovýmto omezením dochází k různým rozšířením daného algoritmu. Dalším příkladem modifikace je nepoužívání stejné tolerance na odchylku a úhel odskoku pro celou plochu, ale zmírnění nároků v místech, kde nejsou zapotřebí.

Kapitola 7

Závěr

Primárním cílem mé práce bylo vytvoření celistvého přehledu problematiky diskrétních ploch volného tvaru. Jelikož se jedná o velmi mladou disciplínu v rámci architektonické geometrie, není možné nalézt vhodné materiály v českém jazyce a všechny mnou použité materiály byly v angličtině. Pro českého čtenáře může tato práce sloužit i jako seznámení s danou problematikou.

Jako úvod do architektonické geometrie je zde nastíněna historie tohoto oboru. Přestože geometrií staveb pro jejich možnou realizaci se lidstvo zabývalo již od počátků civilizace, dnešní podoba této disciplíny dosáhla až v nedávných letech, kdy technologie umožnily stavbu budov ze skla a oceli, kterými se architektonická geometrie převážně zabývá.

Při hledání vhodné aproximace hladkých ploch volného tvaru je nutno kromě estetických aspektů, které jsou dány referenční hladkou plochou, jíž se chceme přiblížit, brát v úvahu současně i dostupné technologické možnosti a výslednou cenu dané stavby. Představila jsem zde tři typy sítí. S trojúhelníkovými sítěmi se nejspíše pracuje, nicméně kvůli vysoké valenci je jejich realizace velmi nákladná. Nízkou valenci ve vrcholech a současně i nižší ceny dosahují šestiúhelníkové sítě, ale současně zajištění stěn, aby byly rovinné, je výpočetně tak náročný problém, že velmi často je jejich volba nevhodná. Nejlepším kompromisem pak jsou čtyřúhelníkové sítě. Pro všechny tři typy je zde uveden algoritmus, pomocí kterého je možné danou síť vytvořit. Na přiloženém CD je možné nalézt algoritmy pro realizaci geodetických sfér napsaný v programu Mathematica.

Dále jsem se ve své práci věnovala polodiskrétním plochám, které jsou možným kompromisem mezi hladkými a diskrétními. V praxi jsou využívány pouze jednoduše zakřivené plochy, zatímco dvojnásobně zakřivené plochy jsou využívány jen sporadicky. Z tohoto důvodu jsou zde dvojnásobně zakřivené plochy pouze zmíněny a kapitola věnovaná polodiskrétním sítím je zcela zaměřena na jednoduše zakřivené plochy.

Mým původním záměrem bylo věnovat se také způsobům cenového ohodnocení staveb a optimalizování těchto modelů, nicméně literatura věnovaná tomuto tématu není dostupná. Namísto toho jsem zde představila algoritmus, který vytváří polodiskrétní reprezentace hladkých ploch a zároveň také zohledňuje cenu jednotlivých

panelů a minimalizuje ji. Úskalí tohoto algoritmu spočívá v možnosti použití pouze pěti typů stěn, které je možno opakovat.

V současné době je ve výzkumu pravděpodobně největší pozornost věnována implementování dvojnásobně zakřivených ploch do praxe za přijatelných cenových podmínek. Jejich využíváním by výrazně vzrostla estetická hodnota stavby, ale doposud pouze za cenu vysokých finančních nároků. Dalším současným problémem architektonické geometrie je použití dostupných algoritmů pouze na určité typy sítí a je snaha o jejich zobecnění, aby jejich využití bylo co nejvíce univerzální. V neposlední řadě je i problematika diskrétních offsetů velmi aktuálním problémem, jelikož obecně není zajištěna jejich existence.

Rejstřík¹

archimedovské těleso	Archimedean solid	14
B-spline plocha	B-spline surface	16
Bernsteinův polynom	Bernstein polynomial	16
Bézierova plocha	Bézier surface	15
čtyřúhelníková síť s rovinnými stěnami (PQ-síť)	planar quad mesh (PQ-mesh)	35
D-strip model	developable strip model	53
Delaunayho triangulace	Delaunay triangulation	27
diferenciální geometrie	differential geometry	10
diskrétní optimalizace	discrete optimization	61
duální mnohostěn	dual polyhedra	12
Dupinova indikatrix	Dupin indicatrix	45
Dupinův střed	Dupin center	45
dvojnásobně zakřivené plocha (DC-plocha)	double-curved surface	24
fuleren	fullerene	46
Gaussova křivost	Gauss curvature	17
geodetická kopule	geodesic dome	29
geodetická křivka	geodesic	28
geodetická sféra	geodesic sphere	28
geodetický strip model	geodetic strip model	56
geometrická nosná konstrukce	geometric supporting structure	49
hlavní křivost	principal curvature	17
hrana	edge	11
hranový offset	edge offset	24
hranový úhel	vertex angle	11
jakost křivky	fairness of a curve	54

¹Termíny, které se v anglickém a českém jazyce neliší, nejsou uvedeny.

jednoduše zakřivená plocha (SC-plocha)	single-curved surface	24
Kepler-Poinsotovo těleso	Kepler-Poinsot solid	14
kruhová síť	circular mesh	35
kruhový strip model	circular strip model	55
konkávní	concave	12
konvexní	convex	12
kuželová plocha	conical surface	36
kuželová síť	conical mesh	35
kuželový strip model	conical strip model	55
kvadrika	quadric	17
mnohostěn	polyhedron	11
NURBS plocha	Non uniform rational B-spline surface	17
odchylka (sousedních panelů)	divergence	59
ofset	offset	24
opsaná kulová plocha	circumscribe sphere	12
PS-model	principal strip model	54
paralelní síť	parallel mesh	23
platónské těleso	Platonic solid	14
plocha volného tvaru (diskrétní, hladká)	freeform surface (discrete, smooth)	15
polodiskrétní plocha	semi-discrete surface	24
polopravidelný mnohostěn	semi-regular polyhedra	14
polytopický graf	polytope graph	11
pravidelný mnohostěn	regular polyhedron	14
příčka	beam	25
přímková plocha	ruled surface	53
rotační plocha	rotational surface	57
rovinná stěna	planar face	19
rovinná šestiúhelníková síť (P-Hex síť)	planar hexagonal mesh (P-Hex mesh)	42
rozvinutelná plocha	developable surface	42
řídící síť	control net	15
sférická plocha	spherical surface	8
Schläfliho symbol	Schläfli symbol	14
síť	mesh	19
síť sdružených křivek	conjugate curve network	37
spojitá optimalizace	continuous optimization	60
stěna	face	11

stěnový offset	face offset	24
stěnový úhel	dihedral angle	11
středové promítání	central projection	29
subdivision metoda	subdivision method	37
šestiúhelníková síť	hexagonal mesh	42
tečná rovina	tangent plane	43
translační plocha	translational surface	57
trojúhelníková síť	triangular mesh	36
úhel odskoku	kink angle	59
úhlový defekt	angle defect	17
uzel	nod	25
válcová plocha	cylindric surface	21
válcový strip model	cylindric strip model	56
vrchol	vertex	11
vrcholový offset	vertex offset	24

Literatura

- [1] *2008 avril* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://blog.bmykey.com/2008/04/>>
- [2] Almegaard H., Bagger A., Gravesen J., Jüttler B., Šír Z., *Surfaces with Piecewise Linear Support Functions over Spherical Triangulations*. Proceedings of Mathematics of Surfaces XII, Springer, 2007
- [3] *ARCH470fa08 Course Log* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://0095b6.com/lostritto/arch470fa08/?p=753>>
- [4] Bastl, B. *Aplikace geometrie 2 - Pomocný učební text*. ZČU, 2007, Plzeň.
- [5] Benáková Z. *Fulereny*. Katedra matematiky, ČVUT, Praha.
- [6] Bobenko A. I.; Schröder P.; Sullivan J. M.; Ziegler G. M., *Discrete Differential Geometry*. Bentley Institute Press, 2007. ISBN 978-3-7643-8620-7
- [7] *Bruno Taut's Glass Pavilion* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://www.johncoulthart.com/feuilleton/2011/08/24/bruno-tauts-glass-pavilion/>>
- [8] Ceccato C., Hesselgren L., Pauly M., Pottmann H., Wallner J., *Advances in architectural geometry*, SpringerWienNewYork, 2010. ISBN 976-3-7091-0308-1
- [9] *Encyclopedia Britannica* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/391071/97949/The-Biosphere-Montreal>>
- [10] Eigensatz M., Deuss M., Schiftner A., Kilian M., Miltra N. J., Pottman H., Pauly M., *Case Studies in Cost-Optimized Paneling Architectural Freeform Surfaces*, 2010.
- [11] Eigensatz M., Kilian M., Schiftner A., Mitra N. J., Pottmann H., Pauly M., *Paneling Architectural Freeform Surfaces*, 2010.
- [12] Glymph J., Sheldon D., Ceccato C., Mussel J., Schober H., *A parametric strategy for free-form glass structure usin quadrilateral planar facets*. Elsevier, 2003.
- [13] Farin G., Hoschek J., Kim M.-S., *Handbook Of Computer Aided Geometric Design*. Eselvier, 2002. ISBN 978-0-444-51104-1

- [14] Ježek F., *Diferenciální geometrie - Pomocný učební text*. Plzeň, 2008.
- [15] Ježek F., *Geometrické a počítačové modelování - Pomocný učební text*. Plzeň, 2008.
- [16] Kettner L., *Designing a data structure for polyhedral surfaces*. 1998
- [17] Liu Y., Wang W., *On Vertex Offsets of Polyhedral Surfaces*. Sborník konference Advances in Architectural Geometry 2008.
- [18] *Massimiliano Fuksas - interview with the italian architect* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://www.designboom.com/eng/interview/fuksas.html>>
- [19] Pottmann H., Asperl A., Hofer M., Kilian A., *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press, 2007.
- [20] Pottmann H., Brell-Cokcan S., Wallner J., *Discrete surfaces for architectural design*. Nashboro Press 2007.
- [21] Pottmann H., Kilian A., Hofer M., *Advances in architectural geometry*, 2008. ISBN 978-3-902233-03-5
- [22] Pottmann H., Schiftner A., Wallner J., *Geometry of architectural freeform structures*. Österr. Math. Gesellschaft 2008. ISSN 0020-7926
- [23] Pottmann H., Schiftner A., Bo P., Schmiedhofer H., Wang W., Baldassini N., Wallner J., *Freeform surfaces from single curved panels*, 2008
- [24] Pottman H., Yang L., Wallner J., Bobenko A., Wang W., *Geometry of Multi-layer Freeform Structures for Architecture*, 2007
- [25] Pottman H., Wallner J., *The focal geometry of circular and conical meshes*. Technische Universität Wien, 2006.
- [26] *Rick Edmonson's Unfinished Buildings - Sagrada Familia, Barcelona, Spain* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://unfinishedbuildings.org/sagrada.html>>
- [27] Semotánová Z., *Gaussova křivost a Gaussovo zobrazení* (Bakalářská práce), Plzeň, 2006.
- [28] Schiftner A., Raynaud J., Baldassini N., Bo P., Pottmann H., *Architectural freeform structures from single curved panels*. 2008
- [29] Schmiedhofer H., *Discrete Freeform-Surfaces for Architecture*. diplomová práce. Technische Universität Wien, 2007.
- [30] Schmiedhofer H., Cokcan S. B., Schiftner A., Ziegler R., *Design and panelization of architectural freeform-surfaces by planar quadrilateral meshes*. Advances in architectural geometry, 2008. ISBN 978-3-902233-03-5

- [31] *Sydney Opera House/Entertainment Designer* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://entertainmentdesigner.com/gallery/sydney-opera/>>
- [32] *The Eden Project Cornwall UK by Nicholas Grimshaw* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://www.galinsky.com/buildings/eden/index.htm>>
- [33] *The Opus: Exterior Design* [online], Dostupný na WWW [cit. 20.5.2012] <<http://www.opus-dubai.com/index.php?id=481&L=0>>
- [34] Troche Ch., *Planar Hexagonal Meshes by Tangent Plane Intersection*. Advances in architectural geometry, 2008. ISBN 978-3-902233-03-5
- [35] Vytisková A., *Mnohostěny a diskrétní plochy* (Bakalářská práce), Plzeň, 2009.
- [36] Wang W., Liu Y., *A note on planar hexagonal meshes*.
- [37] Wang W., Liu Y., Yan D., Chan B., Ling R., Sun F., *Hexagonal Meshes with Planar Faces*. 2008